AMS Théorème de Weierstrass

Samy Amara, Guillaume Salloum

Avignon Université
L3 Mathématiques

Plan

Rappels

D'après le cours de *Topologie et Analyse Hilbertienne*, nous avons vu que pour $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subseteq E$ compacte, alors :

- $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ a une structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$.
- $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre si elle est stable pour les opérations définies sur $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.
- En considérant la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$, alors $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est une algèbre de Banach.
- $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ sépare les points de K si pour $x \neq y$ dans K, alors il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Théorème (Stone-Weierstrass, cas réel)

Soit $(E, \|.\|)$, $K \subseteq E$ *compacte et* $A \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ *une sous-algèbre vérifiant :*

1. *A contient les constantes,*
2. *A sépare les points,*
3. $\overline{A} = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$

Alors toute fonction $f : K \to \mathbb{R}$ *est limite d'une suite de* A*.*

Schéma de la preuve.

1. On montre d'abord que $t \mapsto \sqrt{t}$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes de A.
2. Ensuite on prouve que A est clos sous le passage à la valeur absolue, au sup et à l'inf d'une famille de fonctions de A.
3. On procède par interpolation à montrer l'existence d'un "élargissement" : pour $f \in A, \forall x, y \in K, \forall \epsilon > 0, \exists g \in \overline{A}$ telle que $g_x(x) = f(x)$ et $g_x(y) \leq f(y) + \epsilon$.
4. On en déduit que $\forall \epsilon > 0, \exists g \in \overline{A}$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$, ce qui implique que $f \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

□

Preuve du cas complexe

Dans le cas où l'on se place sur $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$:

- Les étapes (1) et (2) restent identiques.
- Si $f \in A$, alors son conjugué $\overline{f} \in A$, ce qui permet de décomposer f en $f = \Re(f) + i\Im(f)$ avec $\Re(f) = \frac{f+\overline{f}}{2} \in A|_{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})}, \Im(f) = \frac{f-\overline{f}}{2i} \in A|_{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})}$ et d'apliquer le cas réel du théorème à $\Re(f)$ et $\Im(f)$.
- Puisque A est clos par addition et multiplication par un scalaire *complexe*, on peut combiner $g = \Re(f) + i\Im(f)$ et avoir g dans A. Ce g approxime bien f uniformément i.e. A est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C}) = \mathcal{C}(K, \mathbb{R}) \oplus i\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$

THEOREM 2. *If X_1 is a compact Hausdorff space, and if X_2 is a space for which the Stone-Weierstrass theorem holds, then the Stone-Weierstrass theorem holds for $X_1 \times X_2$. If $\{X_a \mid a \in A\}$, is a collection of spaces with the property that the Stone-Weierstrass theorem holds for their product $X = \prod \{X_a \mid a \in A\}$, then the Stone-Weierstrass theorem holds for each X_a, $a \in A$.*

Proof. For the first part, assume X_1 and X_2 have the given properties. Let $x = (x_1, x_2)$ and $y = (y_1, y_2)$ be distinct points of $X_1 \times X_2$. Then $x_i \neq y_i$, $i = 1$, or $i = 2$, so there is a function f in $C(X_i)$ such that $f(x_i) \neq f(y_i)$. Hence $f \circ \mathrm{pr}_i$ is in $C(X_1 \times X_2)$ and satisfies $f \circ \mathrm{pr}_i(x) \neq f \circ \mathrm{pr}_i(y)$. Suppose that $\mathscr{C}$ is a completely regular filter on $X_1 \times X_2$. We shall show that $\bigcap \{C \mid C \in \mathscr{C}\} \neq \varnothing$. The filter generated by $\mathrm{pr}_2(\mathscr{C})$ has a base consisting of open sets since pr_2 is an open mapping. Furthermore, it is completely regular, for take an open set $C \in \mathrm{pr}_2(\mathscr{C})$, say $C = \mathrm{pr}_2(B)$, where $B \in \mathscr{C}$. There exists a set $B' \subset B$ in $\mathscr{C}$ and a function g in $C(X_1 \times X_2)$ which maps $X_1 \times X_2$ into $[0, 1]$, is 0 on B', and is 1 on $(X_1 \times X_2) - B$. For each number $t \in (0, 1)$, let U_t be

Puisque $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \oplus i\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \times i\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ sont isomorphes, on peut aussi utiliser le théorème issu de [Ste68] pour démontrer le résultat.

Application directe aux séries de Fourier

Soit $E = \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le cercle unité compact de $\mathbb{R}$, $A = Vect\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. Montrons que A vérifie les hypothèses du théorème :

- A clos par $+, \times, .$ donc est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$
- A contient les constantes ($e^{i.0.x} = 1$)
- $\overline{e^{inx}} = e^{-inx} \in A$ car $n \in \mathbb{Z}$
- Pour $x1, x2 \in \mathbb{T}$ distincts, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $e^{inx1} \neq e^{inx2}$.

On en déduit le théorème de Weierstrass trigonométrique : A est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$.

Preuve constructive à l'aide du noyau de Poisson

Picard démontre dans son *Traité d'Analyse* (1891) le théorème de Weierstrass en utilisant le noyau de Poisson d'après [Pin00, p. 19-22].

Définition (Noyau de Poisson, Intégrale de Poisson)

Soit $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ le disque unité et la sphère unité de $\mathbb{C}$ respectivement. Pour $0 \leq r < 1$, on définit le noyau de Poisson sur $\mathcal{S}$ par :

$$K(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2} = \Re\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$

Soit f continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, f est uniformément continue par le théorème de Heine : pour $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $|x-\theta| < \delta$ on a $|f(x) - f(\theta)| < \epsilon$. L'intégrale de Poisson de f est alors donnée par :

$$P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r,\theta) f(x)\, dx$$

C'est un opérateur intégral défini sur $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, de noyau de Poisson K.

Lemme

Montrons que

$$|P(r,\theta) - f(\theta)| < \epsilon + \frac{\|f\|(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)}$$

Tout d'abord :

$$\begin{aligned} P(r,\theta) - f(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}[f(x)-f(\theta)]\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|x-\theta|<\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}[f(x)-f(\theta)]\,dx \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|x-\theta|\le\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}[f(x)-f(\theta)]\,dx \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{|x-\theta|<\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}[f(x)-f(\theta)]\,dx \\ &< \frac{\epsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,dx = \epsilon \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|x-\theta|\leq\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}[f(x)-f(\theta)]\,dx && (1)\\
&\leq 2\|f\|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|x-\theta|\leq\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,dx && (2)\\
&\leq \frac{\|f\|(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)} && (3)
\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de : pour tout x, θ satisfaisant $\delta \leq |x-\theta| \leq \pi$,

$$1-2r\cos(x-\theta)+r^2 \geq 2r-2r\cos\delta = 2r(1-\cos\delta)$$

Le quotient (3) tend vers 0 lorsque r tend vers 1.
On peut donc choisir un $r_1 < 1$ et en remplaçant dans (3)

$$\frac{\|f\|(1-r_1^2)}{r_1(1-\cos\delta)} < \epsilon$$

Ainsi pour tout δ on a

$$|f(\theta)-P(r_1,\theta)| < 2\epsilon$$

Soit S_f la série de Fourier de f. En particulier la série de Fourier de $P(r,\theta)$ est donnée par :

$$S_{P(r,\theta)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

Puisque a_n et b_n sont uniformément bornées, $S_{P(r,\theta)}$ converge uniformément vers $P(r,\theta)$ pour tout $r < 1$. Il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout θ

$$\left| P(r_1,\theta) - [\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} r_1^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)] \right| < \epsilon$$

Fixons

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} r_1^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Nous avons explicité un polynôme trigonométrique satisfaisant pour tout θ et pour $\epsilon > 0$

$$|f(\theta) - g(\theta)| < 3\epsilon$$

On en déduit la densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ pour $\|.\|_\infty$.

Preuve constructive à l'aide des polynômes de Bernstein

Cette preuve est dûe à Bernstein (1912/1913) d'après [Pin00, p. 42-45].

Définition (Polynôme de Bernstein de f)

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Le polynôme de Bernstein de f est donné par :

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$$

Montrons que B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
Puisque $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, étant donné $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$|x - y| < \delta$$

ce qui implique que pour tout $x, y \in [0,1]$ on a

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Posons

$$\bar{f}(x) = \max\{f(y) \mid y \in [x-\delta, x+\delta] \cap [0,1]\}$$
$$\underline{f}(x) = \min\{f(y) \mid y \in [x-\delta, x+\delta] \cap [0,1]\}$$

Alors on a :

$$0 \leq \bar{f}(x) - f(x) < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } 0 \leq f(x) - \underline{f}(x) < \frac{\epsilon}{2}$$

Pour $\delta > 0$ fixé, en posant :

$$\eta_n(x) = \sum_{\{m \in \mathbb{N} \mid x-(m/n) > \delta\}} \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$$

On décompose $B_n(x)$ en

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{m=0}^{n} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \\ &= \sum_{\{m \in \mathbb{N} \mid x-(m/n) \leq \delta\}} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \\ &+ \sum_{\{m \in \mathbb{N} \mid x-(m/n) > \delta\}} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \end{aligned}$$

D'où on obtient l'inégalité suivante

$$\underline{f}(x)[1-\eta_n(x)] - \|f\|\eta_n(x) \leq B_n(x) \leq \overline{f}(x)[1-\eta_n(x)] + \|f\|\eta_n(x) \tag{4}$$

En utilisant le lemme suivant :

Lemme

Pour f non nulle, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ et pour tout $x \in [0,1]$ on a :

$$\eta_n(x) < \frac{\epsilon}{4\|f\|} \tag{5}$$

En regroupant dans (4) on a

$$f(x) + [\underline{f}(x) - f(x)] - \eta_n(x)[\|f\| + \underline{f}(x)] \leq B_n(x) \leq f(x) + [\overline{f}(x) - f(x)] + \eta_n(x)[\|f\| - \overline{f}(x)]$$

Par conséquent, on obtient

$$f(x) - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{4\|f\|}2\|f\| < B_n(x) < f(x) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4\|f\|}2\|f\|$$

ce qui donne pour tout $x \in [0,1]$

$$|B_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Preuve du lemme

On a :

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} = 1$$

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{m}{n} \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} = x$$

De plus :

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{m^2}{n^2} \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \eta_n(x) &= \sum_{\{m \in \mathbb{N} | x-(m/n) > \delta\}} \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \\ &\leq \sum_{\{m \in \mathbb{N} | x-(m/n) > \delta\}} \left(\frac{x - \frac{m}{n}}{\delta}\right)^2 \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\eta_n(x) &\leq \sum_{\{m\in\mathbb{N} \mid x-(m/n)>\delta\}} \left(\frac{x-\frac{m}{n}}{\delta}\right)^2 \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{m=0}^{n} \left(x-\frac{m}{n}\right)^2 \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \\
&= \frac{1}{\delta^2} \big(x^2 - 2x.x + x^2 + \frac{x(1-x)}{n}\big) \\
&= \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \\
&\leq \frac{1}{4n\delta^2}
\end{aligned}
$$

Pour chaque $\delta > 0$ fixé on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [0,1]$:

$$
\eta_n(x) < \frac{\epsilon}{4\|f\|}
$$

Remarques

Il existe de nombreuses preuves du théorème de Weierstrass comme celle utilisant le théorème de Fejér et la moyenne de Cesàro vue en cours, ou encore celles de de La Vallée Poussin, Landau, Lebesgue ...
Dans [Pin00, p. 60-61] une preuve due à Kuhn (1964) utilise seulement l'inégalité de Bernouilli sans autres résultats sur les séries de Fourier ou sur les intégrales.

Références

[nLaa] nLab authors. *direct sum of Banach spaces*. https://ncatlab.org/nlab/show/direct+sum+of+Banach+spaces.

[nLab] nLab authors. *Stone-Weierstrass theorem*. https://ncatlab.org/nlab/show/Stone-Weierstrass+theorem.

[Pin00] Allan Pinkus. “Weierstrass and Approximation Theory”. In: *Journal of Approximation Theory* 107.1 (2000), pp. 1–66. DOI: 10.1006/jath.2000.3508 (cité pp. 9, 13, 18).

[Ste68] R. M. Stephenson. “Spaces for which the Stone-Weierstrass theorem holds”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 133.2 (1968), pp. 537–546. DOI: 10.2307/1994995 (cité p. 7).