

# AMS Théorème de Weierstrass

Samy Amara, Guillaume Salloum

Avignon Université  
L3 Mathématiques

# Plan

- 1 Théorème de Stone-Weierstrass
  - Rappels
  - Application directe aux séries de Fourier
- 2 Preuve constructive à l'aide du noyau de Poisson
- 3 Preuve constructive à l'aide des polynômes de Bernstein

# Rappels

D'après le cours de *Topologie et Analyse Hilbertienne*, nous avons vu que pour  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $K \subseteq E$  compacte, alors :

- $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions continues de  $K$  dans  $\mathbb{R}$  a une structure d'algèbre sur  $\mathbb{R}$ .
- $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  est une sous-algèbre si elle est stable pour les opérations définies sur  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ .
- En considérant la norme de la convergence uniforme sur  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  définie par  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$ , alors  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  est une algèbre de Banach.
- $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  sépare les points de  $K$  si pour  $x \neq y$  dans  $K$ , alors il existe une fonction  $f \in A$  telle que  $f(x) \neq f(y)$ .

## Théorème (Stone-Weierstrass, cas réel)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$ ,  $K \subseteq E$  compacte et  $A \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  une sous-algèbre vérifiant :

- ①  $A$  contient les constantes,
- ②  $A$  sépare les points,
- ③  $\overline{A} = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$

Alors toute fonction  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  est limite d'une suite de  $A$ .

## Schéma de la preuve.

- 1 On montre d'abord que  $t \mapsto \sqrt{t}$  est limite uniforme sur  $[0, 1]$  d'une suite de polynômes de  $A$ .
- 2 Ensuite on prouve que  $A$  est clos sous le passage à la valeur absolue, au sup et à l'inf d'une famille de fonctions de  $A$ .
- 3 On procède par interpolation à montrer l'existence d'un "élargissement" : pour  $f \in A, \forall x, y \in K, \forall \epsilon > 0, \exists g \in \bar{A}$  telle que  $g_x(x) = f(x)$  et  $g_x(y) \leq f(y) + \epsilon$ .
- 4 On en déduit que  $\forall \epsilon > 0, \exists g \in \bar{A}$  telle que  $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$ , ce qui implique que  $f \in \overline{\bar{A}} = \bar{A}$ .



# Preuve du cas complexe

Dans le cas où l'on se place sur  $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$  :

- Les étapes (1) et (2) restent identiques.
- Si  $f \in A$ , alors son conjugué  $\bar{f} \in A$ , ce qui permet de décomposer  $f$  en  $f = \Re(f) + i\Im(f)$  avec  $\Re(f) = \frac{f+\bar{f}}{2} \in A|_{\mathcal{C}(K, \mathbb{R})}$ ,  $\Im(f) = \frac{f-\bar{f}}{2i} \in A|_{\mathcal{C}(K, \mathbb{R})}$  et d'appliquer le cas réel du théorème à  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$ .
- Puisque  $A$  est clos par addition et multiplication par un scalaire *complexe*, on peut combiner  $g = \Re(f) + i\Im(f)$  et avoir  $g$  dans  $A$ . Ce  $g$  approxime bien  $f$  uniformément i.e.  $A$  est dense dans  $\mathcal{C}(K, \mathbb{C}) = \mathcal{C}(K, \mathbb{R}) \oplus i\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  (cas particulier de [Ste68])

**THEOREM 2.** *If  $X_1$  is a compact Hausdorff space, and if  $X_2$  is a space for which the Stone-Weierstrass theorem holds, then the Stone-Weierstrass theorem holds for  $X_1 \times X_2$ . If  $\{X_a \mid a \in A\}$ , is a collection of spaces with the property that the Stone-Weierstrass theorem holds for their product  $X = \prod \{X_a \mid a \in A\}$ , then the Stone-Weierstrass theorem holds for each  $X_a, a \in A$ .*

**Proof.** For the first part, assume  $X_1$  and  $X_2$  have the given properties. Let  $x = (x_1, x_2)$  and  $y = (y_1, y_2)$  be distinct points of  $X_1 \times X_2$ . Then  $x_i \neq y_i, i = 1, \text{ or } i = 2$ , so there is a function  $f$  in  $C(X_i)$  such that  $f(x_i) \neq f(y_i)$ . Hence  $f \circ \text{pr}_i$  is in  $C(X_1 \times X_2)$  and satisfies  $f \circ \text{pr}_i(x) \neq f \circ \text{pr}_i(y)$ . Suppose that  $\mathcal{C}$  is a completely regular filter on  $X_1 \times X_2$ . We shall show that  $\bigcap \{C \mid C \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset$ . The filter generated by  $\text{pr}_2(\mathcal{C})$  has a base consisting of open sets since  $\text{pr}_2$  is an open mapping. Furthermore, it is completely regular, for take an open set  $C \in \text{pr}_2(\mathcal{C})$ , say  $C = \text{pr}_2(B)$ , where  $B \in \mathcal{C}$ . There exists a set  $B' \subset B$  in  $\mathcal{C}$  and a function  $g$  in  $C(X_1 \times X_2)$  which maps  $X_1 \times X_2$  into  $[0, 1]$ , is 0 on  $B'$ , and is 1 on  $(X_1 \times X_2) - B$ . For each number  $t \in (0, 1)$ , let  $U_t$  be

---

Puisque  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \oplus i\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \cong \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \times i\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ , on peut aussi utiliser le théorème ci-dessus pour démontrer le résultat.

# Application directe aux séries de Fourier

Soit  $E = \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}$  le cercle unité compact de  $\mathbb{R}$ ,  $A = \text{Vect}(\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}})$  est une base orthonormale de  $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ . Montrons que  $A$  vérifie les hypothèses du théorème :

- $A$  clos par  $+$ ,  $\times$ ,  $.$  donc est une sous-algèbre de  $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$
- $A$  contient les constantes ( $e^{i \cdot 0 \cdot x} = 1$ )
- $\overline{e^{inx}} = e^{-inx} \in A$  car  $n \in \mathbb{Z}$
- Pour  $x_1, x_2 \in \mathbb{T}$  distincts, il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $e^{inx_1} \neq e^{inx_2}$ .

On en déduit le théorème de Weierstrass trigonométrique :  $A$  est dense dans  $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ .



# Preuve constructive à l'aide du noyau de Poisson

Picard démontre dans son *Traité d'Analyse* (1891) le théorème de Weierstrass en utilisant le noyau de Poisson d'après [Pin00, p. 19-22].

## Définition (Noyau de Poisson, Intégrale de Poisson)

Soit  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{S}$  le disque unité et la sphère unité de  $\mathbb{C}$  respectivement. Pour  $0 \leq r < 1$ , on définit le noyau de Poisson sur  $\mathcal{S}$  par :

$$K(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(x - \theta) + r^2} = \Re\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right)$$

Soit  $f$  continue et  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est uniformément continue par le théorème de Heine : pour  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour  $|x - \theta| < \delta$  on a  $|f(x) - f(\theta)| < \epsilon$ . L'intégrale de Poisson de  $f$  est alors donnée par :

$$P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r, \theta) f(x) dx$$

C'est un opérateur intégral défini sur  $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ , de noyau de Poisson  $K$ .

## Lemme

Montrons que

$$|P(r, \theta) - f(\theta)| < \epsilon + \frac{\|f\|(1 - r^2)}{r(1 - \cos \delta)}$$

Tout d'abord :

$$\begin{aligned} P(r, \theta) - f(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(x - \theta) + r^2} [f(x) - f(\theta)] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|x - \theta| < \delta} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(x - \theta) + r^2} [f(x) - f(\theta)] dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |x - \theta| \leq \pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(x - \theta) + r^2} [f(x) - f(\theta)] dx \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{|x - \theta| < \delta} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(x - \theta) + r^2} [f(x) - f(\theta)] dx \\ &< \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(x - \theta) + r^2} dx = \epsilon \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |x-\theta| \leq \pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x-\theta) + r^2} [f(x) - f(\theta)] dx \quad (1)$$

$$\leq 2\|f\| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |x-\theta| \leq \pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x-\theta) + r^2} dx \quad (2)$$

$$\leq \frac{\|f\|(1-r^2)}{r(1-\cos \delta)} \quad (3)$$

La dernière inégalité vient de : pour tout  $x, \theta$  satisfaisant  $\delta \leq |x - \theta| \leq \pi$ ,

$$1 - 2r \cos(x - \theta) + r^2 \geq 2r - 2r \cos \delta = 2r(1 - \cos \delta)$$

Le quotient (3) tend vers 0 lorsque  $r$  tend vers 1.

On peut donc choisir un  $r_1 < 1$  et en remplaçant dans (3)

$$\frac{\|f\|(1-r_1^2)}{r_1(1-\cos \delta)} < \epsilon$$

Ainsi pour tout  $\delta$  on a

$$|f(\theta) - P(r_1, \theta)| < 2\epsilon$$

Soit  $S_f$  la série de Fourier de  $f$ . En particulier la série de Fourier de  $P(r, \theta)$  est donnée par :

$$S_{P(r, \theta)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

Puisque  $a_n$  et  $b_n$  sont uniformément bornées,  $S_{P(r, \theta)}$  converge uniformément vers  $P(r, \theta)$  pour tout  $r < 1$ . Il existe alors  $m \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $\theta$

$$\left| P(r_1, \theta) - \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m r_1^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \right| < \epsilon$$

Fixons

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m r_1^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Nous avons explicité un polynôme trigonométrique satisfaisant pour tout  $\theta$  et pour  $\epsilon > 0$

$$|f(\theta) - g(\theta)| < 3\epsilon$$

On en déduit la densité des polynômes trigonométriques dans  $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$  pour  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

# Preuve constructive à l'aide des polynômes de Bernstein

Cette preuve est due à Bernstein (1912/1913) d'après [Pin00, p. 42-45].

## Définition (Polynôme de Bernstein de $f$ )

Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Le polynôme de Bernstein de  $f$  est donné par :

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^n f\left(\frac{m}{n}\right) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$$

Montrons que  $B_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

Puisque  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , étant donné  $\epsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que :

$$|x - y| < \delta$$

ce qui implique que pour tout  $x, y \in [0, 1]$  on a

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Posons

$$\bar{f}(x) = \max\{f(y) \mid y \in [x - \delta, x + \delta] \cap [0, 1]\}$$

$$\underline{f}(x) = \min\{f(y) \mid y \in [x - \delta, x + \delta] \cap [0, 1]\}$$

Alors on a :

$$0 \leq \bar{f}(x) - f(x) < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } 0 \leq f(x) - \underline{f}(x) < \frac{\epsilon}{2}$$

Pour  $\delta > 0$  fixé, en posant :

$$\eta_n(x) = \sum_{\{m \in \mathbb{N} \mid x - (m/n) \leq \delta\}} f\left(\frac{m}{n}\right) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$$

On décompose  $B_n(x)$  en

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{m=0}^n f\left(\frac{m}{n}\right) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \\ &= \sum_{\{m \in \mathbb{N} \mid x - (m/n) \leq \delta\}} f\left(\frac{m}{n}\right) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \\ &\quad + \sum_{\{m \in \mathbb{N} \mid x - (m/n) > \delta\}} f\left(\frac{m}{n}\right) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \end{aligned}$$

D'où on obtient l'inégalité suivante

$$\underline{f}(x)[1 - \eta_n(x)] - \|f\|\eta_n(x) \leq B_n(x) \leq \bar{f}(x)[1 - \eta_n(x)] + \|f\|\eta_n(x) \quad (4)$$

D'après un résultat dû à Bernoulli que l'on admet (preuve dans [Pin00]) :

### Lemme

*Pour  $f$  non nulle, il existe un  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n > N$  et pour tout  $x \in [0, 1]$  on a :*

$$\eta_n(x) < \frac{\epsilon}{4\|f\|} \quad (5)$$

En ajoutant  $\underline{f}(x) - f(x)$  et en regroupant dans (4) on a

$$f(x) + [\underline{f}(x) - f(x)] - \eta_n(x)[\|f\| + \underline{f}(x)] \leq B_n(x) \leq f(x) + [\bar{f}(x) - f(x)] + \eta_n(x)[\|f\| - \bar{f}(x)]$$

Par conséquent, on obtient

$$f(x) - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{4\|f\|}2\|f\| < B_n(x) < f(x) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4\|f\|}2\|f\|$$

ce qui donne pour tout  $x \in [0, 1]$

$$|B_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

# Références

- [nLa24] nLab authors. *direct sum of Banach spaces*.  
<https://ncatlab.org/nlab/show/direct+sum+of+Banach+spaces>.  
Revision 8. Dec. 2024.
- [Pin00] Allan Pinkus. “Weierstrass and Approximation Theory”. In: *Journal of Approximation Theory* 107.1 (2000), pp. 1–66. DOI: 10.1006/jath.2000.3508 (cité pp. 9, 13, 15).
- [Ste68] R. M. Stephenson. “Spaces for which the Stone-Weierstrass theorem holds”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 133.2 (1968), pp. 537–546. DOI: 10.2307/1994995 (cité p. 6).