AMS THÉORÈME DE WEIERSTRASS ET VARIATIONS

SAMY AMARA ET GUILLAUME SALLOUM

Résumé. Nous nous intéresserons au théorème d'approximation de Weierstrass et à des variations utiles dans le cadre des séries de Fourier. Dans un premier temps nous présenterons la version complexe du thoérème de Stone-Weierstrass. Ensuite nous reprendrons le cas des séries de Fourier obtenu à l'aide du théorème de Fejer vu en cours. Puis nous développerons un résultat sur les polynômes de Bernstein permettant de fournir une autre preuve constructive du théorème dans le cas réel.

Table des matières

1. Théorème de Stone-Weierstrass

1.1. **Dans les cadre d'un espace topologique séparé.** Dans cette partie nous traiterons le cas général du théorème où nous nous plaçons dans un espace topologique séparé et compact. Pour cela nous développons brièvement quelques notions préliminaires pour énoncer le théorème. Afin de rendre la présentation plus proche du cours de *Topologie et Analyse Hilbertienne*, cette approche n'est développée que dans ce document écrit, pour la présentation orale nous adaptons systématiquement les résultats dans le cadre des espaces vectoriels normés étudiés en cours.

Définition 1.1.1 (Espace séparé)**.** *Soit X un espace topologique. X est dit séparé, ou de Hausdorff s'il respecte l'axiome T_2 : pour tout points x et y dans X, il existe un voisinnage U de x et V de y tels que U et V sont disjoints.*

En particulier tout les espaces vectoriels normés sont issus d'espaces métriques, et sont donc séparés.

Définition 1.1.2 (Algèbre, [**atiyah1969introduction**])**.** *Soit A, B deux anneaux et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Si B est muni d'une structure de A-module, alors B est une A-algèbre.*

Définition 1.1.3 (Sous-algèbre)**.** *Soit B une A-algèbre, et $C \subseteq B$. C est une sous-algèbre de B si $f|_C$ est un morphisme d'anneaux et C possède une structure de A-module. En d'autres termes, C est un sous-module de B vu comme un $A-$module.*

Ici nous nous intéressons à l'algèbre $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$.

1.2. **Dans le cadre d'un espace vectoriel normé.** D'après le cours de *Topologie et Analyse Hilbertienne*, nous avons vu que pour $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subseteq E$ compacte, alors $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ a une structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$. Ensuite, $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre si elle est stable pour les opérations définies sur $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. De plus, en considérant la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$, alors $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est une algèbre de Banach. Enfin, $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ sépare les points de K si pour $x \neq y$ dans K, alors il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Avec ces outils, nous pouvons désormais énoncer le théorème.

Théorème 1.2.1 (Stone-Weierstrass, cas réel)**.** *Soit* $(E, \|.\|)$*,* $K \subseteq E$ *compacte et* $A \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ *une sous-algèbre vérifiant :*

(i) *A contient les constantes,*

(ii) *A sépare les points,*

(iii) $\overline{A} = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$

Alors toute fonction $f : K \to \mathbb{R}$ *est limite d'une suite de* A*.*

La preuve que nous avions donné en cours repose dans les grandes lignes sur les éléments suivants :

Schéma de la preuve.

(i) On montre d'abord que $t \mapsto \sqrt(t)$ est limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de polynômes de A.

(ii) Ensuite on prouve que A est clos sous le passage à la valeur absolue, au sup et à l'inf d'une famille de fonctions de A.

(iii) On procède par interpolation à montrer l'existence d'un "élargissement" : pour $f \in A, \forall x, y \in K, \forall \epsilon > 0, \exists g \in \overline{A}$ telle que $g_x(x) = f(x)$ et $g_x(y) \leq f(y) + \epsilon$.

(iv) On en déduit que $\forall \epsilon > 0, \exists g \in \overline{A}$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$, ce qui implique que $f \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

□

Dans le cas où l'on se place sur $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$, nous devons ajouter quelques hypothèses supplémentaires pour obtenir le résultat :

(1) Les étapes (i) et (ii) restent identiques dans le cas complexe.

(2) Si $f \in A$, alors son conjugué $\overline{f} \in A$, ce qui permet de décomposer $f \in A$ en $f = \Re(f) + i\Im(f)$ pour $\Re(f), \Im(f) \in A|_{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})}$, et d'apliquer le cas réel du théorème à $\Re(f)$ et $\Im(f)$.

(3) Ensuite il faut également que A soit clos par addition et multiplication par un scalaire *complexe*. Ceci permet de combiner $g = \Re(f) + i\Im(f)$ et d'avoir g dans A. Ce g approxime bien f uniformément.

2. Application aux séries de Fourier

Dans cette partie, $E = \mathbb{T} = [0, 2\pi]$ le cercle unité compact de $\mathbb{R}$, $A = Vect(\exp(inx)_{n \in \mathbb{Z}})$

3. Preuve constructive à l'aide des polynômes de Bernstein