

AMS THÉORÈME DE WEIERSTRASS ET VARIATIONS

SAMY AMARA ET GUILLAUME SALLOUM

RÉSUMÉ. Nous nous intéresserons au théorème d'approximation de Weierstrass et à des variations utiles dans le cadre des séries de Fourier. Dans un premier temps nous présenterons la version complexe du théorème de Stone-Weierstrass. Ensuite nous reprendrons le cas des séries de Fourier obtenu à l'aide du théorème de Fejer vu en cours. Puis nous développerons un résultat sur les polynômes de Bernstein permettant de fournir une autre preuve constructive du théorème dans le cas réel.

TABLE DES MATIÈRES

1. Théorème de Stone-Weierstrass dans le cas complexe	1
1.1. Dans le cadre d'un espace topologique séparé	1
1.2. Dans le cadre d'un espace vectoriel normé	2
2. Application aux séries de Fourier	2
3. Preuve constructive à l'aide des polynômes de Bernstein	2
Références	3

1. THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS DANS LE CAS COMPLEXE

1.1. Dans le cadre d'un espace topologique séparé. Dans cette partie nous traiterons le cas général du théorème où nous nous plaçons dans un espace topologique séparé et compact. Pour cela nous développons brièvement quelques notions préliminaires pour énoncer le théorème. Afin de rendre la présentation plus proche du cours de *Topologie et Analyse Hilbertienne*, cette approche n'est développée que dans le présent document écrit, pour la présentation orale nous adaptons systématiquement les résultats dans le cadre des espaces vectoriels normés étudiés en cours.

Définition 1.1.1 (Espace séparé). *Soit X un espace topologique. X est dit séparé, ou de Hausdorff s'il respecte l'axiome T_2 : pour tout points x et y dans X , il existe un voisinage U de x et V de y tels que U et V sont disjoints.*

En particulier tout les espaces vectoriels normés sont issus d'espaces métriques, et sont donc séparés.

Définition 1.1.2 (Algèbre, [1]). *Soit A, B deux anneaux et $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Si B est muni d'une structure de A -module, alors B est une A -algèbre.*

Définition 1.1.3 (Sous-algèbre). *Soit B une A -algèbre, et $C \subseteq B$. C est une sous-algèbre de B si $f|_C$ est un morphisme d'anneaux et C possède une structure de A -module. En d'autres termes, C est un sous-module de B vu comme un A -module.*

Ici nous nous intéressons à l'algèbre $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ des fonctions continues de X dans \mathbb{C} .

1.2. Dans le cadre d'un espace vectoriel normé. D'après le cours de *Topologie et Analyse Hilbertienne*, nous avons vu que pour $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subseteq E$ compacte, alors $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de K dans \mathbb{R} a une structure d'algèbre sur \mathbb{R} . Ensuite, $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre si elle est stable pour les opérations définies sur $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. De plus, en considérant la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$, alors $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est une algèbre de Banach. Enfin, on dit que $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ sépare les points de K si pour $x \neq y$ dans K , alors il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Avec ces outils, nous pouvons désormais énoncer le théorème.

Théorème 1.2.1 (Stone-Weierstrass sur \mathbb{R}). *Soit $(E, \|\cdot\|)$, $K \subseteq E$ compacte et $A \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ une sous-algèbre vérifiant :*

- (i) *A contient les constantes,*
- (ii) *A sépare les points,*
- (iii) $\overline{A} = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$

Alors toute fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ est limite d'une suite de A .

Dans le cas où l'on se place sur \mathbb{C} ,

2. APPLICATION AUX SÉRIES DE FOURIER

3. PREUVE CONSTRUCTIVE À L'AIDE DES POLYNÔMES DE BERNSTEIN

RÉFÉRENCES

- [1] Michael Francis ATIYAH et Ian Grant MACDONALD. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, 1969. ISBN : 0-201-40751-5.