AMS Théorème de Weierstrass

Samy Amara, Guillaume Salloum

Avignon Université
L3 Mathématiques

Plan

Rappels

D'après le cours de *Topologie et Analyse Hilbertienne*, nous avons vu que pour $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subseteq E$ compacte, alors :

- $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ a une structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$.
- $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre si elle est stable pour les opérations définies sur $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.
- En considérant la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$, alors $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est une algèbre de Banach.
- $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ sépare les points de K si pour $x \neq y$ dans K, alors il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Théorème (Stone-Weierstrass, cas réel)

Soit $(E, \|.\|)$, $K \subseteq E$ *compacte et* $A \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ *une sous-algèbre vérifiant :*

1. *A contient les constantes,*
2. *A sépare les points,*
3. $\overline{A} = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$

Alors toute fonction $f : K \to \mathbb{R}$ *est limite d'une suite de* A.

Schéma de la preuve.

1. On montre d'abord que $t \mapsto \sqrt(t)$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes de A.
2. Ensuite on prouve que A est clos sous le passage à la valeur absolue, au sup et à l'inf d'une famille de fonctions de A.
3. On procède par interpolation à montrer l'existence d'un "élargissement" : pour $f \in A, \forall x, y \in K, \forall \epsilon > 0, \exists g \in \overline{A}$ telle que $g_x(x) = f(x)$ et $g_x(y) \leq f(y) + \epsilon$.
4. On en déduit que $\forall \epsilon > 0, \exists g \in \overline{A}$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$, ce qui implique que $f \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

□

Preuve du cas complexe

Dans le cas où l'on se place sur $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$:

- Les étapes (1) et (2) restent identiques.
- Si $f \in A$, alors son conjugué $\bar{f} \in A$, ce qui permet de décomposer f en $f = \Re(f) + i\Im(f)$ avec $\Re(f) = \frac{f+\bar{f}}{2} \in A|_{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})}, \Im(f) = \frac{f-\bar{f}}{2i} \in A|_{\mathcal{C}(K,\mathbb{R})}$ et d'apliquer le cas réel du théorème à $\Re(f)$ et $\Im(f)$.
- Puisque A est clos par addition et multiplication par un scalaire *complexe*, on peut combiner $g = \Re(f) + i\Im(f)$ et avoir g dans A. Ce g approxime bien f uniformément i.e. A est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C}) = \mathcal{C}(K, \mathbb{R}) + i\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ (cas particulier de [Ste68])

Application directe aux séries de Fourier

Soit $E = \mathbb{T} = [0, 2\pi]$ le cercle unité compact de $\mathbb{R}$, $A = Vect(\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}})$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. Montrons que A vérifie les hypothèses du théorème :

- A clos par $+, \times, .$ donc est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$
- A contient les constantes ($e^{i.0.x} = 1$)
- $\overline{e^{inx}} = e^{-inx} \in A$ car $n \in \mathbb{Z}$
- Pour $x1, x2 \in A$ distincts, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $e^{inx1} \neq e^{inx2}$.

On en déduit le théorème de Weierstrass trigonométrique : A est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$.

Preuve constructive à l'aide du noyau de Poisson

Picard démontre dans son *Traité d'Analyse* (1891) le théorème de Weierstrass en utilisant le noyau de Poisson d'après [Pin00, p. 19-22].

Définition (Noyau de Poisson, Intégrale de Poisson)

Soit $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ le disque unité et la sphère unité de $\mathbb{C}$ respectivement. Pour $0 \leq r \leq 1$, on définit le noyau de Poisson sur $\mathcal{S}$ par :

$$K(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2} = \Re\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$

Soit f continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, f est uniformément continue par le théorème de Heine : pour $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $|x-\theta| < \delta$ on a $|f(x) - f(\theta)| < \epsilon$. L'intégrale de Poisson de f est alors donnée par :

$$P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r,\theta) f(x)\, dx$$

C'est un opérateur intégral défini sur $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, de noyau de Poisson K.

Lemme

Montrons que

$$|P(r,\theta) - f(\theta)| < \epsilon + \frac{\|f\|(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)}$$

Tout d'abord :

$$\begin{aligned} P(r,\theta) - f(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}[f(x)-f(\theta)]\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|x-\theta|<\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}[f(x)-f(\theta)]\,dx \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|x-\theta|\le\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}[f(x)-f(\theta)]\,dx \end{aligned}$$

De plus :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|x-\theta|<\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}[f(x)-f(\theta)]\,dx$$

$$< \frac{\epsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,dx = \epsilon$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|x-\theta|\leq\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}[f(x)-f(\theta)]\,dx && (1)\\
&\leq 2\|f\|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|x-\theta|\leq\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,dx && (2)\\
&\leq \frac{\|f\|(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)} && (3)
\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de : pour tout x, θ satisfaisant $\delta \leq |x-\theta| \leq \pi$,

$$1-2r\cos(x-\theta)+r^2 \geq 2r-2r\cos\delta = 2r(1-\cos\delta)$$

Le quotient (3) tend vers 0 lorsque r tend vers 1.
On peut donc choisir un $r_1 < 1$ et en remplaçant dans (3)

$$\frac{\|f\|(1-r_1^2)}{r_1(1-\cos\delta)} < \epsilon$$

Ainsi pour tout δ on a

$$|f(\theta)-P(r_1,\theta)| < 2\epsilon$$

Soit S_f la série de Fourier de f. En particulier la série de Fourier de $P(r, \theta)$ est donnée par :

$$S_{P(r,\theta)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

Puisque a_n et b_n sont uniformément bornées, $S_{P(r,\theta)}$ converge uniformément vers $P(r, \theta)$ pour tout $r \leq 1$. Il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout θ

$$\left| P(r_1, \theta) - [\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} r_1^n(a_n \cos nx + b_n \sin nx)] \right| < \epsilon$$

Fixons

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} r_1^n(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Nous avons explicité un polynôme trigonométrique satisfaisant pour tout θ et pour $\epsilon > 0$

$$|f(\theta) - g(\theta)| < 3\epsilon$$

On en déduit la densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ pour $\|.\|_\infty$.

Preuve constructive à l'aide des polynômes de Bernstein

Cette preuve est dûe à Bernstein (1912/1913) d'après [Pin00, p. 42-45].

Définition (Polynôme de Bernstein de f)

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Le polynôme de Bernstein de f est donné par :

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f(\frac{m}{n})\binom{n}{m}x^m(1-x)^{n-m}$$

Montrons que B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
Puisque $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, étant donné $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$|x-y| < \delta$$

ce qui implique que pour tout $x, y \in [0,1]$ on a

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Posons

$$\overline{f}(x) = \max\{f(y) \mid y \in [x-\delta, x+\delta] \cap [0,1]\}$$
$$\underline{f}(x) = \min\{f(y) \mid y \in [x-\delta, x+\delta] \cap [0,1]\}$$

Alors on a :

$$0 \leq \overline{f}(x) - f(x) < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } 0 \leq f(x) - \underline{f}(x) < \frac{\epsilon}{2}$$

Pour $\delta > 0$ fixé, en posant :

$$\eta_n(x) = \sum_{\{m \in \mathbb{N} | x-(m/n) \leq \delta\}} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$$

On décompose $B_n(x)$ en

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{m=0}^{n} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \\ &= \sum_{\{m \in \mathbb{N} | x-(m/n) \leq \delta\}} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \\ &+ \sum_{\{m \in \mathbb{N} | x-(m/n) > \delta\}} f(\frac{m}{n}) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \end{aligned}$$

D'où on obtient l'inégalité suivante

$$\underline{f}(x)[1-\eta_n(x)] - \|f\|\eta_n(x) \leq B_n(x) \leq \overline{f}(x)[1-\eta_n(x)] + \|f\|\eta_n(x) \tag{4}$$

D'après un résultat dû à Bernouilli que l'on admet (preuve dans [Pin00]) :

Lemme

Il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ et pour tout $x \in [0,1]$ on a :

$$\eta_n(x) < \frac{\epsilon}{4\|f\|} \tag{5}$$

En ajoutant $f(x) - f(x)$ et en regroupant dans (4) on a

$$f(x) + [\underline{f}(x) - f(x)] - \eta_n(x)[\|f\| + \underline{f}(x)] \leq B_n(x) \leq f(x) + [\overline{f}(x) - f(x)] + \eta_n(x)[\|f\| - \overline{f}(x)]$$

Par conséquent, on obtient

$$f(x) - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{4\|f\|}2\|f\| < B_n(x) < f(x) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4\|f\|}2\|f\|$$

ce qui donne pour tout $x \in [0,1]$

$$|B_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Références

[Pin00] Allan Pinkus. "Weierstrass and Approximation Theory". In: *Journal of Approximation Theory* 107.1 (2000), pp. 1–66. DOI: `10.1006/jath.2000.3508` (cité pp. 8, 12, 14).

[Ste68] R. M. Stephenson. "Spaces for which the Stone-Weierstrass theorem holds". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 133.2 (1968), pp. 537–546. DOI: `10.2307/1994995` (cité p. 6).