Коллоквиум по математическому анализу III
Второй поток

Оглавление

1 Понятие числового ряда. Критерий Коши. Необходимое и достаточное условие сходимости рядов с неотрицательными членами

Рассмотрим числовую последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, формально просуммируем все её члены

$$u_1 + u_2 + ... + u_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1}$$

полученное выражение назовём числовым рядом, в котором u_k - общий член ряда, знак Σ означает сумму; сумму первых n слагаемых, $S_n = {}_{k=1}^{n} u_k$ назовём n-й суммой ряда (1).

Определение 1 *Ряд (1) называется сходящимся, если сходится последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда.*

Предел S последовательности $\{S_n\}$ называется суммой этого ряда. Для сходящегося ряда можно формально записать

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

выражение

$$S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \equiv r_n$$

называется n-м остатком ряда. Из определения предела последовательности получаем, что

$$\exists S : \forall \varepsilon > 0 \, \exists N > 0 : \forall n \geqslant N \quad |S_n - S| = |r_n| < \varepsilon$$

т.е. $r_n = o(1)$, остаток сходящегося ряда является бесконечно малой величиной.

Если конечного предела последовательности $\{S_n\}$ не существует, то ряд называется расходящимся. Формально это можно записать как

$$\forall S \, \exists \varepsilon > 0 : \forall N \, \exists n \geqslant N : |S_n - S| = |r_n| \geqslant \varepsilon$$

Критерий Коши

Теорема 1 ***(критерий Коши)*** *Для того чтобы последовательность $\{S_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \, \forall n \geqslant N \, \forall p \in \mathbb{N} \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Если $\{S_n\}$ - последовательность частичных сумм ряда (1), то

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$$

поэтому следующее утверждение получаем как следствие из предыдущего утверждения

Теорема 2 ***(критерий Коши для ряда)*** *Для того чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N\ \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon \tag{2}$$

Следствие 1 ***(необходимое условие сходимости ряда)*** *Для сходимости ряда (1) необходимо, чтобы последовательность $\{u_k\}$ членов этого ряда была бесконечно малой, т.е. $u_k = o(1),\ k \to \infty$.*

Доказательство

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что согласно теореме 2

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 : \forall n \geqslant N_0\ \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$$

При $p = 1$ соотношение принимает вид $|u_{n+1}| < \varepsilon$. Положив $N = N_0 + 1$, получим, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad |u_n| < \varepsilon$$

т.е. $u_k \to 0, k \to \infty$, что и требовалось доказать.

Примеры рядов, для которых не выполняется необходимое условие сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k,\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3}{3k^3 + k^2}$$

Таким образом, каждый из этих рядов расходится.

Стремление к нулю общего члена ряда является лишь необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда. Например, рассмотрим гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Докажем, что гармонический ряд - расходящийся. Воспользуемся критерием Коши

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N,\ \exists p \in \mathbb{N} : \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \geqslant \varepsilon$$

В последней сумме p слагаемых. Для всех $k \leqslant n + p$ выполнено неравенство $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{n+p}$, положим $p = n$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{n+p} \cdot p \Big|_{p=n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Итак,

$$\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geqslant N, \ \exists p = n : \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \geqslant \varepsilon$$

То есть, согласно теореме 2, гармонический ряд расходится. Заметим, что в этом случае в качестве n можно взять любое натуральное число, большее или равное N, а в качестве ε - любое число из полуинтервала $(0, \frac{1}{2}]$.

Замечание 1 *Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость или расходимость ряда, это следует из критерия Коши, так как для больших n разность $S_{n+p} - S_n$ не изменится.*

Замечание 2 *Если постоянная c отлична от нуля, то ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(cu_k) \ \textit{и} \ \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

сходятся или расходятся одновременно, так как последовательность $\{cS_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\{S_n\}$, это также можно вывести из критерия Коши.

Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

2 Признаки сравнения

В этой части будем рассматривать числовые ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k, \quad p_k \geqslant 0 \tag{3}$$

Сформулируем три утверждения, в которых исследуемый ряд (3) сравнивается с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} p'_k, \qquad p'_k \geqslant 0 \tag{4}$$

сходимость (или расходимость) которого известна.

Теорема 3 ***(первый признак сравнения)*** *Пусть для всех номеров k начиная с некоторого k_0 выполняется неравенство*

$$p_k \leqslant p'_k, \qquad k \geqslant k_0 > 0 \tag{5}$$

Тогда из сходимости ряда (4) вытекает сходимость ряда (3), а из расходимости ряда (3) вытекает расходимость ряда (4).

Доказательство

Докажем второе утверждение. Если ряд (3) расходится, то и ряд (4) расходится, так как в противном случае из первого утверждения теоремы следовала бы сходимость ряда (3). Для доказательства первого утверждения заметим, что, не ограничивая общности, можно считать неравенство (5) выполненным для всех значений $k = 1, 2, \ldots$. Но тогда для всех номеров n справедливо неравенство $S_n \leqslant s'_n$, где $\{S - n\}$, $\{S'_n\}$ - последовательности частичных сумм рядов (3) и (4) соответственно. Если теперь ряд (4) расходится, то последовательность $\{S'_n\}$ является ограниченной, следовательно, ограниченной является и последовательность $\{S_n\}$; в силу теоремы

Теорема 4 *Для того, чтобы ряд (3) сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ была ограниченной.*

ряд (3) сходится. Теорема доказана.

■

Замечание 3 *Неравенство (5) в условии теоремы (3) можно заменить на неравенство $p_k \leqslant cp'_k$, где c - положительная постоянная, утверждение теоремы останется в силе (следует из замечания 2 первого билета).*

Теорема 5 *(**второй признак сравнения**) Пусть начиная с некоторого номера k_0 все члены ряда (4) строго положительны $p'_k > 0, k \geqslant k_0$. Пусть существует конечный и отличный от нуля предел, обозначим его через L*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{p_k}{p'_k} = L \tag{6}$$

Тогда оба ряда (3) и (4) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

Из определения предела числовой последовательности получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geqslant N \;\; L - \varepsilon < \frac{p_k}{p'_k} < L + \varepsilon$$

или $(L - \varepsilon)p'_k < p_k < (L + \varepsilon)p'_k$. Из последних неравенств и теоремы (3) (полагаем $\varepsilon < L$) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

■

Теорема 6 *(третий признак сравнения) Пусть начиная с некоторого номера k_0 все члены каждого из рядов (3), (4) строго положительны и выполняется неравенство*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k}, \qquad k \geqslant k_0 > 0 \tag{7}$$

Тогда справедливы утверждения теоремы (3).

Доказательство

Не ограничивая общности рассуждений будем считать, что неравенство (7) выполняется для всех номеров $k = 1, 2, ...$ Полагая в (7) последовательно $k = 1, 2, ..., n$, где n - произвольный номер, получим цепочку неравенств

$$\frac{p_2}{p_1} \leqslant \frac{p_2'}{p_1'}, \frac{p_3}{p_2} \leqslant \frac{p_3'}{p_2'}, ..., \frac{p_n}{p_{n-1}} \leqslant \frac{p_n'}{p_{n-1}'}$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим, что справедливо следующее неравенство

$$\frac{p_n}{p_1} \leqslant \frac{p_n'}{p_1'}, \quad \text{или} \quad p_n \leqslant \frac{p_1}{p_1'} p_n' \quad (n \geqslant 1)$$

Применяя теперь утверждение теоремы 3 и замечание к этой теореме, получаем утверждение теоремы 6. Теорема доказана.

■

3 Признаки Даламбера и Коши, их сравнение

Теорема 7 ***(признак Коши)***

1. *Если для всех номеров k, с некоторого номера k_0, справедливо неравенство*

$$\sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} \geqslant 1), \quad k \geqslant k_0 \geqslant 1 \tag{8}$$

   то ряд (3) сходится (расходится)

2. *Если существует предел*

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{p_k} = L \tag{9}$$

   то при $L < 1$ ряд сходится, а при $L > 1$ - расходится.

Доказательство

1. Возведём в k-ю степень обе части неравенства (8) $\sqrt[k]{p_k} \geqslant 1$, получим неравенство $p_k \geqslant 1, k \geqslant k_0$, то есть общий член ряда (3) не стремится к нулю при $k \to \infty$ и ряд расходится (нарушено необходимое условие сходимости ряда). Возведём в k-ю степень обе части первого неравенства (8) $\sqrt[k]{p_k} \leqslant q$, получим неравенство $p_k \leqslant q^k, k \geqslant k_0$. Поскольку ряд с общим членом $p_k' = q^k, 0 < q < 1$, сходится, то по первому признаку сравнения (теорема 3) ряд (3) сходится.

2. Из существования предела (9) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geqslant N \ |\sqrt[k]{p_k} - L| < \varepsilon$$

   или

$$L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon \tag{10}$$

Если $L < 1$, то выбирая ε так, что $L + \varepsilon < 1$, и обозначая $q = L + \varepsilon$, получаем из правого неравенства (10): $\sqrt[k]{p_k} < q < 1$, откуда, согласно первой части теоремы, заключаем, что ряд (3) сходится. Если $L > 1$, то выбирая ε так, что $L - \varepsilon = 1$, получаем из левого неравенства (10): $\sqrt[k]{p_k} > 1$, из чего, согласно первой части теоремы, заключаем, что ряд (3) расходится. Заметим, что если $L = \infty$, то рассуждения аналогичны ($\sqrt[k]{p_k} > 1, k \geqslant k_0 \geqslant 1$). Теорема доказана.

■

Замечание 4 *По существу, строгое отделение от 1 в первом неравенстве*

4 Признак Коши-Маклорена