1 ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ЭФФЕКТ БЕЗ ПАМЯТИ

Человек решил позвонить по телефону в момент времени 0. Но не дозвонился. Так же безуспешно он пытался дозвониться t1 времени. Спустя $T*$ времени после $t1$ человек дозвонился.

$$M[T^*] = M[T|T > t1] = \frac{1}{\lambda}$$

Постановка задачи

Написать моделирующую программу (провести имитационное моделирование) для данной ситуации. Показать, что утверждение справедливо только в том случае, если случайная величина распределена по экспоненциальному закону.

Пример

Пусть автобусы приходят на остановку случайно, но с некоторой фиксированной средней интенсивностью. Тогда количество времени, уже затраченное пассажиром на ожидание автобуса, не влияет на время, которое ему ещё придётся прождать.

Пусть случайная величина R распределена по экспоненциальному закону. Тогда верно следующее неравенство:

$$Pr\{R > a + b|R >= a\} = Pr\{R > b\}$$

Для демонстрации данного эффекта сгенерируем n случайных величин $r_i \sim Exp(\lambda), i = 1, n$. Вычислим математическое ожидание и дисперсию как

$$M[R] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

и

$$D[R] = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}{n} - M[R]^2$$

. Получим, что $M[R] = \frac{1}{\lambda}, D[R] = \frac{1}{\lambda^2}$. Затем получим случайную величину $R^{'}$ как $r_i^{'} = r_i - t_k$ и оставим только те значения для которых верно неравенство $r^{'} \geq 0$. Пусть количество этих новых значений равно $n^{'}$. Вычислив $M[R^{'}]$ и $D[R^{'}]$ получим, что

$$M[R] = M[R^{'}]$$

$$D[R] = D[R^{'}]$$

Сгенерирована случайная величина R, $r_i \sim Exp(\lambda), i = 1, n$ распределенная по экспоненциальному закону, количество элементов последовательности $n = 10000$, $\lambda = 0,5$.

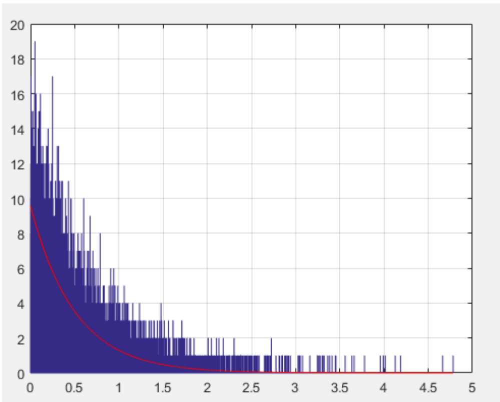

Рисунок 1 — Гистограмма случайной величины R, $r_i \sim Exp(\lambda), i = (1, n)$ распределенная по экспоненциальному закону, количество элементов последовательности $n = 10000, \lambda = 0,5$

$Exp(\lambda), i = 1, n$ распределенная по экспоненциальному закону, количество элементов последовательности $n = 10000$, $\lambda = 0,5$

Мат.ожидание случайной величины R распределенной по экспоненциальному закону = 0.5009

Дисперсия случайной величины R распределенной по экспоненциальному закону = 0.2532

Получим величину $R^{'}$ как $r_i^{'} = r_i - t_1$ и оставим только те значения, которые $r^{'} \geq 0$. Пусть количество этих новых значений равно $n^{'}$. Пусть $t_1 = 0.7$

b

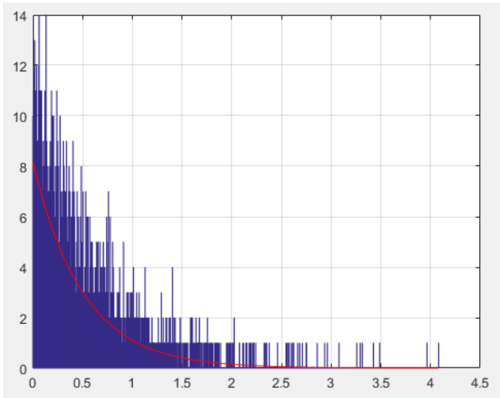

Рисунок 2 — Распределение случайной величины R

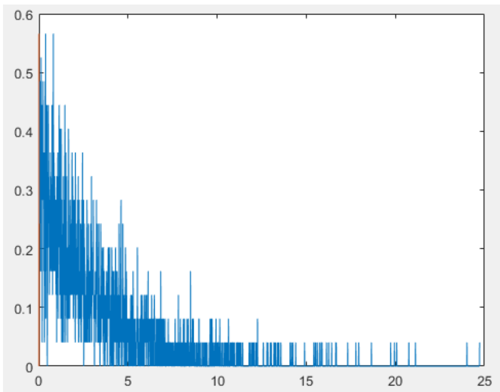

Рисунок 3 — Распределение случайной величины $R^{'}$

$M[R^{'}] = 0.5024$

Количество элементов на второй итерации $n^{'} = 2473$

Дисперсия на второй итерации $D[R^{'}] = 0.2587$

Получим величину $R^{''}$ как $r_i^{''} = r_i^{'} - t_2$ и оставим только те значения, которые $r^{''} \geq 0$. Пусть количество этих новых значений равно $n^{''}$. Пусть $t_2 = 0.3$.

Мат.ожидание после шага 2: $M[R^{''}] = 0.4947$

Количество элементов на второй итерации: $n^{''} = 1381$

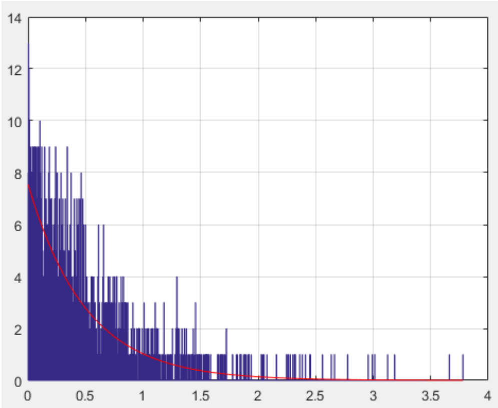

Рисунок 4 — Распределение случайной величины R'

Дисперсия на третьей итерации: $D[R''] = 0.2638$

Для сравнения проведем аналогичный опыт, сгенерировав последовательность по закону Пуассона. Сгенерирована случайная величина RN, $rn_i \sim P(\lambda), i = 1, n$ распределенная по экспоненциальному закону, количество элементов последовательности $n = 10000$, $\lambda = 4$.

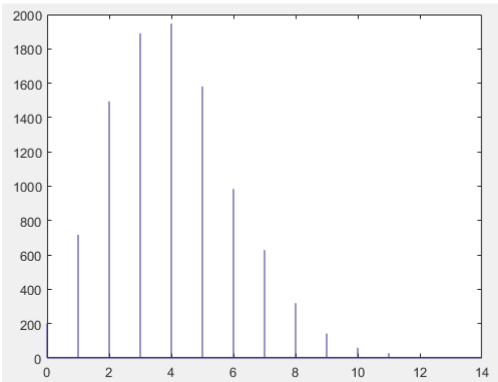

Рисунок 5 — Распределение случайной величины по закону Пуассона

Сравним результаты. Для экспоненциального распределения:

$M[R] = 4.0269$

$D[R] = 15.8816$

Мат.ожидание для распределения по закону Пуассона:

$M[RN] = 4.0212$

Дисперсия для распределения по закону Пуассона:

$D[RN] = 4.1518$

Получим величину $R^{'}$ и $RN^{'}$ как $r_i^{'2} = r_i - t_1$ и $rn_i^{'2} = rn_i - t_1$ оставим только те значения, которые $r^{'}$ и $rn^{'} \geq 0$. Пусть количество этих новых значений равно $n^{'}$ и $nr^{'}$. Пусть $t_1 = 0.7$.

$M[R'] = 4.0471$

количество элементов на второй итерации:

$n' = 8366$

дисперсия на второй итерации:

$D[R^{'}] = 15.8007$

$M[RN'] = 3.4033$

$D[RN'] = 3.8984$

Для сравнения проведем аналогичный опыт, сгенерировав последовательность по равномерному закону. Сгенерирована случайная величина RR, $rr_i \sim P(n), i = 1, n$ распределенная по экспоненциальному закону, количество элементов последовательности $n = 10000$

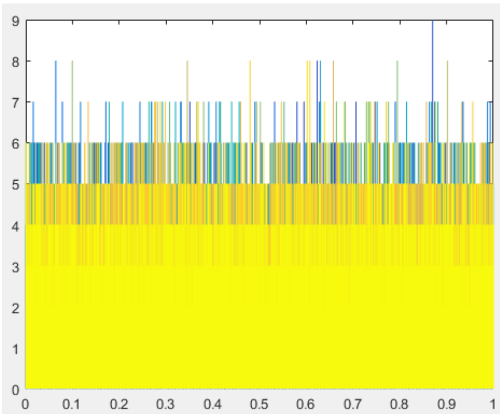

Рисунок 6 — График плотности вероятности случайной величины RR

Мат.ожидание для распределения по равномерному закону $M[RR] = 0.4906$

Дисперсия для распределения по равномерному закону $D[RR] = 0.0834$

Мат.ожидание после шага 1 по равномерному закону $M[RR'] = 0.1472$

Количество элементов на второй итерации по равномерному закону $n' = 295$

Дисперсия на второй итерации по равномерному закону

$$D[RR^{'}] = 0.0075$$

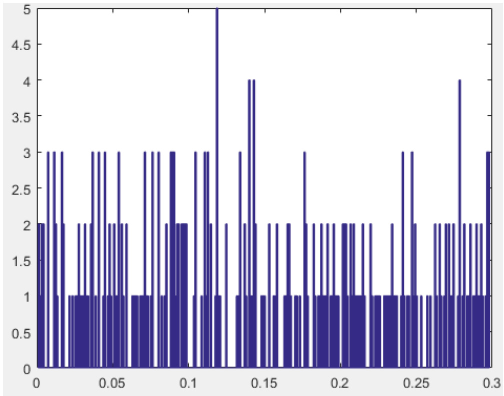

Рисунок 7 — График плотности вероятности случайной величины $RR^{'}$

Выводы

$$M[R] = 0.5009; hD[R] = 0.2532$$

$$M[R^{'}] = 0.5024; D[R^{'}] == 0.2587$$

$$M[R^{''}] = 0.4947; D[R^{''}] = 0.2638$$

$$M[RN] = 4.0212; D[RN] = 4.1518$$

$$M[RN'] = 3.4033; D[RN'] = 3.8984$$

$$M[RR] = 0.4906; D[RR] = 0.0834$$

$$M[RR'] = 0.1472; D[RR'] = 0.0075$$

Вычислив $M[R^{'}]$ и $D[R^{'}]$ получим, что:

$$M[R] = M[R^{'}]$$

$$D[R] = D[R^{'}]$$

.

Таким образом, для случайной величины распределенной по экспоненциальному закону, работает эффект отсутствия памяти. Утверждение справедливо только в том случае, если случайная величина распределена по экспоненциальному закону, что соответствует теории и результатам моделирования.

2 АФАНАСЬЕВ. ЗАДАНИЕ 1

Постановка задачи: Пусть X есть н.с.в. заданная функцией распределения:

$$F(x) = Pr\{X < x\} = 1 - e^{-n\lambda x}.$$

Вычислить математическое ожидание $M[X]$.

Решение:

$$f(x) = F'(x) = (1 - e^{-n\lambda x})' = -(e^{-n\lambda x})' = -e^{-n\lambda x}(-n\lambda x)' = n\lambda e^{-n\lambda x}$$

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} n\lambda x e^{-n\lambda x}dx = n\lambda \int_{0}^{+\infty} xe^{-n\lambda x}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = -n\lambda x \\ dt = t'dx = -n\lambda dx \\ dx = -\frac{dt}{n\lambda} \\ a = -n\lambda \cdot 0 = 0 \\ b = -n\lambda \cdot (+\infty) = -\infty \end{array} \right| = n\lambda \int_{0}^{-\infty} \frac{t}{-n\lambda} e^{t}(-\frac{dt}{n\lambda}) = n\lambda \int_{0}^{-\infty} \frac{te^{t}}{(n\lambda)^2}dt =$$

$$= \frac{1}{n\lambda}\int_{0}^{-\infty} te^{t}dt = \left| \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\int udv = uv - \int vdu} \\ u = t & du = u' = 1 \\ dv = e^{t} & v = \int v = e^{t} \end{array} \right| = \frac{1}{n\lambda}\left(te^{t} - \int e^{t}dt\right)\Bigg|_{0}^{-\infty} =$$

$$= \frac{1}{n\lambda}\left(te^{t} - e^{t}\right)\Bigg|_{0}^{-\infty} = \frac{1}{n\lambda}\left(e^{t}(t-1)\right)\Bigg|_{0}^{-\infty} = \frac{1}{n\lambda}\left(e^{-\infty}(-\infty - 1) - e^{0}(0-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{n\lambda}\left(0 - (-1)\right) = \frac{1}{n\lambda}$$

3 АФАНАСЬЕВ. ЗАДАНИЕ 2

Постановка задачи: Взять неберущийся интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+M)^2}{2\sigma^2}} dx$$

с помощью табулированной функции:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Решение:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+M)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x+M}{\sigma})^2} dx = \left| \begin{array}{c} z = \frac{x+M}{\sigma} \\ dz = z' dx = \frac{1}{\sigma} dx \\ dx = \sigma dz \\ a = \frac{0+M}{\sigma} = \frac{M}{\sigma} \\ b = \frac{+\infty+M}{\sigma} = +\infty \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{M}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{M}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = Q(+\infty) - Q\left(\frac{M}{\sigma}\right)$$

4 АБГШ

Аддитивный Белый Гауссовский Шум (АБГШ) является видом мешающего воздействия в канале связи или других процессах. Определяется данный вид шума как гауссовский случайный процесс $n(t)$ с нулевым средним и спектральной плотностью мощности $S_n(f) = N_0/2$. АБГШ является наиболее распространённым видом шума, используемым для расчёта и моделирования систем связи. Термин «аддитивный» означает, что данный вид шума суммируется с исходным сигналом и статистически не зависим от сигнала.

Дисперсия АБГШ может быть вычислена как $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df$. Так как АБГШ существует во всей полосе частот $-\infty < f < \infty$, то $\sigma^2 = \infty$. В реальности такого не может существовать, т.к. бесконечно большой мощности не может быть. Шум не может существовать без сигнала, таким образом, ширина полосы частот шума зависит от ширины полосы частот исходного сигнала.

5 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ В ДВОИЧНОМ КАНАЛЕ С АДДИТИВНЫМ БЕЛЫМ ГУАССОВСКИМ ШУМОМ

Рассмотрим систему передачи двоичных сигналов 0 и 1. Вероятность ошибки в такой системе определяется по следующей формуле:

$$P_e = \sum_{i=0}^{1} P_e(i) P_i = P_e(0) P_0 + P_e(1) P_1, \tag{1}$$

где $P_e(i)$ – условная вероятность ошибки при передаче i-го сигнала, P_i – вероятность передачи i-го сигнала. Рассмотрим простую систему с одинаковыми вероятностями передачи сигналов. Таким образом, можно рассчитать вероятность ошибки для одного символа, эта же вероятность будет являться вероятностью ошибки для всей системы. Вероятность ошибки будем рассчитывать по максимальному правдоподобию:

$$P_e(0) = Pr[d^2(r, s_0) > d^2(r, s_1) \mid 0] = Pr[||r - s_0||^2 > ||r - s_1||^2 \mid 0], \tag{2}$$

где r – принятый сигнал, s_i – переданный i-ый сигнал. При этом нужно учесть, что $r = s_i + n$, где n – АБГШ, который описан в разделе 4. Тогда формула (2) приобретает вид:

$$P_e(0) = Pr[||n||^2 > ||s_0 - s_1 + n||^2] = Pr[||n||^2 - ||s_0 - s_1 + n||^2 > 0]. \tag{3}$$

Выражение $||n||^2 - ||s_0 - s_1 + n||^2$ при раскрытии скобок преобразуется в

$$\begin{aligned} ||n||^2 - ||s_0 - s_1 + n||^2 = ||n||^2 - ||s_0 - s_1||^2 - 2\sum_{j=1}^{D}(s_{0j} - s_{1j})n_j \\ -||n||^2 = -||s_0 - s_1||^2 - 2\sum_{j=1}^{D}(s_{0j} - s_{1j})n_j. \end{aligned} \tag{4}$$

Произведем замену переменных $\Delta^2 = -2||s_0 - s_1||^2$ и $\epsilon = -2\sum_{j=1}^{D}(s_{0j} - s_{1j})n_j$, тогда

$$P_e(0) = Pr[\epsilon > \Delta^2]. \tag{5}$$

Стоит отметить, что ϵ является случайной гуассовской величиной, т.к. является линейной комбинацией разности сигналов и АБГШ. Принимая в расчет, что математическое ожидание АБГШ равно 0, то $\bar{\epsilon} = 0$, а дисперсия $D[\epsilon] = 2N_0\Delta^2$.

Для дальнейших расчетов необходимо ввести Q-функцию, которая позволяет найти вероятность превышения некоторого порога A гауссовской случайной величиной x с параметрами (m, σ^2):

$$Pr[x > A] = Q(\frac{A - m}{\sigma}). \tag{6}$$

Q-функция определяется следующей формулой:

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \tag{7}$$

С учетом вышесказанного:

$$P_e(0) = Q(\frac{\Delta^2}{\sqrt{\Delta^2 2N_0}}) = Q(\frac{\Delta}{\sqrt{2N_0}}). \tag{8}$$

Так как $P_e(0) = P_e(1)$, то

$$P_e = Q(\frac{\Delta}{\sqrt{2N_0}}). \tag{9}$$

Таким образом, вероятность ошибки дыоичных сигналов в канале с АБГШ зависит от величины евклидова расстояния между сигналами и интенсивности шума. При этом стоит учесть, что вид сигналов значения не имеет.

6 ПОЧЕМУ ЗОНУ ПОКРЫТИЯ АБОНЕНТСКОЙ СТАНЦИИ ИЗОБРАЖАЮТ ШЕСТИУГОЛЬНИКОМ

На заре развития беспроводной связи перед исследователями и инженерами-связистами встала задача, как изображать границы принимаемого сигнала Абонентскими Станциями (АС). По своей природе АС имеют круговую диаграмму направленности. Но если изображать границы сигнала кругами, то карта АС становится перегруженной. Из геометрии известно, что существует три типа многоугольников, которыми можно заполнить пространство: треугольники, квадраты и шестиугольники. Из этих трех фигур шестиугольник ближе всего к кругу, которым описывается граница области покрытия АС.

При этом стоит отметить, что шестиугольники удобны только в случае АС с одинаковой мощностью и зоной покрытия, расположенные по сетке с одинаковым шагом. Когда на области существуют разные виды АС, которые удалены друг от друга на разное расстояние, используют диаграммы Вороного.

Диаграмы Вороного

Диаграммы Вороного используются во многих областях жизнедеятельности человека, в том числе телекоммуникациях. Для начала введем понятия нужных для понимания геометрических объектов:

– Простой многоугольник – это многоугольник без самопересечений. Мы будем рассматривать только простые многоугольники.

– Невыпуклый многоугольник – это многоугольник, в котором есть такие две вершины, что через них проводится прямая, пересекающая данный многоугольник где-либо ещё, кроме ребра, соединяющего эти вершины (рисунок 8),

– Выпуклый многоугольник – это многоугольник, у которого продолжения сторон не пересекают других его сторон рисунок 8).

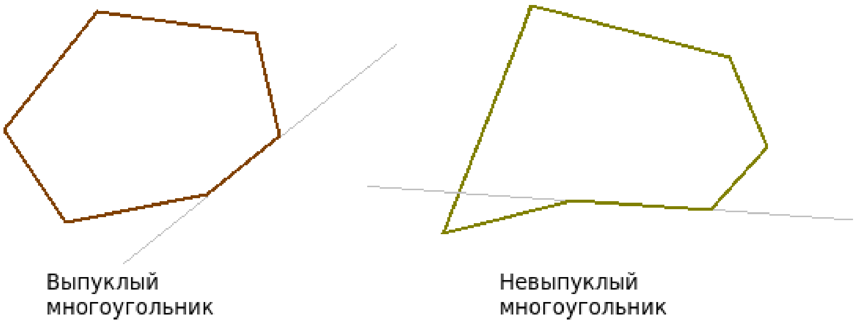

Рисунок 8 — Примеры выпуклого и невыпуклого многоугольников

Именно из выпуклых многоугольников и будет состоять диаграмма, так как они являются ничем иным, как пересечением полуплоскостей, которые являются выпуклыми фигурами.

Диаграмма состоит из локусов – областей, в которых присутствуют все точки, которые находятся ближе к данной точке, чем ко всем остальным. В диаграмме Вороного локусы являются выпуклыми многоугольниками.

По определению локус строится следующим образом: пусть дано множество из n точек, для которого мы строим диаграмму. Возьмём конкретную точку p, для которой строим локус, и ещё одну точку из данного нам множества q не равную p. Проведём отрезок, соединяющий эти две точки, и проведём прямую, которая будет являться серединным перпендикуляром данного отрезка. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости. В одной лежит точка p, в другой лежит точка q. В данном случае локусами этих двух точек являются полученные полуплоскости. То есть для того, чтобы построить локус точки p, нужно получить пересечение всех таких полуплоскостей. То есть на месте q должны быть все точки данного множества, кроме p.

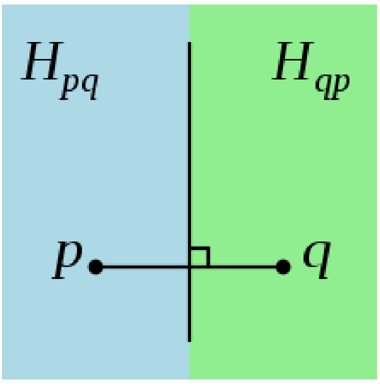

Рисунок 9 — Пример полуплоскостей

Точку, для которой строится локус, называют сайтом (site). На рисунке 10 локусы помечены разными цветами.

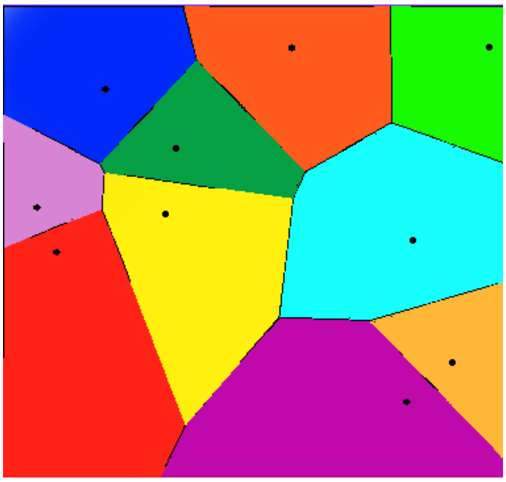

Рисунок 10 — Сайты в диаграмме Вороного

Алгоритмы построения диаграммы строят локусы для всех точек из заданного набора. Локусы в данной задаче также называют многоугольниками Вороного или ячейками Вороного.

Наконец, сформулируем определение диаграммы Вороного n точек на плоскости — это разбиение плоскости, состоящее из n локусов.

7 АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ДИАГРАММЫ ВОРОНОГО

Основная идея алгоритма в том, чтобы пересекать не полуплоскости, а именно серединные перпендикуляры отрезков, так как это проще, соединяющих данную точку со всеми другими точками. То есть, следуя определению ячейки Вороного, мы будем строить локус для точки p следующим образом:

1 Получаем $n-1$ прямую (серединные перпендикуляры), так как мы провели серединные перпендикуляры всех отрезков, соединяющих данную точку p с остальными;

2 Пересекаем попарно все прямые, получаем $O(n^2)$ точек пересечения (потому что каждая прямая может пересечь все другие, в «худшем случае»);

3 Проверяем все эти $O(n^2)$ точек на принадлежность каждой из $n-1$ полуплоскостей, то есть получаем уже асимптотику $O(n^3)$. Соответственно те точки, которые принадлежат всем полуплоскостям, и будут вершинами ячейки Вороного точки p;

Проделываем первые три шага для всех n точек, получаем итоговую асимптотику $O(n^4)$.

Нагрузка на сеть в Эрлангах

Эрланг (обозначение Эрл) — безразмерная единица интенсивности нагрузки (чаще всего телефонной нагрузки) или единица нагрузки, используемая для выражения величины нагрузки, требуемой для поддержания занятости одного устройства в течение определённого периода времени.

1 эрланг (1 Эрл) — соответствует непрерывному использованию одного голосового канала в течение 1 часа. То есть если абонент проговорил с другим абонентом в течение одного часа, то на телекоммуникационном оборудовании была создана нагрузка в один эрланг.

Оценка телекоммуникационного трафика в эрлангах позволяет вычислить количество необходимых каналов в конкретной зоне (области, базовой станции). Эрланг используется операторами связи для учёта пропускной способности при транзите трафика, так как телефонная нагрузка — это случайная величина, которая определяется количеством поступивших вызовов за единицу времени и временем обслуживания абонента. Интенсивность нагрузки является произведением матожидания числа вызовов за единицу времени на среднее время обслуживания вызова; эта интенсивность и измеряется в эрлангах. Важно отметить, что введение рассматриваемой единицы, существенно, упростило расчёт нагрузки на сеть.

Единица названа в честь датского математика и инженера Агнера Крарупа Эрланга, который предложил использовать математический анализ для учёта телефонной нагрузки. Агнер Эрланг проводил анализ работы местной телефонной станции одной деревни, жители которой пытались установить соединение с абонентами других населённых пунктов. В 1909 году им была опубликована работа «Теория вероятностей и телефонные разговоры», в результате чего метод и стал популярным.

8 ЗАЩИТНЫЙ ИНТЕРВАЛ

В английской литературе защитный интервал — Guard Interval. Важно сразу отметить, существуют различные техники для борьбы с помехами при передаче по радио каналу. В данном разделе будет рассмотрен «Защитный интервал», как средство для борьбы со взаимной интерференцией сигнала рисунок 11, возникающей в следствие наличия замираний в канале.

Если путь от передатчика к приемнику имеет отражения или препятствия, либо и то и другое, мы можем получить эффект замирания. В этом случае, сигнал достигает приемника разными путями, каждый из которых — копия оригинала. Каждый из этих лучей имеет немного разную задержку и немного разное усиление. Временные задержки выливаются в фазовые сдвиги, которые накладываются на компоненту основного сигнала (если таковой имеется), вызывая ухудшение сигнала.

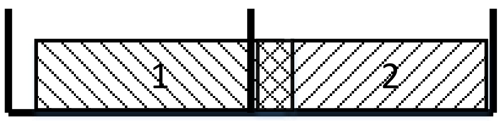

Рисунок 11 — Интерференция двух сообщений

Защитным интервалом называют дополнение к сообщению, передаваемому по каналу, куда вставляется циклический префикс (ЦП), где ЦП — копия конца сообщения 12 .

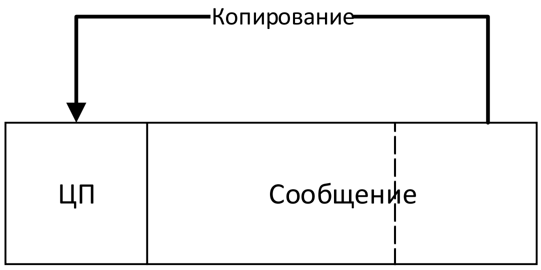

Рисунок 12 — Циклический префикс

Таким образом, если часть сообщения будет нарушена, как на рисунке 11, полезная информация не будет потеряна, так как дубликат хранится в ЦП, что позволяет полностью восстановить сообщение на приёмной стороне, даже при наличии взаимной интерференции между сообщениями.

9 ЗАЩИТНОЕ ВРЕМЯ

Помимо использования циклического префикса, описанного в предыдущем разделе, вводится параметр «Защитного времени» (ЗВ, Guard Time). Рассмотрим систему, изображенную на рисунке 13.

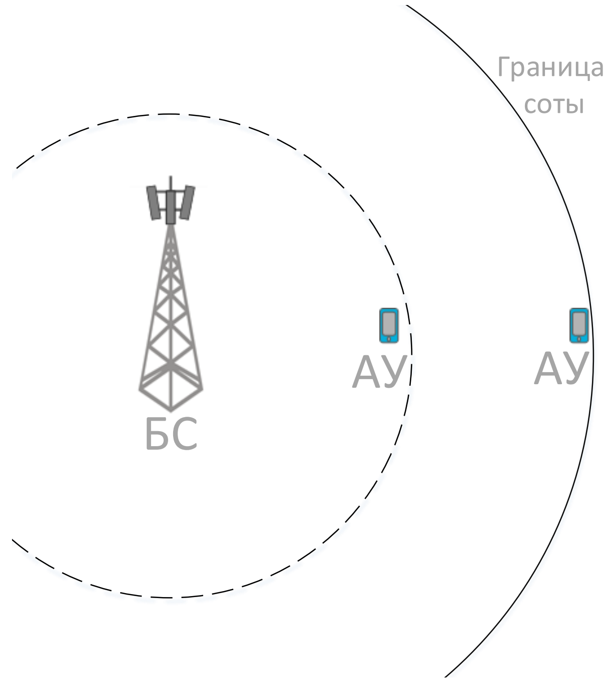

Рисунок 13 — Мобильная сота с двумя абонентами

Данная система состоит из базовой станции (БС) и двух абонентских устройств (АУ), одно из которых расположено непосредственно у базовой станции, второе — на границе соты. АУ, расположенное рядом с БС, получит сообщение быстрее, чем АУ, расположенное на границе соты. Это справедливо и для отправки сообщений в обратную сторону. Пример такого случая приведен на рисунке 14. Для того, чтобы АУ могло получить сообщение в границах одного окна и верно его обработать вне зависимости от своего положения относительно БС, необходимо добавить защитное время (ЗВ). Более того, ЦП тоже является ЗВ, но в него вкладывается избыточная информация.

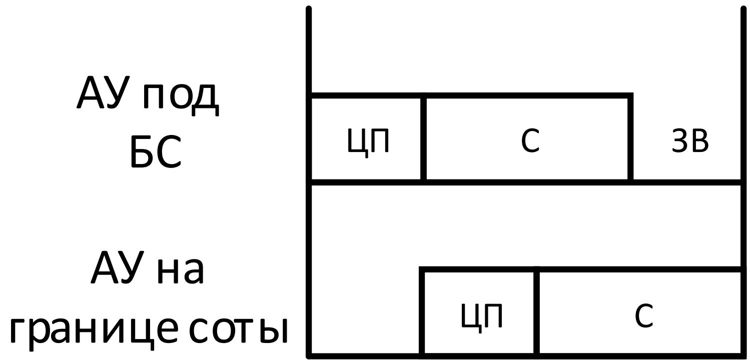

Рисунок 14 — Передача сообщения

Процесс обмена сообщениями состоит из двух стадий: отправка сообщения и получение ответа о корректной передаче. Данная процедура имеет название «время приема-передачи» (round-trip delay, RTD) и изображена на рисунке 15. Таким образом, БС отправляет сообщение АУ и дожидается ответа о том, что передача произведена корректно.

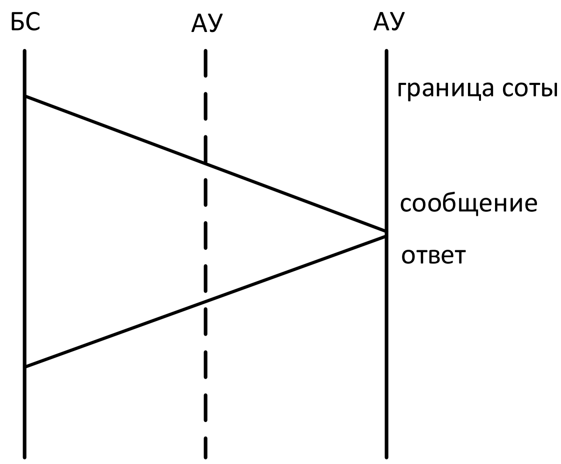

Рисунок 15 — Передача сообщения от БС к АУ на границе соты

Известно, что сообщение передается со скоростью $c = 3 \cdot 10^8 m/s$. Таким образом, время распространения сигнала от БС до дальнего АУ равно

$T = \dfrac{CellSize}{c}$. Такое же время распространения ответа от АУ до БС. Отсюда следует, что «время приема-передачи» считается как

$$T_{GT} = 2 \cdot T = \frac{2 \cdot CellSize}{c}$$

Как уже говорилось ранее, ЦП и ЗВ идентичны. Отличия данных интервалов в том, что ЦП учитывает задержку отраженных сигналов (d). Таким образом, расчет интервала ЦП выполняется так

$$T_{CP} = \frac{2 \cdot CellSize}{c} + d$$

10 ПЕРЕДАЧА РАДИО СИГНАЛА «ЗА ГОРИЗОНТ». ЭФФЕКТ КАБАНОВА

На сегодняшний день частотный ресурс распределяется Государственной комиссией по радиочастотам. Государственная комиссия по радиочастотам (ГКРЧ) — межведомственный координационный орган, действующий при Министерстве связи и массовых коммуникаций Российской Федерации. ГКРЧ обладает всей полнотой полномочий в области регулирования радиочастотного спектра и отвечает за формирование государственной политики в области его распределения и использования. Помимо этого, комиссия готовит позицию Администрации связи Российской Федерации на все форумы Международного союза электросвязи для защиты интересов страны на международном уровне и международно-правовой защиты орбитально-частотного ресурса Российской Федерации. В рамках Комиссии проводятся исследования, по совершенствованию механизмов регулирования использования радиочастотного спектра, обеспечению электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств, решению проблем внедрения на сетях связи России новых радиотехнологий.

Долгое время после того, как было изобретено рядио, считалось, что для целей связи наиболее приемлемы длинные волны, так как они позволяют устанавливать связь на больших расстояниях, чем короткие. Казалось, что короткие волны, в отличие от длинных, не в состоянии распространяться на значительные расстояния за горизонт. Теперь весь мир. пронизывает радиосвязь на коротких волнах, хотя до 1947 г. никто не мог представить себе, чтобы радиосигнал, посланный на коротких волнах, можно было принять в том же месте, откуда он послан.

Профессор, доктор технических наук Н. И. Кабанов (Новосибирский электротехнический институт) открыл ранее неизвестное явление дальнего коротковолнового рассеяния радиоволн отдельными элементами поверхности Земли. Радиоволны, излучаемые радиопередающим устройством под некоторым углом к горизонту, отражаются ионосферой и идут обратно, к Земле. Часть их энергии рассеивается неоднородностями земной поверхности и распространяется в разные стороны. Рассеянные радиоволны вновь отражаются от ионосферы и возвращаются на Землю, причем какая-то их доля попадает и в то место, где находится радиопередающее устройство.

В 1950 г. Государственная комиссия под председательством академика А. И. Берга рассмотрела полученные Н. И. Кабановым данные и дала следующее заключение: «Настоящей работой впервые экспериментально установлено существование регулярных рассеянных отражений от Земли на коротких волнах, что имеет принципиальное значение для исследований условий распространения коротких волн, в частности применительно к эксплуатации магистральных линий и средств дальней радионавигации».

Оригинальные эксперименты, поставленные Н. И. Кабановым, позволили обнаружить, что рассеяние радиоволн гористыми участками Земли происходит более интенсивно, чем морями, подтвердили, что по границам дальности отражений можно судить о состоянии ионосферы.

Использование эффекта Кабанова для исследования ионосферы (метод возвратно-наклонного зондирования) дает возможность определять условия распространения радиоволн в радиусе до 9-12 тыс. км, т. е. почти над четвертью поверхности земного шара. Метод возвратно-наклонного зондирования позволяет значительно повысить надежность радиосвязи. Он особенно ценен тем, что используется в весьма загруженном диапазоне коротких волн, обеспечивающих дальнюю радиосвязь. В нашей стране этот метод был разработан и вошел в практику на два года раньше, чем за границей.

Эффект Кабанова находит применение также в ионосферной радиолокации и в других областях радиосвязи. На основе эффекта Н. И. Кабанов и С. Г. Евскжов разработали способ радиолокационного загоризонтного обзора поверхности Земли через ионизированные следы метеоров.

За рубежом эффект Кабанова получил всеобщее признание. Например, в Великобритании на ионосферной станции в Слоу ведутся наблюдения за прохождением радиоволн с использованием коротковолнового рассеянного отражения от Земли в радиусе до 6 тыс. км. В США разработаны сверхдальние загоризонтные радиолокаторы, основанные на эффекте Кабанова.

11 ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ДАЛЬНОСТИ

В сетях первого поколения дальность передачи была обусловлена только тем, что необходимой была прямая видимость между абонентом и базовой станцией.

Постановка задачи

Как вычислить максимальное расстояние между абонентом и базовой станцией в зависимости от высоты, на которой они расположены? Геометрическое представление задачи изображено на рисунке 16.

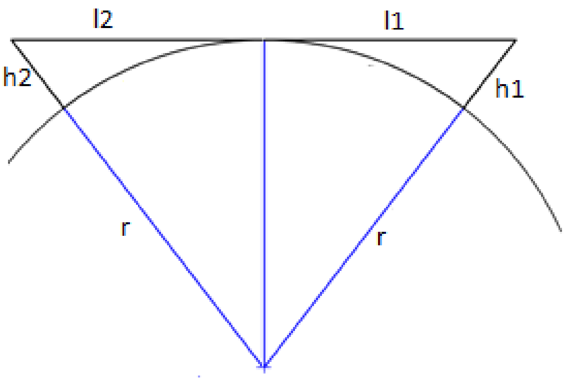

Рисунок 16 — Геометрическое представление решаемой задачи

h_1 — высота антенны Базовой станции над поверхностью Земли

h_2 — высота антенны абонента над поверхностью Земли

Земля — идеальная сфера с радиусом $r = 6371$ км.

Максимальное расстояние между передатчиком и приемником будет тогда, когда прямая, соединяющая эти точки будет являться касательной к окружности.

Предполагается, что частотный диапазон, мощность передатчика и чувствительность приемника таковы, что если между передатчиком и приемником имеется прямая видимость, то связь возможна вне зависимости от длины отрезка между передатчиком и приемником. При относительно низких частотах возможна передача за пределы прямой видимости.

Расчет физического расстояния

Рассмотрим рисунок 16. По теореме Пифагора найдем длины l_1 и l_2:

$$(r + h_1)^2 = l_1^2 + r_2$$

$$(r + h_2)2 = l_2^2 + r_2$$

$$l1 = \sqrt{h_1 (h_1 + 2r)}$$

$$l2 = \sqrt{h_2 (h_2 + 2r)}$$

Искомое расстояние:

$$L = \sqrt{h_1 (h_1 + 2r)} + \sqrt{h_2 (h_2 + 2r)}$$

Расчет расстояния по поверхности:

$$\alpha_1 = arctg(l_1/r)$$

$$\alpha_2 = arctg(l_2/r)$$

$$C = (2 * \pi * r * (\alpha 1 + \alpha 2))/360$$

Доказательство оптимальности решения

На рисунке 17 показан случай, когда передатчик и приемник находятся дальше допустимого расстояния. Передаваемый сигнал будет гаситься землей.

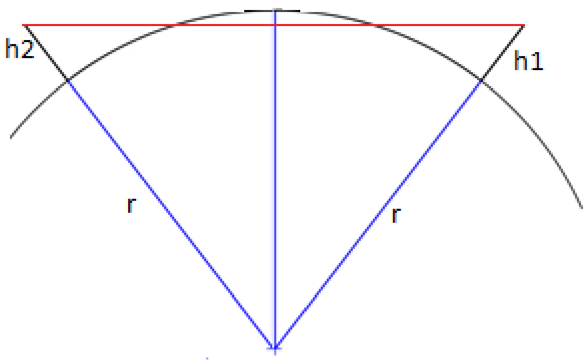

Рисунок 17 — Превышение допустимого расстояния

Рассмотрим вариант, изображенный на рисунке 18. В этом случае передатчик и приемник находятся ближе допустимого расстояния. Сигнал будет проходить над поверхностью земли и расстояние между передатчиком и приемником не будет максимальным.

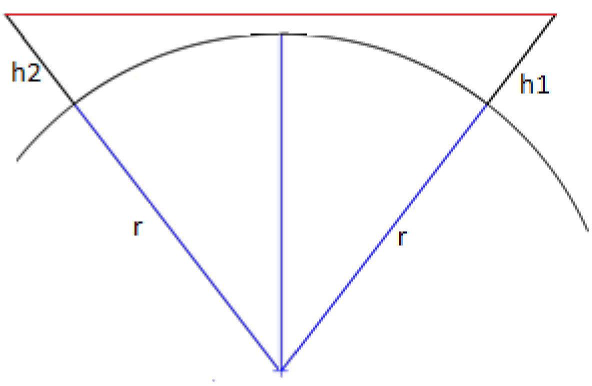

Рисунок 18 — Уменьшение расстояния

Таким образом, для нахождения максимального расстояния между передатчиком и приемником в зависимости от их высот, когда единственным фактором обеспечения связи является прямая видимость, обусловленная кривизной земли, оптимальным является решение, когда прямая, соединяющая эти точки будет являться касательной к окружности.

Для проверки формулы была создана программа на Matlab [1]:

```
clear;
h1=25;
h2=1.6;
r=6371;
l1=sqrt(h1*(h1+(2*r)));
l2=sqrt(h2*(h2+(2*r)));
L=l1+l2;
C=pi*r*(atan(l1/r)+atan(l2/r))/180;
disp(C);
```

Листинг 1 — Расчет максимального расстояния

Результаты вычислений представлены в таблице 1.

Максимальное расстояние между передатчиком и приемником (C, км)	Высота абонента ($h1$, м)	Высота базовой станции ($h2$, м)	Сравнительная высота
5.0977	1.6	1.75	Рост человека
12.4775	1.6	25	9-этажный дом
16.3774	1.6	50	Колесо обозрения
26.3877	1.6	150	Воздушный шар
80.9754	1.6	2000	Гора
132.7091	1.6	10000	Самолет
175.1684	1.6	350000	Космический корабль
260.4347	10000	10000	Передатчик и приемник на высоте полета самолета
15.0337	1.75	40	Стандарт 1G
40.0	25	250	Максимальное расстояние для сетей первого поколения

Таблица 1 — Результаты вычислений

Мобильные сети первого поколения

Мобильные сети первого поколения являются аналоговыми. Для передачи голоса в канале данных применялась частотная модуляция. Таким же способом осуществлялась передача управляющих команд в канале управления.

Наиболее известные стандарты первого поколения: Nordic Mobile Telephone (NMT) и Advanced Mobile Phone Service (AMPS). NMT — стандарт северных европейских стран, в том числе использовавшийся в России в качестве федерального стандарта. Предлагал два режима NMT-450 и NMT-900, диапазоны частот 450 МГц и 900 МГц соответственно. AMPS — широко распространенный стандарт Северной и Южной Америки. Диапазон частот 800 МГц. Также применялся в России, но как региональный стандарт.

Стандарты 1G обладали целым рядом недостатков, основным из которых является отсутствие шифрования. Любой абонент имел возможность перехватить данные, передаваемые в канале. К тому же, скорость передачи информации в 1G бала очень низкой (передача голоса 9.1 Kbit/s, передача данных 1.9 Kbit/s), что увеличивало стоимость разговора. Но, благодаря этим недостаткам, намечены векторы развития мобильных сетей.

Поколение	Канал данных	Канал управления
1G	Аналоговая модуляция	Аналоговая модуляция

12 ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) — инструмент спектрального анализа сигналов. ДПФ позволяет сопоставить сигналу во временной области эквивалентное представление в частотной области. Данное преобразование ставит в соответствие N отсчетам сигнала $s(n), n = 0, 1 \ldots N-1, N$ отсчетов комплексного $S_d(k), k = 0 \ldots N-1$.

Для того, что бы понять принцип работы ДПФ рассмотрим модель приемника, изображенного на рисунке 19.

Сигнал, поступающий на вход приемника, умножается на базовые функции sin и cos различных частот. Таким образом определяются частоты, присутствующие в сигнале. Более того, данные частоты ортогональны друг другу, т.е. их скалярное умножение равно 0.

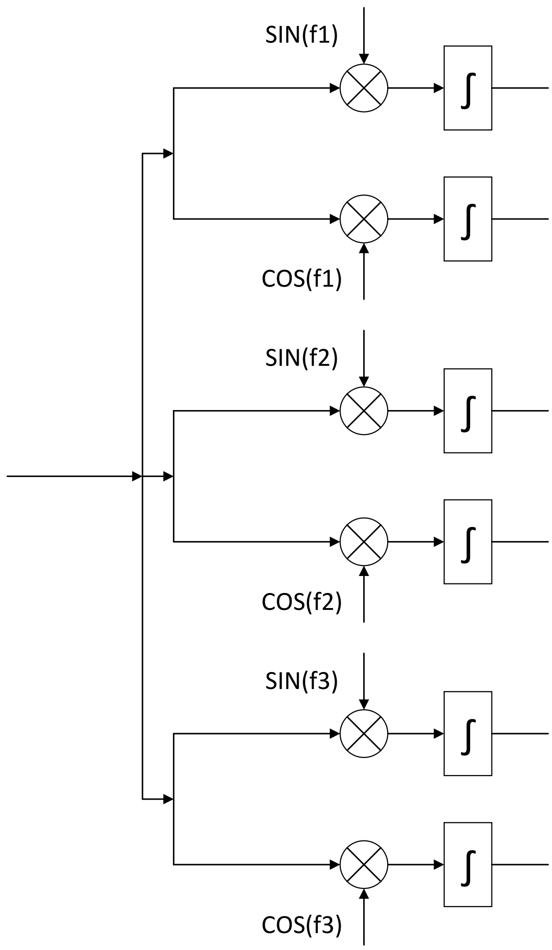

Рисунок 19 — ДПФ в приемнике

Формула прямого преобразования имеет следующий вид:

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k}, k = 0 \ldots N-1 \qquad (10)$$

Согласно формуле Эйлера $e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$ преобразование Фурье может быть представлено в следующем виде:

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot (\cos(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k) - j\sin(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k)) \qquad (11)$$

Рассмотрим пример использования ДПФ над дискретным сигналом из 8-ми отсчетов ($N = 8, n = [0:7]$).

Сигнал задается следующим выражением:

$$s(n) = cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot k/N) + j \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot k/N)$$

.

Если задать k = 0, то сигнал будет постоянным.

$$s(n) = cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot 0/N) + j \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot 0/N) = cos(0) - j \cdot sin(0) = 1$$

При выполнении процедуры дискретного преобразования Фурье над таким сигналом будет произведены следующие вычисления:

$S(k = 0) : \sum_{n=0}^{N=8}(cos(0) + j \cdot sin(0)) \cdot (cos(0) - j \cdot sin(0) = \sum_{n=0}^{N=8} 1$

$S(k = 1) : \sum_{n=0}^{N=8}(cos(2 \cdot \pi \cdot n/N) - j \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot n/N)) = \sum_{n=0}^{N=8} 0$

$S(k = 2) : \sum_{n=0}^{N=8}(cos(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot n/N) - j \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot n/N)) = \sum_{n=0}^{N=8} 0$

...

$S(k = 7) : \sum_{n=0}^{N=8}(cos(2 \cdot \pi \cdot 7 \cdot n/N) - j \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot 7 \cdot n/N)) = \sum_{n=0}^{N=8} 0$

Как видно из приведенных вычислений, после применения ДПФ, будет получен сигнал с единственной частотой в k = 0. Остальные частоты равны 0, потому что частота сигнала ортогональна всем базовым частотам преобразования. На рисунке 20 приведен пример умножения сигнала на базовые функции синуса и косинуса при k = 3.

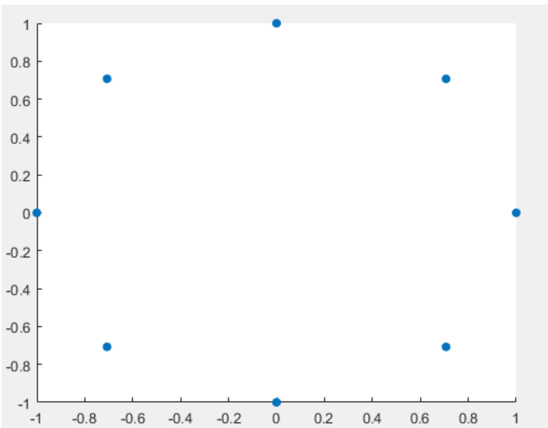

Рисунок 20 — Умножение сигнала на базовые функции. k=3.

Сложив данный ряд чисел, получится 0, так как каждая точка имеет противоположную.

Таким образом, задав входной ДПФ сигнал с помощью выражения

$cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot k/N) + j \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot k/N)$ и изменяя k, можно указывать необходимую частоту на выходе блока ДПФ. Если входной сигнал задать как сумма подобных выражений с различными k, то на выходах блока ДПФ, с указанными k, частоты будут не нулевыми.

Обратное преобразование Фурье позволяет сопоставить сигналу в частотной области эквивалентное представление во временной области.

Формула обратного преобразования имеет следующий вид:

$$s(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k}, k = 0 \ldots N-1 \tag{12}$$

Функция обратного преобразования идентична функции прямого преобразования. Отличие состоит лишь в степени комплексной экспоненты, которая является комплексно сопряженной к экспоненте прямого преобразования. Данный факт позволяет производить обратное преобразование на прямом. Для этого достаточно подать на вход ОДПФ комплексно-сопряженный сигнал.

Покажем, что при применении результата ПДПФ к ОДПФ получится исходный сигнал:
$s(n) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot (\cos(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k) - j\sin(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k)) \cdot (\cos(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k) + j\sin(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k)) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot \cos^2(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k) - j^2 \cdot \sin^2(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k)) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot 1.$

Для получения на выходе ОДПФ сигналов, например синусоиды, нужно подать на вход ряд комплексных чисел, мнимая часть которых будет отлична от нуля. Более того, те индексы k, которые будут не нулевыми и зададут частоту итоговой синусоиды.

Децибел

Децибел — это безразмерная единица, применяемая для измерения отношения некоторых величин. Является очень важной величиной для выражения усиления или затухания в системе в целом или в ее компонентах Величина, выраженная в децибелах, численно равна десятичному логарифму безразмерного отношения физической величины к одноимённой физической величине, принимаемой за исходную, умноженному на десять:

$$A_{dB} = 10log(\frac{A}{A_0}) \tag{13}$$

где A_dB — величина в децибелах, A — измеренная физическая величина, A_0 — величина, принятая за базис. Изначально дБ использовался для оценки отношения мощностей, и в каноническом, привычном смысле величина, выраженная в дБ, предполагает логарифм отношения двух мощностей и вычисляется по формуле:

(14)

$P_{dB} = 10log(\frac{P_1}{P_0})$

где x — величина, измеряемая в дБ;P_1/P_0 — отношение значений двух мощностей: измеряемой P_1 к так называемой опорной P_0, то есть базовой, взятой за нулевой уровень (имеется в виду нулевой уровень в единицах дБ, поскольку в случае равенства мощностей $P_1 = P_0$ логарифм их отношения $lg(P_1/P_0) = 0$).

Отношение сигнал/шум

Отношение сигнал/шум — безразмерная величина, равная отношению мощности полезного сигнала к мощности шума.

$$SNR = P_signal/P_noise \tag{15}$$

где P_signal — средняя мощность сигнала,где P_noise — средняя мощность шума, Основными параметрами системы передачи являются скорость передачи, ширина полосы частот и отношение сигнал/шум. Эти параметры обычно являются исходными, и при заданных значениях этих параметров требуется обеспечить требуемое качество передачи. Величина (E/N_0) называется отношением сигнал/шум. В инженерной практике принято выражать это отношение в децибелах(дБ). Величина отношения, измеренная в дБ, определяется как

$$(E/N_0)_db = 10log(E/N_0) \tag{16}$$

и наоборот

$$(E/N_0) = (10)^((E/N_0)_db/10) \tag{17}$$

Ряд Фурье в комплексной форме

ряда Фурь

$$s(t) = \sum s_k\varphi_k = \sum(a_k\cos(2*\pi*f*t)+b_k\sin(2*\pi*f*t))a_k = \frac{2}{T}\int \frac{T}{2}^{-\frac{T}{2}} s(t)\cos(2*\pi \tag{18}$$

Его можно преобразовать с использованием формул Эйлера для тригонометрических функций: $2\cos(x) = \frac{(e^{jx}+e^{-jx})}{2}\sin(x) = \frac{(e^{jx}-e^{-jx})}{2j}j = \sqrt{-1}$, то есть

$$s(t) = \sum(s_k\varphi_k) = \sum(a_k(\frac{(e^{j2*\pi*f_k*t} + e^{-j2*\pi*f_k*t})}{2})+b_k(\frac{(e^{j2*\pi*f_k*t} - e^{-j2*\pi*f_k*t})}{2j})) = \tag{19}$$

Обозначим коэффициент при $exp(j2 * \pi * f_k * t)c_k, exp(-j2 * \pi * f_k * t)c_{-k}$. Очевидно, что $c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}$ С учетом этих обозначений имеем запись ряда Фурье в комплексной форме

$$s(t) = \sum (c_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}), c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int \frac{T}{2}^{-\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt. \tag{20}$$