Algorytmy Macierzowe
Sprawozdanie 2
Rekurencyjne mnożenie macierzy

Przemek Węglik
Szymon Paszkiewicz

21 listopada 2022

Spis treści

1 Rekurencyjne odwracanie macierzy

1.1 Opis algorytmu

Algorytm dzieli macierz na 4 podmacierze, następnie wykonuje na każdej macierzy odpowiednie operacje:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A_{1,1}^{-1} = inverse(A_{1,1}) \tag{2}$$

$$S^{-1} = inverse(A_{2,2} - A_{2,1} * A_{1,1}^{-1} * A_{1,2}) \tag{3}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^{-1}(I + A_{1,2}S^{-1} * A_{2,1} * A_{1,1}^{-1}) & -A_{1,1}^{-1} * A_{1,2} * S \\ -S * A_{2,1} * A_{1,1}^{-1} & S \end{bmatrix} \tag{4}$$

gdzie:

A - macierz, którą chcemy odwrócić,

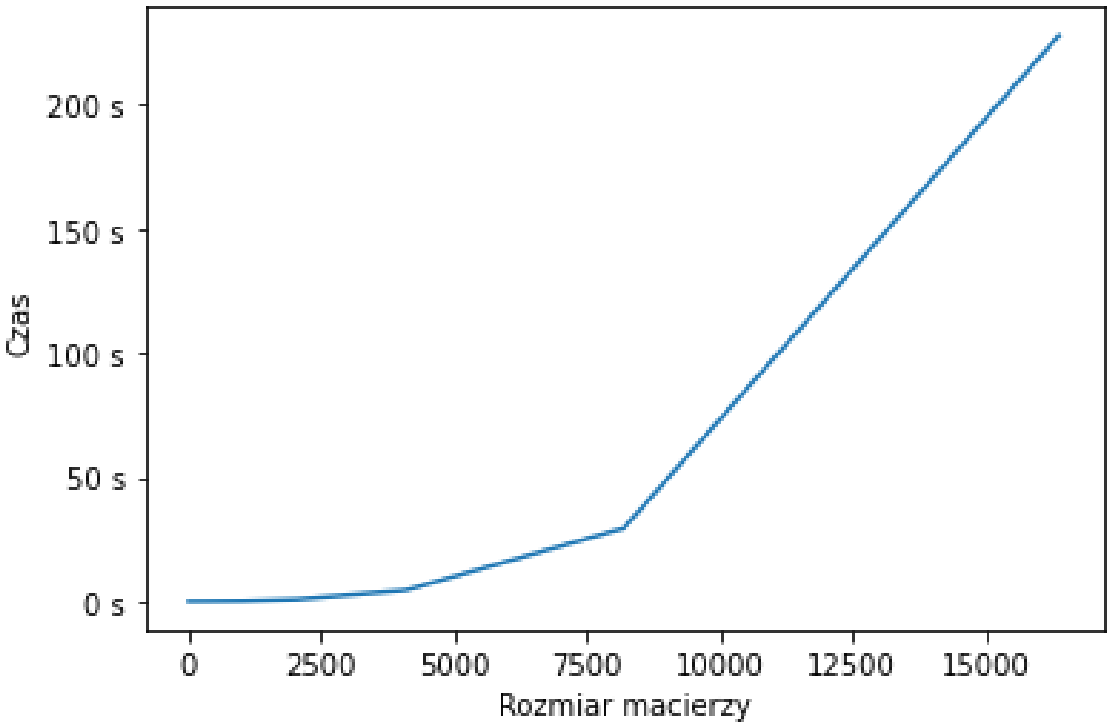
inverse - funkcja rekurencyjna odwracająca macierz,

S - macierz pomocnicza.

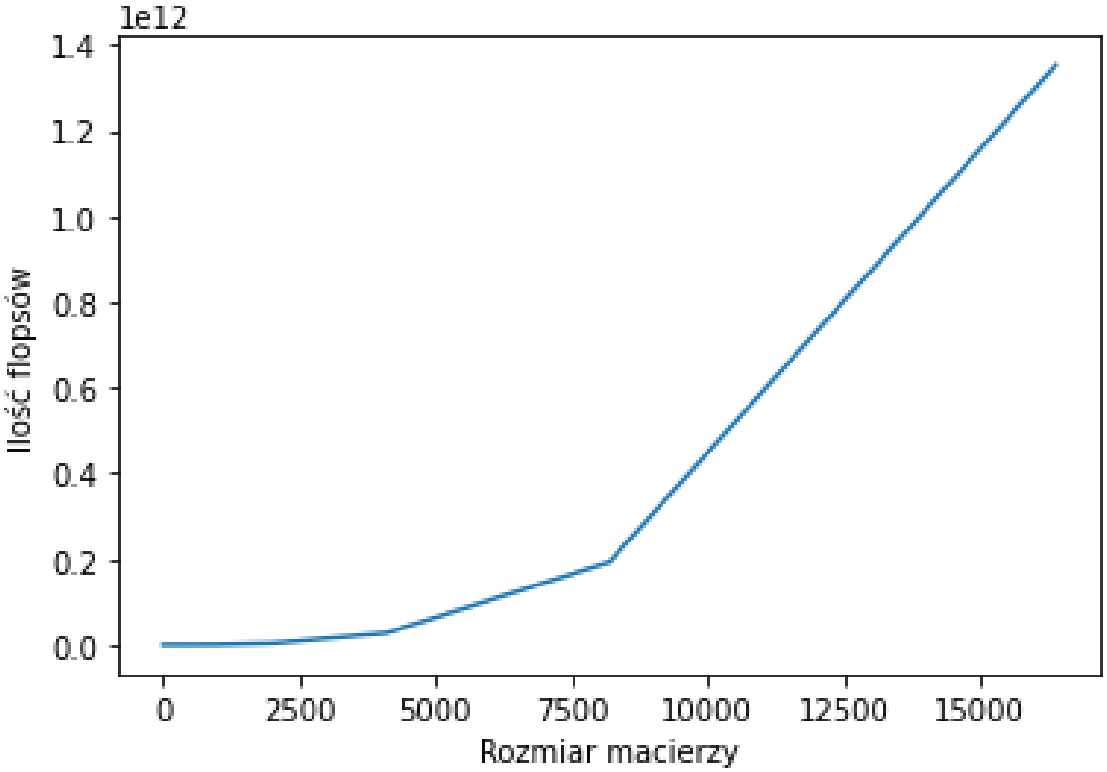
1.2 Pseudo-kod

```
def inverse(A):
    if A.size > 1:
        split_at = A.shape[0] // 2
        A11, A12, A21, A22 = split(A, split_at)

        A11_inv = inverse(A11)
        S22 = A22 + A21 * A11_inv * A12
        S22_inv = inverse(S22)

        B11 = A11_inv * (I + A12 * S22_inv * A21 * A11_inv)
        B12 = -A11_inv * A12 * S22_inv
        B21 = -S22_inv * A21 * A11_inv
        B22 = S22_inv

        return (
            [[B11, B12]
            [B21, B22]]
        )
    else:
        return 1/A
```

1.3 Benchmarki



Rysunek 1: Wykres czasu od rozmiaru macierzy.



Rysunek 2: Wykres libczby operacji od rozmiaru macierzy.

1.4 Złożoność obliczeniowa

Złożoność obliczeniowa algorytmu zależy od algorytmu mnożenia macierzy jaki został wykorzytany do obliczeń. W naszym przypadku był to algorytm Strassen'a, którego złożoność obliczeniowa wynosi: $O(n^{2.807})$.

1.5 Porównanie rozwiązania

Wyniki naszego algorytmu:

```
%% INPUT
A = np.array([[1, 8, 5], [2, 4, 6], [3, 5, 7]])
print(recursive_matrix_inverse(A, counter))

%% OUTPUT

[[-0.1  -1.55  1.4 ]
 [ 0.2  -0.4   0.2 ]
 [-0.1   0.95 -0.6 ]]
```

Wyniki uzyskane w numpy'u:

```
%% INPUT
A = np.array([[1, 8, 5], [2, 4, 6], [3, 5, 7]])
print(np.linalg.inv(A))

%% OUTPUT

[[-0.1  -1.55  1.4 ]
 [ 0.2  -0.4   0.2 ]
 [-0.1   0.95 -0.6 ]]
```

2 Rekurencyjna faktoryzacja LU

2.1 Opis algorytmu

Algorytm dzieli macierz na 4 podmacierze, a następnie przy ich użyciu wykonuje poniższe operacje.

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$[L_{1,1}, U_{1,1}] = LU(A_{1,1}) \tag{6}$$

$$[L_s, U_s] = LU(A_{2,2} - A_{2,1}U_{1,1}^{-1}L_{1,1}^{-1}A_{1,2}) \tag{7}$$

$$L = \begin{pmatrix} L_{1,1} & 0 \\ A_{2,1}U_{1,1}^{-1} & L_s \end{pmatrix} \tag{8}$$

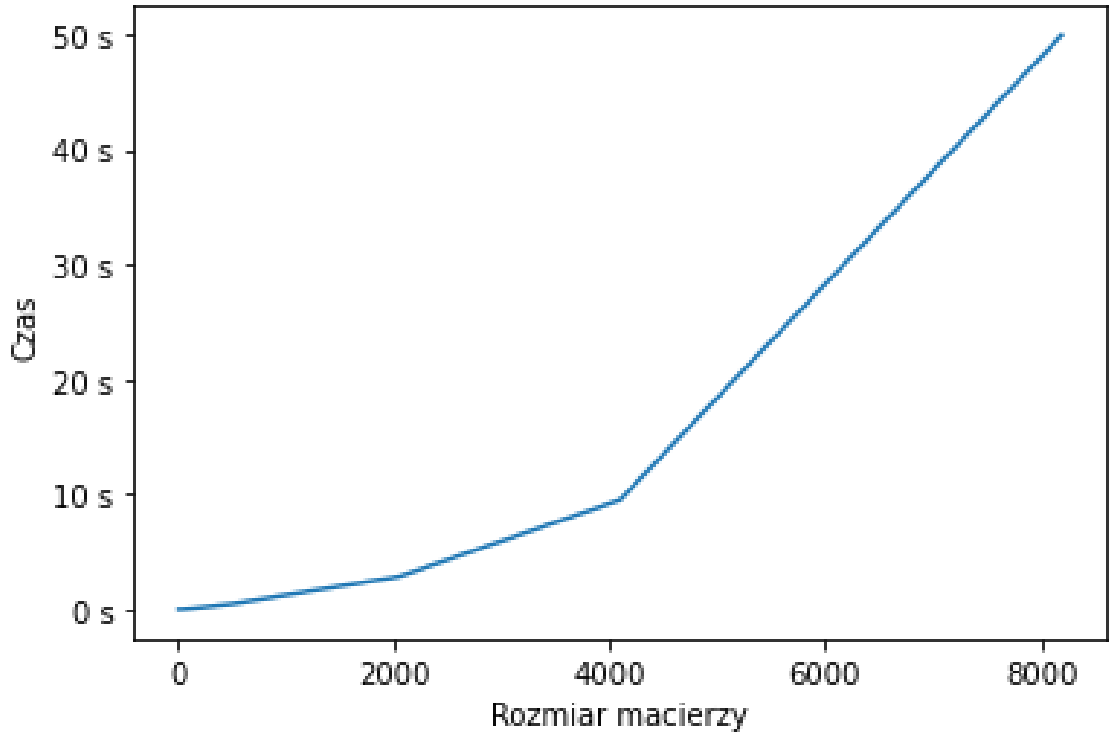
$$U = \begin{pmatrix} U_{1,1} & L_{1,1}^{-1}A_{1,2} \\ 0 & U_s \end{pmatrix} \tag{9}$$

2.2 Pseudo-kod

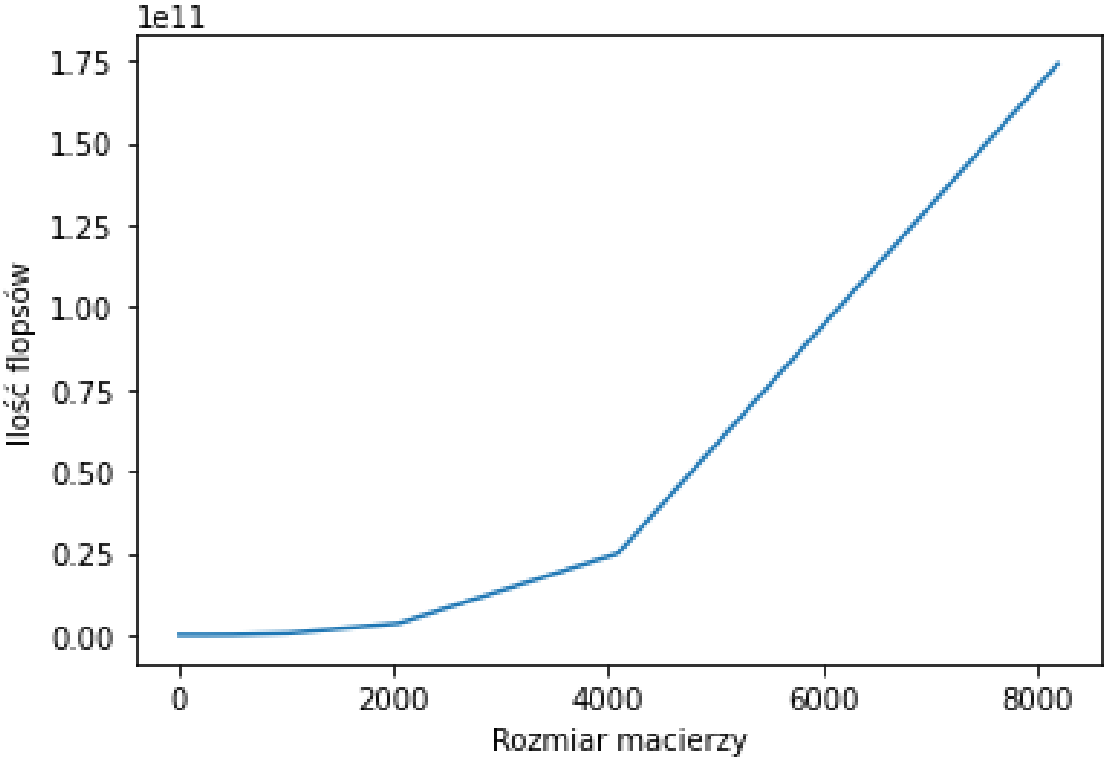
```
def LU(A):
    if A.size > 1:
        split_at = A.shape[0] // 2
        A11, A12, A21, A22 = split(A, split_at)
```

```
        L11, U11 = LU(A11)
        U11_inv = inverse(U11)

        L21 = A21 *U11_inv
        L11_inv = inverse(L11)

        U12 = L11_inv * A12
        L22 = A22 + -A21 * U11_inv * L11_inv * A12

        Ls, Us = LU(L22)
        U22 = Us
        L22 = Ls

        return(
            [[L11, 0]
            [L21, L22]],

            [[U11, U12]
            [0, U22]]
            )
    else:
        return (1, A[0, 0])
```

2.3 Benchmarki



Rysunek 3: Wykres czasu od rozmiaru macierzy.



Rysunek 4: Wykres libczby operacji od rozmiaru macierzy.

2.4 Złożoność obliczeniowa

Złożoność obliczeniowa faktoryzacji LU to w przybliżeniu $O(n^{2.529})$.

2.5 Porównanie rozwiązania

```
Wyniki uzyskane przez nasze implementacje:
%% INPUT
A = np.array([[1, 8, 5], [2, 4, 6], [3, 5, 7]])
L, U = recursive_lu(A, counter)
print(L)
print(U)
%% OUTPUT
[[1.         , 0.         , 0.         ],
 [2.         , 1.         , 0.         ],
 [3.         , 1.58333333, 1.         ]]

[[  1.         ,   8.         ,   5.         ],
 [  0.         , -12.         ,  -4.         ],
 [  0.         ,   0.         ,  -1.66666667]]
```

Wyniki w Wolframie:

$$A = L.U$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{19}{12} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

3 Rekurencyjne obliczanie wyznacznika

3.1 Opis algorytmu

Algorytm wykorzystuje faktoryzacja LU do obliczenia wyznacznika macierzy. Najpierw wykonujemy faktoryzacje, a następnie bierzemy wszystkie liczby z głównej przekątniej macierzy U i L, po czym mnożymi je wszystkie ze sobą.

$$[L_{n,n}, U_{n,n}] = LU(A_{n,n}) \tag{10}$$

$$U_{n,n} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$L_{n,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

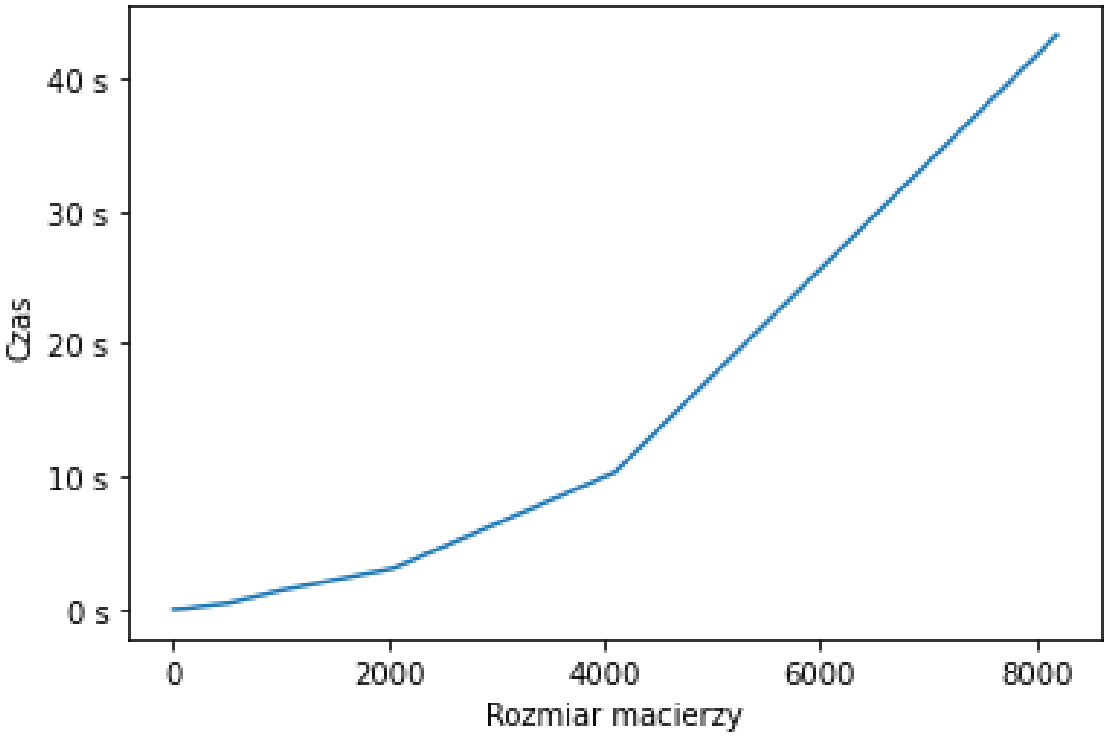
$$det(A) = \prod_{i=0}^{n} u_{i,i} * l_{i,i} \tag{13}$$

3.2 Pseudo-kod

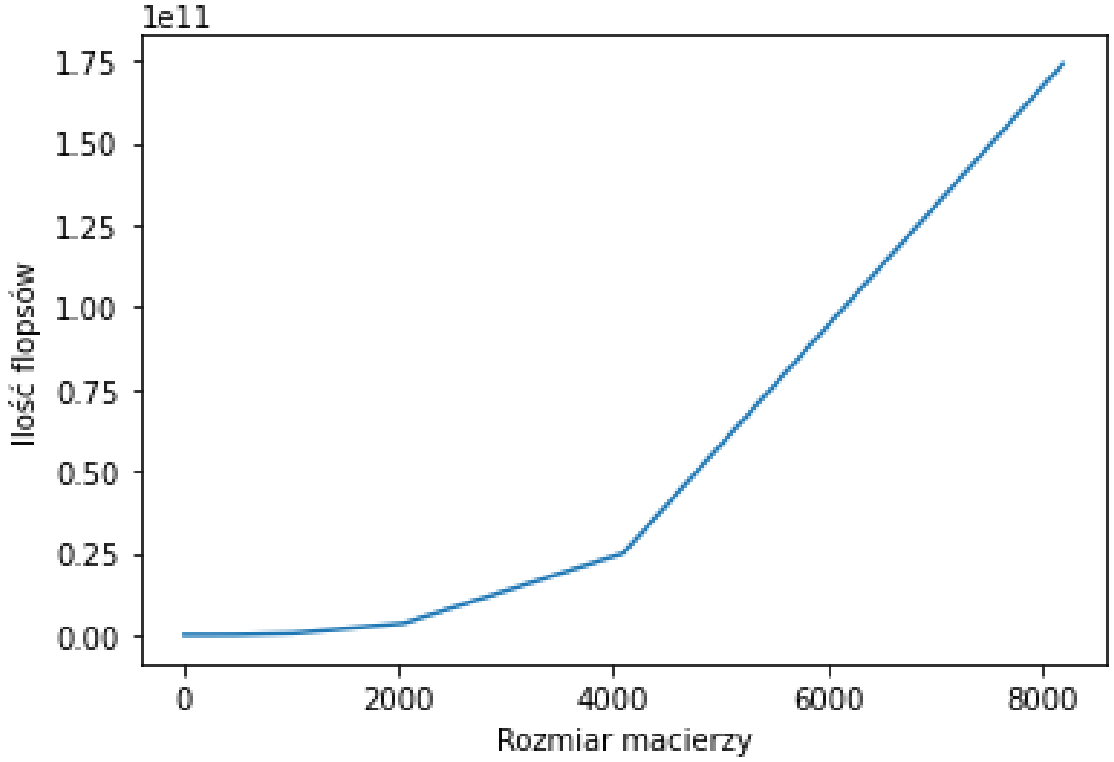
```
def determinant(A):
    L, U = LU(A)

    U_diag = diagonal(U)
```

```
    det = 1
    for u in U_diag:
        det *= u

    return det
```

3.3 Benchmarki



Rysunek 5: Wykres czasu od rozmiaru macierzy.



Rysunek 6: Wykres libczby operacji od rozmiaru macierzy.

3.4 Złożoność obliczeniowa

Złożoność obliczeniowa algorytmu zależy od funkcji wyznaczającej LU oraz od rozmiaru macierzy. Wiemy także, że złożoność obliczeniowa funkcji faktoryzującej jest zależna od rozmiaru macierzy i nie jest ona liniowa. Ostatecznie więc uzyskujemy: $O(n^{2.529})$

3.5 Porównanie rozwiązania

Wyniki naszego algorytmu:

```
%% INPUT
A = np.array([[1, 8, 5], [2, 4, 6], [3, 5, 7]])
print(recursive_determinant(A, counter))

%% OUTPUT

20.000000000000004
```

Wyniki uzyskane w numpy'u:

```
%% INPUT
A = np.array([[1, 8, 5], [2, 4, 6], [3, 5, 7]])
print(np.linalg.det(A))

%% OUTPUT

19.999999999999996
```

Natomiast według Wolframa wyznacznik wynosi równe 20.