Коллоквиум по математическому анализу III
Второй поток

Оглавление

1 Понятие числового ряда. Критерий Коши. Необходимое и достаточное условие сходимости рядов с неотрицательными членами

Рассмотрим числовую последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, формально просуммируем все её члены

$$u_1 + u_2 + ... + u_k + ... \equiv \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1}$$

полученное выражение назовём числовым рядом, в котором u_k - общий член ряда, знак Σ означает сумму; сумму первых n слагаемых, $S_n = {}_{k=1}^{n} u_k$ назовём n-й суммой ряда (1).

Определение 1 *Ряд (1) называется сходящимся, если сходится последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда.*

Предел S последовательности $\{S_n\}$ называется суммой этого ряда. Для сходящегося ряда можно формально записать

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

выражение

$$S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \equiv r_n$$

называется n-м остатком ряда. Из определения предела последовательности получаем, что

$$\exists S : \forall \varepsilon > 0 \, \exists N > 0 : \forall n \geqslant N \quad |S_n - S| = |r_n| < \varepsilon$$

т.е. $r_n = o(1)$, остаток сходящегося ряда является бесконечно малой величиной.

Если конечного предела последовательности $\{S_n\}$ не существует, то ряд называется расходящимся. Формально это можно записать как

$$\forall S \, \exists \varepsilon > 0 : \forall N \, \exists n \geqslant N : |S_n - S| = |r_n| \geqslant \varepsilon$$

Критерий Коши

Теорема 1 ***(критерий Коши)*** *Для того чтобы последовательность $\{S_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \, \forall n \geqslant N \, \forall p \in \mathbb{N} \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Если $\{S_n\}$ - последовательность частичных сумм ряда (1), то

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$$

поэтому следующее утверждение получаем как следствие из предыдущего утверждения

Теорема 2 ***(критерий Коши для ряда)*** *Для того чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geqslant N \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon \tag{2}$$

Следствие 1 ***(необходимое условие сходимости ряда)*** *Для сходимости ряда (1) необходимо, чтобы последовательность* $\{u_k\}$ *членов этого ряда была бесконечно малой, т.е.* $u_k = o(1), \ k \to \infty$.

Доказательство

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что согласно теореме 2

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 : \forall n \geqslant N_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$$

При $p = 1$ соотношение принимает вид $|u_{n+1}| < \varepsilon$. Положив $N = N_0 + 1$, получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad |u_n| < \varepsilon$$

т.е. $u_k \to 0, k \to \infty$, что и требовалось доказать.

Примеры рядов, для которых не выполняется необходимое условие сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k, \ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3}{3k^3 + k^2}$$

Таким образом, каждый из этих рядов расходится.

Стремление к нулю общего члена ряда является лишь необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда. Например, рассмотрим гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Докажем, что гармонический ряд - расходящийся. Воспользуемся критерием Коши

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geqslant N, \ \exists p \in \mathbb{N} : \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \geqslant \varepsilon$$

В последней сумме p слагаемых. Для всех $k \leqslant n + p$ выполнено неравенство $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{n+p}$, положим $p = n$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{n+p} \cdot p \Big|_{p=n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Итак,

$$\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geqslant N, \ \exists p = n : \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \geqslant \varepsilon$$

То есть, согласно теореме 2, гармонический ряд расходится. Заметим, что в этом случае в качестве n можно взять любое натуральное число, большее или равное N, а в качестве ε - любое число из полуинтервала $(0, \frac{1}{2}]$.

Замечание 1 *Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость или расходимость ряда, это следует из критерия Коши, так как для больших n разность $S_{n+p} - S_n$ не изменится.*

Замечание 2 *Если постоянная с отлична от нуля, то ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (cu_k) \ \text{и} \ \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

сходятся или расходятся одновременно, так как последовательность $\{cS_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\{S_n\}$, это также можно вывести из критерия Коши.

Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

2 Признаки сравнения

В этой части будем рассматривать числовые ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k, \quad p_k \geqslant 0 \tag{3}$$

Сформулируем три утверждения, в которых исследуемый ряд (3) сравнивается с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} p'_k, \qquad p'_k \geqslant 0 \tag{4}$$

сходимость (или расходимость) которого известна.

Теорема 3 ***(первый признак сравнения)*** *Пусть для всех номеров k начиная с некоторого k_0 выполняется неравенство*

$$p_k \leqslant p'_k, \qquad k \geqslant k_0 > 0 \tag{5}$$

Тогда из сходимости ряда (4) вытекает сходимость ряда (3), а из расходимости ряда (3) вытекает расходимость ряда (4).

Доказательство

Докажем второе утверждение. Если ряд (3) расходится, то и ряд (4) расходится, так как в противном случае из первого утверждения теоремы следовала бы сходимость ряда (3). Для доказательства первого утверждения заметим, что, не ограничивая общности, можно считать неравенство (5) выполненным для всех значений $k = 1, 2, \ldots$. Но тогда для всех номеров n справедливо неравенство $S_n \leqslant s'_n$, где $\{S - n\}$, $\{S'_n\}$ - последовательности частичных сумм рядов (3) и (4) соответственно. Если теперь ряд (4) расходится, то последовательность $\{S'_n\}$ является ограниченной, следовательно, ограниченной является и последовательность $\{S_n\}$; в силу теоремы

Теорема 4 *Для того, чтобы ряд (3) сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ была ограниченной.*

ряд (3) сходится. Теорема доказана.

■

Замечание 3 *Неравенство (5) в условии теоремы (3) можно заменить на неравенство $p_k \leqslant cp'_k$, где с - положительная постоянная, утверждение теоремы останется в силе (следует из замечания 2 первого билета).*

Теорема 5 ***(второй признак сравнения)*** *Пусть начиная с некоторого номера k_0 все члены ряда (4) строго положительны $p'_k > 0, k \geqslant k_0$. Пусть существует конечный и отличный от нуля предел, обозначим его через L*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = L \tag{6}$$

Тогда оба ряда (3) и (4) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

Из определения предела числовой последовательности получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geqslant N\ L - \varepsilon < \frac{p_k}{p'_k} < L + \varepsilon$$

или $(L - \varepsilon)p'_k < p_k < (L + \varepsilon)p'_k$. Из последних неравенств и теоремы (3) (полагаем $\varepsilon < L$) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

■

Теорема 6 ***(третий признак сравнения)*** *Пусть начиная с некоторого номера k_0 все члены каждого из рядов (3), (4) строго положительны и выполняется неравенство*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k}, \qquad k \geqslant k_0 > 0 \tag{7}$$

Тогда справедливы утверждения теоремы (3).

Доказательство

Не ограничивая общности рассуждений будем считать, что неравенство (7) выполняется для всех номеров $k = 1, 2, ...$ Полагая в (7) последовательно $k = 1, 2, ..., n$, где n - произвольный номер, получим цепочку неравенств

$$\frac{p_2}{p_1} \leqslant \frac{p'_2}{p'_1}, \frac{p_3}{p_2} \leqslant \frac{p'_3}{p'_2}, ..., \frac{p_n}{p_{n-1}} \leqslant \frac{p'_n}{p'_{n-1}}$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим, что справедливо следующее неравенство

$$\frac{p_n}{p_1} \leqslant \frac{p'_n}{p'_1}, \quad \text{или} \quad p_n \leqslant \frac{p_1}{p'_1} p'_n \quad (n \geqslant 1)$$

Применяя теперь утверждение теоремы 3 и замечание к этой теореме, получаем утверждение теоремы 6. Теорема доказана.

■

3 Признаки Даламбера и Коши, их сравнение

Теорема 7 ***(признак Коши)***

1. *Если для всех номеров k, с некоторого номера k_0, справедливо неравенство*

$$\sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} \geqslant 1), \quad k \geqslant k_0 \geqslant 1 \tag{8}$$

   то ряд (3) сходится (расходится)

2. *Если существует предел*

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{p_k} = L \tag{9}$$

   то при $L < 1$ ряд сходится, а при $L > 1$ - расходится.

Доказательство

1. Возведём в k-ю степень обе части неравенства (8) $\sqrt[k]{p_k} \geqslant 1$, получим неравенство $p_k \geqslant 1, k \geqslant k_0$, то есть общий член ряда (3) не стремится к нулю при $k \to \infty$ и ряд расходится (нарушено необходимое условие сходимости ряда). Возведём в k-ю степень обе части первого неравенства (8) $\sqrt[k]{p_k} \leqslant q$, получим неравенство $p_k \leqslant q^k, k \geqslant k_0$. Поскольку ряд с общим членом $p'_k = q^k, 0 < q < 1$, сходится, то по первому признаку сравнения (теорема 3) ряд (3) сходится.

2. Из существования предела (9) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geqslant N \ |\sqrt[k]{p_k} - L| < \varepsilon$$

   или

$$L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon \tag{10}$$

Если $L < 1$, то выбирая ε так, что $L + \varepsilon < 1$, и обозначая $q = L + \varepsilon$, получаем из правого неравенства (10): $\sqrt[k]{p_k} < q < 1$, откуда, согласно первой части теоремы, заключаем, что ряд (3) сходится. Если $L > 1$, то выбирая ε так, что $L - \varepsilon = 1$, получаем из левого неравенства (10): $\sqrt[k]{p_k} > 1$, из чего, согласно первой части теоремы, заключаем, что ряд (3) расходится. Заметим, что если $L = \infty$, то рассуждения аналогичны ($\sqrt[k]{p_k} > 1, k \geqslant k_0 \geqslant 1$). Теорема доказана.

■

Замечание 4 *По существу, строгое отделение от 1 в первом неравенстве (10) означает, что нельзя заменить это неравенство на $\sqrt[k]{p_k} < 1$. Достаточно заметить, что последнее неравенство выполняется для каждого из следующих рядов, из которых один сходится, а второй расходится: гармонический ряд, $p_k = \frac{1}{k}$, $\sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} < 1, k > 1$ (ряд расходится) и обобщённый гармонический ряд, $p_k = \frac{1}{k^2}$, $\sqrt[k]{p_k} = \left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^2 < 1, k > 1$ (ряд сходится).*

Замечание 5 *Если в соотношении (9) $L = 1$, то признак не позволяет судить о поведении ряда. Действительно, для каждого из рядов, приведённых в первом замечании, справедливо $\sqrt[k]{p_k} \to 1, k \to \infty$, то есть $L = 1$, но один ряд сходится, а второй расходится.*

Теорема 8 *(**признак Даламбера**) Рассмотрим ряд (3), все члены которогоначиная с некоторого номера $k_0 \geqslant 1$ отличны от нуля.*

1. *Если для всех номеров k начиная с некоторого номера k_0 справедливо неравенство*

   $$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1 \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1\right), \quad k \geqslant k_0 \geqslant 1 \tag{11}$$

   то ряд (3) сходится (расходится).

2. *Если существует предел*

   $$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L \tag{12}$$

   то при $L < 1$ ряд (3) сходится, а при $L > 1$ расходится.

Доказательство

1. Если выполняется второе неравенство (11), $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1$, или $p_{k+1} \geqslant p_k > 0$, то общий член ряда (3) не стремится к нулю, нарушено необходимое условие сходимости ряда. Если выполняется первое неравенство (11), то представив $q = \frac{q^{k+1}}{q^k}$, получим неравенство

   $$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{q^{k+1}}{q^k}$$

   Поскольку ряд с общим членом $p'_k = q^k, 0 < q < 1$, сходится, то третий признак сравнения

Теорема 6 ***(третий признак сравнения)*** *Пусть начиная с некоторого номера k_0 все члены каждого из рядов (3), (4) строго положительны и выполняется неравенство*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k}, \qquad k \geqslant k_0 > 0 \tag{13}$$

Тогда справедливы утверждения теоремы (3) ***(первого признака сравнения)****.*

позволяет утверждать, что ряд (1) сходится.

2. Для доказательства второй части теоремы следует дословно повторить схему доказательства второй части теоремы (7) (признака Коши), заменив $\sqrt[k]{p_k}$ на $\frac{p_{k+1}}{p_k}$. Теорема доказана.

■

Замечание 1 *Неравенство (11) нельзя заменить на $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$.*

Замечание 2 *Если в соотношении (11) $L = 1$, то признак не позволяет судить о поведении ряда.*

Сравнение признаков Даламбера и Коши

Определение 2 *Говорят, что первый признак - более сильный, чем второй, если всякий раз, когда применим второй признак, применим и первый (даёт тот же самый результат), но есть ряды, для которых первый признак применим, а второй - нет.*

Утверждение 1 *Если существует предел (12), то существует и предел (9) (и они равны между собой). Обратное неверно.*

Для того чтобы доказать, что из существования предела (9) не следует существования предела (12), достаточно привести пример такого ряда.

Рассмотрим следующий ряд с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^k}{2^k} \tag{14}$$

Заметим, что последовательность $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+(-1)^{k+1}}{3+(-1)^k}$ имеет две предельные точки: 1 и $\frac{1}{4}$ и потому не имеет предела, то есть признак Даламбера неприменим для исследования ряда (13) на сходимость (первая часть признака "не работает поскольку справедливо лишь неравенство $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant 1$). Вместе с тем, существует и предел (9): $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = \dfrac{1}{2} = L < 1$, то есть признак Коши применим и даёт нам сходимость ряда (13). Вторая часть утверждения доказана.

Для того чтобы доказать первую часть утверждения сформулируем два леммы о свойствах средних арифметических и средних геометрических последовательностях.

Лемма 1 *Если последовательность $\{a_n\}, a_n \in \mathbb{R}$, сходится, то к тому же пределу сходится и последовательность средних арифметических этих чисел.*

Доказательство

1. Пусть предел $a = 0$. Последовательность $\{a_n\}$ ограниченная, поэтому $\exists c = const > 0 : |a_n| \leqslant c \forall n$. С другой стороны,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \ |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Используем эти две оценки. Найдём номер N_1 такой, что справедлива оценка $\frac{cN}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех номеров $n > N_1$, и рассмотрим номера $n > \max N, N_1$. Тогда

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right| = \left|\frac{a_1 + a_2 + ... + a_N}{n} + \frac{a_{N+1} + a_{N+2} + ... + a_n}{n}\right| <$$
$$< \frac{cN}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n - N}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

то есть

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \to 0, \quad n \to \infty$$

2. Пусть теперь предел $A \neq 0, a$ - некоторое конечное число. Тогда последовательность $\{a_n - a\}$ стремится к нулю и рассматриваемый случай приводится к предыдущему случаю

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} - a = \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + ... + (a_n - a)}{n} \to 0 \quad n \to \infty$$

то есть

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \to a, \quad n \to \infty$$

3. Рассмотрим случай $a = +\infty$ (случай $a = -\infty$ рассматривается аналогично). Обозначим через c такое положительное число, что $a_n > -c$ для всех номеров n. По определению бесконечно большой положительной последовательности можно записать, что $\forall A > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ a_n > A$. Пусть $n > 2N$, тогда $\frac{N}{n} < \frac{1}{2}, -\frac{N}{n} > -\frac{1}{2}$, и для арифметических получим

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_N}{n} + \frac{a_{N+1} + a_{N+2} + ... + a_n}{n} > -\frac{cN}{n} + \frac{A(n - N)}{n} >$$
$$> -\frac{c}{2} + A(1 - \frac{1}{2}) = \frac{A - c}{2} \quad \forall n > 2N$$

Так как A - сколь угодно большое число, то и $\frac{A - \varepsilon}{2}$ - сколь угодно большое число, а это означает, что

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \to \infty, \quad n \to \infty$$

■

Лемма 2 *Если последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ сходится к пределу a, то к этому же пределу сходится и последовательность средних геометрических этих чисел*

$$\tau_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \tag{15}$$

Доказательство

Рассмотрим два возможных случая: 1) $a > 0$, 2) $a = 0$. В случае 1 в силу непрерывности логарифмической функции для всех положительных значений аргумента справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} = \ln a$. Но тогда в силу леммы 1 существует также равный $\ln a$ предел последовательности

$$\ln \tau_n = \ln \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_1 + ... + \ln a_n}{n}$$

В силу непрерывности показательной функции заключаем, что существует равный a предел последовательности (15).

В силу непрерывности показательной функции заключаем, что существует равный a предел последовательности (15).

В случае (2) требуется доказать, что последовательность (15) - бесконечно малая. Выпишем две оценки

$$\exists c = const > 0 : a_n > c \; \forall n$$
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad a_n < \varepsilon$$

Пусть $n > N$ и применим оценки

$$\tau_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_N} \cdot \sqrt[n]{a_{N+1} \cdots a_n} < \sqrt[n]{c^N} \sqrt[n]{\varepsilon^{n-N}} = \varepsilon \sqrt[n]{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^N} < 2\varepsilon$$

где последняя оценка получена при $n > N_1(\varepsilon)$. Мы воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^N} = 1$.

■

Доказательство утверждения. Для доказательства того, что из существования равного L предела $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ вытекает существование предела $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k}$, также равного L, достаточно применить лемму 2. Рассмотрим последовательность $a_1 = p_1, a_2 = \frac{p_2}{p_1}, ..., a_k = \frac{p_k}{p_{k-1}}$. Очевидно, $a_k \to L, k \to \infty$. Но тогда

$$\sqrt[k]{p_k} = \sqrt[k]{\cdot \frac{p_k}{p_{k-1}} \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} \cdots \frac{p_2}{p_1} \cdot p_1} = \sqrt[k]{a_k \cdot a_{k-1} \cdots a_2 \cdot a_1} \to L, \quad k \to \infty$$

■

4 Признак Коши-Маклорена

Признаки Коши и Даламбера не являются универсальными. Они, например, не могут сделать заключение о сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\alpha} k}$$

Теорема 9 ***(теорема Коши-Маклорена)*** *Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и не возрастает всюду на полупрямой $x \geqslant 1$. Тогда числовой ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1) + f(2) + ... \tag{16}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится числовая последовательность $\{a_n\}$:

$$a_n = \int_1^n f(x)dx \tag{17}$$

Доказательство

Зафиксируем любой номер $k \geqslant 2$ и рассмотрим значения аргумента $x \in [k-1, k]$. Так как функция $f(x)$ не возрастает на указанном отрезке, то справедливы неравенства

$$f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k-1) \ \forall x \in [k-1, k] \tag{18}$$

Из ограниченности и монотонности фнкции $f(x)$ на отрезке $[k-1, k]$ следует, что она интегрируема на этом отрезке. Проинтегрируем неравенства (18) по отрезку $[k-1, k]$, получим

$$\int_{k-1}^{k} f(k)dx \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)dx$$

или

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leqslant f(k-1)$$

Эти неравенства становлены для любого номера $k \geqslant 2$. Запишем их последовательно для значений k, равных $2, 3, ..., n$, где n - любой номер, превосходящий 2

$$f(2) \leqslant \int_1^2 \leqslant f(1)$$
$$f(3) \leqslant \int_2^3 \leqslant f(2)$$
$$\ldots\ldots$$
$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} \leqslant f(n-1)$$

Складывая почленно записанные неравенства, получим

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

или, обозначая n-ю частичную сумму ряда (16) через S_n

$$S_n - f(1) \leqslant a_n \leqslant S_{n-1} \tag{19}$$

Из формулы (17) и неотрицательности функции $f(x)$ следует, что последовательность $\{a_n\}$ - неубывающая. Поэтому для сходимости этой последовательности необходима и достаточна её ограниченность. В свою очередь для сходимости ряда (16) в силу теоремы 2 необходима и достаточная ограниченность послдедовательности $\{S_n\}$. Из неравенств (19) вытекает, что последовательность $\{S_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена последовательность $\{a_n\}$, то есть тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\{a_n\}$.

■

Замечание 3 *Зафиксируем произвольный номер m. Функцию $f(x)$ можно рассматривать не на $[1, \infty)$, а на полупрямой $[m, \infty)$. Утверждение теоремы 9 остаётся в силе, если заменить ряд (16) на $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$, а последовательность (17) на $a_n = \int_m^n f(x)dx, n > m$. Доказательство теоремы изменяется незначительно.*

5 Теорема Римана о перестановке членов в числовых рядах

Понятия абсолютно и условно сходящихся рядов

Изучим теперь свойства рядов, члены которых являются вещественными числами любого знака

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k \in \mathbb{R} \tag{20}$$

Определение 3 *Будем называть ряд (20) абсолютно сходящимся, е сли сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \tag{21}$$

составленный из модулей ряда (20).

Утверждение 2 *Из абсолютной сходимости ряда (20) вытекает его сходимость. Обратное неверно.*

Доказательство

Зафиксируем произвольные числа $n, p \in \mathbb{R}$ и запишем очевидное неравенство для суммы конченого числа слагаемых

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \tag{22}$$

Возьмём любое число $\varepsilon > 0$. Поскольку ряд (21) сходится, то по критерию Коши сходимости числовых рядов (теорема 1)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geqslant N \ \forall p \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

Для того чтобы доказать, что из сходимости ряда (20) не следует сходимость ряда (21), достаточно привести соответсвтующий пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... \tag{23}$$

Рядом из модулей, соответсвующим ряду (23), является гармонический ряд, расходимость которого мы доказали тремя способами. Так что ряд (23) не сходился абсолютно. Докажем, что этот ряд сходится и его сумма равна $ln2$. Для каждого значения $x \in [0, 1]$ справедлива формула Маклорена для функции $\ln(1 + x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$$

и для остаточного члена R_{n+1} имеет место оценка

$$|R_{n+1}| \leqslant \frac{1}{n+1} \quad x \in [0,1]$$

Полагая в этих формулах $x = 1$, получим

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1), \quad |R_{n+1}(1)| \leqslant \frac{1}{n+1} \tag{24}$$

Обозначим через S_n сумму первых n слагаемых в правой части равенства (24). Тогда можем записать

$$|S_n - \ln 2| = |R_{n+1}(1)| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Так как $\frac{1}{n+1} \to 0, n \to \infty$, то из последнего неравенства следует, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln 2$. Поскольку последовательность $\{S_n\}$ является последовательностью частичных сумм ряда (23), это означает, что ряд (23) сходится и его сумма равна $\ln 2$.

■

Определение 4 *Будем называть ряд (20) условно сходящимся, если он сходится, а ряд (21) из модулей членов расходится.*

Теорема 10 *(теорема Римана) Если ряд (20) сходился условно, то каким бы ни было наперёд заданное вещественное число L, можно так переставить члены этого ряда, чтобы преобразованный ряд сходился к числу L.*

Доказательство

Пусть ряд (20) - произвольный условно сходящийся ряд. Изучим его структуру. Из необходимого условия сходимости числового ряда следует, что $\{u_k\}$ является бесконечно малой последовательностью при $k \to \infty$. Обозначим через $p_1, p_2, p_3, ...$ неотрицательные члены ряда (20), выписанные в таком же порядке, в каком они стоят в этом ряде, а через $q_1, q_2, q_3, ...$ - модули отрицательных членов ряда (20), выписанные в таком же порядке, в каком они стоят в этом ряде. Ряд (20) содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов, ибо если бы членов одного знака было бы конечное число, то, отбросив не влияющее на сходимость конечное число первых членоы, мы бы получили ряд, состоящий из членов одного знака, для которого сходимость означала бы абсолютную сходимость. Так как $\{u_k\}$ является бесконечно малой последовательностью при $k \to \infty$, то $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ также являются бесконечно малыми последовательностями.

Итак, с рядом (20) связаны два бесконечных ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k$. Будем обозначать первый из этих рядов символом P, а второй - символом Q. Докажем, что оба ряда P и Q являются расходящимися. Обозначим n-ю частичную сумму ряда (20) символом S_n, символом P_n - сумму всех положительных членов, входящих в S_n, символом Q_n - сумму всех отрицательных членов, входящих в S_n. Тогда, очевидно, $S_n = P_n - Q_n$, и так как по условию ряд (20) сходится к некоторому числу S, то

$$\lim_{n\to\infty} (P_n - Q_n) = S \tag{25}$$

С другой стороны, так как ряд (20) не сходится абсолютно, то

$$\lim_{n\to\infty}(P_n + Q_n) = +\infty \tag{26}$$

Сопоставляя (25) и (26), получим $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = +\infty$, то есть оба ряда P и Q расходятся.

Из расходимости рядов P и Q вытекает, что даже после удаления конечного числа первых членов этих рядов мы можем взять из оставшихся членов как ряда P, так и ряда Q столь большое число членов, что их сумма превзойдёт любое наперёд заданное число. Опираясь на этот факт, докажем, что можно так переставить члены исходного ряда (20), что в результате получится ряд, сходящийсяк наперёд заданному числу L.

В самом деле, мы получим требуемый ряд следующим образом. Сначала выберемиз исходного ряда (20) ровно столько неотрицательных членов $p_1, p_2, p_3, ..., p_{k_1}$, чтобы их сумма превзошла L

$$p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_{k_1} > L, \quad (\text{при этом } p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_{k_1 - 1} \leqslant L)$$

Затем добавим к выбранным членам ровно столько отрицательных членов $-q_1, -q_2, ..., -q_{k_2}$, чтобы общая сумма $p_1 + p_2 + ... + p_{k_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{k_2}$ оказалась меньше L. Затем снова добавим ровно столько положительных членов $p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, ..., p_{k_3}$, чтобы общая сумма $p_1 + p_2 + ... + p_{k_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{k_2} + p_{k_1+1} + ... + p_{k_3}$ оказалась больше L. Продолжая аналогичные рассуждения далее, мы бесконечный ряд, в состав которого войдут все члены исходного ряда (20), так как каждый раз нам придется добавлять хотя бы один положительный или отрицательный член исходного ряда.

Докажем, что полученный ряд сходится к L. Заметим, что в полученном ряде последовательно чередуются группы неотрицательных и группы отрицательных членов. Если частичная сумма полученного ряда заканчивается полностью завершенной группой, то отклонение этой частичной суммы от числа L не превосходит модуля последнего ее члена (ибо мы добавляем в данную группу члены ровно до тех пор, пока общая сумма не «перейдет» через число L). Если же частичная сумма заканчивается не полностью завершенной группой, то отклонение этой частичной суммы от числа L не превосходит модуля последнего члена предпоследней из групп. Для установления сходимости ряда к L достаточно убедиться в том, что модули последних членов групп образуют бесконечно малую последовательность, а это непосредственно вытекает из необходимого условия сходимости исходного ряда (20).

■

6 Теорема Коши о перестановке членов в числовых рядах

Докажем, что для всякого абсолютно сходящегося ряда справеделиво переместительное свойство.

Теорема 11 ***(теорема Коши)***. *Если данный ряд сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из данного ряда посредством некоторой перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и данный ряд.*

Доказательство

Пусть ряд (20) с общим членом u_k сходится абсолютно и сумма этого ряда равна S. Пусть далее

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k \tag{27}$$

- ряд, полученный из ряда (20) посредством некоторой переставноки его членов. Требуется доказать, что

1. ряд (27) сходится и имеет сумму, равную S
2. ряд (27) сходится абсолютно

Докажем сначала первое утверждение. Достаточно доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad \left| \sum_{k=1}^{n} u'_k - S \right| < \varepsilon \tag{28}$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как ряд (20) сходится абсолютно, то для выбранного ε можно указать номер N_0 такой, что для остатка ряда из модулей справедлива оценка

$$\sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{29}$$

Выберем столь большой номер N, чтобы любая частичная сумма S'_n нового ряда (27) с номером $n > N$, содержала все первые N_0 членов ряда (20). Такой номер N выбрать можно, так как ряд (27) получается из ряда (20) посредством некоторой перестановки членов. Тогда разность S'_n с $n > N$ и первых N_0 слагаемых ряда (20) содердит только слагаемые ряда (20) с номерами, большими, чем N_0. Для установления оценки (28) добавим и вычтем под знаком модуля сумму первых N_0 членов ряда (20) и два раза применим оценку (29). Получим

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u'_k - S \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right) \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Соотношение(28) доказано, то есть ряд (20) сходится и имеет сумму, равную S.

Остаётся доказать утверждение, что ряд (27) сходится абсолютно. Доказательство следует из предыдущего утверждения, если применить его к рядам

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |u'_k| \tag{30}$$

При этом мы докажем сходимость второго из рядов (30), то есть абсолютную сходимость ряда (27) (и докажем равенство сумм рядов (30)).

■

7 Последовательности с ограниченным изменением и их свойства

Определение 5 *Последовательность $\{a_n\}$ назовём последовательностью с ограниченным изменением, если сходится числовой ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k| = |v_2 - v_1| + |v_3 - v_2| + ... \tag{31}$$

Сумму ряда (31) в случае его сходимости обозначим через V. Число V называется полным изменением последовательности $\{v_k\}$.

Сформулируем необходимое условие для последовательностей с ограниченным изменением.

Утверждение 3 *Всякая последовательность с ограниченным изменением сходится. Обратное неверно.*

Доказательство

Не всякая сходящаяся последовательность имеет ограниченное изменение. Заметим далее, что из сходимости ряда (31) вытекает сходимость ряда без модулей

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{k+1} - v_k)$$

Обозначим сумму ряда (32) через S, а его n-ю частичную сумму - через S_n. Поскольку $S_n = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + ... + (v_{n+1} - v_n) = v_{n+1} - v_1$, то $v_{n+1} = S_n + v_1 \to S - v_1$ при $n \to \infty$. Это означает, что последовательность $\{v_n\}$ сходится к пределу $S + v_1$.

■

Сформулируем теперь достаточное условие того, чтобы последовательность имела ограниченное изменение.

Утверждение 4 *Всякая монотонная ограниченная последовательность является последовательностью с ограниченным изменением.*

Доказательство

Так как последовательность $\{v_k\}$ монотонная и ограниченна, то она сходится. Обозначим n-ю частичную сумму ряда (31) - через S_n. Так как последовательность $\{v_k\}$ монотонна, все разности $v_{k+1} - v_k$ имеют один знак (все неположительны или все неотрицательны). Но тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k| = \left| \sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) \right| = |v_{n+1} - v_1| \to |v - v_1| \text{ при } n \to \infty$$

Это означает, что ряд (31) сходится, его сумма равна $V = |v - v_1|$, а последовательность $\{v_k\}$ имеет ограниченное изменение.

■

Утверждение 5 *Для того чтобы последовательность имела ограниченное изменение, необходимо и достаточно, чтобы её общий член можно было представить в виде разности двух ограниченных неубывающих последовательностей.*

8 Признаки сходимости произвольных рядов (пр. Абеля)

В интегральном исчислении важную роль играет формула интегрирования по частям. Приведём аналог этой формулы для рядов.

Утверждение 6 *Пусть* $\{u_k\}$ *и* $\{v_k\}$ *- две произвольные последовательности,* $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n, S_0 = u_0$*,* n *и* p *- два произвольных номера. Тогда справедливо тождество*

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n \tag{32}$$

называется тождеством Абеля или преобразованием Абеля.

Если переписать тождество (32) в виде

$$\sum_{k=n}^{n+p} v_k \Delta S_k = S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k \Delta v_k$$

где $\Delta S_k = S_k - S_{k-1} = u_k, \Delta v_k = v_{k+1} - v_k$*, то достаточно наглядно просматривается связь этого тождества и формулы интегрирования по частям для определённых интегралов.*

Доказательство

Подставим в левую часть формулы (32) вместо u_k разность $u_k = S_k - S_{k-1}$ и во второй из получаемых при этом заменим индекс суммирования k и $k+1$. Получим

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k v_{k+1} =$$
$$= S_{n+p}v_{n+p} + \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} - S_{n-1}v_n =$$
$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n$$

Откуда следует формула (32).

■

Для применения критерия Коши сходимости числовых рядов тождество (32) удобно записать в следующем виде

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + S_{n+p}v_{n+p} - S_n v_{n+1}, \quad p \neq 1 \tag{33}$$

А в случае $p = 1$ в правой части (33) первую сумму следует заменить нулём.

Признаки сходимости

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \tag{34}$$

обозначим через $\{S_n\}$ последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{35}$$

Теорема 12 ***(два признака Абеля)***

1. *Пусть выполняются следующие условия*

   (a) последовательность $\{S_n\}$ является ограниченной

   (b) $\{v_k\}$ - бесконечно малая последовательность с ограниченным изменением
   Тогда ряд (34) сходится

2. *Пусть выполняются следующие условия*

   (a) ряд (35) сходится

   (b) $\{v_k\}$ - последовательность с ограниченным изменением
   Тогда ряд (34) сходится

Доказательство

1. Выпишем оценки, вытекающие из условий первого признака. По условию существует число $M > 0$ такое, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда (35) удовлетворяет условию $|S_n| \leqslant M$. Поскольку последовательность v_k сходится к нулю и имеет ограниченное изменение, то

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \colon \forall n \geqslant N \ \forall p \in \mathbb{N} \\ |v_n| < \frac{\varepsilon}{3M} \\ \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1} - v_k| < \frac{\varepsilon}{3M} \end{gathered} \tag{36}$$

   Для доказательства сходимости ряда (34) воспользуемся критерием Коши и выписанными оценками. Применим тождество Абеля (33), от модуля суммы перейдём к сумме модулей, в каждом слагаемом оценим $|S_n| \leqslant M$ и используем оценки (36). При $n \geqslant N$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1})\right| + |S_{n+p} v_{n+p}| + |S_n v_{n+1}| \leqslant M \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |(v_k - v_{k+1})| + |v_{n+p}| + |v_{n+1}|\right) <$$
$$< M \left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon$$

Таким образом, ряд (34) сходится

2. Выпишем оценки вытекающие из условий второго признаква. Так как ряд (35) сходится, то

$$\exists M > 0\colon \{S_n\}\colon |S_n| \leqslant M$$

Так как последовательность $\{v_k\}$ имеет ограниченное изменение, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n \geqslant N \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1} - v_k| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Обозначим сумму ряда (35) через S, а предел последовательности $\{v_k\}$ через v. Но тогда $S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n \to Sv - Sv = 0$, $\exists N\colon \forall n \geqslant N \forall p \in \mathbb{N}$

$$|S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n| < \frac{2\varepsilon}{3} \tag{37}$$

Для доказательства сходимости ряда (34) также воспользуемся критерием Коши и выписанными оценками. Применим тождество Абеля (33), от модуля суммы перейдём к сумме модулей, в первом слагаемом оценим $|S_n| \leqslant M$, далее используем оценки (36, вторая часть), (37). При $n \geqslant N$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} S_k(v_k - v_{k+1})\right| + |S_{n+p}v_{n+p} - S_n v_{n+1}| \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\sum_{k=n+1}^{n+p} |(v_k - v_{k+1})|\right) + |S_{n+p}v_{n+p} - S_n v_{n+1}| < M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Таким образом, ряд (34) сходится.

■

9 Теорема Мертенса

Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k, \quad u_k, v_k \in \mathbb{R} \tag{38}$$

обозначим их n-е частичные суммы соответственно через U_n и V_n.

Введём специальное правило перемножения рядов по Коши

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right) = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \ldots + (u_1v_k + u_kv_1) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \tag{39}$$

где $w_k = u_1v_k + u_2v_{k-1} + \ldots + u_kv_1$

Теорема 13 *(**Мертенса**) Пусть ряды (38) сходятся и хотя бы один из них сходится абсолютно. Тогда ряд, полученный перемножением этих рядов по правилу Коши (39), сходится к произведению сумм перемноженных рядов.*

Доказательство

Пусть, например, ряд $\sum u_k$ сходится абсолютно, а ряд $\sum v_k$ сходится (хотя бы условно). Обозначим n-е частичные суммы перемножаемых рядов соответственно через U_n и V_n, а их суммы соответственно через U и V. Положим $W = w_1 + w_2 + ... + w_n$ - это n-е частичные суммы ряда (39). Достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = UV$.

Так как ряд $\sum v_k$ сходится, а его остаток $\alpha_n = V - V_n$ - бесконечно малая, а следовательно, и ограниченая последовательность, то есть найдётся постоянная $M > 0$ такая, что $|\alpha_n| \leqslant M$ для всех номеров n. Преобразуем частичные суммы W_n следующим образом

$$W_n = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + ... + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + ... + u_nv_1) = u_1V_n + u_2V_{n-1} + ...u_nV_1 =$$
$$= u_1(V - \alpha_n) + u_2(V - \alpha_{n-1}) + ... + u_n(V - \alpha_1) = U_nV - \beta_n$$
$$\text{где} \quad \beta_n = u_1\alpha_n + u_2\alpha_{n-1} + ... + u_n\alpha_1$$

Поскольку $U_n \to U$ при $n \to \infty$, то достаточно доказать, что последовательность $\{\beta_n\}$ - бесконечно малая. Выпишем необходимые оценки. Зафиксируем произвольное положительное число $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum u_k$ сходится, то последовательность его частичных сумм ограничена,

$$\exists M_1 > 0\colon \sum_{k=1}^{n} |u_k| \leqslant M_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{40}$$

и

$$\exists m \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_1 \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2M} \tag{41}$$

Из того, что $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, заключаем, что

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_1 \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2M_1} \tag{42}$$

Представим β_n в следующем виде

$$\beta_n = (u_1\alpha_n + ... + u_m\alpha_{n-m+1}) + (u_{m+1}\alpha_{n-m} + ... + u_n\alpha_1) \tag{43}$$

Будем рассматривать номера n, удовлетворяющие условию $n - m > n_1$, то есть $n > m + n_1$. Применяя для слагаемых (43) в первой группе, заключённой в скобки оценку (42), затем оценку (40), а для слагаемых во второй группе - оценку $|\alpha_n| \leqslant M$, а затем оценку (41), получим

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2M_1} \sum_{k=1}^{m} |u_k| + M \sum_{k=m+1}^{n} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M_1} \cdot M_1 + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > N = m + n_1$$

то есть $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

∎

10 Взаимосвязь между сходимостью четырёх рядов: повторных, двойного и одинарного

Рассмотрим счётное множество числовых последовательностей $(a_{kl})_{k,l=1}^{\infty}$, где k - номер последовательности, а l - номер элемента последовательности. Или, по-другому, рассмотрим матрицу, содержащую бесконечное число строк и бесконечное число столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kl} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{44}$$

Приводя формальное суммирование элементов матрицы (44), можно составить из неё различные ряды.

Если сначала просуммировать каждую строку матрицы (44) отдельно, то получим бесконечную последовательность рядов вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}, \quad k = 1, 2, ... \tag{45}$$

Просуммировав эту последовательность, получим формальную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right) \tag{46}$$

Эту сумму называют повторным рядом.

Определение 6 *Повторный ряд (46) называется сходящимся, если сходится каждый из рядов (45) и если сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$*, в котором* A_k *обозначает сумму* k*-го рдяа (45).*

Другой повторный ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}\right) \tag{47}$$

получается, если сначала просуммировать отдельно каждый столбец матрицы (44), а затем взять сумму элементов полученной при этом последовательности. Сходимсоть ряда (47) определяется аналогично сходимости ряда (46).

С матрицей (44) кроме повторных рядов (46), (47) связывают ещё так называемый двойной ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} \tag{48}$$

Определение 7 *Двойной ряд (48) называется сходящимся, если при независимом стремлении двух индексов m и n к бесконечности существет конечный предел*

$$S = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} \tag{49}$$

так называемых прямоугольных частичных сумм

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}$$

При этом предел S называется суммой двойного ряда (48).

Из этого определения сразу следует, что если двойной ряд (48) получен посредством перемножения двух сходящихся "одинарных"рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum\limits_{l=1}^{\infty} c_l$, то есть члены двойного ряда (48) равны $a_{kl} = b_k c_l$, то этот двойной ряд сходится и его сумма равна произведению сумм этих рядов

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_k c_l = \left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} c_l\right) \to \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l\right) = S, \text{ при } m,n\to\infty$$

Утверждение 7 *Необходимое условие сходимости двойного ряда (48) - стремление к нулю его общего члена, то есть существование равного нулю предела $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn}$ при независимом стремлении m и n к бесконечности.*

Доказательство

Сразу вытекает из представления общего члена ряда (48) через прямоугольные частичные суммы

$$a_{mn} = S_{mn} - S_{m,n-1} - S_{m-1,n} + S_{m-1,n-1} \to S - S - (S - S) = 0 \text{ при } m,n\to\infty$$

Исследуем, как связаны между собой сходимость двойного ряда и сходимость повторного ряда.

Теорема 14 *Если сходится двойной ряд (48) и если сходятся все ряды по строкам (45), то сходится и повторный ряд (46), причём к той же сумме, к которой сходится и двойной ряд (48).*

Аналогичное утверждение справделиво для повторного ряда (47).

Доказательство

Определим сходимость повторного ряда (46) в терминах последовательности $\{S_{mn}\}$. Так как суммы рядов (45) равны A_k для каждого k, то устрпемляя в S_{mn} индекс n к бесконечности, получим

$$\lim S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} A_k$$

Обозначим этот предел через φ_m. Сумма повторного ряда (46) определяется как предел последовательности $\{\varphi_m\}$ при $m \to \infty$, то есть это повторный предел

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} S_{mn} \right)$$

Таким образом, нужно доказать существование указанного двойного повторного предела в предположении существования двойного предела прямоугольны хчастичных сумм S_{mn} и существования предела этих сумм при $n \to \infty$ при каждом значении m, а также доказать, что эти двойной и повторный интегралы равны между собой.

По условию двойной ряд (48) сходится. Обозначим его сумму через S. Запишем определение двойного предела, равного S

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m_0, n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall m \geqslant m_0, n \geqslant n_0 \quad |S_{mn} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

то есть для указанных значений m и n

$$S - \frac{\varepsilon}{2} < S_{mn} < S + \frac{\varepsilon}{2}$$

Устремляя n к бесконечности, получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m_0 \in \mathbb{N} \colon \forall m \geqslant m_0 \quad |\varphi_m - S| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

а это означает, что существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} S_{mn} = S$$

■

Замечание 4 *Рассмотрим пример показывающий, что от равномерной сходимости по строкам нельзя отказаться*

Пример 1 *Рассмотрим следующую бесконечную матрицу*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Двойной ряд для этой матрицы сходится, его сумма равна нулю, так как прямоугольные частичные суммы S_{mn} в этом случае равны либо нулю, либо a_{mn} - элементу в правом нижнем углу соответствующего "прямоугольника"из элементов $(a_{kl}), 1 \leqslant m, 1 \leqslant l \leqslant n$. А из структуры матрицы следует, что $a_{mn} \to 0$ при $m, n \to \infty$. Между тем все ряды по строкам этой матрицы расходятся, то есть двойной ряд (48) сходится, а повторный ряд (46) расходится.

Далее заметим, что все ряды по столбцам этой матрицы сходятся, их суммы равны нулю, следовательно, и повторный ряд (47) сходится и имеет сумму, равную нулю.

Замечание 5 *В теоерме () (последней, **будет изменено**) и примере 1 двойной ряд (48) сходился. Связана ли сходимость повторного ряда (46) или (47) со сходимостью двойного ряда (48)? Следующий пеример показывает, что повторные ряды (46) и (47) могут сходиться и в случае расходящегося двойного ряда (48).*

Пример 2 *Рассмотрим слекдующую бесконечную матрицу* (a_{kl})

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Прямоугольные частичные суммы S_{mn}, *отвечающие этой матрице, принимают всего два значения - 0 и 1. Причём каждое значение принимается бесконечно много раз, двойного предела не существует, двойной ряд (48) расходится.*

Теорема 15 *Если все элементы матрицы (44) неотрицательны, то для составленного из этой матрицы двойного ряда (48) необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы* $\{S_{mn}\}$ *были ограниченными.*

Доказательство

Необходимость очевидна: если обозначить через S сумму ряда (48), то $S_{mn} \leqslant S$ для всех номеров m и n. Для доказательства достаточности заметим, что из ограниченности множества частичных сумм $\{S_{mn}\}$ вытекает существование точной верхней грани этого множества, которую обозначим через S

$$S = \sup_{1 \leqslant m,n < \infty} S_{mn}$$

По определению точной верхней грани

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists S_{m_0 n_0} \colon S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leqslant S; \ \forall m, n \colon m \leqslant m_0, n \leqslant n_0 \ S_{mn} \geqslant S_{m_0 n_0} \ => \\ S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leqslant S_{mn} \leqslant S \ \forall m \geqslant m_0, n \geqslant n_0$$

это и означает существование двойного предела

$$\lim_{m,n \to \infty} S_{mn} = S$$

то есть сходимость двойного ряда (48).

■

Определение 8 *Двойной ряд (48) называется абсолютно сходящимся, если сходится двойной ряд*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}| \tag{50}$$

составленный из модулей элепментов матрицы (44).

Теорема 16 *Если сходится двойной ряд (48) из модулей, то сходится и двойной ряд (48).*

Доказательство

Из сходимости ряда () следует ограниченность частичных сумм этого ряда (по теореме). Положим

$$p_{kl} = \frac{|a_{kl}| + a_{kl}}{2}, \quad q_{kl} = \frac{|a_{kl}| - a_{kl}}{2}$$

тогда из очевидных неравенств $0 \leqslant p_{kl}, q_{kl} \leqslant |a_{kl}|$ следует ограниченность частичных сумм каждого из рядов

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} p_{kl}, \ \sum_{k,l=1}^{\infty} q_{kl}$$

В силу теоремы (20) эти ряды сходятся. Обозначим их суммы соответственно через P и Q. Но тогда из соотношения $a_{kl} = p_{kl} - q_{kl}$ следует, что двойной ряд (42) сходится к сумме $P - Q$.

■

Далее будем рассматривать и обычный ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r \tag{51}$$

членами которого являются занумерованные в произвольном порядке элементы матрицы (44). Докажем теорему о взаимосвязи между сходимостью четырёх рядов, связанных с матрицей (44), - двух повторных, двойного и одинарного.

$$\begin{array}{ll}
\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}, \ (2) \ k = 1, 2, ..., & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kl}| \ (2') \\
\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}, \ (3) & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}| \ (3') \\
\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}, \ (4) & \displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kl}| \ (4') \\
\displaystyle\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}, \ (5) & \displaystyle\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}| \ (5') \\
\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} a_r, \ (6) & \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} |a_r| \ (6')
\end{array}$$

Теорема 17 *Рассмотрим четыре ряда (3)-(6). Если сходится хотя бы один из рядов с модулями (3')-(6'), то сходятся все ряды (3)-(6) и суммы их равны между собой.*

Доказательство

Сначала докажем, что из сходимости одного из рядов (3')-(6') вытекает сходимость всех рядов (3)-(6). Поскольку для повторных рядов (3) и (4) рассуждения аналогичны (изменяется только порядок следования индексов), то далее рассматриваем только ряд (3).

Докажем сходимости рядов по следующей цепочке

$$(3') \to (6'), (6) \to (5'), (5) \to (3'), (3)$$

1. $(3') \to (6')$. Пусть сходится повторный ряд $(3')$. Обозначим сумму этого ряда через S', его частичные суммы через S'_{mn}, а p-ю частичную сумму ряда $(6')$ через S'_p. Для всех номеров m и n справедливо неравенство $S'_{mn} \leqslant S'$. Зафиксируем любой номер p. Найдутся столь большие номера m и n, что все члены ряда (6), входящие в p-ю частичную сумму этого ряда, будут содержаться в первых m строках и n столбцах матрицы (44). Но тогда справедливо неравенство $S'_p \leqslant S'_{mn} \leqslant S'$, т.е. $S'_p \leqslant S'$ (верное для любого номера p); все частичные суммы ряда с неотрицательными членами $(6')$ ограничены и по теореме ряд $(6')$ сходится. Из абсолютной сходимости ряда (6) следует его сходимость.

2. $(6') \to (5'), (5)$. Пусть сходится ряд $(6')$. Тогда последовательность его частичных сумм $\{S'_p\}$ ограничена: найдётся такая постоянная $M > 0$, что $S'_p \leqslant M$ для всех номеров. Зафиксируем любую частичную сумму S'_{mn} ряда $(5')$. Найдётся такой большой номер p, что p-я частичная сумма ряда (6) будет содержать все чдены, входящие в частичную сумму S_{mn} ряда (5). Но тогда справедливы неравенства $S_{mn} \leqslant S'_p \leqslant M$, т.е. $S'_{mn} \leqslant M$, верное для всех номеров m и n. Следовательно, множество $\{S'_{mn}\}$ ограничено и ряд $(5')$ сходится (согласно теореме). Из теоремы в свою очередь вытекает сходимость двойного ряда (5).

3. $(5') \to (3'), (3)$. Пусть сходится двойной ряд $(5')$. Из теоремы 16 следует сходимость ряда (5). Для доказательства сходимости повторных рядов $(3')$ и (3) в силу теоремы 15 достаточно доказать сходимость каждого из рядов $(2')$ и (2). Сходимость ряда (2) при каждом k вытекает из сходимости соответствующего ряда $(2')$. Для сходимости рядов $(2')$ по теореме 2 достаточно доказать, что каждый из этих рядов имеет ограниченную последовательность частичных сумм. Но это очевидно, поскольку каждая из этих сумм ограничена суммой двойного ряда $(5')$. Из сходимости рядов $(5')$ и $(2')$ следует сходимость ряда $(3')$ (и равенство сумм двойного и повторного рядов), из сходимости рядов (5) и (2) следует сходимость ряда (3) и равенство его суммы сумме ряда (5).

   Докажем, что суммы рядов (5) и (6) также совпадают. Пусть S - сумма двойного ряда (5). Очевидно, что и сумма ряда (6) равна S, так как в силу абсолютной схолимости этого ряда его сумма не меняется при изменении порядка следования его членов и этот порядок можно изменить так, что частичные суммы после изменения порядка будут содержать в качестве подмножества частичные суммы S_{mn} двойного ряда (5).

■

Замечание 6 *Из доказательства теоремы 17 следует, что при выполнении условия этой теоремы сходятся все ряды* $(3') - (6')$ *и имеют суммы, равные между собой.*

11 Метод Чезаро суммирования расходящихся рядов

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{52}$$

Мы называли суммой ряда (52) предел S последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм, если этот предел существует.

Рассмотрим вопрос суммирования расходящихся рядов при помощи обобщённых методов.

Определение 9 *Метод суммирования назовём регулярным, если сходящийся числовой ряд (52) имеет и обобщённую сумму, причём эта сумма совпадает с обычной суммой этого ряда.*

Пусть ряд (52) имеет обобщённую сумму U, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \tag{53}$$

имеет обобщённую сумму V.

Определение 10 *Метод суммирования назовём линейным, если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k) \tag{54}$$

где α и β - произвольные числа, имеет обобщённую сумму $\alpha U + \beta V$.

Заметим, что метод Чезаро также называют методом средних арифметических.

Определение 11 *Говорят, что ряд (52) суммируем методом Чезаро, если существует предел средних арифметических сумм этого ряда*

$$\alpha_n = \frac{S_1 + S_2 + ... + S_n}{n}$$

этот предел

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = S \tag{55}$$

называется обобщённой в смысле Чезаро суммой ряда (52).

Линейность метода Чезаро очевидна. Действительно, обозначим частичные суммы, обобщённую сумму и последовательность средних арифметических частичных сумм ряда (52) через $U - k, U', \alpha'_n$, те же величины для ряда (53) - через V_k, V, α''_n, а через S_n, α_n - частичные суммы и последовательность средних арифметических сумм ряда (54). Тогда $\alpha'_n \to U, \alpha''_n \to V$ при $n \to \infty$, а так как $S_n = \alpha U_n + \beta V_n$, то $\alpha_n = \alpha\alpha'_n + \beta\alpha''_n \to \alpha U + \beta V$ при $n \to \infty$.

Регулярность метода суммирования Чезаро немедленно следует мз доказанной леммы 1 о сходимости последовательности средних арифметических n чисел, согласно которой из сходимости последовательности $\{S_n\}$ к числу S при $n \to \infty$ вытекает существование предела (55) и его равенство тому же числу S.

Из упомянутой леммы также следует, что если $\{S_n\}$ - бесконечно большая последовательность, то $\{\alpha_n\}$ - такая же последовательность. Это означает, что метод суммирования Чезаро неприменим к расходящимся рядам с неторицательными членами (напр., $\sum \frac{1}{k}, \sum 1, \sum k$).

Примеры рядов, не сходящихся в обычном смысле, но суммируемых методом Чезаро.

1. Рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

   $S_{2n} = 0, S_{2n-1} = 1 \quad => \quad \alpha_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, ..., \frac{n}{2n-1}, \frac{n}{2n}, ...$, следовательно, предел (55) существует равен $\frac{1}{2}$, то есть ряд суммируем методом Чезаро и его обобщённая сумма S (в смысле Чезаро) равна $\frac{1}{2}$.

2. Зафиксируем произвольное число $x \in (0, 2\pi)$ и рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + ... \tag{56}$$

   Выражения для n-й частичной суммы этого ряда имеет следующий вид

$$S_n = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

   Посчитаем среднее арифметическое частичных сумм

$$\alpha_n = \frac{S_1 + S_2 + ... + S_n}{n} = \frac{1}{2n\sin\frac{x}{2}}\left(\sum_{l=1}^{n}\left(l + \frac{l}{2}\right)x\right) - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4n\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{l=1}^{n}(\cos lx - \cos(l+1)x) - \frac{1}{2} = \frac{\cos x - \cos(n+1)x}{4n\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

   Следовательно, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = -\frac{1}{2}$, то есть ряд (56) суммируем методом Чезаро и его обобщённая сумма (в смысле Чезаро) равна $-\frac{1}{2}$ для каждого значения $x \in (0, 2\pi)$.

3. Рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k = 1 - 2 + 3 - 4 + ... \tag{57}$$

   Частичные суммы принимают значения $1, -1, 2, -2, ..., n, -n, ...$. Последовательность α_n их средних арифметических раходится, так как имеет две предельные точки 0 и $\frac{1}{2}$. Таким образом, ряд не суммируем методом Чезаро.

12 Метод Пуассона-Абеля суммирования расходящихся рядов

Для того, чтобы улучшить сходимость ряда (52), умножим общий член ряда на бесконечно малую последовательность, но так, чтобы в пределе снова получить u_k.

Для этого рассмотрим метод Пуассона-Абеля. Рассмотрим для каждого значения $x \in (0,1)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + ... + u_k x^{k-1} + ... \tag{58}$$

Если этот ряд сходится для каждого x из интервала $(0,1)$ и если сумма $S(x)$ этого ряда имеет левое предельное значение в точке $x = 1$, то есть существует предел $\lim\limits_{x \to 1-0} S(x) = S$, то говорят, что ряд (52) суммируем методом Пуассона-Абеля. При этом число S называется суммой ряда (52) в смысле Пуассона-Абеля.

Линейность метода Пуассона-Абеля очевидна. Действительно, обозначим сумму ряда (58) и обобщённую в смысле Пуассона-Абеля сумму ряда (52) соответственно через $U(x), U$, те же величины для ряда (53) через $V(x), V$. Тогда для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k) x^{k-1} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} + \beta \sum_{k=1}^{\infty} v_k x^{k-1} = \alpha U(x) + \beta V(x) \to \alpha U + \beta V \quad \text{при} \quad x \to 1-0$$

Докажем регулярность этого метода. Пусть ряд (52) сходится в обычном смысле и имеет сумму S. Требуется доказать, что ряд (58) сходится для каждого $x \in (0,1)$ и сумма $S(x)$ ряда (58) имеет в точке $x = 1$ левое предельное значение, равное S.

Так как ряд (52) сходится, то последовательность его членов бесконечно малая и, следовательно, ограниченная, то есть найдётся такое число M, что $|u_k| \leqslant M$ для всех номеров k. Используя это неравенство, оценим модуль k-го члена ряда (58). Получим

$$|u_k x^{k-1}| \leqslant M x^{k-1}, \quad x \in (0,1)$$

Так как ряд с общим членом x^{k-1} при $x \in (0,1)$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится и ряд (58). Обозначим его сумму через $S(x)$.

Обозначим n-ю частичную сумму ряда (52) через S_n, обычную сумму этого ряда через S и через $r_n = S - S_n$ - n-й остаток этого ряда. Для получения удобного для дальнейших преобразований представления суммы $S(x)$ применим тождество Абеля

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n$$

Положим в этом тождестве $n = 1, v_k = x^{k-1}, S_0 = 0$ и устремим p к бесконечности. Получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}$$

Вычтем это тождество из очевидного тождества

$$S = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} Sx^{k-1}$$

Имеем

$$S - \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} Sx^{k-1} - (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}$$

или

$$S - S(x) = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1} \tag{59}$$

Докажем, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon |S - S(x)| < \varepsilon\ \forall x \in (1-\delta, 1) \tag{60}$$

Так как остаток r_k ряда (52) стремится к нулю при $k \to \infty$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\colon \forall k \geqslant k_0\ |r_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Оценим остаток ряда (59)

$$\left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1} < \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1-x}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in (0,1)$$

Оценим оставшуюся часть ряда (59). Обозначим $c = \sum\limits_{k=1}^{k_0-1} |r_k|$ и рассмотрим $1 - \frac{\varepsilon}{2c}, x < 1$. Тогда

$$\left|(1-x)\sum_{k=1}^{k_0-1} r_k x^{k-1}\right| \leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{k_0-1} |r_k| = c(1-x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Подставив полученные оценки в (59), устанавливаем справедливость утверждения (60): $\exists \lim\limits_{x\to 1-0} S(x) = S$. Таким образом, метод суммирования Пуассона-Абеля является регулярным.

Пример

Применим метод суммирования Пуассона-Абеля к уже рассмотренному в предыдущем пункте расходящемуся ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{61}$$

Сумму соответствующего ему ряда (58) найдём как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^{k-1}=1-x+x^2-x^3+...=\frac{1}{1+x}\quad\forall x\in(0,1)$$

Так как существует предел $\lim\limits_{x\to 1-0}S(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$, то ряд () суммируем методом Пуассона-Абеля и его сумма в смысле Пуассона-Абеля равна $\frac{1}{2}$.

Можно доказать, что если ряд суммируем методом Чезаро, то он суммируем и методом Пуассона-Абеля и его обобщённые суммы совпадают. При этом существуют ряды, суммируемые методом Пуассона-Абеля, но не суммируемые методом Чезаро.

13 Бесконечные произведения и их свойства

К понятию числового ряда близко примыкает понятие бесконечного произведения. Пусть дана бесконечная числовая последовательность $\{v_k\}$. Перемножим её элементы.

Определение 12 *Формально записанное выражение*

$$v_1\cdot v_2\cdots v_k\cdots=\prod_{k=1}^{\infty}v_k \tag{62}$$

называется бесконечным произведением.

Определение 13 *Элементы v_k называются членами бесконечного произведения.*

Произведение первых n членов данного бесконечного произведения обозначим через P_n и назовём n-м частичным произведением

$$P_n=v_1\cdot v_2\cdots v_n=\prod_{k=1}^{n}v_k$$

Определение 14 *Бесконечное произведение (62) называется сходящимся, если последовательность его частичных произведений $\{P_n\}$ имеет конечный предел P, отличный от нуля.*

В случае сходимости указанный предел P называют значением бесконечного произведения и записывают

$$P=\prod_{k=1}^{\infty}v_k$$

По соглашению, ряд, у которого хотя бы один член равен нулю, будем считать расходящимся.

Теорема 18 ***(необходимое условие сходимости бесконечного произведения)*** *Если бесконечное произведение (62) сходится, то $v_k\to 1$ при $k\to\infty$.*

Доказательство

Пусть бесконечное произведение (62) сходится и имеет значение P, отличное от нуля. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}P_{k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}P_k=P\neq 0$. Поскольку $v_k=\frac{P_k}{P_{k-1}}$, то существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}v_k=\frac{P}{P}=1$.

■

Пример

Найти значение бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^k}\cdots \tag{63}$$

где $x \in \mathbb{R}$ - любое фиксированное число.

Заметим, что для бесконечного произведения (63) выполнено необходимое условие сходимости. Если $x = 0$, то $\cos\frac{x}{2^k} = 1$ для всех номеров k и значение произведения $P = 1$. Зафиксируем любое значение $x \neq 0$. Посчитаем n-е частичное произведение

$$P_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} \tag{64}$$

Рассмотрим $n >> 1$: $\sin\frac{x}{2^n} \neq 0$, домножим на $\sin\frac{x}{2^n}$ и используем тригонометрическую формулу $\sin y\cos y = \frac{1}{2}\sin 2y$. В результате получим

$$P_n = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} \to \frac{\sin x}{x} \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

$\sin x = 0 | x = \pi k, k\in\mathbb{Z}$ $=>$ $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x} \tag{65}$$

Доопределив равенство (65) в точке $x = 0$ нулём, получаем, что равенство (65) верно и для $x = 0$.

В точках $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ равенство (65) тоже верно, так как обе его части обращаются в нуль.

Критерии сходимости бесконечных проивзедений

Теорема 19 *Для того чтобы бесконечное проивзедение (62) с положительными членами сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln v_k \tag{66}$$

В случае сходимости значение P произведения (62) и сумма ряда (66) связаны формулой $P = e^S$.

Доказательство

Обозначим n-е частичное произведение бесконечного произведения (62) через P_n, а n-ю частичную сумму ряда (66) - через S_n. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\ln v_k = \ln\prod_{k=1}^{n} v_k = \ln P_n, \quad P_n = e^{S_n}$$

В силу непрерывности: P_n сходится $\iff$ сходится S_n, причём если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = e^S$.

■

При исследовании на сходимость бесконечного произведения на сходимость оказывается удобным представить это бесконечное произведение в виде

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k) = (1+u_1)(1+u_2)...(1+u_k)... \tag{67}$$

При этом его сходимость эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+u_k) \tag{68}$$

Теорема 20 *Если все u_k начиная с некоторого номера $k_0 \geqslant 1$ сохранают один и тот же знак, то для сходимости бесконечного произведения (67) необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k \tag{69}$$

Доказательство

Условие $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ является необходимым как для сходимости ряда (69), так и для сходимости ряда (67). Поэтому будем считать это условие выполненным и при доказательстве необходимости, и при доказательстве достаточности. Но из этого условия и из асимптотической формулы $\ln(1+y) = y + o(1)$ при $y \to 0$ вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1+u_k)}{u_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{u_k + o(u_k)}{u_k} = \lim_{k\to\infty}(1+o(1)) = 1 \tag{70}$$

Поскольку по условию теоремы все члены рядов (68), (69) начиная с некоторого номера k_0 сохраняют один и тот же знак, то для их сходимости мы можем воспользоваться признаками сравнения. По второму признаку сравнения из соотношения (70) следует, что ряд (69) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (68).

■

14 Последовательности с равномерно ограниченным изменением и их свойства

Определение 15 *Последовательность $\{v_k\}$ назовём последовательностью с ограниченным изменением, если сходится числовой ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|v_{k+1} - v_k| = |v_2 - v_1| + |v_3 - v_2| + ... \tag{71}$$

Сумму ряда (71) в случае его сходимости обозначим через V.

Определение 16 *Число V называется полным изменением последовательности $\{v_k\}$.*

Пример 1 *Последовательность с общим членом $v_k = k$, очевидно, имеет неограниченное изменение $(v_{k+1} - v_k = 1)$, и ряд (71) расходится.*

Пример 2 *Последовательность с общим членом $v_k = \frac{1}{k}$ имеет ограниченное изменение*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{72}$$

ряд (71) сходится.

Общий член последовательности с ограниченным изменением не обязан стремиться к нулю.

Пример 3 *Покажем, что не всякая сходящаяся последовательность имеет ограниченное изменение. Пусть $v_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Тогда*

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n}|v_{k+1} - v_k| &= \left|-\frac{1}{2} - 1\right| + \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right| + ... + \left|(-1)^k\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right| = \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{n+1} = 2H_n - 1 + \frac{1}{n+1} \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty \end{aligned} \tag{73}$$

ряд (71) расходится, сходящаяся к нулю последовательность $\{v_k\}$ не имеет ограниченного изменения.

Утверждение 8 *Всякая последовательность с ограниченным изменением сходится. Обратное неверно.*

Доказательство

То, что не всякая сходящаяся последовательность имеет ограниченное изменение, следует из рассмотренного примера 3. Заметим далее, что из сходимости ряда (71) вытекает сходимость ряда без модулей.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(v_{k+1} - v_k) \tag{74}$$

Обозначим сумму ряда (72) через S, а его n-ю частичную сумму - через S_n. Поскольку $S_n = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + ... + (v_{n+1} - v_n) = v_{n+1} - v_1$, то $v_{n+1} = S_n + v_1 \to S + v_1$ при $n \to \infty$. Это означает, что последовательность $\{v_n\}$ сходится к пределу $S + v_1$.

■

Утверждение 9 *Всякая монотонная ограниченная последовательность является последовательностью с ограниченным изменением.*

Доказательство

Так как последовательность $\{v_k\}$ монотонная и ограниченная, то она сходится. Обозначим её предел через v. Обозначим n-ю частичную сумму ряда (71) через S_n. Так как последовательность $\{v_k\}$ монотонна, все разности $v_{k+1} - v_k$ имеют один знак. Но тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k| = \left|\sum_{k=1}^{n}(v_{k+1} - v_k)\right| = |v_{n+1} - v_1| \to |v - v_1| \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Это означает, что ряд (71) чходится. его сумма равна $V = |v - v_1|$, а последовательность $\{v_k\}$ имеет ограниченное изменение.

■

Утверждение 10 *Для того чтобы последовательность имела ограниченное изменение, необходимо и достаточно, чтобы её общий член можно было представить в виде разности двух ограниченных неубывающих последовательностей.*

15 Признаки Абеля равномерной сходимости функциональных рядов

Определение 17 *Ряды и последовательности, членами которых являются не числа, а функции, определённые на некотором фиксированном множестве, называются функциональными.*

Зафиксируем некоторое множество $\{x\}$ в m-мерном евклидовом пространстве $E^m, m \geqslant 1$. Элементами этого множества являются точки $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ с координатами $x_1, x_2, ..., x_m$.

Рассмотрим на некотором множестве $\{x\}$ функциональный ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x) \tag{75}$$

Докажем для этого ряда два признака равномерной сходимости.

Обозначим через $\{S_n(x)\}$ последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{76}$$

Теорема 21 ***(два признака Абеля)***

1. *Пусть последовательность $\{S_n(x)\}$ равномерно ограничена на множестве $\{x\}$, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ - бесконечно малая с равномерно ограниченным на множестве $\{x\}$ изменением. Тогда ряд (75) сходится равномерно на множестве $\{x\}$.*

2. *Пусть функциональный ряд (75) сходится равномерно на множестве $\{x\}$, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ имеет равномерно ограниченное на множестве $\{x\}$ изменениеи равномерно ограничена на этом множестве. Тогда ряд (75) сходится равномерно на множестве $\{x\}$.*

Доказательство

1. По условию существует число $M > 0$ такое, что последовательность $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда (75) для всех номеров n и точек x из множества $\{x\}$ удовлетворяет неравенству $|S_n(x)| \leqslant M$.

   Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему номер N такой, что для всех n, превосходящих N, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$ справедливы неравенства

$$|v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M} \tag{77}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M} \tag{78}$$

   $\{v_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на множестве $\{x\}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x) - v_k(x)|$ равномерно сходится на множестве $\{x\}$.

   В силу тождества Абеля

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + S_{n+p}v_{n+p} - S_n v_{n+1}, \quad p \neq 1 \tag{79}$$

   (при $p = 1$ первая сумма в правой части будет заменена нулём). И в силу того, что модуль суммы трёх величин не превосходит сумму трёх модулей, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x))\right| + |S_{n+p}(x)||v_{n+p}(x)| + |S_n(x)||v_{n+1}(x)|$$

   Учитывая, что для всех номеров n и всех точек x из множества $\{x\}$ справедливо неравенство $|S_n(x)| \leqslant M$, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| + M|v_{n+p}(x)| + M|v_{n+1}(x)|$$

   Полагая $n > N$, из последнего неравенства и оценок (77) и (78) получим неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| < M\left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon$$

   справедливое для всех номеров n, превосходящих N, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$, а это и означает, что ряд (75) сходится равномерно на множестве $\{x\}$ в силу теоремы Коши.

2. Так как функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ равномерно ограничена на множестве $\{x\}$, то существует число $M > 0$ такое, что для всех номеров n и всех x из множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$|v_n(x)| \leqslant M \tag{80}$$

При условиях второго признака Абеля последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$ ряда (76) может не быть равномерно ограниченной на множестве $\{x\}$. Поэтому рассмотрим модифицированные суммы

$$\hat{S}_n(x) = \sum_{k=N}^{n} u_k(x), \quad n \geqslant N$$

где номер N выбираем следующим образом. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Ряд (76) по условию теоремы сходится равномерно на множестве $\{x\}$, поэтому, согласно теореме Коши, найдётся номер N такой, что для всех номеров $n \geqslant N$ и всех точек x из множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$\left|\hat{S_n(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{3M} \tag{81}$$

Зафиксируем номер N.

В силу критерия Коши равномерной на $\{x\}$ сходимости функционального ряда (71) для числа $M > 0$ найдётся номер $N_1 > N$ такой, что при всех x из множества $\{x\}$, для всех $n \geqslant N_1$ и для любого $p = 1, 2, ...$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \leqslant M \tag{82}$$

Поскольку для всех номеров $n > N$ справедливо представление $u_n(x) = \hat{S}_n(x) - \hat{S}_{n-1}(x)$, то обоснование тождества Абеля (79) после замены S_n на $\hat{S}_n$ не изменится и само тождество можно записать в следующем виде

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \hat{S}_k (v_k - v_{k+1}) + \hat{S}_{n+p} v_{n+p} - \hat{S}_n v_{n+1} \tag{83}$$

(в случае $p = 1$ в правой части (84) первую сумму следует заменить нулём). В силу этого тождества для всех номеров n и p и всех x из множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x)\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} \hat{S}_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x))\right| + \left|\hat{S}_{n+p}\right| |v_{n+p}(x)| + \left|\hat{S}_n(x)\right| |v_{n+1}(x)| \tag{84}$$

Используя в правой части (84) неравенства (80), (81) и (82), мы для всех $n \geqslant N_1$, всех $p = 1, 2, ...$ и всех x из множества $\{x\}$ получим неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| < \varepsilon$$

которое в силу критерия Коши доказывает равномерную на множестве $\{x\}$ сходимость функционального ряда (75).

■

Теорема 22 ***(признак Дирихле-Абеля)*** *Если функциональный ряд (76) обладает равномерно ограниченной на множестве $\{x\}$ последовательностью частичных сумм, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ монотоннаи на множестве $\{x\}$ и равномерно на этом множестве сходится к нулю, то функциональный ряд (75) сходится равномерно на множестве $\{x\}$.*

Доказательство

Достаточно заметить, что из

Утверждение 11 *Всякая монотонная равномерно сходящаяся на множестве $\{x\}$ функциональная последовательность является последовательностью с равномерно ограниченным на этом множестве изменением.*

следует, что последовательность $\{v_n(x)\}$ обладает на множестве $\{x\}$ равномерно ограниченным изменением, поэтому выполняются все условия теоремы для первого признака Абеля.

■