

Ответы к коллоквиуму по Многомерному Анализу Данных

Собрано 8 января 2016 г. в 02:16

Содержание

1	Первая часть	2
1.1	Билет 1. Многомерное нормальное распределение. Вектор мат.ож. и ковар.матрица при лин. преобразовании (умножении на матрицу).	2
1.2	Билет 2. Оценки вектора средних и ковар.матрицы. Несмещенная оценка ковар. матрицы.	2
1.3	Билет 3. Распределение вектора средних	3
1.4	Билет 4. Переход к новым признакам с помощью ортогональной матрицы. Пример про способности по математике и физике (выписать матрицу вращения)	3
1.5	Билет 5. Разложение матрицы данных при переходе к новым признакам в виде суммы и в матричном виде	4
1.6	Билет 6. Как определяется вклад новых признаков	4
1.7	Билет 7. Сингулярное разложение, как строится	5
1.8	Билет 8. Сингулярное разложение. В каком смысле оно единственно.	6
1.9	Билет 9. Разложение Шмидта	7
1.10	Билет 10. Выборочный анализ главных компонент и сингулярное разложение, общее и различия.	8
1.10.1	Сингулярное разложение	8
1.10.2	Выборочный анализ главных компонент	8
1.11	Билет 11. Анализ главных компонент на генеральном языке как частный случай разложения Шмидта.	8
1.12	Билет 12. Почему главные компоненты так называются, в каком смысле они главные.	9
1.13	Билет 13. Оптимальность сингулярного разложения в смысле аппроксимации матрицей ранга g .	9
1.14	Билет 14. Оптимальность сингулярного разложения в смысле аппроксимации подпространством размерности g	10
1.15	Билет 15. Оптимальность в анализе главных компонент в статистической терминологии (через дисперсии)	10
1.16	Билет 16. Оптимизация в АГК в терминах ковариационных матриц.	11
1.17	Билет 17. В двух статистических пакетах получились разные главные компоненты. Отчего так могло получиться?	11
1.18	Билет 18. Смысл первой ГК, если все ковариации (корреляции) исходных признаков положительны.	12
1.19	Билет 19. Разница между АГК по корреляционной и по ковариационной матрице на примере двух признаков. Когда что использовать.	12
1.20	Билет 20. Способы выбора числа главных компонент	13
1.21	Билет 21. Почему доля собственного числа по отношению к сумме собственных чисел называется объясненной долей общей дисперсии?	14
1.22	Билет 22. На основе каких элементов сингулярного разложения интерпретируются главные компоненты как линейные комбинации исходных признаков? Привести формулу и пример	15

1.23	Билет 23. АГК с точки зрения построения базиса в пространстве индивидов и в пространстве признаков. Координаты в новых базисах	15
1.24	Билет 24. Как выявить индивидов, которые плохо описываются плоскостью первых двух главных компонент?	15
1.25	Билет 25. Как вычислить значения главных компонент для индивида, которого не было в исходной выборке. А как вычислить значения факторных значений?	16
1.26	Билет 26. В каком случае координаты в ортонормированном базисе можно назвать корреляциями?	16
1.27	Билет 27. Чему равны суммы по строкам и по столбцам в матрице, составленной из собственных векторов в АГК?	16
1.28	Билет 28. Чему равны суммы по строкам и по столбцам в матрице факторных нагрузок в АГК?	16
1.29	Билет 29. Как интерпретировать скалярное произведение строк в матрице факторных нагрузок в АГК?	16
1.30	Билет 30. Как нарисовать исходные орты в плоскости двух первых главных компонент?	17
1.31	Билет 31. Зачем и когда первые две координаты факторных нагрузок рисуются в единичном круге?	17
1.32	Билет 32. Чему равна норма i -го вектора из главных компонент?	17
1.33	Билет 33. Как формализовать веса для признаков и для индивидов в АГК?	17
1.34	Билет 34. Какова модель в факторном анализе?	18
1.35	Билет 35. Что делает АГК в модели факторного анализа при равных общностях?	18
1.36	36. Какая разница между АГК и факторным анализом?	19
1.37	37. Связь между числом факторов и числом признаков для корректности задачи.	19
1.38	38. Что минимизируется в методе MINRES? В чем разница с тем, что минимизируется в АГК?	20
1.39	39. Какой вид имеет функция правдоподобия в ФА?	20
1.40	40. Проверка значимости модели ФА.	20
1.41	41. Критерий сферичности Бартлетта, для чего нужен	20
1.42	42. Что такое общность и уникальность признака? Какие факторы не находит факторный анализ?	20
1.43	Билет 43. Общность как множественный коэффициент корреляции.	21
1.44	Билет 44. Как интерпретируются признаки в ФА?	21
1.45	Билет 45. Зачем нужны вращения в ФА? Как устроены ортогональные вращения?	22
1.46	Билет 46. Вращение по методу varimax.	22
1.47	Билет 48. Факторная структура (корреляции исходных признаков с факторами) и факторный паттерн (коэффициенты лин. комбинации, с которыми исходные признаки выражаются через факторы) в случае ортогональных и неортогональных факторов.	22
1.48	Билет 47. Методы нахождения факторных значений: LS и WLS (метод Бартлетта)	23
1.48.1	Ordinary Least Squares	23
1.48.2	Weighted Least Squares (метод Бартлетта)	23
1.49	Билет 48. Factor structure и factor pattern в случае ортогональных и неортогональных векторов	24

2	Вторая часть	24
2.1	34. Что такое канонические корреляции, сколько их	24

2.2	37. Канонические переменные, как находятся?	25
2.3	40. Корреляции внутри множества канонических переменных, левых и правых	25
2.4	36. Множественная корреляция как каноническая корреляция, если число признаков с одной стороны равно 1	25
2.5	35. Значимость корреляции между множествами признаков и значимость многомерной множеств. регрессии.	26
2.6	39. Как найти число значимых корреляционных переменных	26
2.7	38. Интерпретация канонических переменных через стандартизованные канонические функции и через факторную структуру	27
2.8	Билет 10. Единый подход к множественной регрессии и одномерному однофакторному дисперсионному анализу (ANOVA)	27
2.9	Билет 11. Представление одномерного однофакторного дисперсионного анализа в виде множественной регрессии с фиктивными переменными.	31
2.10	Билет 12. Корреляционное отношение с дискретным одномерным признаком и множественный коэффициент корреляции.	31
2.11	Билет 15. MANOVA. Модель, запись через условные мат. ожидания η и мат. ожидания $\eta(k)$. Разложение ковариационной матрицы.	31
2.12	Билет 16. MANOVA для дискриминантного анализа и для многомерной множественной регрессии, общее и различие.	32
2.13	Билет 17. Какой смысл у канонических дискриминантных функций (коэффициентов) и переменных?	34
2.14	Билет 18. Как вычисляются канонические дискриминантные функции (коэффициенты)?	35

1. Первая часть

1.1. Билет 1. Многомерное нормальное распределение. Вектор мат.ож. и ковар.матрица при лин. преобразовании (умножении на матрицу).

Нормальное распределение

Определение. Говорят, что случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)^T$ имеет p -мерное нормальное распределение, если для любых $\{a_i\}_{i=1}^p \subset \mathbb{R}$ линейная комбинация $\sum_{i=1}^p a_i \xi_i$ имеет нормальное распределение.¹ Если обозначить $\mu = \mathbb{E}\xi$, $\Sigma = \text{Cov}\xi$, то пишут $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.

Теорема. Пусть $\mu \in \mathbb{R}^p$ и $\Sigma \in M_{p,p}(\mathbb{R})$ — невырожденная положительно-определенная матрица. Рассмотрим случайный вектор $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Тогда ξ имеет плотность:

$$p_{\xi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}, \quad (1)$$

для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$.²

Заметим, что в определении 1.1 не требуется невырожденность ковариационной матрицы Σ . Если же Σ вырожденная, то это означает, что распределение сосредоточено на подпространстве в \mathbb{R}^p .³

Линейное преобразование

Теорема. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, где $\mu \in \mathbb{R}^p$, а $\Sigma \in M_{p,p}(\mathbb{R})$. Рассмотрим матрицу $A \in M_{d,p}(\mathbb{R})$. Тогда $A\xi \sim \mathcal{N}(A\mu, A\Sigma A^T)$.

Доказательство. Утверждение следует из линейности мат. ожидания и того, что $\text{Cov}(\xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T$.⁴ \square

1.2. Билет 2. Оценки вектора средних и ковар.матрицы. Несмещенная оценка ковар. матрицы.

Генеральный язык. Пусть дан вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$. Вектором средних называется $\mathbb{E}\xi = (\mathbb{E}\xi_1, \dots, \mathbb{E}\xi_p)^T$. Ковариационная матрица — $\text{Cov}(\xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T$.

Выборочный язык. Генеральную совокупность обозначим ξ . Рассмотрим $\mathbb{X} = [X_1 : \dots : X_p] \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ — матрица данных. X_i — i -тый признак. Тогда $\widehat{\mathbb{E}\xi} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p)$.

Введем $X_i^{(c)}$ — i -тый центрированный признак и рассмотрим $\mathbb{X}^{(c)} = [X_1^{(c)}, \dots, X_p^{(c)}]$ — матрицу центрированных данных. Тогда $\widehat{\text{Cov}(\xi)} = \mathbb{X}^{(c)T} \mathbb{X}^{(c)} / n$. В несмещенной оценке ковариационной матрицы знаменатель дроби равен $n - 1$.

Здесь также нужно провести доказательство для дисперсии, что несмещенная оценка является несмещенной. Думаю, что все это уже хорошо умеют делать.

¹Здесь распределение Дирака тоже считаем нормальным.

²Убедитесь, что при $p = 1$ получается одномерная плотность.

³Чтобы это осознать, представьте себе $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$. На каком подпространстве (и как) распределен вектор $(\eta, 0)^T$?

⁴В одномерном случае это должно совпасть с обычным определением ковариации.

1.3. Билет 3. Распределение вектора средних

Теорема. Пусть дана выборка (на апериорном языке) $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \dots$ с ковариационной матрицей Σ . Обозначим $\bar{\mathbf{x}}_n$ — выборочное среднее первых n индивидов. Тогда для выборочного среднего имеет место следующая (слабая) сходимост:

$$\sqrt{n}(\bar{\mathbf{x}}_n - \mu) \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma).$$

Если же $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, то выборочное среднее $\bar{\mathbf{x}}_n$ имеет распределение $\mathcal{N}(\mu, \Sigma/n)$.

Заметим, что асимптотическая сходимост есть ни что иное, как многомерное обобщение ЦПТ в форме Леви. Все могут вывести из этого обобщения обычную (одномерную) теорему?

1.4. Билет 4. Переход к новым признакам с помощью ортогональной матрицы. Пример про способности по математике и физике (выписать матрицу вращения)

Переход к новым признакам. Рассмотрим случайный вектор $\xi \in \mathbb{R}^p$ и детерминированный вектор $a \in \mathbb{R}^p$. Если ξ рассматривать как набор из p признаков, то $\eta = a^T \xi$ — новый признак.

Рассмотрим же теперь матрицу $\mathbb{A} = [A_1 : \dots : A_d] \in M_{p,d}(\mathbb{R})$. Тогда $\mathbb{A}^T \xi$ — набор из новых d признаков.

На выборочном языке то же самое переписывается так: $Z = \mathbb{X}a$ — для одного признака и $\mathbb{Z} = [Z_1 : \dots : Z_d] = \mathbb{X}\mathbb{A} \in M_{n,d}(\mathbb{R})$ — для d признаков. Заметим, что в последней записи новыми признаками как раз будут являться столбцы Z_1, \dots, Z_d .

Факторы и факторные нагрузки. Пусть задана матрица данных $\mathbb{X} = [X_1 : \dots : X_p] \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Обозначим $d = \text{rk}(\mathbb{X})$. Перейдем с помощью матрицы \mathbb{A} к d ортогональным признакам $\{Z_i\}_{i=1}^d$. Формально, это означает, что $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{A}$, где $\mathbb{Z} = [Z_1 : \dots : Z_d]$ и $Z_i \perp Z_j$ при $i \neq j$. С точки зрения линейной алгебры $\{Z_i\}_{i=1}^d$ образуют ортогональный базис в пространстве признаков⁵.

Превратим этот базис в ортонормированный: для всех $i \in 1 : d$ положим $Q_i = Z_i / \|Z_i\|$. Таким образом, $\{Q_i\}_{i=1}^d$ — ОН-базис в пространстве признаков. Введем матрицу $\mathbb{Q} = [Q_1 : \dots : Q_d] \in M_{n,d}(\mathbb{R})$.

Разложим исходные признаки по ОН-базису, то есть по всем $j \in 1 : p$

$$X_j = \sum_{k=1}^d f_{jk} Q_k,$$

где $f_{jk} = (X_j, Q_k)$ для всех $j \in 1 : p$ и $k \in 1 : d$. Введем матрицу $\mathbb{F} = [F_1 : \dots : F_d]$, где $(F_j)_i = f_{ij}$. Вектора Q_k называют *факторами*, а f_{jk} — *факторными нагрузками*. Тогда ясно, что $F_k = \mathbb{X}^T Q_k \in \mathbb{R}^p$ ⁶. Но $\mathbb{X} = \sum_{k=1}^d Q_k (\mathbb{X}^T Q_k)^T$ ⁷. Следовательно, $\mathbb{X} = \mathbb{Q}\mathbb{F}^T$.

⁵Формально, $\text{span}(X_1, \dots, X_p)$.

⁶Чтобы не запутаться, где тут транспонирование есть один простой трюк. Помните, что вы работаете с признаками! Это же точно столбцы матрицы \mathbb{X} . Интерпретируйте алгебраические преобразования именно как преобразования над признаками. Для формальной проверки достаточно обычно проверить, сходятся ли размерности.

⁷Просто разложили элементы пространства по базису, правда?

Разложение с помощью ортогональных признаков. Итак получено разложение $\mathbb{X} = \mathbb{Q}\mathbb{F}^T$, при этом $\mathbb{Q}^T\mathbb{Q}$ — единичная матрица порядка d .⁸ В этом разложении лишь \mathbb{Q} задает ОН-базис. Система, заданная столбцами матрицы \mathbb{F} совершенно не обязана быть нормированной. Рассмотрим $P_j = F_j/\|F_j\|$ и положим $\sigma_j = \|F_j\|$. Введем матрицы $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d)$ и $\mathbb{P} = [P_1 : \dots : P_d] \in M_{n,d}(\mathbb{R})$. Тогда $\Sigma\mathbb{P}^T = \mathbb{F}^T$.⁹ А значит $\mathbb{X} = \mathbb{Q}\Sigma\mathbb{P}^T$.

С другой стороны, было показано, что $\mathbb{X} = \sum_{i=1}^d Q_i F_i^T = \sum_{i=1}^d \sigma_i Q_i P_i^T$.

Обратим внимание, что в получившемся разложении P_i , обычно¹⁰ не являются ортогональными, а лишь линейно-независимыми. В дальнейшем, утверждается, что единственным биортогональным разложением (то есть таким, когда P_i ортогональны) является SVD.

Пример. Пусть число признаков $p = 2$, то есть $\mathbb{X} = [X_1 : X_2]$. При этом X_1 показывает количество баллов по математике, а X_2 — количество баллов по физике. Рассмотрим матрицу поворота:

$$\mathbb{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два новых признака $\mathbb{Z} = [Z_1 : Z_2] = \mathbb{X}\mathbb{A}$, где $Z_1 = (X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ — отражает общие способности, $Z_2 = (X_1 - X_2)/\sqrt{2}$ — “разница” между способностями по математике и физике. Очень рекомендуется выписать все буквы, которые встречались раньше в этом примере (в частности, матрицу факторных нагрузок).

1.5. Билет 5. Разложение матрицы данных при переходе к новым признакам в виде суммы и в матричном виде

См. предыдущий билет. По всей видимости интересует представление в виде $\mathbb{X} = \mathbb{Q}\mathbb{F}^T$. Заметим, что справедливо представление $\mathbb{X} = \sum_{k=1}^d Q_k F_k^T$. Определим $\mathbb{X}_k = Q_k F_k^T$ для $k \in 1 : d$. Ясно, что $\text{rk}(\mathbb{X}_k) = 1$.¹¹ Тогда $\mathbb{X} = \sum_{k=1}^d \mathbb{X}_k$.

1.6. Билет 6. Как определяется вклад новых признаков

Определение. Зафиксируем $t, s \in \mathbb{N}$ (абстрактные). На пространстве $M_{t,s}(\mathbb{R})$ введем фробениусово скалярное произведение: для любых матриц $\mathbb{X} = \{x_{ij}\}, \mathbb{Y} = \{y_{ij}\} \in M_{t,s}(\mathbb{R})$ определим $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})_F = \sum_{i,j} x_{ij} y_{ij}$.¹²

Это скалярное произведение порождает фробениусову норму матрицы:

$$\|\mathbb{X}\| = \sqrt{\sum_{i,j} x_{ij}^2}.$$

Вернемся к матрицам \mathbb{X}_k (см. билет 5). Если $\mathbb{X}_i \perp \mathbb{X}_j$ для неравных i, j , то $\|\mathbb{X}\|^2 = \sum_{k=1}^d \|\mathbb{X}_k\|^2$.¹⁴ Определим вклад i -того признака как отношение $\|\mathbb{X}_i\|^2/\|\mathbb{X}\|^2$.

⁸Заметим, что $\mathbb{Q}\mathbb{Q}^T$ не обязано совпадать с единичной матрицей. Разве это удивительно? Вновь, используем язык признаков. Лишь одно из перемножений имеет интерпретируемый смысл.

⁹Смотрим на это на языке столбцов. Тогда все станет ясно.

¹⁰Я тут сам не понимаю — вроде бы в общем случае линейной независимости не от куда взяться

¹¹Почему все строки (или все столбцы) этой матрицы линейно зависимы?

¹²Несложно проверить, что это, действительно, скалярное произведение.

¹³Кто помнит, кажется, 5тую главу вычей второго курса, знает, что это не самая классная норма, потому что она не подчинена никакой векторной, но для наших целей подходит.

¹⁴Это стандартное свойство нормы в гильбертовом пространстве.

Лемма. Пусть $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^n$, а $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^p$ ¹⁵.

$$(Q_1 F_1^T, Q_2 F_2^T)_F = (Q_1, Q_2)(F_1, F_2).$$

Доказательство леммы проводится очень просто, если записать поэлементно, что происходит.

Из этой леммы следует, что для того, чтобы понятие вклада признака имело смысл (то есть чтобы матрицы X_k были ортогональны) достаточно ортогональности новых признаков Q_i .

1.7. Билет 7. Сингулярное разложение, как строится

Пусть дана матрица $Y \in M_{L,K}(\mathbb{R})$, где $L < K$ ¹⁶. Рассмотрим матрицу $S = YY^T \in M_{L,L}(\mathbb{R})$ ¹⁷. Эта матрица неотрицательно определена и симметрична. Упорядочим ее собственные числа по невозрастанию: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$. Обозначим U_i — нормированный собственный вектор соответствующий собственному числу λ_i матрицы S (по всем $i \in 1 : L$). Набор $\{U_i\}_{i=1}^L$ образует ОН-базис в \mathbb{R}^L .

Следующее утверждение содержит несколько известных фактов из линейной алгебры (доказывать на коллоквиуме их не нужно).

Теорема. Обозначим $d = \text{rk}(S)$ ¹⁸.

1. $d \leq L, K$.
2. $d = \text{rk}(YY^T) = \text{rk}(Y^TY) = \text{colrank}(Y) = \text{rowrank}(Y)$.
3. $\lambda_d > 0, \lambda_{d+1} = 0$.
4. $\{U_i\}_{i=1}^d$ — образует ОН-базис в $\text{colspan}(Y)$.

Следующая теорема играет ключевую роль в первой части.

Теорема (The SVD). Введем вектора $V_i = Y^T U_i / \sqrt{\lambda_i}$ для $i \leq d$.

1. $\{V_i\}_{i=1}^d$ — образуют ОН-базис в $\text{rowspan}(Y)$. При этом $Y^T U_i = 0$ при $i > d$ ¹⁹.
2. V_i — собственный вектор матрицы $Y^T Y$, соответствующий собственному числу λ_i (для $i \in 1 : d$). Все остальные собственные вектора соответствуют нулевым собственным числам.
3. $U_i = Y V_i / \sqrt{\lambda_i}$ для $i \leq d$.
4. $Y = \sum_{k=1}^d \sqrt{\lambda_k} U_k V_k^T$ — The SVD (Singular Value Decomposition, сингулярное разложение). Терминология: $\sqrt{\lambda_i}$ — сингулярные числа матрицы Y , U_i — левые сингулярные вектора матрицы Y , V_i — правые сингулярные вектора матрицы Y .

Доказательство. 1. Пусть $1 \leq i, j \leq d$. Тогда $(V_i, V_j) = (Y^T U_i, Y^T U_j) / \sqrt{\lambda_i \lambda_j} = (U_i, Y Y^T U_j) = \lambda_j (U_i, U_j) \sqrt{\lambda_i \lambda_j} = \delta_{i,j}$.

¹⁵Обозначения выбраны так, чтобы было ясно видно, причем тут матрицы X_k .

¹⁶Обозначения здесь вводятся с расчетом на Гусеницу в следующем семестре

¹⁷Матрица потом будет обозначать ковариационную, поэтому обозначение правильно ее напоминает.

¹⁸Именно новое количество признаков всегда записывалось d .

¹⁹Кто-нибудь умеет аккуратно это доказывать?

2. То, что V_i — собственный вектор, соответствующий λ_i при $i \leq d$ проверяется непосредственно. Докажем, что V_i при $i > d$ соответствуют нулевым собственным числам. Действительно, пусть некоторый вектор V такой, что $V \perp V_i$ для всех $i \leq d$. Это означает, что $0 = (Y^T U_i, V) = (U_i, YV)$ для всех $i \in 1 : d$, то есть YV соответствует нулевому собственному числу матрицы YY^T , а значит по первому пункту²⁰ $Y^T(YV) = 0$.
3. Подстаортонормированный выте и все будет хорошо.
4. Внешний факт: $E_L = \sum_{i=1}^L U_i U_i^T$ ²¹. Дальше все сводится к простой подстановке, так как $Y = E_L Y$.

□

Заметим, что доказанный факт является очень мощным — на матрицу Y не наложено никаких ограничений! SVD является биортогональным разложением матрицы (на самом деле, SVD — единственное биортогональное разложение).

Перепишем SVD в матричном виде: $Y = U \Lambda^{1/2} V$, где $U = [U_1 : \dots : U_L]$, $V = [V_1 : \dots : V_L]$ и

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_d & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{L,K}(\mathbb{R}).$$

Из этого разложения легко получить $\Lambda^{1/2} = U^T Y V$ — квазидиагональное разложение матрицы Y ²²

Есть еще eigenvalue decomposition (спектральное разложение): $Y Y^T = U \Lambda U^T$.

НЕ НАДО ПУТАТЬ!

1.8. Билет 8. Сингулярное разложение. В каком смысле оно единственно.

Обозначение (1). $\sqrt{\lambda_i}$ — сингулярные числа

Обозначение (2). U_i — левые сингулярные вектора

Обозначение (3). V_i — правые сингулярные вектора

$$\text{Пусть } Y = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

Если сделать замену сингулярной тройки $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$ на $(\sqrt{\lambda_i}, -U_i, -V_i)$, то разложение $\sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ не поменяется.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$. Тогда $\forall U \in \text{span}(U_1, U_2)$ — тоже сингулярный вектор, соответствующий $\lambda_1 = \lambda_2$. Таким образом, U_1, U_2 можно заменить на \forall ортонормированные вектора из $\text{span}(U_1, U_2)$.

²⁰Здесь пока непонятно.

²¹Такое разложение справедливо для любой ОН-системы.

²²Это очень интересное утверждение. Для того, чтобы это осознать, нужно вспомнить, что матрицу можно рассматривать, как отображение (линейное). Тогда утверждение состоит в том, что можно подобрать такие базисы в dom и codom нашей матрицы, что она сама примет почти диагональный вид.

Предложение. Пусть $\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^L c_i P_i Q_i^T, c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq 0$, при этом $\{P_i\}$ и $\{Q_i\}$ — ортонормированные, тогда разложение $\mathbb{Y} = SVD$.

Без доказательства.

Замечание. Как только имеет место биортогональность — тогда SVD.

1.9. Билет 9. Разложение Шмидта

Пусть $(D_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1), (D_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — измеримые пространства с мерой. Введем гильбертово пространство вещественных функций $f \in L^2 \leftrightarrow \int_D |f|^2 d\mu < +\infty$

$$L_i^2 = L^2(D_i, \mu_i), i = 1, 2$$

$$L_{1,2}^2 = L^2(D_1 \times D_2, \mu_1 \otimes \mu_2), \langle \cdot, \cdot \rangle_{1,2}, \| \cdot \|$$

g — ядро интегрального оператора. $G : L_2^2 \longrightarrow L_1^2$

Оператор Гильберта–Шмидта: $Gh = \int_{D_2} g(\cdot, s)h(s)\mu_2(ds)$

Сопряженный оператор: $G^* : L_1^2 \longrightarrow L_2^2$;

$$G^* = \int_{D_2} g(x, \cdot) f(x) \mu_1(dx)$$

$$\langle f, Gh \rangle = \langle G^* f, h \rangle$$

Самосопряженный оператор: $GG^* : L_1^2 \longrightarrow L_1^2$ и $G^*G : L_2^2 \longrightarrow L_2^2$ с ядрами:

$$g_{22}(u, v) = \int_{D_1} g(x, u)g(x, v)\mu_1(dx)$$

$$g_{11}(x, y) = \int_{D_2} g(x, s)g(y, s)\mu_2(ds)$$

Теорема. 1. GG^* имеет ≥ 1 ненулевых собственных чисел

2. GG^* имеет н.б.ч.с. число ненулевых вещественных положительных собственных чисел конечной кратности.

Без доказательства.

Свойство (1). Пусть $\{\lambda_n\}, n \geq 1$ — положительные собственные числа GG^* , $\{\phi_n\}$ — соответствующие собственные функции.

Тогда $\{\phi_n\}$ — ортонормированная система в L_1^2 . И если $\phi \perp \phi_n \forall n$, тогда ϕ соответствует с. ч. $\lambda = 0$ на GG^*

Свойство (2). Пусть $\psi_n = \frac{G^*\phi_n}{\sqrt{\lambda_n}}$, тогда $\{\psi_n\}$ — ортонормированная система в L_2^2 . Если $\psi \perp \psi_n \forall n$, то ψ соответствует нулевому собственному числу G^*G

Свойство (3). $\phi_n = \frac{G\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}$

Разложение Шмидта функции g :

$$g(\cdot, x) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \phi_n(\cdot) \otimes \psi_n(\cdot) \forall g \in L_{1,2}^2 \Rightarrow \|g\|_{1,2}^2 = \sum_n \lambda_n < +\infty$$

1.10. Билет 10. Выборочный анализ главных компонент и сингулярное разложение, общее и различия.

Разложение Шмидта функции g :

$$g(\cdot, x) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \phi_n(\cdot) \otimes \psi_n(\cdot) \forall g \in L_{1,2}^2 \Rightarrow \|g\|_{1,2}^2 = \sum_n \lambda_n < +\infty$$

1.10.1. Сингулярное разложение

$$g(\cdot, \cdot) \leftrightarrow Y_{ij}$$

$$g \leftrightarrow \mathbb{Y}$$

$D_1 = \{1, \dots, L\}$, μ_1 — считающая мера
 $D_2 = \{1, \dots, K\}$, μ_2 — считающая мера

$$g \leftrightarrow \mathbb{Y} \mathbb{Y}^T$$

1.10.2. Выборочный анализ главных компонент

$$\mathbb{X}, \mathbb{Y} = \mathbb{X}^T$$

$D_1 = \{1, \dots, L\}$, μ_1 — считающая мера

$D_2 = \{1, \dots, K\}$, μ_2 — вероятностная мера такая, что $\mu_2(\{i\}) = \frac{1}{K}$

$$\|\mathbb{Y}\|_{1,2}^2 = \frac{\|\mathbb{Y}\|_F^2}{K}$$

Предположим, что $\int_{D_2} g(x, s) \mu_2(ds) = 0$, т.е. признаки X_i — центрированы.

$$g_{11} \leftrightarrow \frac{\mathbb{Y} \mathbb{Y}^T}{K} \text{ — выборочная ковариационная матрица.}$$

1. $\lambda_i = \frac{\hat{\lambda}_i}{K}$
2. $U_i = \hat{U}_i$
3. $V_i = \hat{V}_i \sqrt{K}$

SVD:

$$\mathbb{Y} = \sum_i \sqrt{\hat{\lambda}_i} \hat{U}_i \hat{V}_i^T$$

PCA:

$$\mathbb{Y} = \sum_i \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$$

1.11. Билет 11. Анализ главных компонент на генеральном языке как частный случай разложения Шмидта.

Разложение случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_L)^T$.

$D_1 = \{1, \dots, L\}$, μ_1 — считающая мера
 $(D_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — вероятностное пространство
 $g(x, s) \leftrightarrow \xi_i(\omega)$, $g \leftrightarrow \xi$, $x \leftrightarrow i$, $s \leftrightarrow \omega$

$$g \in L_{1,2}^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^L \mathbb{E} \xi_i^2 < \infty$$

Пусть $\int_{D_2} g(x,s)\mu_2(ds) = 0$, т.е. $\mathbb{E}\xi_i = 0 \forall i$

$$g_{11} = \int_{D_2} g(x,s)g(y,s)d\mu_2$$

Значит $g_{11}(i,j) = \mathbb{E}\xi_i\xi_j = cov(\xi_i, \xi_j)$, т.е. g_{11} — ковариационная матрица $\{\mathbb{E}\xi_i\xi_j\}_{i,j}$

$\lambda_i, U_i (U_i \leftrightarrow \phi_i)$ — с. ч. и с. в. матрицы вектора ξ
 $\psi_i \leftrightarrow \epsilon_i$ (белый шум)

$$\xi(\omega) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} U_n \epsilon_n(\omega)$$

1.12. Билет 12. Почему главные компоненты так называются, в каком смысле они главные.

В силу третьего свойства оптимальности SVD:

Пусть $Y_1, \dots, Y_K \in \mathbb{R}^r$. $P \in \mathbb{R}^L$ задает направление ($|P| = 1$, P — главное направление, которое задается 1-м с. в.).

$$\sum_{i=1}^K \langle Y_i, P \rangle^2 \longrightarrow \max_P$$

Предложение. 1. $\max_P \sum_{i=1}^K \langle Y_i, P \rangle^2 = \lambda_1$, и достигается на $P = U_1$

2. $\max_{P: P \perp U_j} \sum_{i=1}^K \langle Y_i, P \rangle^2 = \lambda_i$, и достигается на $U_i \forall j = 1, \dots, k-1$, где U_i — i -й главный вектор, задающий i -е главное направление

$\langle Y_j, U_i \rangle$ — i -я главная компонента j -го индивида.

Обозначение. Z_i — новые признаки

$Z_i = (\langle Y_1, U_i \rangle, \dots, \langle Y_k, U_i \rangle)^T$ — вектор i -х главных компонент.
 $Z_i = \mathbb{X}U_i = \mathbb{Y}^T U_i = \sqrt{\lambda_i} V_i$

Обозначение. V_i — факторный вектор или вектор факторных значений.

Замечание. Если исходные признаки были центрированы ($\mathbb{E}X_i = 0$), то все остальное тоже будет центрированным ($\mathbb{E}U_i = 0, \mathbb{E}V_i = 0$).

Обозначение. $\{V_i\}_{i=1}^d$ — базис пространства признаков.

$$X_i \perp \mathbb{I}, \langle X_i, \mathbb{I} \rangle = 0 \implies \mathbb{E}X_i = 0$$

Если $\forall i X_i \perp \mathbb{I} \implies$ линейная комбинация $X_i \perp \mathbb{I}$.

1.13. Билет 13. Оптимальность сингулярного разложения в смысле аппроксимации матрицей ранга r .

Пусть

$$\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$$

— некоторое разложение SVD.

Определим множество матриц $M_r \subset \mathbb{R}^{L \times K}$ ранга $\leq r$.

Предложение. 1. Аппроксимация матрицей меньшего ранга:

$$\min_{\tilde{Y} \in M_r} \|\mathbb{Y} - \tilde{Y}\|_F^2 = \sum_{i=r+1}^d \lambda_i;$$

2. Минимум достигается на первых r элементах сингулярного разложения:

$$\tilde{Y}_0 = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

Без доказательства.

1.14. Билет 14. Оптимальность сингулярного разложения в смысле аппроксимации подпространством размерности r

Пусть $\alpha_r \in \mathbb{R}^L$ — подпространство размерности r .

Предложение. 1.

$$\min_{\alpha_r} \sum_{i=1}^K \text{dist}^2(\mathbb{Y}_i, \alpha_r) = \sum_{i=r+1}^d \lambda_i;$$

2. Минимум достигается на подпространстве натянутом на первые r с. в. $(\text{span}(U_1, \dots, U_r))$.

Набирал Вася 15-21. Кажется обозначения должны совпадать с 22-35, хотя мог что-нибудь пропустить.

1.15. Билет 15. Оптимальность в анализе главных компонент в статистической терминологии (через дисперсии)

Определение. Будем говорить, что $w \in \mathbb{R}^p$ задает первое главное направление, если

1. $\|w\|_2 = 1$

2. $w = \arg \max_{w \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n \langle y_i, w \rangle^2$

Определение. Пусть w_1, \dots, w_{s-1} — главные направления. Будем говорить, что $w \in \mathbb{R}^p$ задает s -ое главное направление, если

1. $\|w\|_2 = 1$

2. $w_s = \arg \max_w \sum_{i=1}^n \langle y_i, w \rangle^2 \text{ s.t. } w \perp w_i \forall i = 1 \dots (s-1)$

Теорема. В обозначениях, введенных выше:

1. $\max_w \sum_{i=1}^n \langle y_i, w \rangle^2 = \lambda_1$

$$2. \arg \max_w \sum_{i=1}^n \langle y_i, w \rangle^2 = u_1$$

3. Для s -ого главного направления аналогично

$$\arg \max_{\substack{w_s \in \mathbb{R}^p \\ w_s \perp w_i \\ i=1 \dots (s-1)}} \sum_{i=1}^n \langle y_i, w_s \rangle^2 = u_s$$

$$\max_{\substack{w_s \in \mathbb{R}^p \\ w_s \perp w_i \\ i=1 \dots (s-1)}} \sum_{i=1}^n \langle y_i, w_s \rangle^2 = \lambda_s$$

Данное утверждение — переформулировка экстремальной задачи, определяющей SVD.

Заметим, что за счет центрирования $\sum_{j=1}^n \langle y_j, u_i \rangle^2$ с точностью до константы ($\frac{1}{n}$) совпадает с выборочной дисперсией признака $z_j = \langle y_j, u_i \rangle$ (z_i — линейная комбинация из начальных признаков). Таким образом, первое главное направление в статистической терминологии — такая прямая, при проекции на которую получившийся признак будет иметь максимальную выборочную дисперсию. s -ые направления аналогично, при условии, что ищем прямую, перпендикулярную всем предыдущим.

1.16. Билет 16. Оптимизация в АГК в терминах ковариационных матриц.

Теорема. Следующие две задачи эквивалентны:

1.

$$\arg \min_{\tilde{Y}, rk \tilde{Y} \leq d} ||Y - \tilde{Y}||_F$$

2.

$$\arg \min_{\tilde{Y}, rk \tilde{Y} \leq d} ||YY^T - \tilde{Y}\tilde{Y}^T||_F = \arg \min_{\tilde{S}, \tilde{S} \text{ sym.}, p.d., rk(\tilde{S}) \leq d} ||S - \tilde{S}||_F$$

Почему это так? Мы знаем решение как первой, так и второй задачи. Для первой — через SVD, для второй — через жорданову форму (или как частный случай SVD) — записываем матрицу в виде нужного разложения, обнуляем наименьшие собственные числа и получаем матрицу необходимого ранга, которая решает либо первую, либо вторую задачу:

Для первой задачи:

$$Y = U \Lambda^{\frac{1}{2}} V^T$$

Для второй:

$$YY^T = U \Lambda U^T$$

1.17. Билет 17. В двух статистических пакетах получились разные главные компоненты. Отчего так могло получиться?

Смотрим на разложение матрицы.

$$\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} u_i v_i^T$$

Как мы знаем, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$

Данное разложение определено не совсем единственно: Для собственных чисел кратности 1 u_i и v_i можно одновременно умножить на -1 и ничего не поменяется (а для комплексных чисел поворотов еще больше...), а для собственных чисел, у которых кратность больше 1, можно выбрать любой базис линейного подпространства, соответствующего данному собственному числу и будут получаться различные разложения.

В стат. пакетах выч. методы, с помощью которых ищутся главные компоненты различаются, поэтому и найденные ими компоненты могут отличаться (а некоторые выч. методы могут и от запуска к запуску выдавать разные результаты, так что на самом деле и в одном стат. пакете теоретически можно получать разные результаты.)

1.18. Билет 18. Смысл первой ГК, если все ковариации (корреляции) исходных признаков положительны.

Теорема (Перрон-Фробениус). Пусть у матрицы M все элементы строго-положительны. Тогда у матрицы M :

- Максимальное собственное число больше нуля
- Максимальное собственное число имеет кратность 1 (т.е. ему соответствует одномерное подпространство, а все остальные с.ч. меньше его)
- У данного собственного числа существует собственный вектор с строго-положительными компонентами

Данная теорема, примененная для ковариационной матрицы с положительными корреляциями, дает нам, что первое собственное направление будет взвешенной суммой исходных признаков. Таким образом, смысл первой главной компоненты — «среднее всех признаков».

1.19. Билет 19. Разница между АГК по корреляционной и по ковариационной матрице на примере двух признаков. Когда что использовать.

Пусть сначала у нас признаки стандартизованы. Тогда корреляционная матрица выглядит следующим образом:

$$\mathbb{S} = \mathbb{X}^T \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Ее собственные числа и вектора легко посчитать:

$$\lambda_1 = 1 + \rho, u_1 = (2^{-1/2}, 2^{-1/2})^T$$

$$\lambda_2 = 1 - \rho, u_2 = (2^{-1/2}, -2^{-1/2})^T$$

Главные компоненты соответственно²³:

$$z_1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$$

$$z_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$$

²³на всякий случай: x_i — вектор-столбец для i -ого признака

А теперь пусть у нас дисперсия первой компоненты будет «большой»:

$$\mathbb{S} = \mathbb{X}^T \mathbb{X} = \begin{pmatrix} a^2 & a\rho \\ a\rho & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица 2×2 , для нее можно выписать формулы для собственных чисел и векторов. Теперь если устремить $a \rightarrow \infty$, то будет выполнено следующее:

$$\frac{u_{11}}{u_{12}} \rightarrow \frac{a}{\rho}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \rightarrow 1$$

Вспомним, что u_1 — координаты первой главной компоненты в старом базисе и получим, что первый признак будет «перетягивать» на себя главное направление. И чем меньше корреляция, тем сильнее будет вклад первого признака в первую компоненту.

Как выбрать:

1. Признаки измеряны в «разных» единицах или вообще ничего про них не знаем — стандартизуем
2. Считаем, что признаки в «примерно одинаковых» единицах измерения — можем не стандартизовать.

1.20. Билет 20. Способы выбора числа главных компонент

Все методы во-многом эвристики. Кроме того, у АГК отсутствует модель, из-за чего никаких гипотез особо не проверить.

1. Scree plot — рисуем график: собственное число по оси y , номер с.ч. по оси x . Смотрим, где график начинает напоминать прямую, параллельную оси x и берем компоненты до этого места в качестве результаты.
2. Воспользуемся тем, что $\sum \lambda_i$ равняется общей дисперсии (total variance). Поэтому $\frac{\sum_{i=1}^d \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}$ можно трактовать, как процент «объясненной» дисперсии. Фиксируем, хотя бы сколько процентов хотим объяснить и на основе этого выбираем d .
3. Правило Кайзера. Берем $\lambda_i > \frac{\text{tr}(S)}{p}$, где S — ковариационная матрица. Т.к. след матрицы равняется сумме ее собственных чисел, мы на самом деле берем те собственные числа, которые «выше среднего». В случае, когда анализ ведется по корреляционной матрицы, диагональ S равна 1, поэтому критерий упрощается до $\lambda_i > 1$.
4. Правило сломанной трости. Пусть $l_i = \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_i}$. $\sum l_i = 1$. Кинем $n - 1$ случайную точку в отрезке $[0,1]$ и получим n отрезков. Отсортируем отрезки по длине и получим $L_1 \geq L_2, \dots, \geq L_n$. Можно посчитать $EL_i = \frac{1}{n} \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}$. Найдем максимальное d такое, что выполнено $l_i > EL_i \forall i = 1 \dots d$ и возьмем в качестве главных компонент $u_1 \dots u_d$.
5. Выбираем столько, сколько можем объяснить.

1.21. Билет 21. Почему доля собственного числа по отношению к сумме собственных чисел называется объясненной долей общей дисперсии?

Запишем разложение по главным компонентам:

$$\mathbb{X}^T = \mathbb{Y} = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} u_i v_i^T$$

Как мы знаем, в этом разложении u_i — собственные вектора, а λ_i — собственные числа матрицы ковариаций (или корреляций), равной $\frac{\mathbb{X}^T \mathbb{X}}{n}$.

Запишем суммарную дисперсию (данные центрированы):

$$\sum_{i=1}^p \text{var}_i = \sum_{i=1}^p \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{X}_{ji}^2 = \frac{\text{tr} \mathbb{X}^T \mathbb{X}}{n} = \text{total variance}$$

В АГК мы ищем собственные числа и собственные вектора как раз матрицы $\frac{1}{n} \mathbb{X}^T \mathbb{X}$, след матрицы при смене базиса не меняется, поэтому $\sum \lambda_i = \text{total variance}$. Поэтому $\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}$ можно

называть объясненной долей общей дисперсии.

Начиная отсюда и до конца 28 билета набирала Лиза.

Напоминание. $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{K \times L}$. SVD \mathbb{Y} называется

$$\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T,$$

где

1. λ_i — сингулярные числа \mathbb{Y} (собственные числа $\mathbb{Y} \mathbb{Y}^T$),
2. U_i — левые сингулярные вектора (собственные вектора $\mathbb{Y} \mathbb{Y}^T$),
3. V_i — правые сингулярные вектора ($V_i = \mathbb{Y}^T U_i / \sqrt{\lambda_i}$),

Напоминание. $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{K \times L}$ — матрица признаков. $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^T$.

Рассмотрим измеримые пространства $(D_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(D_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$, где

1. $D_1 = \{1, \dots, L\}$, $D_2 = \{1, \dots, K\}$,
2. $\mathfrak{A}_{1,2}$ — множества всех подмножеств $D_{1,2}$,
3. μ_1 — считающая мера, μ_2 — вероятностная, $\mu_2(\{i\}) = 1/K$.

Если

$$\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\tilde{\lambda}_i} \tilde{U}_i \tilde{V}_i^T$$

— SVD \mathbb{Y} , то PCA \mathbb{Y} называется

$$\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T,$$

где $\lambda_i = \tilde{\lambda}_i / K$, $U_i = \tilde{U}_i$, $V_i = \sqrt{K} \tilde{V}_i$.

Замечание. Об обозначениях. Считается, что \mathbb{A} — это матрица, $\{A_i\}$ — столбцы матрицы \mathbb{A} , $\{a_{ij}\}$ — ее элементы.

Также p — это количество признаков, n — количество индивидов. В ссылках на SVD L соответствует p , K соответствует n .

1.22. Билет 22. На основе каких элементов сингулярного разложения интерпретируются главные компоненты как линейные комбинации исходных признаков? Привести формулу и пример

Пусть $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{K \times L}$ — матрица исходных признаков, $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^T$.

Главные компоненты — это $Z_i = \sqrt{\lambda_i} V_i$, $i = 1, \dots, d$, где $\sqrt{\lambda_i}$, V_i из PCA \mathbb{Y} .

Можно показать, что $Z_i = \mathbb{X} U_i$, где U_i — собственные вектора ковариационной матрицы $\mathbb{X}^T \mathbb{X} / K$. Таким образом, главные компоненты — это линейные комбинации исходных признаков, где в качестве коэффициентов выступают собственные вектора ковариационной матрицы исходных признаков.

Пример. Двумерный случай со стандартизованной матрицей, U_i , Z_i легко считаются.

$$\frac{1}{K} \mathbb{X}^T \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\rho > 0$, тогда $U_1 = (1, 1)^T / \sqrt{2}$ — первое главное направление. $U_1 \perp U_2$, значит, $U_2 = (1, -1)^T / \sqrt{2}$.

Получаем, что $Z_1 = (x_{11} + x_{12}, x_{21} + x_{22})^T$, то есть сумма исходных признаков, а $Z_1 = (x_{11} - x_{12}, x_{21} - x_{22})^T$ — их разность.

Вклад первой компоненты $(1 + \rho)/2$, вклад второй — $(1 - \rho)/2$.

1.23. Билет 23. АГК с точки зрения построения базиса в пространстве индивидов и в пространстве признаков. Координаты в новых базисах

$\mathbb{X} = [X_1 : \dots : X_L] \in \mathbb{R}^{K \times L}$ — матрица исходных признаков, $\mathbb{Y} = [Y_1 : \dots : Y_K] = \mathbb{X}^T$. $L = p$, $K = n$, также считаем, что $d = p$, то есть матрица \mathbb{Y} — полного ранга.²⁴ Вектора U_i , V_i , $i = 1, \dots, d$ из PCA \mathbb{Y} .

С точки зрения построения базиса в пространстве индивидов:

$\{U_j\}_{j=1}^d$ — это ортонормированный базис в пространстве индивидов, $z_{ij} = Y_i^T U_j$ — это координаты i -го индивида в этом базисе.²⁵

С точки зрения построения базиса в пространстве признаков:

$\{V_j\}_{j=1}^d$ — это ортонормированный базис в пространстве признаков,

$$f_{ij} = \langle X_i, V_j \rangle = \begin{cases} \text{cov}(X_i, V_j), & \text{если считать по ковариационной матрице,} \\ \rho(X_i, V_j), & \text{если считать по корреляционной матрице,} \end{cases}$$

— это координаты i -го признака в этом базисе.

1.24. Билет 24. Как выявить индивидов, которые плохо описываются плоскостью первых двух главных компонент?

Рассмотрим Y_i — i -индивид и первые два главных направления $U_{1,2}$.

$$\cos^2(\angle(Y_i, \text{span}(U_1, U_2))) = \left(\frac{Y_i^T U_1}{\|Y_i\| \|U_1\|} \right)^2 + \left(\frac{Y_i^T U_2}{\|Y_i\| \|U_2\|} \right)^2 = (z_{i1}^2 + z_{i2}^2) / \|Y_i\|^2.$$

Те индивиды, для которых \cos^2 мал, плохо описываются плоскостью первых двух главных компонент.

²⁴UPD. Добавила разъяснение.

²⁵UPD. Здесь исправила определение z_{ij} .

1.25. Билет 25. Как вычислить значения главных компонент для индивида, которого не было в исходной выборке. А как вычислить значения факторных значений?

Пусть²⁶ $A \in \mathbb{R}^p$ — новый индивид. Тогда $B = A^T \mathbb{U}$ — значения²⁷ главных компонент для этого индивида.

Напомним, что факторные значения $\{V_i\}$ — это нормированные главные компоненты, поэтому $\tilde{B} = A^T \tilde{\mathbb{U}}$, где $\tilde{\mathbb{U}} = \mathbb{U} / \sqrt{\lambda_i}$.

1.26. Билет 26. В каком случае координаты в ортонормированном базисе можно назвать корреляциями?

Нужно, чтобы признак, который раскладывают, был стандартизован, а вектора в базисе — центрированы (они уже отнормированы).

1.27. Билет 27. Чему равны суммы по строкам и по столбцам в матрице, составленной из собственных векторов в АГК?

Матрица, составленная из собственных векторов, это $\mathbb{U} = [U_1 : \dots : U_p] = \{u_{ij}\} \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

Сумма квадратов по строкам — $\sum_{i=1}^p u_{ij}^2 = \|U_j\|^2 = 1$. Сумма квадратов по столбцам — $\sum_{j=1}^p u_{ij}^2 = 1$, так как $\mathbb{U}^T = \mathbb{U}^{-1}$.

1.28. Билет 28. Чему равны суммы по строкам и по столбцам в матрице факторных нагрузок в АГК?

Матрица факторных нагрузок — это $\mathbb{F} = [F_1 : \dots : F_d] = \{f_{ij}\} \in \mathbb{R}^{p \times d}$. Вспомним, что $V_j \in \mathbb{R}^n$, как и столбцы матрицы $\mathbb{X} = [X_1, \dots, X_p]$. Далее из $SV D$ -разложения мы знаем, что $U_i = \frac{Y V_i}{\sqrt{\lambda_i}}$. Поэтому $\sqrt{\lambda_i} U_i = Y V_i$ и $(F_i)_j = \langle X_j, U_i \rangle$. F_i — i -ый столбец, поэтому $f_{ij} = \langle X_i, V_j \rangle$.

Сумма квадратов по строкам — $\sum_{i=1}^p f_{ij}^2 = \|F_j\|^2 = \lambda_j$. Сумма квадратов по столбцам

$$\sum_{j=1}^d f_{ij}^2 = \sum_{j=1}^d \langle X_i, V_j \rangle^2 = \begin{cases} \|X_i\|^2, & \text{если считать по ковариационной матрице,} \\ 1, & \text{если считать по корреляционной матрице.} \end{cases}$$

1.29. Билет 29. Как интерпретировать скалярное произведение строк в матрице факторных нагрузок в АГК?

Смотрим на билет 28. Из него мы знаем, как интерпретировать скалярное произведение строки с самой собой — это либо норма X_i , если анализ ведется по ковариационной матрице, либо 1, если анализ ведется по корреляционной матрице. Естественно предположить, что примерно так же интерпретируется и скалярное произведение строк в матрице: в самом деле, пусть как и до этого $\mathbb{F} = [F_1 : \dots : F_d] = \{f_{ij}\} \in \mathbb{R}^{p \times d}$, $f_{ij} = \langle X_i, V_j \rangle$ — матрица факторных нагрузок. Тогда i -ая строчка \mathbb{F} интерпретируется как координаты i -ого признака в ортонормированном базисе V_1, \dots, V_d . Отсюда, за счет ОНБ, без всяких формул получаем, что скалярное произведение строчек i и j это тоже самое, что скалярное произведение векторов

²⁶Здесь $L = p$ и обычно $d = p$

²⁷UPD. Транспонирование \mathbb{U} было лишним. Исправила.

X_i и X_j . Формально:

$$\sum_{j=1}^d f_{ij} f_{kj} = \sum_{j=1}^d \langle X_i, V_j \rangle \langle X_k, V_j \rangle = \left(\sum_{j=1}^d \langle X_i, V_j \rangle \right) \left(\sum_{j=1}^d \langle X_k, V_j \rangle \right) = \begin{cases} \langle X_i, X_k \rangle, & \text{если считать по ковариации} \\ \rho(X_i, X_k), & \text{если считать по корреляции} \end{cases}$$

Признаки у нас центрированы, поэтому $\langle X_i, X_j \rangle = cov(X_i, X_j)$ ²⁸.

1.30. Билет 30. Как нарисовать исходные орты в плоскости двух первых главных компонент?

Матрица $\mathbb{U} = [U_1, \dots, U_p]$ — ортогональная матрица, составленная из собственных векторов ковариационной/корреляционной матрицы. Вспоминаем линейную алгебру или один из множества предыдущих вопросов и понимаем, что столбец — координаты вектора U_i в исходном базисе. Следовательно (матрица то ортогональная), строчка U_i — координаты старого базиса в новом (новый = составленный из U_1, \dots, U_p). Поэтому U_{i1}, U_{i2} — координаты i -ого орта в плоскости первых двух главных компонент.

1.31. Билет 31. Зачем и когда первые две координаты факторных нагрузок рисуются в единичном круге?

Если АГК строился по корреляционной матрице, то

$$\sum_{j=1}^d f_{ij}^2 = 1, \quad (2)$$

где соответственно $d = \text{rk } \mathbb{Y}$, f_{ij} — факторные нагрузки.

Таким образом, $f_{i1}^2 + f_{i2}^2$ (эта сумма, естественно, меньше 1) показывает, насколько хорошо первые две компоненты отражают i -ый признак. Поэтому в таком случае на единичной окружности отображается вектор, выходящий из нуля, с концом в (f_{i1}, f_{i2}) и длина этого вектора показывает, насколько хорошо i -ый признак описывается в плоскости первых двух главных компонент.

1.32. Билет 32. Чему равна норма i -го вектора из главных компонент?

Главные компоненты — координаты индивидов в базисе из главных направлений. Вспомним, что $Y = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} u_i v_i^T = \sum u_i z_i^T$, где $z_i = \sqrt{\lambda_i} v_i^T$. Таким образом, $\|z_i\|^2 = \sum_{j=1}^n (v_i)_j^2 = \lambda_i \sum_{i=1}^n |v_i|^2$. v — ортонормированный вектор, поэтому сумма превращается в 1 и норма равна корню из i -го собственного числа матрицы \mathbb{Y} .

1.33. Билет 33. Как формализовать веса для признаков и для индивидов в АГК?

Иногда мы хотим, чтобы некоторые индивиды давали вклад больше, чем другие. Для этого нужно каждому индивиду придать определенный вес (чем больше вес, тем больше вклад индивида). Если хотим придать каждому индивиду вес, то в разложении Шмидта вводим меру μ_2 : $\mu_2(i) = \omega_i$. В итоге получаем по прежнему биортогональное разложение, но с

²⁸Рекомендуется убедиться, что вы понимаете, что подразумевается под скалярным произведением

веса: $\langle V_i, V_j \rangle = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \omega_k} \sum_{k=1}^n \omega_k (V_i)_k (V_j)_k$. Веса на признаках — это масштаб (когда мы осознанно придаем больший вес индивиду, у которого больше разброс).

1.34. Билет 34. Какова модель в факторном анализе?

Модель факторного анализа

$$\xi = \mathbb{F}\eta + \varepsilon,$$

где ξ — случайный вектор размерности p , \mathbb{F} — матрица размерности $p \times r$, η — случайный вектор размерности r , ε — случайный вектор размерности p .

При этом $\text{cov } \xi = \Sigma$, $\text{cov } \eta = \mathbb{I}$, $\text{cov } \varepsilon = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2) = \Psi$.

Можно переписать все в виде:

$$\Sigma = \mathbb{F}\mathbb{F}^T + \Psi.$$

Замечание. F_i не может иметь вид $(0, \dots, a, \dots, 0)^T \neq 0$, то есть не может быть факторов, уникальных для признаков!

Стандартно факторный анализ делается по стандартизованным признакам, то есть $\text{cov } \xi = \text{cov } \xi$. \mathbb{F} называется факторными нагрузками, η — факторными значениями.

Общностью будем называть $\sum_{j=1}^r f_{ij}^2 = 1 - \sigma_i^2$.

1.35. Билет 35. Что делает АГК в модели факторного анализа при равных общностях?

Перепишем модель факторного анализа на выборочном языке.

$$\mathbb{X} = \mathbb{V}\mathbb{F}^T + \varepsilon.$$

\mathbb{S} — выборочная ковариационная матрица. Хотим

$$||\mathbb{S} - (\mathbb{F}\mathbb{F}^T + \Psi)||_F^2 \rightarrow \min_{\mathbb{F}, \Psi}$$

Обозначим $\tilde{\mathbb{S}} = \mathbb{F}\mathbb{F}^T + \Psi$. Оказывается, что эта задача эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \sum_{i \neq j} (s_{ij} - \sum_{k=1}^r f_{ik} f_{jk})^2 \rightarrow \min \\ (\mathbb{F}\mathbb{F}^T)_{ii} \leq 1 \end{cases}$$

То есть, минимизации по всем элементам, кроме диагональных. Данный метод поиска факторов называется MINRES. Известно, что АГК эквивалентно задаче

$$||\mathbb{S} - \tilde{\mathbb{S}}|| \rightarrow \min \quad (3)$$

Поэтому, если общность одинаковая, то АГК и MINRES решают одну и ту же задачу.

[Набирала Белла 36-42. Есть вопросы, выделены жирным, кое-что не нашла вовсе.](#)

Напоминание. Модель в факторном анализе имеет вид

$$\xi = \mathbb{F}\eta + \varepsilon, \quad (4)$$

где

1. ξ — исходный вектор признаков.
2. $\mathbb{F} = [F_1 : \dots : F_r] = \{f_{ij}\} \in \mathbb{R}^{p \times r}$ — матрица факторных нагрузок.
3. $\eta \in \mathbb{R}^r$ — факторное значение.
4. $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ — вектор индивидуальных (характерных/специфических) факторов (**можно ли так говорить?**).
5. p — исходное число признаков, r — число общих факторов (**можно ли так говорить?**), $r \ll p$.

Предполагаемые условия:

1. $\mathbb{E}\eta = 0$, $\mathbb{D}\eta = 1$, η_i — некорр.
2. ε и η некорр., ε_i некорр. между собой.
3. $\mathbb{E}\varepsilon = 0$, $\text{cov}(\varepsilon) = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$, $\text{cov}(\xi) = \Sigma$, $\tilde{\xi} = \mathbb{F}\eta$, $\text{cov}(\varepsilon) = \Psi$, $\text{cov}(\tilde{\xi}) = \mathbb{F}\mathbb{F}^T$

Модель (4) переписывается как $\Sigma = \mathbb{F}\mathbb{F}^T + \Psi$,
 $\xi_i = f_{i1}\eta_1 + \dots + f_{ir}\eta_r + \varepsilon_i$.

Замечание. Почти всегда предполагается, что признаки стандартизованы, то есть $\text{cov}(\xi) = \text{corr}(\xi)$.

1.36. 36. Какая разница между АГК и факторным анализом?

1. В факторном анализе есть модель.
2. В факторном анализе не может быть факторов, которые уникальны по одному призна-

ку, то есть F_i не может иметь вид $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$. Такие факторы относятся к уникальным, то есть

входят в ε , а мы интересуемся общей частью.

1.37. 37. Связь между числом факторов и числом признаков для корректности задачи.

Из $\Sigma = \mathbb{F}\mathbb{F}^T + \Psi$ получаем $\frac{p(p+1)}{2}$ равенств (помним, что Σ — симметр.) и число параметров $\leq pr + p$.

Условие корректности задачи $pr + p \leq \frac{p(p+1)}{2} \Rightarrow r \leq \frac{p-1}{2}$.

Получили условие, когда число уравнение не меньше числа параметров. Тут была заминка на лекции (2015.X.08), примерно 40-50 минута. Сошлись на том, что если модель верна, то лишние уравнения не сделают ее неверной. Если бы знак стоял в обратную сторону, то вышло бы, что равенства модель не характеризуют.

1.38. 38. Что минимизируется в методе MINRES? В чем разница с тем, что минимизируется в АГК?

Задача на выборочном языке имеет вид $\mathbb{X} = \mathbb{V}\mathbb{F}^T + \varepsilon$, где $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbb{V} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbb{F} \in \mathbb{R}^{p \times r}$. Пусть \mathbb{S} — выборочная ковариационная матрица (известна). $\|\mathbb{S} - (\mathbb{F}\mathbb{F}^T + \Psi)\|_F^2 \rightarrow \min_{\mathbb{F}, \Psi}$

(Метод Наименьших Квадратов).

Пусть $\tilde{\mathbb{S}} := \mathbb{F}\mathbb{F}^T + \Psi$. Тогда $\sum_{i,j} (S_{ij} - \tilde{S}_{ij})^2 \rightarrow \min$.

$$\begin{cases} \sum_{i \neq j} (S_{ij} - \sum_{k=1}^r f_{ik} f_{jk})^2 \rightarrow \min, \\ (\mathbb{F}\mathbb{F}^T)_{ii} \leq 1 \Rightarrow \sigma_i^2 = 1 - (\mathbb{F}\mathbb{F}^T)_{ii}. \end{cases}$$

Minres — minimization residual correlations (минимизация разницы известных корреляций и той их частью, что объясняется факторами).

АГК: $\|\mathbb{Y} - \tilde{\mathbb{Y}}\| \rightarrow \min_{\text{rank } \tilde{\mathbb{Y}} \leq r} \Leftrightarrow \|\mathbb{Y}\mathbb{Y}^T - \tilde{\mathbb{Y}}\tilde{\mathbb{Y}}^T\| \rightarrow \min_{\text{rank } \tilde{\mathbb{Y}} \leq r}$

Тут надо все пояснить про АГК, но меня не было на лекции той, простите-помогите.

1.39. 39. Какой вид имеет функция правдоподобия в ФА?

Пусть $\xi \sim N(0, \Sigma)$.

$$\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{F}, \Psi) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det \Sigma^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} X_i^T \Sigma^{-1} X_i} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det(\mathbb{F}\mathbb{F}^T + \Psi)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (X_i^T (\mathbb{F}\mathbb{F}^T + \Psi^{-1}) X_i)}$$

Вместо \mathbb{X} рассм. выборочная ковар. матрица \mathbb{S} . $\mathcal{L}(\mathbb{S}; \mathbb{F}, \Psi) \sim W_p(\Sigma)$.

Так как решений бесконечно много с точностью до вращений, и чтобы как-то зафиксировать $\mathcal{L}(\mathbb{S}; \mathbb{F}, \Psi)$
 $\max_{\mathbb{F}, \Psi}$ **Здесь кажется что-то потерялось???**

1.40. 40. Проверка значимости модели ФА.

Не уверена, что это тот самый вопрос.

$H_0 : \Sigma = \mathbb{F}\mathbb{F}^T + \Psi$

Статистика критерия $t = (n - 1 - \frac{2p+4r-5}{6}) \ln \left(\frac{|\hat{\mathbb{F}}\hat{\mathbb{F}}^T + \hat{\Psi}|}{|\hat{\mathbb{S}}|} \right) \sim \chi^2 \left(\frac{(p+r)^2 - (p+r)}{2} \right)$.

1.41. 41. Критерий сферичности Бартлетта, для чего нужен

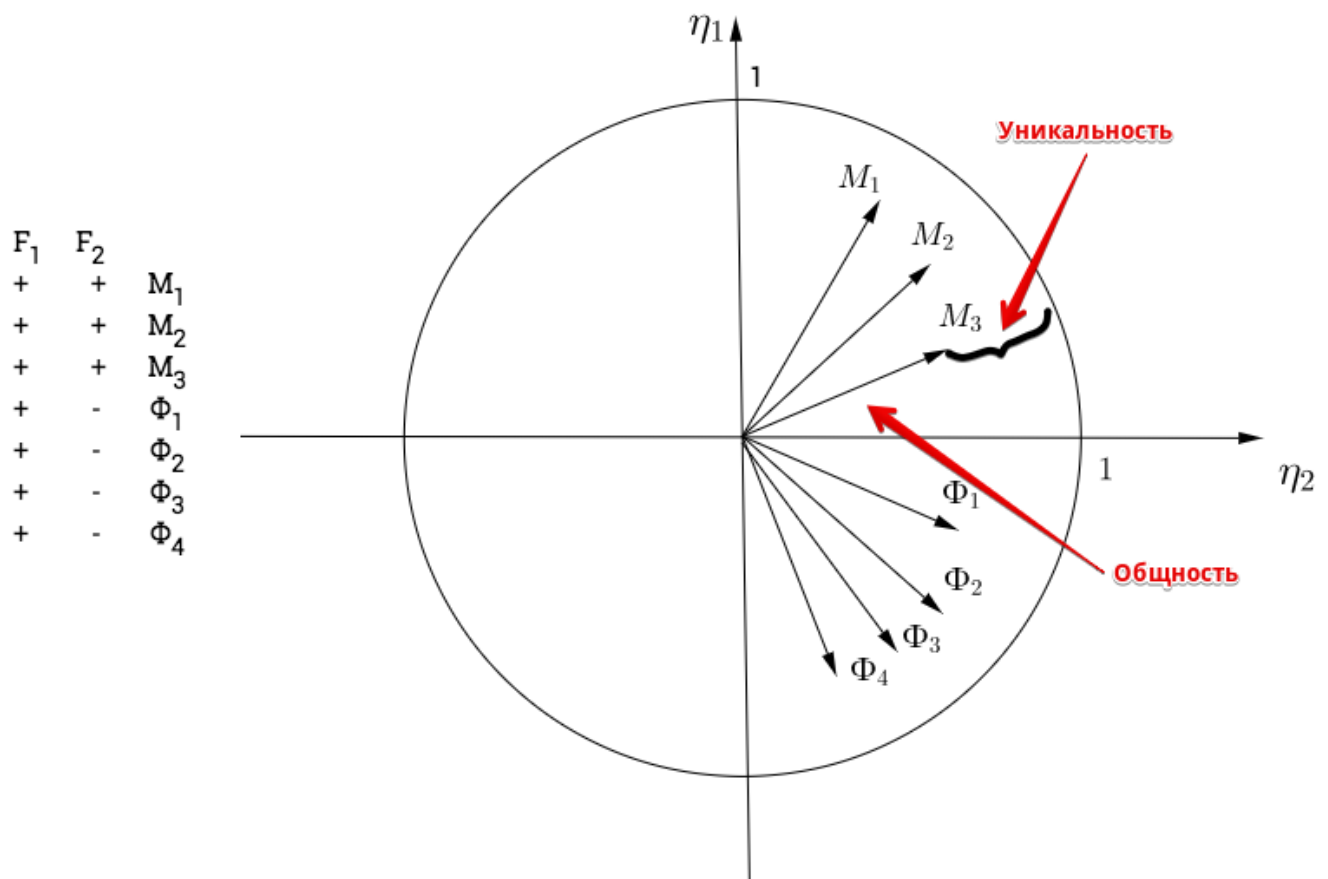
Частный случай критерия (Вопрос 40) при $r = 0$, имеет смысл проверять перед поиском факторов, вдруг общих факторов совсем нет.

$H_0 : \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ — сферичность (т.к. данные выглядят как сфера).

Статистика критерия $t = (n - 1 - \frac{2p-5}{6}) \ln \left(\frac{1}{\hat{\mathbb{S}}} \right) \sim \chi^2 \left(\frac{p^2 - p}{2} \right)$.

1.42. 42. Что такое общность и уникальность признака? Какие факторы не находит факторный анализ?

$\sum_{j=1}^r f_{ij}^2 = 1 - D(\varepsilon_i) - \text{communality(общность)}, D(\varepsilon_i) - \text{уникальность}.$



Пример. При повороте осей примерно на 45° получим скрытые факторы — это способности по математике и по физике. **Не нашла материала про то, какие факторы не находит факторный анализ.**

Вспомним, что в F не бывает признаков вида $(0, \dots, 0, a, 0, \dots, 0)^T$. Поэтому «уникальные» признаки и шум нам разделить не удастся. В частности, может оказаться так, что то, что мы трактуем как шум — на самом деле не шум, а естественный признак объекта.

1.43. Билет 43. Общность как множественный коэффициент корреляции.

Тут вроде даже сама НЭ не может ответить что надо говорить. А я уж тем более...

1.44. Билет 44. Как интерпретируются признаки в ФА?

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{p1} & \cdots & f_{pr} \end{pmatrix}, f_{ij} = \rho(\xi_i, \eta_j)$$

Специфика факторного анализа в том, что факторные значения нам вообще не нужны, в базовой постановке (для интерпретации). Для их интерпретации хватает и \mathbb{F} . То есть можно сказать, что элементы матрицы факторных нагрузок — это корреляция между исходными признаками и факторными значениями. С чем коррелирует фактор, то и объясняет.

1.45. Билет 45. Зачем нужны вращения в ФА? Как устроены ортогональные вращения?

Предположим, что мы нашли $\tilde{\xi} = \mathbb{F}\eta$. Пусть \mathbb{W} — ортогональная матрица вращения в R' , $\eta' = \mathbb{W}\eta$. При этом после ортогонального вращения факторных значений они так и останутся ортогональными (если были исходно ортогональными). Тогда

$$\tilde{\xi} = \mathbb{F}\mathbb{W}\mathbb{W}^T\eta^{29} = \mathbb{F}'\eta. \quad (5)$$

Модель при этом остается верной. То есть факторы определяются не единственным образом. При этом η' удовлетворяет тем же условиям. Выбирая матрицу вращения, мы можем упростить интерпретацию факторов. Если мы возьмем $r = p$ при вращении, то мы получим тоже самое (не корректный результат).

1.46. Билет 46. Вращение по методу varimax.

Интерпретация факторов в ФА.

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} x & 0 & x & \dots \\ x & 0 & x & \dots \\ x & x & 0 & \dots \\ x & x & 0 & \dots \\ x & x & 0 & \dots \\ x & x & 0 & \dots \\ x & x & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Первый и второй столбец — такие факторы плохие. Второй и третий идеально. Желательно, чтобы факторы не пересекались. И то, что у нас есть мы можем вращать. $\tilde{\mathbb{F}} = \mathbb{F}\mathbb{W}$. $\mathbb{X} = \mathbb{V}\mathbb{F}^T = \tilde{\mathbb{V}}\tilde{\mathbb{F}}$, $\tilde{\mathbb{V}} = \mathbb{V}\mathbb{W}$. Если мы будем изменять \mathbb{W} то мы будем изменять матрицу \mathbb{F} .

Осталось только понять как и что нам надо улучшать? Хорошая характеристика для столбца (1) и (2) это стандартное отклонение. Для первого будет равна нулю. Чем больше «контрастность», тем характеристика будет больше. Метод varimax:

$$\sum_{j=1}^r \left[\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (f_{ij}^2)^2 - \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \tilde{f}_{ij}^2 \right)^2 \right] \rightarrow \max_w \quad (6)$$

Varimax: ищем простые факторы (то есть максимальная контрастность). *Quartimax*: простая интерпретация признаков (берем sd по строчкам). *Equimax*: и то и то. Важно, что после вращения \mathbb{V} будут тоже ортогональны (столбцы).

Для лучшей интерпретации факторов иногда разрешают неортогональные вращения: *oblique*, *oblimin* — косоугольные вращения. Но при таком типе вращения можно получить фактор там, где их нет.

1.47. Билет 48. Факторная структура (корреляции исходных признаков с факторами) и факторный паттерн (коэффициенты лин. комбинации, с которыми исходные признаки выражаются через факторы) в случае ортогональных и неортогональных факторов.

Определение. *Factor structure* — корреляция между исходными признаками и факторными значениями.

²⁹Ясно, что это вектор

Определение. *Factor pattern* — коэффициенты линейной комбинации, как исходные признаки выражаются через факторы.

Если факторы ортогональны, то это одно и тоже. То есть это будет просто матрица \mathbb{F} . Но может быть неортогональны (например вращение неортогонально), то эти вещи разные.
Набирала Стася

1.48. Билет 47. Методы нахождения факторных значений: LS и WLS (метод Бартлетта)

Матрица наблюдений $\mathbb{X} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ в факторном анализе представляется как

$$\mathbb{X} = \mathbb{V}\mathbb{F}^T + \varepsilon, \mathbb{V} \in M_{n,r}(\mathbb{R}), \mathbb{F} \in M_{p,r}(\mathbb{R}), \varepsilon \in M_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Перепишем для $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^T, \mathbb{W} = \mathbb{V}^T$ (матрица $\mathbb{Y} = [Y_1 : \dots : Y_n]$ содержит наблюдения в столбцах):

$$\mathbb{Y} = (\mathbb{V}\mathbb{F}^T + \varepsilon)^T = \mathbb{F}\mathbb{V}^T + \varepsilon^T \implies \forall i \in 1 : n \ Y_i = \mathbb{F}W_i + \varepsilon_i.$$

$$\begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix} = \mathbb{F} \begin{pmatrix} w_{i1} \\ \vdots \\ w_{ir} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ip} \end{pmatrix} \quad (7)$$

1.48.1. Ordinary Least Squares

При наличии уже оцененной матрицы факторных нагрузок \mathbb{F} выражение 7 может быть рассмотрено как задача линейной регрессии $W_i = (V^T)_i$ на \mathbb{F} . Тогда для каждого наблюдения Y_i можно построить соответствующие значения факторов

$$\hat{W}_i = (\mathbb{F}^T \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^T Y_i.$$

Модель линейной регрессии работает в предположении о гомоскедастичности (одинаковой вариантивности) данных, т.е. что $\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{ip}$ — i.i.d. Модель факторного анализа делает более слабое предположение: $(\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{ip}) \sim N(0, \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2))$, т.е. вариативность (степень уникальности в контексте факторного анализа) у разных наблюдений разная.

1.48.2. Weighted Least Squares (метод Бартлетта)

³⁰ Приведём наши данные к виду, в котором они бы удовлетворяли модели линейной регрессии. Так, если $\varepsilon_i \sim N(0, \Psi)$, $\Psi = \text{cov } \varepsilon_i = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$, $\Psi^{-1/2} = \text{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_p})$, то

$$\text{cov}(\Psi^{-1/2} \varepsilon_i) = \Psi^{-1/2} \Psi \Psi^{-1/2} = \mathbb{I}_{p \times p} \implies \Psi^{-1/2} \varepsilon_i \sim N(0, \mathbb{I}_{p \times p})$$

Перепишем уравнение модели ФА так, чтобы уникальности в нём были вида $\Psi^{-1/2} \varepsilon_i$:

$$\Psi^{-1/2} Y_i = \Psi^{-1/2} \mathbb{F} W_i + \Psi^{-1/2} \varepsilon_i \iff \Psi^{-1/2} Y_i = (\mathbb{F}^T \Psi^{-1/2})^T W_i + \Psi^{-1/2} \varepsilon_i, \quad (8)$$

тогда соответствующее выражение для оценки W_i по МНК имеет вид

$$\hat{W}_i = (\mathbb{F}^T \Psi^{-1/2} \Psi^{-1/2} \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^T \Psi^{-1/2} \Psi^{-1/2} Y_i = (\mathbb{F}^T \Psi^{-1} \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^T \Psi^{-1} Y_i.$$

³⁰Я не смогла найти публикации, где бы в явном виде был изложен именно этот «самый простой» вариант

1.49. Билет 48. Factor structure и factor pattern в случае ортогональных и неортогональных векторов

Определение. Factor structure — корреляции исходных признаков с факторами, $\text{cov}(\xi, \eta)$.

Определение. Factor pattern — коэффициенты выражения исходных признаков через факторы.

Модель факторного анализа: $\xi = F\eta + \varepsilon$, $\text{cov} \eta = I_{r \times r}$. Любое вращение с матрицей вращения W выражается как $\xi = FW^{-1}W\eta + \varepsilon = F'\eta'$, $W \in M_r(\mathbb{R})$. Тогда

$$\text{cov} \eta' = \text{cov} W\eta = W \text{cov} \eta W^T = WW^T$$

$WW^T \neq I_{r \times r}$, так как для неортогональных вращений $W^T \neq W^{-1}$.

Посчитаем factor structure:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta') &= \text{cov}(F'\eta' + \varepsilon, \eta') = \text{cov}(F'\eta', \eta') + \text{cov}(\varepsilon, W\eta) = \\ &= F' \text{cov} \eta' + 0 = F'WW^T = FW^T. \end{aligned}$$

Если вращение было ортогональным, то $WW^T = WW^{-1} = I$ и $\text{cov}(\xi, \eta') = F$.

Factor structure — выражения исходных признаков через факторы, выписывается по определению модели:

$$\xi_i = f'_{i1}\eta'_{11} + \dots + f'_{ir}\eta'_{ir} + \varepsilon_i$$

Следовательно, матрица коэффициентов линейной комбинации выражения исходных признаков через факторы — это просто F' .

2. Вторая часть

2.1. 34. Что такое канонические корреляции, сколько их

Пусть у нас имеется два набора случайных величин:

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_q)^T \quad (9)$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T \quad (10)$$

Не умаляя общности будем считать, что они центрированы. Тогда

Определение. Первой канонической корреляцией называется

$$r_1^2 = \max_{A, B} \rho^2(A^T \xi, B^T \eta), \quad (11)$$

где $A \in \mathbb{R}^p$, $B \in \mathbb{R}^q$. i -ой каноническая корреляция определяется аналогично с условием, что максимум берется по некоррелированным с предыдущими случайным величинам:

$$r_i^2 = \max_{\substack{A, B \\ \rho(A\xi, A_j\xi)=0 \\ \rho(B\eta, B_j\eta)=0 \\ 1 \leq j < i}} \rho^2(A^T \xi, B^T \eta) \quad (12)$$

Канонических корреляций будет $s = \min(p, q)$.

2.2. 37. Канонические переменные, как находятся?

тут оригинальный порядок вопросов уплыл от порядка, в котором все удобно определять. Смотрим на (12). У нас каждая каноническая корреляция определяется с помощью двух векторов — они определяют новый базис. Новые признаки $\tilde{\eta}_i = B_i^T \eta$ и $\tilde{\xi}_i = A_i^T \xi$ называются правыми и левыми каноническими переменными. Находятся, как обычно, с помощью лн. алгебры:

$$\rho^2(A^T \xi, B^T \eta) = \frac{(A^T \Sigma_{xy} B)^2}{(A^T \Sigma_{xx} A) (B^T \Sigma_{yy} B)}, \text{ где} \quad (13)$$

$$\Sigma_{xx} = E \xi \xi^T \quad (14)$$

$$\Sigma_{xy} = E \xi \eta^T \quad (15)$$

$$\Sigma_{yy} = E \eta \eta^T \quad (16)$$

Отсюда сразу получаем, что задачу максимизации из (12) можно переформулировать как

$$(A, B) = \arg \max_{\substack{A, B \\ A^T \Sigma_{xx} A = 1 \\ B^T \Sigma_{yy} B = 1}} A^T \Sigma_{xy} B \quad (17)$$

Если требуется найти больше, чем одну каноническую корреляцию/переменную/etc, то вводим дополнительное ограничение

$$\rho(A_i \xi, A_j \xi) = 0 \Leftrightarrow A_i^T \Sigma_{xx} A_j = 0 \quad (18)$$

Для η аналогично.

Задача (17) эквивалентна (является) обобщенным задачам на собственные числа:

$$\Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx} A = r^2 \Sigma_{xx} A \quad (19)$$

$$\Sigma_{yx} \Sigma_{xx}^{-1} \Sigma_{xy} B = r^2 \Sigma_{yy} B \quad (20)$$

Собственные числа у обеих задач совпадают, соответствующие вектора задают выражения канонических переменных через оригинальные признаки.

2.3. 40. Корреляции внутри множества канонических переменных, левых и правых

Как и в предыдущих обозначениях, A_i, B_j — линейные функции для выражения новых признаков. $1 \leq i, j \leq s = \min(p, q)$. Факт без док-ва:

$$\langle A_i \xi, B_j \eta \rangle = 0 \quad i \neq j$$

2.4. 36. Множественная корреляция как каноническая корреляция, если число признаков с одной стороны равно 1

Как все помнят, множественный коэффициент корреляции случайной величины η относительно $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)$ определяется как

$$R^2(\eta, \{\xi\}) = 1 - \frac{\min_{\hat{\eta} \in \{a_0 + \sum a_i \xi_i\}} E(\eta - \hat{\eta})^2}{D\eta} \quad (21)$$

Не умаляя общности считаем, что η и ξ центрированы. Также предположим, что $E\eta^2 = 1$. Тогда в (17) условие на η автоматически выполнено и $B = 1$. Далее

$$\min_{\hat{\eta} \in \{a_0 + \sum a_i \xi_i\}} E(\eta - \hat{\eta})^2 = \min_{\substack{\hat{\eta} \\ E\hat{\eta}^2=1 \\ k \geq 0}} E(\eta - k\hat{\eta})^2 = \quad (22)$$

$$\min (1 - 2k\rho(\eta, \hat{\eta}) + k^2) = \min ((k - \rho(\eta, \hat{\eta}))^2 + 1 - \rho^2(\eta, \hat{\eta}))$$

Заметим, что нахождение минимума данного выражения тоже самое, что и нахождение максимума $\rho^2(\eta, \hat{\eta})$. Кроме того, видно, что R^2 равен максимуму ρ^2 , а следовательно множественный коэффициент корреляции и каноническая корреляция (при одномерном η) совпадают.

2.5. 35. Значимость корреляции между множествами признаков и значимость многомерной множеств. регрессии.

В многомерной множественной регрессии все ясно. Пусть $\Xi, Y \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$.

$$Y = XB + \Xi \quad (23)$$

Тогда MSE оценка B :

$$\hat{B} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (24)$$

$$\hat{Y} = X \hat{B} \quad (25)$$

Как и раньше считаем, что признаки центрированы³¹. Тогда проверка значимости аналогична MANOVA:

$$E = (\hat{Y} - Y)^T (\hat{Y} - Y) \quad (26)$$

$$H = \hat{Y}^T \hat{Y} \quad (27)$$

Проверяется гипотеза о том, что $B = 0$. Статистика критерия остается той же, что и была:

$$\Lambda = \frac{|E|}{|H + E|} \sim \Lambda_p(\nu_H, \nu_E), \text{ где} \quad (28)$$

$$\nu_H = p \quad (29)$$

$$\nu_E = n - \nu_H - 1 \quad (30)$$

И как мы узнали до этого, Λ вычисляется через собственные числа:

$$\Lambda = \prod_{i=1}^s \frac{1}{\lambda_i + 1}$$

В каноническом анализе значимость проверяется аналогично. С помощью Λ_{prime} можно проверять, сколько корреляций значимы. Для проверки требуется нормальность данных. Кажется 39 должен быть частным случаем этого вопроса

2.6. 39. Как найти число значимых корреляционных переменных

Смотрим предыдущий (35) вопрос + вспоминаем проверку с Λ_{prime} из LDA.

³¹под признаками понимаем как элементы матрицы X , так и элементы матрицы Y

2.7. 38. Интерпретация канонических переменных через стандартизованные канонические функции и через факторную структуру

Определения такие же, как и в PCA:

Определение. Пусть старые признаки ξ и η стандартизованы, т.е. для $1 \leq i \leq p$ $E\xi_i = 0$, $E\xi_i^2 = 1$ и $1 \leq i \leq q$ $E\eta_i = 0$, $E\eta_i^2 = 1$. Пусть для $1 \leq i \leq s$ A_i и B_i — функции (т.е. вектора, т.к. у нас все линейно), выражающие новые признаки через старые. Тогда A_i , B_i — стандартизованные канонические функции.

Определение. Факторная структура — корреляции старых признаков с новыми.

Как считать факторную структуру:

$$\rho(\xi, A_i^T \xi) = E\xi\xi^T A_i = \Sigma_{\xi\xi} A_i \quad (31)$$

$$\rho(\xi, B_i^T \eta) = E\xi\eta^T B_i = \Sigma_{\xi\eta} B_i \quad (32)$$

$$\rho(\eta, B_i^T \eta) = E\eta\eta^T B_i = \Sigma_{\eta\eta} B_i \quad (33)$$

Интерпретация — аналогично PCA и регрессии.

2.8. Билет 10. Единый подход к множественной регрессии и одномерному однофакторному дисперсионному анализу (ANOVA)

Отправной точкой для описания обоих статистических методов является известное Дисперсионное Тождество. В рамках ответа на вопрос сложно объяснить значимость этого равенства, однако следует иметь в виду, что корни уходят далеко за пределы статистики. Технически теорией, лежащей в основе простой идеи проекции случайных величин на другие случайные величины, является теория Условных Математических Ожиданий (в дальнейшем, УМО). В рамках этой теории, в частности, удастся сформулировать вариант Теоремы Пифагора для случайных величин, который и называется Дисперсионным Тождеством.

Теорема (Основное Дисперсионное Тождество, без доказательства). Пусть η, ξ — случайные величины, причем η , обладающая конечным вторым моментом. Тогда

$$\mathbb{D}\eta = \mathbb{E}(\eta - \mathbb{E}(\eta | \xi))^2 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta | \xi) - \mathbb{E}\xi)^2, \quad (34)$$

где $\mathbb{E}(\eta | \xi)$ — УМО η «при условии» ξ .

Стоит отметить несколько фактов:

1. Математическое ожидание УМО есть математическое ожидание исходной случайной величины:

$$\mathbb{E}\mathbb{E}(\eta | \xi) = \mathbb{E}\eta. \quad (35)$$

2. Математическое ожидание квадрата есть на самом деле ни что иное, как квадрат нормы в пространстве L^2 , порожденным соответствующим распределением.
3. Как и в любой нормальной теореме Пифагора слагаемые в правой части (34) (точнее то, что стоит под нормой) оказываются ортогональными, то есть

$$\mathbb{E}[(\eta - \mathbb{E}(\eta | \xi))\mathbb{E}(\eta | \xi)] = 0. \quad (36)$$

4. УМО $\mathbb{E}(\eta | \xi)$ — есть результат ортогонального³² проецирования η на подпространство, порожденное случайной величиной ξ .

Рассмотрим теперь ANOVA, в которой используется частный случай Основного Тождества.

³²именно это уточнено в предыдущем пункте

ANOVA Общая постановка задачи. Пусть есть k групп, мы пытаемся проверить, что группы друг от друга не отличаются. Формально есть k (одномерных) случайных величин η_1, \dots, η_k и гипотеза формулируется так:

$$H_0 : \mathcal{P}(\eta_1) = \mathcal{P}(\eta_2) = \dots = \mathcal{P}(\eta_k). \quad (37)$$

Эту задачу можно переформулировать следующим образом. Пусть есть дискретный (м.б. качественный) признак ξ , принимающий ровно k значений: A_1, A_2, \dots, A_k . Рассмотрим случайный вектор $(\eta, \xi)^T$, такой что $\mathcal{P}(\eta | \xi = A_i) = \mathcal{P}(\eta_i)$ для всех $i \in 1 : k$. Тогда гипотеза (37) переписывается в виде:

$$H_0^* : \mathcal{P}(\eta | \xi = A_i) = \mathcal{P}(\eta | \xi = A_j) \text{ для всех } i, j. \quad (38)$$

В ANOVA рассматривается частный случай (модель), когда $\mathcal{P}(\eta_i) = \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$. В рамках этой модели гипотезам (37) и (38) равносильны следующие две³³ гипотезы:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k. \quad (39)$$

$$H_0^* : \mathbb{E}(\eta | \xi = A_1) = \dots = \mathbb{E}(\eta | \xi = A_k). \quad (40)$$

Заметим, что в рамках Основного Дисперсионного Тождества гипотезу можно сформулировать следующим образом:

$$H_0 : \mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta | \xi) - \mathbb{E}\xi)^2 = 0, \quad (41)$$

это запись по большому счету и означает, что средние внутри групп не отличаются от общего среднего.

Выборка задается следующим образом: имеется n_i индивидов из i -той группы ($i \in 1 : k$). Обозначим y_{ij} — j -того индивида из i -той группы ($i \in 1 : k$ и $j \in 1 : n_i$). Обозначим \bar{y} — выборочное среднее по всем индивидам, а \bar{y}_i — выборочное среднее индивидов i -той группы. Запишем (34) на выборочном языке:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2. \quad (42)$$

Убедитесь, что понимаете (хотя бы интуитивно), откуда это получается!

Далее факты из курса статистики:

$$SSTotal = SST \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathbb{D}\eta} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2 \sim \sigma^2 \chi^2(n-1);$$

$$SSWithin = SSW \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\eta - \widehat{\mathbb{E}(\eta | \xi)})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \sim \sigma^2 \chi^2(n-k);$$

$$SSBetween = SSB \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\widehat{\mathbb{E}(\eta | \xi)} - \mathbb{E}\xi)^2 = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \sim \sigma^2 \chi^2(k-1).$$

Сама статистика имеет вид

$$F = \frac{SSB/(k-1)}{SSW/(n-k)} \sim F_{k-1, n-k}.$$

³³равносильные

Убедитесь, что понимаете, что при условии знания распределений χ^2 , тут правда получается ФИШЕР! Откуда берется числитель должно быть ясно, из представления гипотезы в виде (41), знаменатель тоже можно объяснить, но это чуть более тонкое дело.

Также в ANOVA рассматривают следующее корреляционное отношение³⁴:

$$r^2 = \hat{r}^2(\eta | \xi) = \frac{SSB}{SST} = 1 - \frac{SSW}{SST} = 1 - \frac{\min_{\varphi} \widehat{\mathbb{E}}(\eta - \varphi(\xi))^2}{\widehat{\mathbb{D}}\eta}. \quad (43)$$

Multiple Linear Regression Здесь мы не будем касаться вопросов построения МНК-оценок, а сразу перейдем к проверке значимости регрессии. Заметим, что в исходной регрессионной постановке задачи (как поиска проектора на подпространство столбцов матрицы данных) нет никакой случайности, там все детерминировано. Но когда мы переходим к гипотезам, должна появиться модель, и именно здесь появляется случайность, выраженная шумом.

Модель имеет вид:

$$Y = \mathbb{X}B + \varepsilon,$$

где n индивидов и p предсказывающих переменных, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \text{diag}(\sigma^2, \sigma^2, \dots, \sigma^2))$ — шум.

На генеральном языке можно сказать³⁵, что у нас есть нормальный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)^T$ и мы строим его регрессию на некоторую другую случайную величину η .

Гипотеза в терминах MLR формулируется о незначимости регрессии, то есть, что

$$H_0 : B = 0. \quad (44)$$

Заметим, что в рамках Основного Дисперсионного Тождества гипотезу, как и в случае ANOVA, можно сформулировать следующим образом:

$$H_0 : \mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta | \xi) - \mathbb{E}\xi)^2 = 0. \quad (45)$$

Несложно понять, что эта запись, есть то же самое, что и (44).

Выборка задана набором $\{y_i\}_{i=1}^n$. Обозначим \hat{y}_i — наилучшее³⁶ по МНК предсказание y_i . Запишем (34) на выборочном языке:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2. \quad (46)$$

Убедитесь, что понимаете (хотя бы интуитивно), откуда это получается!

Далее факты из курса статистики:

$$SSTotal = SST \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathbb{D}}\eta = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \sim \sigma^2 \chi^2(n-1);$$

$$SSError = SSE \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\eta - \widehat{\mathbb{E}(\eta | \xi)})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \sim \sigma^2 \chi^2(n-k-1);$$

$$SSRegression = SSR \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\widehat{\mathbb{E}(\eta | \xi)} - \mathbb{E}\xi)^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \sim \sigma^2 \chi^2(k).$$

³⁴Это тоже термин из УМО.

³⁵Хотя, как я понимаю, это идет несколько вразрез с исходной постановкой задачи

³⁶Все должны помнить в каком смысле.

Сама статистика имеет вид

$$F = \frac{SSR/k}{SSE/(n-k-1)} \sim F_{k, n-k-1}.$$

Убедитесь, что понимаете, что при условии знания распределений χ^2 , тут правда получается ФИШЕР!

Так же при регрессии рассматривают множественный коэффициент корреляции между η , ξ :

$$\begin{aligned} r^2 &= \hat{R}^2(\eta; \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}) = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} = \\ &= 1 - \frac{\min_{a_0, a_1, \dots, a_k} \hat{E}(\eta - (a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \xi_i))^2}{\hat{D}\eta}. \end{aligned} \quad (47)$$

Выводы Я думаю, что даже тот, кто просматривал этот текст одним глазом заметил, что я написал два раза почти одно и то же. Теперь дадим некоторый общий (и на самом деле удобный) взгляд на то, что было раньше.

Начнем с гипотез. Заметим, что (41) и (45) вообще ничем не отличается, поэтому можно ввести следующую удобную универсальную терминологию (шляпа, как всегда обозначает оценки, смысл которых уточняется в частных случаях).

$$\text{Hypothesis} \stackrel{\text{def}}{=} E(E(\eta | \xi) - E\xi)^2.$$

$$\text{Error} \stackrel{\text{def}}{=} E(\eta - E(\eta | \xi))^2;$$

$$\text{SSTotal} = \text{SST} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{D}\eta;$$

$$\text{SSError} = \text{SSE} \stackrel{\text{def}}{=} E(\widehat{\eta - E(\eta | \xi)})^2;$$

$$\text{SSHypothesis} = \text{SSH} \stackrel{\text{def}}{=} E(\widehat{E(\eta | \xi) - E\xi})^2.$$

В этих обозначениях общая гипотеза будет иметь вид:

$$H_0 : \text{Hypothesis} = 0.$$

А Дисперсионное Тождество на выборочном языке:

$$\text{SST} = \text{SSH} + \text{SSE}.$$

Статистика в общем виде будет выглядеть, как

$$F = \frac{\text{SSH}/\nu_H}{\text{SSE}/\nu_E} \sim F_{\nu_H, \nu_E},$$

где ν — нормировочные числа, отвечающие за степени свободы.

На будущее вводим обозначения:

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{SSH}}{\text{SSE}};$$

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + \lambda} \sim \Lambda_1(\nu_H, \nu_E);^{37}$$

Обобщающее (43) и (47) определение:

$$r^2 = \frac{\text{SSH}}{\text{SST}}.$$

³⁷ Докажите это! НЭ будет это спрашивать. Удачи.

2.9. Билет 11. Представление одномерного однофакторного дисперсионного анализа в виде множественной регрессии с фиктивными переменными.

Вот есть ANOVA и есть многомерная регрессия... У них много общего. Сейчас мы покажем, что на самом деле на ANOVA можно посмотреть, как на частный случай многомерной регрессии. Будем пользоваться обозначениями билета 10. Для $i \in 1 : k - 1$ введем $\xi_i = \mathbb{I}(\xi = A_i)$ – фиктивные переменные.

Теорема. $r^2(\eta | \xi) = R^2(\eta, \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}\})$.

Доказательство. Распишем по определению обе части равенства.

$$r^2(\eta | \xi) = 1 - \frac{\min_{\varphi} \mathbb{E}(\eta - \varphi(\xi))^2}{\mathbb{D}\eta};$$

$$R^2(\eta; \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}) = 1 - \frac{\min_{a_0, a_1, \dots, a_k} \mathbb{E}(\eta - (a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \xi_i))^2}{\mathbb{D}\eta}.$$

Минимум в корреляционном отношении идет по всем измеримым функциям, каждая из которых однозначно определяется набором значений $\{\varphi(A_i)\}$. Пусть минимум в корреляционном отношении достигается на функции φ^* . Положим $a_i = \varphi^*(A_i)$ для $i \in 1 : (k - 1)$ и $a_0 = \varphi^*(A_k)$. От противного легко доказать, что именно на этом наборе коэффициентов достигается минимум в коэффициенте корреляции. В обратную сторону – аналогично.³⁸ \square

2.10. Билет 12. Корреляционное отношение с дискретным одномерным признаком и множественный коэффициент корреляции.

По-моему, это тот же 11ый билет.

2.11. Билет 15. MANOVA. Модель, запись через условные мат. ожидания η и мат.ожидания $\eta(k)$. Разложение ковариационной матрицы.

Этот билет во многом аналогичен части билета 10 про ANOVA. Основная разница заключается лишь в том, что здесь η является многомерным вектором.

Общая постановка задачи. Пусть есть k групп и p признаков, мы пытаемся проверить, что группы друг от друга не отличаются. Формально есть k (многомерных) случайных векторов $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_k \in \mathbb{R}^p$ и гипотеза формулируется так:

$$H_0 : \mathcal{P}(\bar{\eta}_1) = \mathcal{P}(\bar{\eta}_2) = \dots = \mathcal{P}(\bar{\eta}_k). \quad (48)$$

Эту задачу можно переформулировать следующим образом. Пусть есть дискретный (м.б. качественный) признак ξ , принимающий ровно k значений: A_1, A_2, \dots, A_k . Рассмотрим случайный вектор $(\bar{\eta}, \xi)^T \in \mathbb{R}^k \times \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$, такой что $\mathcal{P}(\bar{\eta} | \xi = A_i) = \mathcal{P}(\eta_i)$ для всех $i \in 1 : k$. Тогда гипотеза (37) переписывается в виде:

$$H_0^* : \mathcal{P}(\bar{\eta} | \xi = A_i) = \mathcal{P}(\bar{\eta} | \xi = A_j) \text{ для всех } i, j. \quad (49)$$

В MANOVA рассматривается частный случай (модель), когда $\mathcal{P}(\bar{\eta}_i) = \mathcal{N}(\bar{\mu}_i, \Sigma)$. В рамках этой модели гипотезам (48) и (49) равносильны следующие две³⁹ гипотезы:

$$H_0 : \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = \dots = \bar{\mu}_k. \quad (50)$$

$$H_0^* : \mathbb{E}(\bar{\eta} | \xi = A_1) = \dots = \mathbb{E}(\bar{\eta} | \xi = A_k).$$

³⁸Вроде бы тут все корректно. Проверьте, кто может.

³⁹равносильные

Прежде чем сформулировать гипотезу в рамках Основного Дисперсионного Тождества (34) запишем его на генеральном языке в текущей модели.

$$\text{Cov}\bar{\eta} = \mathbb{E}[(\bar{\eta} - \mathbb{E}\bar{\eta})(\bar{\eta} - \mathbb{E}\bar{\eta})^T] = \quad (51)$$

$$= \mathbb{E}[(\bar{\eta} - \mathbb{E}(\bar{\eta} | \xi))(\bar{\eta} - \mathbb{E}(\bar{\eta} | \xi))^T] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}(\bar{\eta} | \xi) - \mathbb{E}\bar{\eta})(\mathbb{E}(\bar{\eta} | \xi) - \mathbb{E}\bar{\eta})^T]. \quad (52)$$

Теперь уже можно легко заметить, что в рамках Основного Дисперсионного Тождества гипотезу можно сформулировать следующим образом:

$$H_0 : \mathbb{E}[(\mathbb{E}(\bar{\eta} | \xi) - \mathbb{E}\bar{\eta})(\mathbb{E}(\bar{\eta} | \xi) - \mathbb{E}\bar{\eta})^T] = 0. \quad (53)$$

Эта запись является многомерным обобщением (41) и так же означает, что средние внутри групп не отличаются от общего среднего.

Выборка задается так же как в ANOVA, но теперь индивиды многомерные. Имеется n_i индивидов из i -той группы ($i \in 1 : k$). Обозначим $y_{ij} \in \mathbb{R}^{p40}$ — j -того индивида из i -той группы ($i \in 1 : k$ и $j \in 1 : n_i$). Обозначим \bar{y} — выборочное среднее по всем индивидам, а \bar{y}_i — выборочное среднее индивидов i -той группы.

Запишем (51) на выборочном языке:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})(y_{ij} - \bar{y})^T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i)^T + \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - \bar{y})(\bar{y}_i - \bar{y})^T. \quad (54)$$

Должно быть ясно, что это лишь многомерное обобщение (46).

Следуя обобщенным обозначениям, предложенным в вопросе 10, можно ввести следующие:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(\bar{\eta} - \mathbb{E}(\bar{\eta} | \xi))(\widehat{\bar{\eta} - \mathbb{E}(\bar{\eta} | \xi)})^T] = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i)^T; \\ \mathbb{H} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(\mathbb{E}(\bar{\eta} | \xi) - \widehat{\mathbb{E}(\bar{\eta} | \xi)})(\mathbb{E}(\bar{\eta} | \xi) - \mathbb{E}\bar{\eta})^T] = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - \bar{y})(\bar{y}_i - \bar{y})^T. \end{aligned}$$

Стоит сразу отметить, что, когда в дальнейшем мы будем строить критерии для проверки значимости, мы всегда будем их строить, как некие преобразования над парой матриц (\mathbb{H}, \mathbb{E}) .

2.12. Билет 16. MANOVA для дискриминантного анализа и для многомерной множественной регрессии, общее и различие.

Будем использовать обозначения Билета 15.

Дискриминантный анализ Дискриминантный анализ работает с k группами и p индивидами⁴¹. Есть несколько задач: проверка того, что k групп различаются (иными словами проверка значимости), далее объяснение различия и далее классификация.

Использование MANOVA в первой задаче совершенно естественно (в принципе, можно использовать и другие критерии, например, непараметрические, но нас это сейчас не интересует).

Гипотеза будет иметь вид (53).

⁴⁰Шрифт тут неудачный, но пусть пока так будет

⁴¹Обозначения вводятся, чтобы потом сформулировать критерий.

Многомерная множественная регрессия В случае многомерной множественной регрессии все аналогично одномерной множественной регрессии. Мы хотим проверить гипотезу, что регрессия незначима. Уточним смысл сказанного. Во-первых, вспомним, что по определению регрессия — УМО. Во-вторых, какая бы модель у нас ни была, в стандартной ситуации нам нужно от этой модели только, чтобы УМО было линейным (это будет ясно чуть далее). Существует несколько моделей, в которых УМО — линейно. Приведем примеры двух из них.

$$\bar{\eta} = \mathbb{B}\bar{\xi} + \bar{\varepsilon},$$

где $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^k$, $\bar{\eta} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^p$ — случайные вектора, $\mathbb{B} \in M_{p,k}(\mathbb{R})$ — матрица коэффициентов, причем $\bar{\xi}$, $\bar{\varepsilon}$ — независимы и $\mathbb{E}\bar{\varepsilon} = 0$.

В такой модели нетрудно посчитать, что $\mathbb{E}(\bar{\eta} | \bar{\xi}) = \mathbb{B}\bar{\xi}$, то есть регрессия является линейной, нас это устраивает.

Примером другой модели такого типа является следующая: $(\bar{\eta}, \bar{\xi})^T \sim \mathcal{N}$ с какими-то параметрами, которые нас сейчас не интересуют. Важно то, что в такой модели тоже найдется матрица \mathbb{B} : $\mathbb{E}(\bar{\eta} | \bar{\xi}) = \mathbb{B}\bar{\xi}$.

В обеих моделях гипотеза о незначимости формулируется так: $H_0 : \mathbb{B} = 0$. Именно здесь используется то, что мы требуем линейности регрессии (найдется такая матрица!).

Учитывая то обстоятельство, что для независимых ξ_1, ξ_2 справедливо, что $\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2) = \mathbb{E}\xi_1$, гипотеза о незначимости регрессии для моделей можно свести к другой, сформулированной в рамках Основного Дисперсионного Тождества (34):

$$H_0 : \mathbb{E}[(\mathbb{E}(\bar{\eta} | \bar{\xi}) - \mathbb{E}\bar{\eta})(\mathbb{E}(\bar{\eta} | \bar{\xi}) - \mathbb{E}\bar{\eta})^T] = 0.$$

То есть при независимости $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ обе гипотезы эквивалентны. Заметим, что вторая гипотеза является гораздо более общей, в ней не нужны предположения о линейности регрессии! Обратим внимание, что эта гипотеза полностью совпадает по своему виду с гипотезой (53), которая проверяется с помощью MANOVA.

Таким образом, проверку значимости дискриминантного анализа и многомерной множественной линейной регрессии можно проводить с помощью MANOVA.

Построение критерия Перейдем к построению критерия. Для этого перейдем на выборочный язык.

Оценкой $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta | \xi) - \mathbb{E}\xi)^2$ является матрица \mathbb{H} . Сначала нам потребуется следующее утверждение.

Теорема (Без доказательства). Пусть $\mathbb{A} \sim \mathcal{W}_p(\Sigma_{\mathbb{A}}, \nu_{\mathbb{A}})$ и $\mathbb{B} \sim \mathcal{W}_p(\Sigma_{\mathbb{B}}, \nu_{\mathbb{B}})$, причем $\Sigma_{\mathbb{B}}$ — невырождена⁴² и \mathbb{A} и \mathbb{B} — независимы. Обозначим λ_i — i -тое по упорядоченности по невозрастанию собственное число матрицы $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$. Тогда

$$\frac{|\mathbb{B}|}{|\mathbb{A} + \mathbb{B}|} = \frac{1}{|1 + \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}|} = \prod_{i=1}^p \frac{1}{1 + \lambda_i} \sim \Lambda_1(\nu_{\mathbb{A}}, \nu_{\mathbb{B}}).$$

Заметим, что оба равенства являются фактами из линейной алгебры, причем первое равенство легко интерпретируется тем, что определитель мультипликативен, а \mathbb{B} является положительно определенной. Второе равенство легко понять, если подумать о Жордановой Нормальной Форме матрицы $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$.

Из этого утверждения подстановкой нужных букв следует то, что позволяет сформулировать критерий.

⁴² Напомню, что это означает, что распределение сосредоточено на всем пространстве положительно определенных матриц.

Теорема. Пусть матрица $\mathbb{H} \sim \mathcal{W}_p(\Sigma_{\mathbb{H}}, \nu_{\mathbb{H}})$ и $\mathbb{E} \sim \mathcal{W}_p(\Sigma_{\mathbb{E}}, \nu_{\mathbb{E}})$, причем \mathbb{H} и \mathbb{E} независимы. Обозначим λ_i — i -тое по упорядоченности по невозрастанию собственное число матрицы $\mathbb{E}^{-1}\mathbb{H}$. Тогда

$$\frac{|\mathbb{E}|}{|\mathbb{H} + \mathbb{E}|} = \frac{1}{|1 + \mathbb{E}^{-1}\mathbb{H}|} = \prod_{i=1}^s \frac{1}{1 + \lambda_i} \sim \Lambda_1(\nu_{\mathbb{H}}, \nu_{\mathbb{E}}),$$

где $s = \min(\nu_{\mathbb{H}}, p)$.

В случае дискриминантного анализа $\nu_{\mathbb{H}} = k - 1$, $\nu_{\mathbb{E}} = n - k$. В случае многомерной множественной регрессии $\nu_{\mathbb{H}} = k$, $\nu_{\mathbb{E}} = n - k - 1$.

Доказательство. То, что s выглядит так, объясняется в вопросе 20. То, что число степеней свободы такое, во-первых, можно увидеть непосредственно, во-вторых, по аналогии с одномерным случаем. \square

Заметим, что построенный критерий для проверки соответствующей гипотезы является далеко не единственным. О построении других критериев речь идет в вопросе 19.

2.13. Билет 17. Какой смысл у канонических дискриминантных функций (коэффициентов) и переменных?

В вопросе 16 мы построили критерий для проверки значимости дискриминантного анализа. На самом деле это не единственный возможный критерий. Главными объектами, с которыми приходится работать, являются матрицы \mathbb{H} и \mathbb{E} . На основе разных способов «содержания» этих объектов могут получаться разные критерии. Подробнее об этом в билете 19.

В этом билете подробнее изучаются свойства этих двух матриц.

Напомним, что имеется p признаков и k групп: $\bar{\eta} \in \mathbb{R}^p$, причем $\mathcal{P}(\bar{\eta} | \xi = A_i) = \mathcal{N}(\mu_i, \Sigma)$. Попробуем на основе имеющихся p признаков построить новый, по которому группы «наиболее бы отличались». Эта неформальная задача на самом деле очень просто формализуется, как мы увидим несколько далее.

Запишем на генеральном языке, что значит «новый признак». Есть $A \in \mathbb{R}^p$ и новый признак $\zeta = A^T \bar{\eta}$: $\mathcal{P}(\zeta | \xi = A_i) = \mathcal{N}(A^T \mu_i, A^T \Sigma A)$. На выборочном языке — $Z = \mathbb{Y}A$ и выборочная ковариационная матрица (с точностью до коэффициента имеет вид): $A^T \mathbb{Y}^T \mathbb{Y} A = A^T (\mathbb{H} + \mathbb{E}) A$. Из этого следует⁴³, что аналогом \mathbb{H} для нового признака является $A^T \mathbb{H} A$, а аналогом \mathbb{E} является $A^T \mathbb{E} A$.

Посмотрим теперь на F -статистику, следуя обобщенному определению статистики, данному в билете 10:

$$F = F(A) = C \frac{SSH_{\zeta}}{SSE_{\zeta}} = C \frac{A^T \mathbb{H} A}{A^T \mathbb{E} A} \sim F_{\nu_{\mathbb{H}}, \nu_{\mathbb{E}}}.$$

где $C = \nu_{\mathbb{E}}/\nu_{\mathbb{H}}$ — коэффициент, не зависящий от A .

Исходно ставилась задача — найти такой признак, по которому группы «наиболее бы отличались». В терминах статистики F — это означает⁴⁴, что решается оптимизационная задача

$$\frac{A^T \mathbb{H} A}{A^T \mathbb{E} A} \rightarrow \max_A.$$

⁴³Кто-то умеет формально это доказывать? Это нужно делать как-то на генеральном языке видимо, пользуясь ортогональностью.

⁴⁴Приглашаю убедиться.

Как легко понять — эта задача является обобщенной задачей на собственные числа и собственные вектора. Собственные числа матрицы $\mathbb{E}^{-1}\mathbb{H}$ в порядке невозрастания: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$, где $s = \min\{p, v_H\}$, и собственные вектора той же матрицы A_i для $i \in 1 : s$. Причем $A_i^T \mathbb{E} A_j = 0$ для $j < i$. Вектора A_i — канонические коэффициенты (дискриминантные функции). Новые признаки $Z_i = \mathbb{Y} A_i$ — канонические переменные. В дальнейшем, оказывается, что новые признаки являются ортогональными.

Исходя из описания, смысл λ_i — степень разброса по i -тому направлению, задаваемым i -той дискриминантной функцией. A_i — коэффициенты с которыми нужно взять исходные признаки, чтобы получить новый признак, имеющий наибольший разброс и ортогональный предыдущим. А сами канонические переменные тем самым — ортогональные новые признаки, имеющие наибольший разброс, измеряемый λ_i .

2.14. Билет 18. Как вычисляются канонические дискриминантные функции (коэффициенты)?

Если посмотреть в вопрос 17, то ясно, что дискриминантные функции вычисляются как собственные вектора матрицы $\mathbb{E}^{-1}\mathbb{H}$.