AMS Théorème de Weierstrass

Samy Amara, Guillaume Salloum

Avignon Université

L3 Mathématiques

Plan

Rappels

D'après le cours de *Topologie et Analyse Hilbertienne*, nous avons vu que pour $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subseteq E$ compacte, alors :

- $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ a une structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$.
- $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre si elle est stable pour les opérations définies sur $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.
- En considérant la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$, alors $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est une algèbre de Banach.
- $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ sépare les points de K si pour $x \neq y$ dans K, alors il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Théorème (Stone-Weierstrass, cas réel)

Soit $(E, \|.\|)$*,* $K \subseteq E$ *compacte et* $A \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ *une sous-algèbre vérifiant :*

1. A *contient les constantes,*
2. A *sépare les points,*
3. $\overline{A} = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$

Alors toute fonction $f : K \to \mathbb{R}$ *est limite d'une suite de* A*.*

Schéma de la preuve.

1. On montre d'abord que $t \mapsto \sqrt(t)$ est limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de polynômes de A.
2. Ensuite on prouve que A est clos sous le passage à la valeur absolue, au sup et à l'inf d'une famille de fonctions de A.
3. On procède par interpolation à montrer l'existence d'un "élargissement" : pour $f \in A, \forall x, y \in K, \forall \epsilon > 0, \exists g \in \overline{A}$ telle que $g_x(x) = f(x)$ et $g_x(y) \leq f(y) + \epsilon$.
4. On en déduit que $\forall \epsilon > 0, \exists g \in \overline{A}$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$, ce qui implique que $f \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

$\square$

Preuve du cas complexe

Dans le cas où l'on se place sur $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$:

- Les étapes (1) et (2) restent identiques.
- Si $f \in A$, alors son conjugué $\bar{f} \in A$, ce qui permet de décomposer f en $f = \Re(f) + i\Im(f)$ avec $\Re(f) = \frac{f+\bar{f}}{2} \in A|_{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})}, \Im(f) = \frac{f-\bar{f}}{2i} \in A|_{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})}$ et d'apliquer le cas réel du théorème à $\Re(f)$ et $\Im(f)$.
- Puisque A est clos par addition et multiplication par un scalaire *complexe*, on peut combiner $g = \Re(f) + i\Im(f)$ et avoir g dans A. Ce g approxime bien f uniformément
  i.e. A est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C}) = \mathcal{C}(K, \mathbb{R}) + i\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ (voir [Ste68])

Application directe aux séries de Fourier

Soit $E = \mathbb{T} = [0, 2\pi]$ le cercle unité compact de $\mathbb{R}$, $A = Vect(\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}})$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. Montrons que A vérifie les hypothèses du théorème :

- A clos par $+, \times, .$ donc est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$
- A contient les constantes ($e^{i.0.x} = 1$)
- $\overline{e^{inx}} = e^{-inx} \in A$ car $n \in \mathbb{Z}$
- Pour $x1, x2 \in A$ distincts, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $e^{inx1} \neq e^{inx2}$.

On en déduit le théorème de Weierstrass trigonométrique : A est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$.

Preuve constructive à l'aide du noyau de Poisson

Picard démontre dans son *Traité d'Analyse* (1891) le théorème de Weierstrass en utilisant le noyau de Poisson d'après [Pin00].

Définition (Noyau de Poisson, Intégrale de Poisson)

Soit $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ le disque unité et la sphère unité de $\mathbb{C}$ respectivement. Pour $0 \leq r \leq 1$, on définit le noyau de Poisson sur $\mathcal{S}$ par :

$$K(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2} = \Re\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$

Soit f continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, f est uniformément continue par le théorème de Heine : pour $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $|x-\theta| < \delta$ on a $|f(x) - f(\theta)| < \epsilon$. L'intégrale de Poisson de f est alors donnée par :

$$P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r,\theta) f(x)\, dx$$

C'est un opérateur intégral défini sur $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, de noyau de Poisson K.

We claim that, with the above notation,

$$|P(r,\theta)-f(\theta)|<\varepsilon+\frac{\|f\|(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)}$$

for all θ. This may be explicitly proven as follows.

$$P(r,\theta)-f(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}[f(x)-f(\theta)]\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|x-\theta|<\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}[f(x)-f(\theta)]\,dx$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|x-\theta|\le\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}[f(x)-f(\theta)]\,dx\,.$$

Now

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|x-\theta|<\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}|f(x)-f(\theta)|dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,dx=\varepsilon\,.$$

In addition

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|x-\theta|\le\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}|f(x)-f(\theta)|\,dx$$

$$\le 2\|f\|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|x-\theta|\le\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,dx\le\frac{\|f\|(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)}.$$

This last inequality is a consequence of

$$1-2r\cos(x-\theta)+r^2\ge 2r-2r\cos\delta=2r(1-\cos\delta)$$

which holds for all x,θ satisfying $\delta\le|x-\theta|\le\pi$.

As a function of r,

$$\frac{\|f\|(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)}$$

decreases to zero as r increases to 1. Choose some $r_1<1$ for which

$$\frac{\|f\|(1-r_1^2)}{r_1(1-\cos\delta)}<\varepsilon\,.$$

Thus

$$|f(\theta)-P(r_1,\theta)|<2\varepsilon$$

for all θ.

Soit S_f la série de Fourier de f. En particulier la série de Fourier de $P(r, \theta)$ est donnée par :

$$S_{P(r,\theta)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

Puisque a_n et b_n sont uniformément bornées, $S_{P(r,\theta)}$ converge uniformément vers $P(r, \theta)$ pour tout $r \leq 1$. Il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout θ

$$\left| P(r_1, \theta) - [\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} r_1^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)] \right| < \epsilon$$

Fixons

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} r_1^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Nous avons explicité un polynôme trigonométrique satisfaisant pour tout θ et pour $\epsilon > 0$

$$|f(\theta) - g(\theta)| < 3\epsilon$$

On en déduit la densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ pour $\|.\|_\infty$.

Preuve constructive à l'aide des polynômes de Bernstein

Cette preuve est dûe à Bernstein (1912/1913) d'après [Pin00].

Définition (Polynôme de Bernstein de f)

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Le polynôme de Bernstein de f est donné par :

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$$

Montrons que B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
Puisque $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, étant donné $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$|x - y| < \delta$$

ce qui implique que pour tout $x, y \in [0,1]$ on a

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Posons

$$\bar{f}(x) = \max\{f(y) \mid y \in [x-\delta, x+\delta] \cap [0,1]\}$$
$$\underline{f}(x) = \min\{f(y) \mid y \in [x-\delta, x+\delta] \cap [0,1]\}$$

Alors on a :

$$0 \leq \bar{f}(x) - f(x) < \frac{\epsilon}{2}$$
$$0 \leq f(x) - \underline{f}(x) < \frac{\epsilon}{2}$$

Pour $\delta > 0$ fixé, en posant :

$$\eta_n(x) = \sum_{\{m \in \mathbb{N} \mid x-(m/n) \leq \delta\}} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$$

On décompose $B_n(x)$ en

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$$
$$= \sum_{\{m \in \mathbb{N} \mid x-(m/n) \leq \delta\}} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$$
$$+ \sum_{\{m \in \mathbb{N} \mid x-(m/n) > \delta\}} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$$

D'où

$$\underline{f}(x)[1-\eta_n(x)] - \|f\|\eta_n(x) \leq B_n(x) \leq \overline{f}(x)[1-\eta_n(x)] + \|f\|\eta_n(x) \tag{1}$$

D'après un résultat dû à Bernouilli que l'on admet (voir preuve dans [Pin00]), il existe un N tel que pour tout $n > N$ et pour tout $x \in [0,1]$ on a :

$$\eta_n(x) < \frac{\epsilon}{4\|f\|} \tag{2}$$

Par conséquent, en ajoutant $f(x) - f(x)$ et en regroupant dans (1) on a

$$f(x) - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{4\|f\|}2\|f\| < B_n(x) < f(x) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4\|f\|}2\|f\|$$

ce qui donne pour tout $x \in [0,1]$

$$|B_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Références

[Pin00] Allan Pinkus. "Weierstrass and Approximation Theory". In: *Journal of Approximation Theory* 107.1 (2000), pp. 1–66. DOI: `10.1006/jath.2000.3508`.

[Ste68] R. M. Stephenson. "Spaces for which the Stone-Weierstrass theorem holds". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 133.2 (1968), pp. 537–546. DOI: `https://doi.org/10.2307/1994995`.