| Iset'Com | **Examen 2**<br>**Semestre** : 2<br>**Année universitaire :** 2019-2020 |
|---|---|
| **Module :** Mathématiques 2<br>**Enseignant(s) :** Ons Rgaieg / Aya Hmissi<br>**Documents autorisés :** Non | **Classe(s) :** STIC L1<br>**Durée :** 1h30mn<br>**Nbre de pages :** 2 |

**N.B. :**

1. Il est strictement interdit d'utiliser les calculatrices.
2. Les deux parties doivent être rédigées sur des feuilles séparées.

## *Partie 1 : Analyse*

**Exercice 1.**
*On considère l'équation :*

$$(E)\ :\ x(x^2+1)y' - 2y = x^3(x-1)^2\exp(-x).$$

*1.* **a)** *Trouver trois réels $a, b, c$ tels que :* $\dfrac{2}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

**b)** *En déduire une primitive sur* $]0,+\infty[$ *de* $x \longmapsto \dfrac{2}{x(x^2+1)}$.

**c)** *Trouver alors la solution homogène de* $(E)$.

*2. On se propose de trouver une solution particulière de $(E)$ en utilisant la méthode de la variation de la constante. On pose alors* $y_p(x) = \lambda(x).\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

**a)** *Montrer que* $\lambda'(x) = (x-1)^2.\exp(-x)$.

**b)** *Trouver 3 réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que* $x \longmapsto (\alpha.x^2+\beta.x+\gamma).\exp(-x)$ *soit une primitive de* $\lambda'(x)$.

**c)** *Donner alors l'expression de* $y_p$.

*3. En déduire l'ensemble des solutions de $(E)$.*

**Exercice 2.** *Soit la fonction :*

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\exp(x)-1}{x}\right).$$

*1. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction* $\exp(x)$.

*2. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de* $\dfrac{\exp(x)-1}{x}$.

*3. Donner alors le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de* $\ln\left(\dfrac{\exp(x)-1}{x}\right)$.

*4. En déduire* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

## *Partie 2 : Algèbre*

**Exercice 3.**
*Pour $m \in \mathbb{R}$, on donne la matrice suivante :*

$$A_m = \begin{pmatrix} m & m & m \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer $P_{A_m}(\lambda)$, le polynôme caractéristique de $A_m$.*
   *Déduire les valeurs propres de $A_m$ et leurs ordres en fonction de $m$.*
2. *Pour quelles valeurs de $m$ la matrice $A_m$ est-elle diagonalisable ?*
3. *Pour $m \neq 0$, trouver une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale telles que $A_m = P.D.P^{-1}$.*
4. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \neq 0$, donner l'expression de $A_m^n$ en fonction des matrices $P$, $P^{-1}$ et $D$.*

**Exercice 4.**
*On considère les polynômes :*

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \ ; \ Q(x) = x^2 + 1.$$

1. *Montrer que $1$ est une racine de $P$. Donner son ordre de multiplicité.*
2. *Factoriser $P$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.*
3. *En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver le PGCD de $P$ et $Q$.*
4. *Trouver deux polynômes $U$ et $V$ tels que $P.U + Q.V = 1$.*
5. *Donner la décomposition en éléments simples de la fraction :*

$$F(x) = \frac{1}{(x-1)^3.(x^2+1)}.$$