STEADY STATE:

$$\nabla \cdot \nabla T = 0$$

$$\int_V \nabla \cdot \nabla T \, dV = 0$$

$$\int_A \nabla T \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\sum_{k=e,w,s,n} \nabla T_{\mathrm{k}} \cdot \overrightarrow{A_k} = 0$$

με

$\overrightarrow{A_e} = r_e \delta r \overrightarrow{e_x}$

$\overrightarrow{A_w} = -r_w \delta r \overrightarrow{e_x}$

$\overrightarrow{A_s} = -r_s \delta x \overrightarrow{e_r}$

$\overrightarrow{A_n} = r_n \delta x \overrightarrow{e_r}$

και

$\nabla T_e = \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}}\right)_{\mathrm{e}} = \frac{T_E - T_P}{\delta x} \overrightarrow{e_x}$

$\nabla T_w = \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}}\right)_{\mathrm{w}} = \frac{T_P - T_W}{\delta x} \overrightarrow{e_x}$

$\nabla T_s = \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{r}}\right)_{\mathrm{s}} = \frac{T_P - T_S}{\delta r} \overrightarrow{e_r}$

$\nabla T_n = \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{r}}\right)_{\mathrm{n}} = \frac{T_N - T_P}{\delta r} \overrightarrow{e_r}$

Άρα

$$\sum_{k=e,w,s,n} \nabla T_{\mathrm{k}} \cdot \overrightarrow{A_k} = -T_P \left(\frac{r_e \delta r}{\delta x} + \frac{r_w \delta r}{\delta x} + \frac{r_n \delta x}{\delta r} + \frac{r_s \delta x}{\delta r}\right) + T_E \frac{r_e \delta r}{\delta x} + T_W \frac{r_w \delta r}{\delta x} + T_S \frac{r_s \delta x}{\delta r} + T_N \frac{r_n \delta x}{\delta r}$$

Θέτω:

$$a_E = \frac{r_e \delta r}{\delta x}$$

$$a_W = \frac{r_w \delta r}{\delta x}$$
$$a_S = \frac{r_s \delta x}{\delta r}$$
$$a_N = \frac{r_n \delta x}{\delta r}$$
$$a_P = \sum_{k=e,w,s,n} a_k$$

Άρα:

$$\sum_{k=e,w,s,n} \nabla T_\mathrm{k} \cdot \overrightarrow{A_k} = -T_P a_P + \sum_{k=e,w,s,n} a_k \, T_k = 0$$

$$T_P a_P = T_E a_E + T_W a_W + T_S a_S + T_N a_N$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ:

$\nabla T_i = \gamma\nu\omega\sigma\tau\acute{o}$ ή $T_i = \gamma\nu\omega\sigma\tau\acute{o}$

- DIRICHLET:
$$T_i = \gamma\nu\omega\sigma\tau\acute{o}$$
- NEUMANN:
$$\nabla T_i = 0$$
- MIXED:
$\mathrm{k}\nabla T_i = h(T_\infty - T_i) \rightarrow \nabla T_i = \frac{h}{k}(T_\infty - T_i), T_i = \frac{T_i + T_\infty}{2}$

- DIRICHLET:
$$T_i = \gamma\nu\omega\sigma\tau\acute{o}$$

Πχ Η θερμοκρασία στο νότιο σύνορο είναι σταθερή:
$T_s = \gamma\nu\omega\sigma\tau\acute{o} = T_0$

$$\int \nabla \cdot \nabla T \, \mathrm{dV} = \sum_{k=e,w,s,n} \nabla T_\mathrm{k} \cdot \overrightarrow{A_k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{T_E - T_P}{\delta x}\overrightarrow{e_x} \cdot\ r_e \delta r \overrightarrow{e_x} + \frac{T_P - T_W}{\delta x}\overrightarrow{e_x} \cdot (-r_w \delta r \overrightarrow{e_x}) + \frac{T_P - T_0}{\delta r/2}\overrightarrow{e_r} \cdot (-r_s \delta x \overrightarrow{e_r}) \\
&\qquad + \frac{T_N - T_P}{\delta r}\overrightarrow{e_r} \cdot r_n \delta x \overrightarrow{e_r} \\
&= T_E \frac{r_e \delta r}{\delta x} + T_W \frac{r_w \delta r}{\delta x} + T_N \frac{r_n \delta x}{\delta r} - T_P \left(\frac{r_e \delta r}{\delta x} + \frac{r_w \delta r}{\delta x} + \frac{r_n \delta x}{\delta r} + 2\frac{r_s \delta x}{\delta r}\right) \\
&\qquad + 2T_0 \frac{r_s \delta x}{\delta r} = \sum_{k=e,w,n} a_k\, T_k - (a_P + a_s) T_P + 2T_0 a_S
\end{aligned}
$$

$$
\nabla \cdot \nabla T = \sum_{k \neq S} a_k\, T_k - (a_P + a_s) T_P + 2T_0 a_s
$$

Γενικά:

$$
\int \nabla \cdot \nabla T\, \mathrm{dV} = \sum_{k \neq b} a_k\, T_k - (a_P + a_b) T_P + 2T_0 a_b
$$

όπου b, η *κατεύθυνση της συνοριακής πλευράς*

- NEUMANN:

$$
\nabla T_i = 0
$$

Πχ αδιαβατικό νότιο σύνορο , $\nabla T_s = 0$

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla T &= \sum_{k=e,w,s,n} \nabla T_{\mathrm{k}} \cdot \overrightarrow{A_k} = \sum_{k=e,w,n} \nabla T_{\mathrm{k}} \cdot \overrightarrow{A_k} \\
&= \frac{T_E - T_P}{\delta x}\overrightarrow{e_x} \cdot\ r_e \delta r \overrightarrow{e_x} + \frac{T_P - T_W}{\delta x}\overrightarrow{e_x} \cdot (-r_w \delta r \overrightarrow{e_x}) + \frac{T_N - T_P}{\delta r}\overrightarrow{e_r} \cdot r_n \delta x \overrightarrow{e_r} \\
&= T_E \frac{r_e \delta r}{\delta x} + T_W \frac{r_w \delta r}{\delta x} + T_N \frac{r_n \delta x}{\delta r} - T_P \left(\frac{r_e \delta r}{\delta x} + \frac{r_w \delta r}{\delta x} + \frac{r_n \delta x}{\delta r}\right) \\
&\qquad = \sum_{k=e,w,n} a_k\, T_k - (a_P - a_s) T_P
\end{aligned}
$$

Γενικά:

$$
\int \nabla \cdot \nabla T\, \mathrm{dV} = \sum_{k \neq b} a_k\, T_k - (a_P - a_b) T_P
$$

- MIXED:

$$
\mathrm{k} \nabla T_i = h(T_\infty - T_i) \rightarrow \nabla T_i = \frac{h}{k}(T_\infty - T_i)
$$

Πχ μεταφορά θερμότητας με συναγωγή στο νότιο σύνορο $\nabla T_s = \frac{h}{k}(T_\infty - T_s)$

$$\nabla \cdot \nabla T = \sum_{k=e,w,s,n} \nabla T_{\mathrm{k}} \cdot \overrightarrow{A_k}$$

$$= \frac{T_E - T_P}{\delta x}\overrightarrow{e_x} \cdot\ r_e \delta r \overrightarrow{e_x} + \frac{T_P - T_W}{\delta x}\overrightarrow{e_x} \cdot (-r_w \delta r \overrightarrow{e_x})$$

$$+ \frac{h}{k}(T_\infty - T_s)\overrightarrow{e_r} \cdot (-r_s \delta x \overrightarrow{e_r}) + \frac{T_N - T_P}{\delta r}\overrightarrow{e_r} \cdot r_n \delta x \overrightarrow{e_r}$$

$$= T_E \frac{r_e \delta r}{\delta x} + T_W \frac{r_w \delta r}{\delta x} + T_N \frac{r_n \delta x}{\delta r} - T_P \left(\frac{r_e \delta r}{\delta x} + \frac{r_w \delta r}{\delta x} + \frac{r_n \delta x}{\delta r}\right) + T_\infty \frac{h}{k} A_s$$

$$- T_s \frac{h}{k} A_s = \left(T_s = \frac{T_\infty + T_P}{2}\right)$$

$$T_E \frac{r_e \delta r}{\delta x} + T_W \frac{r_w \delta r}{\delta x} + T_N \frac{r_n \delta x}{\delta r} - T_P \left(\frac{r_e \delta r}{\delta x} + \frac{r_w \delta r}{\delta x} + \frac{r_n \delta x}{\delta r}\right) + T_\infty \frac{h}{k} A_s$$

$$- T_\infty \frac{h}{2k} A_s - T_P \frac{h}{2k} A_s$$

$$= T_E \frac{r_e \delta r}{\delta x} + T_W \frac{r_w \delta r}{\delta x} + T_N \frac{r_n \delta x}{\delta r} - T_P \left(\frac{r_e \delta r}{\delta x} + \frac{r_w \delta r}{\delta x} + \frac{r_n \delta x}{\delta r} + \frac{h}{2k} A_s\right)$$

$$+ T_\infty \frac{h}{2k} A_s$$

$$= \sum_{k=e,w,n} a_k T_k - (a_P - a_s + \frac{h}{2k} A_s) T_P + T_\infty \frac{h}{2k} A_s$$

Γενικά:

$$\int \nabla \cdot \nabla T \,\mathrm{dV} = \sum_{k \neq b} a_k T_k - (a_P - a_b + \frac{h}{2k} A_b) T_P + T_\infty \frac{h}{2k} A_b$$

UNSTEADY STATE:

$$\mathrm{d}\nabla \cdot \nabla T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$d \int_V \nabla \cdot \nabla T \, dV = \int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

$$d \int_A \nabla T \cdot d\vec{A} = \frac{\partial T}{\partial t} \int_V dV$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \delta V = d \sum_{k=e,w,s,n} \nabla T_{\mathrm{k}} \cdot \overrightarrow{A_k}$$

$$\frac{dT_P}{dt} = \frac{d}{\delta V} \sum_{k=e,w,s,n} \nabla T^n{}_{\mathrm{k}} \cdot \overrightarrow{A_k} = F\left(\overrightarrow{T^n}\right) \qquad (EXPLICIT)$$

Οι εκφράσεις της $\sum_{k=e,w,s,n} \nabla T^n{}_{\mathrm{k}} \cdot \overrightarrow{A_k}$ για όλες τις περιπτώσεις των συνοριακών τοιχωμάτων, έχουν βρεθεί από την ανάλυση του μόνιμου φαινομένου

- ΓΙΑ ΕΣΩΤΕΡΙΚΉ ΚΥΨΕΛΗ:

$$F\left(\overrightarrow{T^n}\right) = \frac{d}{\delta V}\left(-T^n{}_P a_P + \sum_{k=e,w,s,n} a_k T^n{}_k\right)$$

- ΓΙΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΚΥΨΕΛΗ ΜΕ ΑΓΩΓΗ:

$$F\left(\overrightarrow{T^n}\right) = \frac{d}{\delta V}\left(\sum_{k\neq b} a_k T^n{}_k - (a_P + a_b)T^n{}_P + 2T_0 a_b\right)$$

- ΓΙΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΚΥΨΕΛΗ ΜΕ ΣΥΝΑΓΩΓΗ:

$$F\left(\overrightarrow{T^n}\right) = \frac{d}{\delta V}\left(\sum_{k\neq b} a_k T^n{}_k - (a_P - a_b + \frac{h}{k}A_b)T^n{}_P + T_\infty \frac{h}{k}A_b\right)$$

- ΓΙΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΚΥΨΕΛΗ ΜΕ ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ:

$$F\left(\overrightarrow{T^n}\right) = \frac{d}{\delta V}\left(\sum_{k\neq b} a_k T^n{}_k - (a_P - a_b)T^n{}_P\right)$$

ΣΥΝΟΛΙΚΑ:

$$F\left(\overrightarrow{T^n}\right) = \frac{d}{\delta V}\left(\sum_{k\neq b} a_k T^n{}_k - a_P T^n{}_P\right) + F'\left(\overrightarrow{T^n}\right)$$

'ΟΠΟΥ:

$$F'\left(\overrightarrow{T^n}\right) = \begin{cases} \left(-a_b T^n{}_P + 2T_0 a_b\right)\frac{d}{\delta V}, \text{ΑΓΩΓΗ} \\ -a_b T^n{}_P \frac{d}{\delta V}, \text{ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ} \\ \left(a_b T^n{}_P - \frac{h}{k}A_b T^n{}_P + T_\infty \frac{h}{k}A_b\right)\frac{d}{\delta V}, \text{ΣΥΝΑΓΩΓΗ} \end{cases}$$

ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΛΥΣΩ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ:

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{T_P}\right) = F\left(\overrightarrow{T^n}\right)$$

Η πιο απλή μέθοδος, είναι η μέθοδος Euler:

$$\overrightarrow{T^{n+1}} = \overrightarrow{T^{n}} + \delta t \cdot F\left(\overrightarrow{T^{n}}\right)$$

- **Συνθήκη τερματισμού:**

Το φαινόμενο έχει τελειώσει όταν $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, δηλαδή όταν:

$$\nabla \cdot \nabla T = 0$$

$$\rightarrow \sum_{k=e,w,s,n} \nabla T_{\mathrm{k}} \cdot \overrightarrow{A_k} = 0, \forall \kappa \upsilon \psi \acute{\varepsilon} \lambda \eta$$

Άρα πρέπει:

$$\sum_{k=e,w,s,n} \nabla \vec{T}_{\mathrm{k}} \cdot \overrightarrow{A_k} = 0$$

$$\rightarrow F_{ij}\left(\overrightarrow{T^{n}}\right) = 0 \quad , \forall\ \kappa \upsilon \psi \acute{\varepsilon} \lambda \eta\ (i,j)$$

$$\rightarrow residual\left(\vec{F}\left(\overrightarrow{T^{n}}\right)\right) = \left\| \vec{F}\left(\overrightarrow{T^{n}}\right) \right\| = 0$$

$$\rightarrow \sqrt[\max(N,M)]{\sum_{i}^{N}\sum_{j}^{M}\left(\vec{F}\left(\overrightarrow{T_{ij}{}^{n+1}}\right) - \vec{F}\left(\overrightarrow{T_{ij}{}^{n}}\right)\right)^{\max(N,M)}} = 0$$

$$\rightarrow \sqrt[\max(N,M)]{\sum_{i}^{N}\sum_{j}^{M}\left(\vec{F}\left(\overrightarrow{T_{ij}{}^{n+1}}\right) - \vec{F}\left(\overrightarrow{T_{ij}{}^{n}}\right)\right)^{\max(N,M)}} < error$$

❖ Κλάσεις και συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται:

```
class boundary{
    public:

    int category_; // κατηγορία συνοριακής συνθήκης (CONDUCTION, CONVECTION, ADIABATIC)
    std::vector <double> values_; // Διάνυσμα με όλα τα απαραίτητα μεγέθη της συνοριακής
συνθήκης (θερμοκρασια, συντελεστής συναγωγιμότητας)

    boundary(int category, std::vector <double> values) // constructor
    :category_(category), values_(values){}

    boundary() = default;
    boundary(const boundary &other) = default;

    ~boundary() = default;
};
```

```
class UnsteadyState{
    public:
    int N_; // αριθμός διαίρεσης του πλέγματος στην x κατεύθυνση
    int M_; // αριθμός διαίρεσης του πλέγματος στην r κατεύθυνση
    mesh mesh_; // πλέγμα
    double dt_; // χρονικό βήμα
    double residual_;
    double error_; // μικρότερη δυνατή τιμή του residual, την επιλέγει ο χρήστης
    boundary boundaries_[4]; //οι 4 συνοριακές συνθήκες


    UnsteadyState(int N, int M, double T_initial, boundary bound[4], double error) //
constructor
    :N_(N), M_(M), dt_(0.05*dt_min(maxInt(N,M))), error_(error)
    {
        mesh mymesh(N,M,T_initial);
        mesh_ = mymesh;
        for (int i = 0; i < 4; i++)
        {
            boundaries_[i] = bound[i]; // γέμισμα των συνοριακών συνθηκών με array 'bound[]'
το οποίο φτιάχνεται μέσα στην main
        }
        Residual();
    }
```

```
// συνάρτηση που τυπώνει όλη την πορεία των θερμοκρασιών όλων των κυψελών του πλέγματος για
κάθε χρονική στιγμή, σε αρχείο .dat
    void RungeKutta1st(std::string datFile){
```

❖ Παράδειγμα χρήσης:

```
int main (){
    std::vector <double> vnorth = {0}; // στοιχεία συνοριακής συνθήκης στο άνω μέρος
(αδιαβατικά τοιχώματα)
    std::vector <double> vsouth = {0}; // στοιχεία συνοριακής συνθήκης στο κάτω μέρος
(αδιαβατικά τοιχώματα)
    std::vector <double> veast = {T_inf,h}; // στοιχεία συνοριακής συνθήκης στο δεξί μέρος
(συναγωγή με ρευστό θερμοκρασίας T_inf και συναγωγιμότητας h)
    std::vector <double> vwest = {T_inf,h}; // στοιχεία συνοριακής συνθήκης στο αριστερό μέρος
(συναγωγή με ρευστό θερμοκρασίας T_inf και συναγωγιμότητας h)

    // επισήμανση είδους συνοριακής συνθήκης σε κάθε μια από τις 4 κατευθύνσεις
    boundary north(ADIABATIC, vnorth);
    boundary south(ADIABATIC, vsouth);
    boundary east(CONVECTION, veast);
    boundary west(CONVECTION, vwest);
    // γέμισμα του πίνακα με τις συνοριακές συνθήκες
    boundary myboundaries[4] = {north, south, east, west};

    //μελέτη περίπτωσης, πρακτικά 1D προβλήματος, αφού έχω αδιαβατικά τοιχώματα πάνω και κάτω
    //Αριθμός διαίρεσης πλέγματος στην αξονική κατεύθυνση
    int M = 50;

    // Δημιουργία κλάσης του προβλήματος, όπου:
    //T_0: η αρχική θερμοκρασία κάθε κυψέλης για χρόνο t = 0
    //1e-4: επιθυμητή τιμή του residual
    UnsteadyState dummyProblem1(2, M, T_0, myboundaries,1e-4);

    //Υπολογιστική λύση στο σημείο x = L/2
    dummyProblem1.RungeKutta1st_point("test.dat");
    //Αναλυτική λύση στο σημείο x = L/2
    theoritical_transient_conduction(L/2,"theoritical_results.dat");




    return 0;
}
```