

Credit Valuation Adjustment sur Credit Default Swap

Simon Matet

Antoine Sauvage

Abstract

Le Credit Default Swap (CDS) est un type de contrat permettant à un créancier de s'assurer contre le risque de défaut d'un débiteur. Cependant, l'institution émettrice d'un CDS peut elle même faire défaut avant ou en même temps que le débiteur. Cela conduit à une Credit Valuation Adjustment (CVA) entre le prix d'un CDS non risqué et d'un CDS où la contrepartie peut faire défaut. La prise en compte de cette possibilité dans le pricing d'un CDS et les stratégies pour se prémunir de ce risque de contrepartie font l'objet de ce rapport.

Nous reprenons l'approche de Bielecki et al. [1] en introduisant une probabilité instantanée de défaut de chaque entreprise fonction de deux processus d'Itô corrélés. Nous prenons également en compte une probabilité exogène de défaut simultané des deux entreprises. Nous montrons plusieurs méthodes de calcul des prix et de la CVA avant de calibrer le modèle grâce à des données du marché. Enfin, nous avons implémenté le modèle et simulé les processus des prix et de la CVA pour différents paramètres.

Contents

1	Présentation générale	2
1.1	Contexte et notations	2
1.2	Analyse des cash-flows	2
1.2.1	Cash-flow pour un CDS sans risque	2
1.2.2	Cas d'un CDS risqué	3
2	Modèle	3
2.1	Hypothèses	3
2.2	Générateurs infinitésimaux et premières propriétés	4
3	Pricing	5
3.1	CDS non risqué	5
3.2	CDS risqué	7
3.3	Calcul de la CVA	8
4	Simulations numériques	10
4.1	Calibration	10
4.2	CDS non risqué	10
4.3	CDS risqué et CVA	10

1 Présentation générale

1.1 Contexte et notations

Nous appellerons un CDS sans risque un CDS tel que la probabilité de défaut de la contrepartie est nulle et un CDS avec risque un CDS où cette probabilité est strictement positive. Dans le cadre de ce rapport, une firme 0 détient une unité de dette à risque de la firme 1, qui peut faire défaut. Dans ce cas la firme 1 rembourse ses dettes à hauteur de $R_1 \in [0, 1[$. Pour se couvrir contre ce risque, la firme 0 achète un CDS à la firme 2 et s'engage à verser une prime κ en échange d'une assurance contre le défaut de 1 jusqu'à la date de maturité T . La valeur du contrat dépend cependant de la probabilité que l'assureur 2 fasse défaut avant la maturité.

Nous noterons donc :

$\beta(t)$ Le taux d'actualisation

T La date de maturité du contrat

R_1 Le taux de recouvrement de la firme 1

R_2 Le taux de recouvrement de la firme 2

$\tau_1(\omega)$ Temps aléatoire du défaut de la firme 1

$\tau_2(\omega)$ Temps aléatoire du défaut de la firme 2

κ La prime versée par la firme 0 à la firme 2 à chaque unité de temps

$p(t, \omega)$ Le cash flow à venir après la date t pour une réalisation ω de la firme 2 vers la firme 0 en supposant que 2 ne fasse jamais défaut

$\pi(t, \omega)$ Le cash flow à venir après la date t pour une réalisation ω de la firme 2 vers la firme 0 en supposant que 2 peut faire défaut

$P(t, \omega) = \mathbb{E}_t[p]$ le cash-flow espéré conditionnellement à l'information connue à la date t , sans risque de contrepartie

$\Pi(t, \omega) = \mathbb{E}_t[\pi]$ le cash-flow espéré conditionnellement à l'information connue à la date t , avec risque de contrepartie

1.2 Analyse des cash-flows

Dans le cadre d'un marché sans possibilités d'arbitrage, le prix d'un CDS à la date t est défini par l'espérance des cash-flows futurs actualisés.

1.2.1 Cash-flow pour un CDS sans risque

À la date s , la firme 0 doit verser à 2 la prime κ . Si de plus $\tau_1 = s$, alors 1 rembourse uniquement R_1 de sa dette et 2 verse donc les $1 - R_1$ restant à 0. En remarquant que le coefficient d'actualisation entre $t \leq s$ est $\frac{\beta_s}{\beta_t}$, le cash-flow lié au CDS à la date s actualisé pour la date t est donc :

$$\frac{-\beta(s)\kappa + \beta(\tau_1)(1 - R_1)\mathbf{1}_{\tau_1}(s)}{\beta(t)}$$

En intégrant entre t et $T \wedge \tau_1$ on trouve la formule du cash-flow futur à partir de la date t (il s'agit par exemple du prix maximal qu'un acheteur omniscient serait prêt à payer pour le contrat à la date t).

$$\beta(t)p(t) = -\kappa \int_t^{T \wedge \tau_1} \beta(s)ds + \beta(\tau_1)(1 - R_1)\mathbf{1}_{[t, T[}(\tau_1) \quad (1)$$

1.2.2 Cas d'un CDS risqué

On reprend la précédente analyse avec cette fois deux nouveaux termes. Le premier correspond au défaut de 1 et 2 en même temps. Dans ce cas, 2 devrait rembourser $1 - R_1$. Suite à son défaut, 2 ne rembourse que $R_2(1 - R_1)$, d'où un terme en $\mathbf{1}_{\tau_1=\tau_2=s}(1 - R_2)(1 - R_1)$. Par ailleurs, si seul 2 fait défaut avant 1, soit le contrat a un prix positif à cet instant et 2 doit donc à 0 P_s^+ mais ne lui rembourse que $R_2P_s^+$ car il est en défaut. Sinon, 0 rembourse la valeur du contrat $-P_s^-$. On remarque, comme dans Crépey et al. [2], qu'on pourrait s'attendre à ce que le montant à rembourser soit plutôt $\Pi(t) = \mathbb{E}_t(\pi(t))$ le prix réel du contrat. Cependant, on peut voir cet échange soit comme une somme prévue d'avance d'un commun accord à la signature du contrat soit comme le prix du marché auquel 0 va rembourser son défunt contract. Quoiqu'il en soit, la différence ne change rien aux propriétés qualitatives des CDS. En sommant jusqu'à la fin du contrat, ie. $T \wedge \tau_1 \wedge \tau_2$, on trouve :

$$\begin{aligned} \beta(t)\pi(t) = & -\kappa \int_t^{T \wedge \tau_1 \wedge \tau_2} \beta(s)ds + \beta(\tau_1)(1 - R_1)\mathbf{1}_{]t, T \wedge \tau_2[}(\tau_1) \\ & + \beta(\tau_1)R_2(1 - R_1)\mathbf{1}_{t < \tau_1 = \tau_2 < T} + \beta(\tau_2)(R_2P_{\tau_2}^+ - P_{\tau_2}^-)\mathbf{1}_{t < \tau_2 < T \wedge \tau_1} \end{aligned} \quad (2)$$

2 Modèle

2.1 Hypothèses

On modélise la santé financière des entreprises $i, i \in \{1, 2\}$ par deux processus d'Itô corrélés,

$$dX_t^1 = b_1(t)dt + \sigma_1(t)dW_t^1 \quad (3)$$

$$dX_t^2 = b_2(t)dt + \sigma_2(t)\left(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2}dW_t^2\right) \quad (4)$$

Où W_1 et W_2 sont deux mouvements browniens indépendants et ρ la covariance de W_1 et W_2 (on vérifie sans peine que $\rho dW^1 + \sqrt{1 - \rho^2}dW^2$ donne un mouvement brownien de covariance ρ avec W_1 , en calculant les fonctions caractéristiques des accroissements par exemple). On notera \mathbb{X} la filtration canoniquement associée à (X^1, X^2) . On suppose de plus que les processus b_i, σ_i sont \mathbb{X} adaptés et vérifient les conditions d'intégrabilité usuelles (b_i intégrables, σ_i de carré intégrable presque sûrement).

On introduit ensuite trois variables de défaut qui sont les temps d'arrêt d^1 , temps de défaut endogène de la firme 1, d^2 , temps de défaut endogène de la firme 2 et d^3 , temps de défaut commun exogène. On suppose que ce sont des variables exponentielles telles que :

$$\mathbb{P}[d^i > t | \mathbb{X}_t] = e^{-\int_0^t l_i(t, X_s^i)ds}, \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

$$\mathbb{P}(d^3 > t) = e^{-\int_0^t l_3(s)ds} \quad (6)$$

Avec la particularité que l_3 est une fonction déterministe qui ne dépend pas des $X^{(1,2)}$ et que $\{d^3 < t\}$ est indépendant de $\mathbb{X}_t \vee \sigma(d^1) \vee \sigma(d^2)$. On suppose en outre que les temps de défaut

endogènes sachant \mathbb{X} sont indépendants, ie.

$$\mathbb{E} [d^1 | \mathbb{X}_t] \perp \mathbb{E} [d^2 | \mathbb{X}_t] , \quad \forall t > 0$$

Les temps de défaut réellement observés pour chaque firme seront donc $\tau^1 = d^1 \wedge d^3$ et $\tau^2 = d^2 \wedge d^3$. On utilisera en outre les fonctions indicatrices de défaut :

$$H_t^i = \mathbf{1}_{[0,t]}(\tau^i)$$

Et \mathbb{H} la filtration associée. Enfin, on posera $\mathbb{F} = \mathbb{X} \vee \mathbb{H}$.

2.2 Générateurs infinitésimaux et premières propriétés

On calcule maintenant le générateur du processus aléatoire $(X, H) = (X_1, X_2, H_1, H_2)$ pour $u \in \mathcal{C}^{1,2}$:

$$\mathcal{A}u : (x, t) \rightarrow \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x [u(t+h, X_{t+h}, e_{t+h}) - u(t, x, e)]}{h}$$

Proposition 2.1.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u(t, x, e) = & \partial_t u(t, x, e) + \sum_{1 \leq i \leq 2} l_i(t, x_i)(u(t, x, e^i) - u(t, x, e)) + l_3(t)(u(t, x, (1, 1)) - u(t, x, e)) \\ & + \sum_{1 \leq i \leq 2} \left(b_i(t, x_i) \partial_{x_i} u(t, x, e) + \frac{1}{2} \sigma_i^2(t, x_i) \partial_{x_i}^2 u(t, x, e) \right) + \rho \sigma_1(t, x_1) \sigma_2(t, x_2) \partial_{x_1, x_2}^2 u(t, x, e) \end{aligned} \quad (7)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u(t, x, e) = & \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x [u(t+h, X_{t+h}, e_{t+h}) - u(t, x, e)]}{h} \\ = & \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\frac{u(t+h, X_{t+h}, e_{t+h}) - u(t+h, X_{t+h}, e_t)}{h} \middle| \mathbb{X}_{t+h} \vee \mathbb{F}_t \right] \middle| X_t = x, H_t = e \right] \\ & + \mathbb{E} \left[\frac{u(t+h, X_{t+h}, e_t) - u(t, X_t, e_t)}{h} \middle| X_t = x, H_t = e \right] \end{aligned}$$

Par conditionnement itéré. On décompose le premier terme en :

$$\begin{aligned} & \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\frac{u(t+h, X_{t+h}, e_{t+h}) - u(t+h, X_{t+h}, e_t)}{h} \middle| \mathbb{X}_{t+h} \vee \mathbb{F}_t \right] \middle| X_t = x, H_t = e \right] \\ = & \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{E} \left[\sum_{\epsilon \in \{0,1\}^2} \mathbb{E} \left[\frac{u(t+h, X_{t+h}, \epsilon) - u(t+h, X_{t+h}, e)}{h} \mathbf{1}_{e_{t+h}=\epsilon} \middle| \mathbb{X}_{t+h} \vee \mathbb{F}_t \right] \middle| X_t = x, H_t = e \right] \end{aligned}$$

Au plus trois transitions entre e et e son possibles : défaut de 1, défaut de 2 et défaut simultané. On posera, pour $e \in \{0, 1\}^2$, e^i le vecteur dont on a remplacé la i -ième coordonnée par 1. Alors, si $e \neq e^i$

$$\mathbb{P}(e_{t+h} = e^i | \mathbb{X}_{t+h} \vee \mathbb{F}_t) = 1 - e^{-\int_t^{t+h} l_i(X_s^i, s) ds} + o(h)$$

Le $o(h)$ rendant compte de deux transitions successives (la probabilité d'un tel événement est en $\mathcal{O}(h^2)$). On trouve le même type d'égalité pour le défaut commun et, en remarquant que pour $e = e^i$ la différence des fonctions u est de toute façon nulle, en faisant tendre h vers 0 et par continuité du processus d'Itô qui vaut x en t , on trouve que le premier terme vaut :

$$T_1 = \sum_{1 \leq i \leq 2} l_i(t, x_i)(u(t, x, e^i) - u(t, x, e)) + l_3(t)(u(t, x, (1, 1)) - u(t, x, e)) \quad (8)$$

Le second terme se calcule grâce à la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} u(t+h, X_{t+h}, e) - u(t, X_t, e) &= \int_t^{t+h} Du(s, X_s, e) \cdot dX_s + \\ &\int_t^{t+h} \left(u_t(s, X_s, e) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 \partial_{x_1}^2 u(s, X_s, e) + \sigma_2^2 \partial_{x_2}^2 u(s, X_s, e) + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \partial_{x_1 x_2}^2 u(s, X_s, e)) \right) ds \end{aligned}$$

Encore une fois, par continuité des différentes fonctions (hypothèse sur u à expliciter, il faut que $Du(t, X_t, e) \in \mathbb{H}^2$), on trouve finalement

$$\begin{aligned} Au(t, x, e) &= \partial_t u(t, x, e) + \sum_{1 \leq i \leq 2} l_i(t, x_i)(u(t, x, e^i) - u(t, x, e)) + l_3(t)(u(t, x, (1, 1)) - u(t, x, e)) \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq 2} \left(b_i(t, x_i) \partial_{x_i} u(t, x, e) + \frac{1}{2} \sigma_i^2(t, x_i) \partial_{x_i}^2 u(t, x, e) \right) + \rho\sigma_1(t, x_1)\sigma_2(t, x_2) \partial_{x_1 x_2}^2 u(t, x, e) \quad (9) \end{aligned}$$

□

3 Pricing

3.1 CDS non risqué

Le prix du CDS étant donné par l'espérance du cash-flow actualisé, on cherche à calculer $P_t = \mathbb{E}_t[p^t]$ où p^t est donné par l'équation (1). Pour cela, on sépare le processus P_t en une intégrale par rapport au temps et un terme d'espérance nulle. Ainsi,

$$\begin{aligned} \beta(t)p^t &= -\kappa \int_t^T \beta(s)(1 - H_s^1) ds + (1 - R_1) \int_t^T \beta(s) dH_s^1 \\ &= \int_t^T \beta(s)(1 - H_s^1) p(s, X_s^1) ds + (1 - R_1) \int_t^T \beta(s) dM_s^1 \end{aligned}$$

avec

$$p(s, x) : = (1 - R_1)q_1(t, x) - \kappa \quad (10)$$

$$M_t^i : = H_t^i - \int_0^t q_i(s, X_s, H_s) ds \quad (11)$$

Or, le processus M_t^i ainsi défini est une martingale :

Lemme 3.1. *Dans le cas général, $u(t, X_t^i, H_t^i) - \int_0^t \mathcal{A}u(s, X_s^i, H_s^i) ds$ est une martingale pour $u \in \mathcal{C}^{1,2}$ à dérivées et sauts bornés.*

Preuve.

$$\begin{aligned} d_t \mathbb{E}_s \left[u(t, X_t^i, H_t^i) - \int_0^t \mathcal{A}u(r, X_r^i, H_r^i) dr \right] \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}_s \left[\frac{\mathbb{E}_t(u(t+h, X_{t+h}^i, H_{t+h}^i)) - u(t, X_t^i, H_t^i)}{h} - \mathcal{A}u(t, X_t^i, H_t^i) \right] = 0 \end{aligned}$$

Par conditionnements itérés et en intervertissant limite et intégrale sous les hypothèses appropriées La formule pour le générateur aléatoire montre alors qu'il est borné et qu'on peut intervertir pour le terme avec l'intégrale. De même, les formules de 2.2 permettent de montrer que le premier terme est borné. En appliquant le résultat à la projection sur la dernière variable, on obtient bien que M_t^i est une martingale. \square

Il suit par un théorème d'intégration par rapport à une martingale bornée que l'espérance en t du second terme de (8) est nulle et donc :

$$\mathbb{E}_t [\beta(t)p_t] = \mathbb{E}_t \left[\int_t^T \beta(s)(1 - H_s^1)p(s, X_s^1) ds \right]$$

Proposition 3.2. *Le prix d'un CDS non risqué admet la représentation suivante :*

$$P_t = (1 - H_t^1)v(t, X_t^1)$$

Avec v solution de :

$$\left\{ \begin{aligned} v(T, x) &= 0, & x &\in \mathbb{R} \\ \left(\partial_t + b_1(t, x)\partial_x + \frac{1}{2}\sigma_1^2(t, x)\partial_{x^2}^2 \right) v(t, x) - (r + q_1(t, x))v(t, x) \\ &+ p(t, x) &= 0, & t \in [0, T[, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

et

$$v(t, x) = \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s (r + q_1(\zeta, X_\zeta^1)) d\zeta} p(s, X_s^1) ds \middle| X_t^1 = x \right] \quad (13)$$

Preuve. Comme la fonction p définie en (10) est régulière, l'équation

$$\begin{cases} v(T, x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ \left(\partial_t + b_1(t, x) \partial_x + \frac{1}{2} \sigma_1^2(t, x) \partial_{x^2}^2 \right) v(t, x) - (r + q_1(t, x)) v(t, x) \\ + p(t, x) = 0, \quad t \in [0, T[, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une unique solution $v \in \mathcal{C}^{1,2}$.

En appliquant la proposition 2.1 à la fonction $f : (x, e, t) \mapsto (1 - H_t^1) \beta(t) v(t, X_t^1)$, on trouve :

$$\mathcal{A}f(x, e, t) = -\beta(t)(1 - H_t^1)p(t, x)$$

Ainsi, d'après le lemme 3.1,

$$f(X_t^1, e, t) + \int_0^t \beta(s)(1 - H_s^1)p(s, X_s^1)ds$$

est une martingale, de même que

$$\begin{aligned} f(X_t^1, e, t) - \mathbb{E}_t \left[\int_t^T \beta(s)(1 - H_s^1)p(s, X_s^1)ds \right] \\ = f(X_t^1, e, t) + \int_0^t \beta(s)(1 - H_s^1)p(s, X_s^1)ds - \mathbb{E}_t \left[\int_0^T \beta(s)(1 - H_s^1)p(s, X_s^1)ds \right] \end{aligned}$$

puisque le dernier terme est une martingale. On en déduit

$$\mathbb{E}_t \left[f(X_T^1, e, T) - \int_t^T \beta(s)(1 - H_s^1)p(s, X_s^1)ds \right] = 0 = f(X_t^1, e, t) - \mathbb{E}_t \left[\int_t^T \beta(s)(1 - H_s^1)p(s, X_s^1)ds \right]$$

ie.

$$\beta(t)P_t = (1 - H_t^i)\beta(t)v(t, X_t^i)$$

Enfin, les hypothèses de Feynman-Kac étant vérifiées pour v , on trouve :

$$v(t, x) = \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s (r + q_i(\zeta, X_\zeta^i))d\zeta} p(s, X_s^i)ds \middle| X_t^i = x \right]$$

□

3.2 CDS risqué

On trouve des formules analogues en prenant cette fois :

$$p(t, x) = (1 - R_1) [l_1(t, x_1) + R_2 l_3(t)] + l_2(t, x_2) [R_2 v^+(t, x_1) - v^-(t, x_1)] - \kappa$$

Alors, comme précédemment,

$$\beta(t)\pi^t = \int_t^T \beta(s)(1 - H_s^1)(1 - H_s^2)p(s, X_s)ds + M_t$$

Avec M_t d'espérance nulle.

Il suit, comme précédemment, qu'il existe une fonction u telle que :

$$\Pi_t = (1 - H_t^1)(1 - H_t^2)u(t, X_t)$$

Par ailleurs, u est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} u(T, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \\ \left(\partial_t + \sum_{1 \leq i \leq 2} (b_i(t, x_i)\partial_{x_i} + \frac{1}{2}\sigma_i^2(t, x_i)\partial_{x_i}^2) + \rho\sigma_1\sigma_2\partial_{x_1, x_2}^2 \right) v(t, x_i) \\ - (r + l(t, x))u(t, x) + p(t, x) = 0, & t \in [0, T[, x \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (14)$$

Ou encore, d'après le théorème de Feynman-Kac :

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s (r + l(\zeta, X_\zeta))d\zeta} p(s, X_s)ds \middle| X_t = x \right] \quad (15)$$

3.3 Calcul de la CVA

Il existe donc une différence de prix (CVA) entre un CDS risqué et un CDS non risqué. Il est en théorie possible de la calculer grâce par une méthode de Monte-Carlo sur les équations (13) et (15) ou en résolvant les systèmes (12) et (14). Cependant, ces méthodes sont trop coûteuses en calculs. Nous montrons donc que la CVA vérifie une équation plus simple à évaluer qui fait intervenir le prix d'un CDS non risqué. Ce dernier sera calculé par la méthode présentée dans [1], proposition 6.1.

Dans ce qui suit on notera ξ_{τ_2} l'exposition de 0 lors du défaut de 2, ie. la perte subie par 0 quand 2 fait défaut

$$\xi_{\tau_2} = (1 - R_1)(1 - R_2)\mathbf{1}_{\tau_1 = \tau_2 \leq T} + (1 - R_2)P_{\tau_2}^+\mathbf{1}_{\tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T} \quad (16)$$

et la CVA (Credit valuation adjustment) comme la différence de prix :

$$\begin{aligned} \text{CVA}_t &= \mathbf{1}_{t < \tau_2} \mathbb{E}_t [\beta_{\tau_2} \xi_{(\tau_2)}] \\ &= P_t - \Pi_t, \quad t < \tau_2 \end{aligned}$$

La dernière équation est un résultat intuitif que l'on peut montrer par un calcul relativement aisé. Enfin, nous posons $l(s, X_s) = l_1(s, X_s^1) + l_2(s, X_s^2) + l_3(s)$.

Proposition 3.3. *Pour $t < \tau_2 \wedge \tau_1$,*

$$CVA_t = \mathbb{E}_t \left[\int_t^T (1 - R_2) \beta_s ((1 - R_1) l_3(s) + P^+(s, X_s^1) l_2(s, X_s^2)) e^{-\int_t^s l(\zeta, X) d\zeta} ds \right] \quad (17)$$

Preuve. Pour évaluer la CVA, nous allons devoir calculer

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t [\beta_{\tau_2} \mathbf{1}_{\tau_1 = \tau_2 \leq T}] &= \mathbb{E} [\beta_{\tau_2} \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\tau_1 = \tau_2 \leq T} | \sigma(\tau_2) \vee \mathbb{X}_T] | \mathbb{F}_t] \\ \text{et} \quad \mathbb{E}_t [\beta_{\tau_2} \mathbf{1}_{\tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T}] &= \mathbb{E} [\beta_{\tau_2} \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T} | \sigma(\tau_2) \vee \mathbb{X}_T] | \mathbb{F}_t] \end{aligned}$$

On pose donc

$$\begin{aligned} \Phi(\tau_2) &= \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\tau_1 = \tau_2 \leq T} | \sigma(\tau_2) \vee \mathbb{X}_T] \\ \Psi(\tau_2) &= \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T} | \sigma(\tau_2) \vee \mathbb{X}_T] \end{aligned}$$

et on évalue les deux espérances

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\Phi(\tau_2) \mathbf{1}_{\tau_2 \leq t} | \mathbb{X}_T] &= \int_0^t \Phi(s) q_2(s, X_s^2) e^{-\int_0^s q_2(\zeta, X_\zeta^2) d\zeta} ds \\ \mathbb{E} [\Psi(\tau_2) \mathbf{1}_{\tau_2 \leq t} | \mathbb{X}_T] &= \int_0^t \Psi(s) q_2(s, X_s^2) e^{-\int_0^s q_2(\zeta, X_\zeta^2) d\zeta} ds \end{aligned}$$

d'après la lois conditionnelle de τ_2 sachant \mathbb{X}_T . Mais on sait aussi que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\Phi(\tau_2) \mathbf{1}_{\tau_2 \leq t} | \mathbb{X}_T] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [\mathbf{1}_{\tau_1 = \tau_2 \leq T} \mathbf{1}_{\tau_2 \leq t} | \mathbb{X}_T \vee \sigma(\tau_2)] | \mathbb{X}_T] \\ &= \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\tau_1 = \tau_2 \leq T} \mathbf{1}_{\tau_2 \leq t} | \mathbb{X}_T] \\ &= \int_0^t l_3(s) e^{-\int_0^s l(\zeta, X_\zeta) d\zeta} ds \\ \text{et} \quad \mathbb{E} [\Psi(\tau_2) \mathbf{1}_{\tau_2 \leq t} | \mathbb{X}_T] &= \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\tau_2 < \tau_1, \tau_2 \leq T} \mathbf{1}_{\tau_2 \leq t} | \mathbb{X}_T] \\ &= \int_0^t l_2(s, X_s^2) e^{-\int_0^s l(\zeta, X_\zeta) d\zeta} ds \end{aligned}$$

En dérivant chaque expression, on obtient

$$\Phi(t) = \frac{l_3(t) e^{-\int_0^t l(s, X_s) ds}}{q_2(t)} e^{\int_0^t q_2(s) ds}, \quad \Psi(t) = \frac{l_2(t) e^{-\int_0^t l(s, X_s) ds}}{q_2(t)} e^{\int_0^t q_2(s) ds}$$

Ce qui conclut la preuve en utilisant des projections itérées et la loi de τ_2 conditionnellement à $\mathbb{X}_T \vee \mathbb{F}_t$. \square

4 Simulations numériques

4.1 Calibration

Comme dans Bielecki et al. [1] nous choisissons comme processus d'Itô X^i des processus de la forme

$$dX_t^i = \eta(\mu_i - X_t^i)dt + \nu\sqrt{X_t^i}dW_t^i$$

et comme intensités de défaut des fonctions simples de la forme

$$q_i(t, x_i) = f_i(t) + \delta x_i$$

Les processus X^i sont donc des indicateurs des difficultés financières d'une firme (une valeur haute est mauvais signe). Il va de soi que, comme $q_i(t, x_i) = l_3(t) + l_1(t, x_i)$, on prendra $f_i(t) \geq l_i(t)$. On approche toutes les grandeurs par des fonctions constantes par morceaux. Dans ce modèle, on cherche maintenant à calibrer les valeurs de X_0^i , f_i et μ_i . On pourra donc par exemple étudier les variation si la volatilité est plus importante que prévue (ie. le comportement pour ν croissant) ou, au contraire, si la firme est plus stable financièrement (η plus grand).

En utilisant la partie 6.3 de Bielecki et al. [1], on reconstruit dans un premier temps la fonction de répartition des temps de défaut (τ_1, τ_2) à partir d'un historique de temps de défauts (on approche les fonctions de répartition par des fonctions constantes par morceaux). On en déduit l'intensité de la probabilité de défaut jointe $l_3(t)$ puis les fonctions f_i ainsi que les μ_i et X_0^i .

4.2 CDS non risqué

On utilise la proposition 6.1 de Bielecki et al. [1] pour simuler la valeur d'un CDS non risqué.

4.3 CDS risqué et CVA

On calcule la CVA par une méthode de Monte-Carlo pour évaluer la formule (17).

Références

- [1] T.R Bielecki, S. Crépey, M. Jeanblanc, B. Zargari *Valuation and Hedging of a CDS Counterparty Exposure in a Markov Chain Copula Model*. 2012.
- [2] S. Crépey, M. Jeanblanc, B. Zargari *Counterparty Risk on a CDS in a Markov Chain Copula Model with Joint Defaults*. 2009.