AMS THÉORÈME DE WEIERSTRASS ET VARIATIONS

GUILLAUME SALLOUM

Résumé. Nous nous intéresserons au théorème d'approximation de Weierstrass et à sa présentation sous diverses formes. Dans un premier temps nous poserons le cadre général avec la version complexe de Stone-Weierstrass. Ensuite nous reprendrons le cas des séries de Fourier obtenu à l'aide du théorème de Fejer vu en cours. Puis nous développerons un résultat sur les polynômes de Bernstein permettant de fournir une autre preuve constructive du théorème dans le cas réel.

Table des matières

1. Théorème de Stone-Weierstrass dans le cas complexe

1.1. **Notions de topologie nécessaires.** Dans cette partie nous traiterons le cas général du théorème où nous nous plaçons dans un espace topologique séparé et compact. Pour cela nous développons brièvement quelques notions préliminaires pour énoncer le théorème. Afin de rendre la présentation plus élémentaire cette approche n'est développée que dans le présent document écrit, pour la présentation orale nous adaptons systématiquement les résultats dans le cadre des espaces vectoriels normés étudiés en cours.

Définition 1.1.1 (Espace séparé)**.** *Soit X un espace topologique. X est dit séparé, ou de Hausdorff s'il respecte l'axiome T_2 : pour tout points x et y dans X, il existe un voisinnage U de x et V de y tels que U et V dont disjoints.*

En particulier tout les espaces vectoriels normés sont issus d'espaces métriques, et sont donc séparés.

Définition 1.1.2 (Algèbre, [1])**.** *Soit A, B deux anneaux et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Si B est muni d'une structure de A-module, alors B est une A-algèbre.*

Définition 1.1.3 (Sous-algèbre)**.** *Soit B une A-algèbre, et $C \subseteq B$. C est une sous-algèbre de B si $f|_C$ est un morphisme d'anneaux et C possède une structure de A-module. En d'autres termes, C est un sous-module de B vu comme un $A-$module.*

Ici nous nous intéressons à l'algèbre $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$.

2. Application aux séries de Fourier

3. Preuve constructive à l'aide des polynômes de Bernstein

Références

[1] Michael Francis ATIYAH et Ian Grant MACDONALD. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, 1969. ISBN : 0-201-40751-5.