Глава 2. Нечебышевские E-оптимальные планы

Настоящая глава посвящена аналитическому нахождению и исследованию E-оптимальных планов для достаточно больших симметричных отрезков. В этом случае, как было показано в предыдущей главе, существует единственный E-оптимальный план и этот план не совпадает с Чебышевским. Изучение планов в этом случае основано на применении функционального подхода. Идея этого подхода заключается в исследовании точек и весов оптимальных планов как функций длины отрезка.

В §1 исследованы экстремальные свойства разложений многочленов, положительных на полуоси, на сумму квадратов двух многочленов. В §2 получено двойственное представление для экстремального многочлена.

В §3 излагается функциональный подход к решению экстремальных задач. В §4 вводится основное уравнение, определяющее точки и веса E-оптимального плана как функции длины отрезка. Предельные значения этих функций (после некоторой нормировки) найдены в §5. В §6 исследуется вид матрицы Якоби. §7 и §8 посвящены рекуррентному построению коэффициентов рядов и оценке точности разложений.

§1. Одно свойство разложений положительных многочленов

Пусть $h(x)$ – многочлен степени $2k+1$, положительный при $x \in [0,\infty)$. Известно (*Карлин, Стадден, 1976*, гл.4), что такой многочлен обладает единственным представлением вида

$$h(x) = \alpha \prod_{i=1}^{k}(x-u_i)^2 + \beta x \prod_{i=1}^{k}(x-v_i)^2, \tag{1.1}$$

где

$$0 < u_1 < v_1 < \ldots < u_k < v_k, \alpha \geq 0, \quad \beta > 0. \tag{1.2}$$

Определение 1.1. Представление (1.1) будем называть *представлением Карлина–Шепли.*

Рассмотрим класс представлений вида

$$h(x) = \varphi_1^2(x) + x\varphi_2^2(x), \tag{1.3}$$

где $\varphi_1(x) = p^T f(x) = \sum_{i=0}^k p_i x^i$, $\varphi_2(x) = q^T f(x) = \sum_{i=0}^k q_i x^i$, $p = (p_0, \ldots, p_k)^T$, $q = (q_0, \ldots, q_k)^T$ – произвольные многочлены. Представление Карлина–Шепли является одним из представлений вида (1.3), так что множество этих представлений не пусто. С другой стороны, взяв многочлены $\varphi_1^2(x)$ и $\varphi_2^2(x)$, нули которых не перемежаются, получим, что многочлен $h(x) = \varphi_1^2(x) + x\varphi_2^2(x)$ обладает по крайней мере двумя представлениями вида (1.3).

Определение 1.2. Будем говорить, что представление вида (1.3) *максимально*, если для него достигается максимум величины $\|p\|^2 + \|q\|^2$ в классе всех представлений такого вида.

Теорема 1.1. *Для положительных на* $[0, \infty)$ *многочленов степени* $2k+1$ *максимальное представление существует, единственно и совпадает с представлением Карлина-Шепли.*

Доказательство теоремы основывается на лемме о многочленах с фиксированными абсолютными значениями. Пусть
$\varphi(x) = \sum_{i=0}^k p_i x^i$ – многочлен степени k такой, что для $0 \le x_0 < x_1 < \ldots < x_k$,

$$\varphi(x_i) = (-1)^{i+l} a_i,$$

где $l = 0$ или 1, $a_i > 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$. Пусть $\tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=0}^k \tilde{p}_i x^i$ – любой многочлен степени меньшей или равной k, такой что $|\tilde{\varphi}(x_i)| \le a_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Лемма 1.1. *Для описанных выше многочленов имеем соотношения* $|p_i| \ge |\tilde{p}_i|$, $p_i(-1)^{i+l} > 0$, $l = 0$ *или* 1, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Доказательство леммы. Запишем многочлен $\tilde{\varphi}(x)$ в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=0}^k \tilde{p}_i x^i = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & x & \ldots & x^k \\ \tilde{a}_0 & 1 & x_0 & \ldots & x_0^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_k & 1 & x_k & \ldots & x_k^k \end{pmatrix} / \prod_{j<i} (x_i - x_j),$$

где $\tilde a_i = -\tilde\varphi(x_i)$. Действительно, рассмотрим $\tilde\varphi(x_i)$.

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & x_i & \dots & x_i^k \\ \tilde a_0 & 1 & x_0 & \dots & x_0^k \\ \hdotsfor{5} \\ \tilde a_i & 1 & x_i & \dots & x_i^k \\ \hdotsfor{5} \\ \tilde a_k & 1 & x_k & \dots & x_k^k \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & x_i & \dots & x_i^k \\ \tilde a_0 & 1 & x_0 & \dots & x_0^k \\ \hdotsfor{5} \\ \tilde a_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ \tilde a_k & 1 & x_k & \dots & x_k^k \end{pmatrix} =$$

$$= -\tilde a_i \det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^k \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^k \\ \hdotsfor{4} \\ 1 & x_k & \dots & x_k^k \end{pmatrix} = -\tilde a_i \prod_{0\le j<i\le k}(x_i - x_j).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \tilde p_i &= (-1)^{i+1}\det\left(\tilde a_j \; 1 \; \dots \; x_j^{i-1} x_j^{i+1} \; \dots \; x_j^k\right)_{j=0}^k \Big/ \Delta = \\ &= (-1)^{i+1}\textstyle\sum_{s=0}^k \tilde a_s (-1)^s \Delta_{i,s}/\Delta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \prod_{0\le j<i\le k}(x_i - x_j) > 0, \\ \Delta_{i,s} &= \det\left(1 \; \dots \; x_j^{i-1} x_j^{i+1} \; \dots \; x_j^k\right)_{j\ne s,\, j\in 0:k}. \end{aligned}$$

Найдем $\Delta_{i,s}$. Разложим определитель Вандермонда по элементам s-той строки. Коэффициент при $(-1)^{i+s}x_s^i$ в этом разложении и есть определитель $\Delta_{i,s}$.

$$\begin{aligned} \prod_{0\le j<l\le k}(x_l - x_j) &= \prod_{j<l,l,j\ne s}(x_l - x_j)\prod_{0\le j<s}(x_s - x_j)\prod_{s<j\le k}(x_j - x_s) = \\ &= \prod_{j<l,l,j\ne s}(x_l - x_j)(-1)^{k-s}\prod_{0\le l\le k, l\ne s}(x_s - x_l). \end{aligned}$$

По формулам Виета находим, что коэффициент при x_s^i в выражении $\prod\limits_{0\le l\le k,l\ne s}(x_s - x_l)$ равен $(-1)^{k-i}\sum\limits_{j_t\ne s} x_{j_1}\dots x_{j_{k-i}}$ (суммируются всевозможные произведения $k-i$ различных x_j, где $j\ne s$). Таким образом,

$$\Delta_{i,s} = (-1)^{i+s}\prod_{j<l,l,j\ne s}(x_l - x_j)(-1)^{k-s}(-1)^{k-i}\sum_{j_t\ne s} x_{j_1}\dots x_{j_{k-i}},$$

отсюда

$$\Delta_{i,s} = \prod_{j<l,l,j\ne s}(x_l - x_j)\sum_{j_t\ne s} x_{j_1}\dots x_{j_{k-i}} > 0.$$

Поскольку $\tilde{a}_i = -\tilde{\varphi}(x_i)$, то для коэффициентов p_i многочлена $\varphi(x)$ имеем, аналогично:

$$p_i = (-1)^i \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \varphi(x_s)\Delta_{i,s}/\Delta,$$

Так как $\varphi(x_s) = (-1)^{s+l} a_s$, $l = 0$ или 1, то $p_i = (-1)^i \sum_{s=0}^{k} (-1)^l a_s \Delta_{i,s}/\Delta$. Поскольку $a_s > 0$, $s = 0, 1, \ldots, k$, то $(-1)^{i+l} p_i > 0$ ($l = 0$ или 1) для $i = 0, 1, \ldots, k$.

Так как $|\tilde{\varphi}(x_i)| \le a_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$, то

$$|\tilde{p}_i| = \sum_{s=0}^{k} |\tilde{\varphi}(x_s)|\Delta_{i,s}/\Delta \le \sum_{s=0}^{k} a_s \Delta_{i,s}/\Delta = |p_i|, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Лемма доказана. □

Пусть $h(x) = \tilde{\varphi}_1^2(x) + x\tilde{\varphi}_2^2(x) = \varphi_1^2(x) + x\varphi_2^2(x)$, где φ_1, φ_2 образуют представление Карлина–Шепли,
$\tilde{\varphi}_1(x) = \sum \tilde{p}_i x^i$, $\tilde{\varphi}_2(x) = \sum \tilde{q}_i x^i$, $\varphi_1(x) = \sum p_i x^i$, $\varphi_2(x) = \sum q_i x^i$.

Точки v_i— нули многочлена φ_2, поэтому $h(v_i) = \tilde{\varphi}_1^2(v_i) + v_i\tilde{\varphi}_2^2(v_i) = \varphi_1^2(v_i)$, тогда $|\tilde{\varphi}_1(v_i)| \le a_i = |\varphi_1(v_i)|$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $v_0 = 0$.

По лемме 1.1 $|p_i| \ge |\tilde{p}_i|$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

У многочленов $\varphi_2(x)$ и $\tilde{\varphi}_2(x)$ совпадают старшие коэффициенты и, кроме того,

Так как $\varphi_1(u_i) = 0$, то $h(u_i) = \tilde{\varphi}_1^2(u_i) + u_i\tilde{\varphi}_2^2(u_i) = u_i\varphi_2^2(u_i)$, тогда

$$|\tilde{\varphi}_2(u_i)| \le |\varphi_2(u_i)|\,, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Рассмотрим многочлены

$$\varphi(x) = x^k \varphi_2(1/x), \quad \tilde{\varphi}(x) = x^k \tilde{\varphi}_2(1/x),$$

для них справедливы предположения леммы 1.1 при $x_0 = u_0 = 0$ (поскольку совпадают старшие коэффициенты многочленов $\varphi_2(x)$ и $\tilde{\varphi}_2(x)$), $x_i = 1/u_i$, $i = 1, \ldots, k$. Действительно,

$$|\tilde{\varphi}(\frac{1}{u_i})| = |\frac{1}{u_i^k}\tilde{\varphi}_2(u_i)| \le |\frac{1}{u_i^k}\varphi_2(u_i)| = |\varphi(\frac{1}{u_i})|.$$

Значит, коэффициенты при x^i у $\varphi_2(x)$ больше или равны коэффициентам при x^i у $\tilde{\varphi}_2(x)$ по абсолютной величине. Отсюда $\sum p_i^2 + \sum q_i^2 \ge \sum \tilde{p}_i^2 + \sum \tilde{q}_i^2$. Аналогичный результат может быть получен для многочленов четной степени. $\square$

§2. **Симметричный отрезок: двойственное представление для экстремального многочлена и уравнение границы**

Пусть $-r_1 = r_2 = r, \chi = [-r, r], f_i(x) = x^{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, m$. В этом случае модель (2.1) главы 1 будем называть полиномиальной регрессией на симметричном отрезке.

Обозначим

$$c_j(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i^j \mu_i, j = 0, 1, \ldots, 2(m-1), \bar{c}_j(\xi) = c_{2j}(\xi), j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Пусть $m > 2$ (случай $m = 2$ полностью исследован в §2 главы 1). В настоящем параграфе мы изучим E-оптимальные планы для случая $r > r^*$, где r^* — минимальный положительный корень уравнения границы.

Лемма 2.1. *При $m > 2$ точки и веса E-оптимальных планов при $m = 2k,\ 2k+1$ удовлетворяют соотношениям:*

$$-x_i^* = x_{m+1-i}^*, \quad \mu_i^* = \mu_{m+1-i}^* \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

а при $m = 2k+1$ имеем $x_{k+1}^* = 0$.

Доказательство. Пусть $\xi^* = \{x_1^*, \ldots, x_m^*;\ \mu_1^*, \ldots, \mu_m^*\}$ – E-оптимальный план. Пусть $m = 2k$ (случай $m = 2k+1$ аналогичен). Рассмотрим план

$$\tilde{\xi} = \{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m; \quad \tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_m\}: \quad \tilde{x}_i = -x_{2k+1-i}^*, \quad \tilde{\mu}_i = \mu_{2k+1-i}^*.$$

Для плана $\xi = (\xi^* + \tilde{\xi})/2$ матрица $M(\xi)$ после перестановки строк и столбцов, такой, что сначала идут четные строки и четные столбцы, принимает вид

$$\begin{pmatrix} M_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_2 \end{pmatrix}.$$

Так как минимальное собственное число матрицы M может быть представлено как

$$\min_{||p||=1} p^T M p,$$

то имеем

$$\lambda_{\min} \begin{pmatrix} M_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_2 \end{pmatrix} \geq \lambda_{\min} \begin{pmatrix} M_1 & C \\ C^T & M_2 \end{pmatrix}$$

при $M_1, M_2 \geq 0$ и любой матрице C. Действительно, допустим обратное. Возьмем $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ такое, что достигается минимум:
$p^{*T} M p^* = \min_{||p||=1} p^T M p$. Тогда

$$\begin{array}{rl} & p^{*T} \begin{pmatrix} M_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_2 \end{pmatrix} p^* = p_1^{*T} M_1 p_1^* + p_2^{*T} M_2 p_2^* < \\ < & p^{*T} \begin{pmatrix} M_1 & C \\ C^T & M_2 \end{pmatrix} p^* = p_1^{*T} M_1 p_1^* + p_1^{*T} C p_2^* + p_2^{*T} C^T p_1^* + p_2^{*T} M_2 p_2^*. \end{array}$$

Отсюда $p_1^{*T} C p_2^* > 0$. Тогда, взяв вектор $p = (p_1^*, -p_2^*)$, получим противоречие.

Следовательно, для плана $\xi = (\xi^* + \tilde{\xi})/2$

$$\lambda_{\min} \left(M(\xi) \right) \geq \lambda_{\min} \left(M(\xi^*) \right),$$

т. е. ξ — E-оптимальный план. Если точки плана ξ^* не являются симметрично расположенными относительно нуля, то $\xi \neq \xi^*$. Так как при $m > 2$ E-оптимальный план является единственным по теореме 3.1 главы 1, полученное противоречие доказывает лемму. $\Box$
Заметим, что в силу симметричности плана имеет место равенство

$$c_{2l+1}(\xi^*) = \int x^{2l+1} \xi^*(dx) = 0, l = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Как было доказано в работе (*Heiligers, 1991*), для полиномиальной регрессии на симметричном отрезке $dim\mathcal{P} = 2$. Случай $dim\mathcal{P} = 1$ уже исследован (на произвольном отрезке, для которого $dim\mathcal{P} = 1$, E-оптимальным является чебышевский план).

Рассмотрим случай $dim\mathcal{P} = 2$. Для упрощения обозначений будем рассматривать лишь случай $m = 2k$. Случай $m = 2k+1$ рассматривается аналогично.

Определение 2.1 Ортонормированный базис $\{p_{(i)}\}_{i=1}^s$ пространства $\mathcal{P}$ из формулировки теоремы 1.3 главы 1 будем называть *экстремальным базисом.*

Пусть $M = M(\xi^*)$. Так как $dim\mathcal{P} = 2$, то минимальные собственные числа матриц M_1 и M_2 из доказательства леммы 2.1 совпадают и равны λ^*. Обозначим через
$p^* = (p_0^*, \dots, p_{k-1}^*)^T$ и $q^* = (q_0^*, \dots, q_{k-1}^*)^T$ нормированные младшие собственные векторы матриц M_1 и M_2 соответственно. Очевидно, что векторы

$\bar{p} = (p_0^*, 0, p_1^*, 0, \dots, p_{k-1}^*, 0)^T$ и $\bar{q} = (0, q_0^*, 0, \dots, 0, q_{k-1}^*)^T$

ортогональны и образуют базис пространства $\mathcal{P}$. Докажем, что $\{\bar{p}, \bar{q}\}$ — экстремальный базис.

Лемма 2.2. *Для $m = 2k > 2$, $\chi = [-r, r]$ если $dim\mathcal{P} = 2$, то любая матрица A^* из теорем 1.2 и 1.3 главы 1 имеет вид*

$$A^* = \alpha\bar{p}\bar{p}^T + (1-\alpha)\bar{q}\bar{q}^T,$$

где $0 \le \alpha < 1$ определено однозначно.

Доказательство. Рассмотрим экстремальный многочлен

$$g(x) = f^T(x)A^*f(x).$$

По лемме 3.1 главы 1 этот многочлен допускает представление

$$\begin{aligned} g(x) &= \lambda^* + \gamma(x^2 - r^2)\prod_{i=2}^{m-1}(x - x_i^*)^2 = \\ &= \lambda^* + \gamma(x^2 - r^2)\prod_{i=1}^{k-1}(x^2 - x_i^{*2})^2, \quad \gamma > 0 \end{aligned}$$

Это представление показывает, что $g(x)$ — многочлен от x^2 степени $2k-1$.

Заметим, что произвольный ортогональный базис $\mathcal{P}$ имеет вид

$$\{p_{(1)}, p_{(2)}\}, \quad p_{(1)} = \delta\bar{p} + \sqrt{1-\delta^2}\bar{q}, \quad p_{(2)} = \sqrt{1-\delta^2}\bar{p} - \delta\bar{q}$$

для некоторого δ, $0 \le \delta \le 1$. Пусть $\{p_{(1)}, p_{(2)}\}$ является экстремальным базисом. Тогда любая матрица A^* имеет вид

$$A^* = \alpha p_{(1)} p_{(1)}^T + (1-\alpha) p_{(2)} p_{(2)}^T, \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Так как $g(x) = f^T(x) A^* f(x)$ — многочлен от x^2, то

$$\alpha \sum_{l=0}^{j} p_{(1)_l} p_{(1)_{j-l}} + (1-\alpha) \sum_{l=0}^{j} p_{(2)_l} p_{(2)_{j-l}} = 0, \quad j = 1, 3, \ldots, 2k-1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha \sum_{l=0}^{j} \left(\delta \bar{p}_l + \sqrt{1-\delta^2}\bar{q}_l\right)\left(\delta \bar{p}_{j-l} + \sqrt{1-\delta^2}\bar{q}_{j-l}\right) + \\
&+ (1-\alpha) \sum_{l=0}^{j} \left(\sqrt{1-\delta^2}\bar{p}_l - \delta \bar{q}_l\right)\left(\sqrt{1-\delta^2}\bar{p}_{j-l} - \delta \bar{q}_{j-l}\right) = \\
&= \alpha \sum_{l=0}^{j} \left(\delta^2 \bar{p}_l \bar{p}_{j-l} + \delta\sqrt{1-\delta^2}(\bar{p}_l \bar{q}_{j-l} + \bar{q}_l \bar{p}_{j-l}) + (1-\delta^2)\bar{q}_l \bar{q}_{j-l}\right) + \\
&+ (1-\alpha) \sum_{l=0}^{j} \left((1-\delta^2)\bar{p}_l \bar{p}_{j-l} - \delta\sqrt{1-\delta^2}(\bar{p}_l \bar{q}_{j-l} + \bar{q}_l \bar{p}_{j-l}) + \delta^2 \bar{q}_l \bar{q}_{j-l}\right)
\end{aligned}$$

Поскольку j — нечетное ($j = 2i+1$), то

$$\sum_{l=0}^{j} \bar{p}_l \bar{p}_{j-l} = 0, \quad \sum_{l=0}^{j} \bar{q}_l \bar{q}_{j-l} = 0,$$

$$\sum_{l=0}^{j} \bar{p}_l \bar{q}_{j-l} = \sum_{l=0}^{i} p_l^* q_{i-l}^*, \quad \sum_{l=0}^{j} \bar{q}_l \bar{p}_{j-l} = \sum_{l=0}^{i} q_l^* p_{i-l}^*.$$

Следовательно,

$$\delta\sqrt{1-\delta^2}(1-2\alpha) \sum_{l=0}^{i} p_l^* q_{i-l}^* = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Отсюда, если $\alpha \ne 1/2$, то $\delta = 1$ или 0. Заметим, что при $\delta = 0, 1$ мы имеем $\{p_{(1)}, p_{(2)}\} = \{\bar{p}, \bar{q}\}$.

Если $\alpha = 1/2$, то

$$A^* = \frac{1}{2}p_{(1)}p_{(1)}^T + \frac{1}{2}p_{(2)}p_{(2)}^T = \frac{1}{2}\bar{p}\bar{p}^T + \frac{1}{2}\bar{q}\bar{q}^T.$$

Заметим, что $\alpha \neq 1$, так как $(\bar{p}^T f(x))^2$ — многочлен степени $2k-2$ от x^2, а $(\bar{q}^T f(x))^2$ — многочлен степени $2k-1$ от x^2.

Заметим также, что $A^*\bar{p} = \alpha\bar{p}$ и, следовательно, α определено однозначно. $\Box$

В §5 будет показано, что многочлены $\bar{p}^T f(x)$ и $\bar{q}^T f(x)$ не имеют общих корней и $\alpha > 0$ (таким образом, экстремальный многочлен положителен для любого x) при достаточно больших r. В работе (*Heiligers, 1991*) было показано, что для достаточно больших r E-оптимальные планы не являются чебышевскими. Следовательно, $dim\mathcal{P} = 2$ для достаточно больших r.

Пусть r^* такое, что при $r > r^*$ экстремальный многочлен положителен для любого x (в частности, это означает, что $dim\mathcal{P} = 2$).

Представление леммы 2.2 может быть переписано в следующем виде

$$g(x) = \tilde{g}(y) = \lambda^* + \gamma(y - r^2)\prod_{i=1}^{k-1}(y - y_i^*)^2 = \varphi_1^2(y) + y\varphi_2^2(y),$$

где $y_i^* = x_i^{*2}$, $\varphi_1(y) = \sqrt{\alpha}p^{*T}\tilde{f}(y)$, $\varphi_2(y) = \sqrt{1-\alpha}q^{*T}\tilde{f}(y)$, $\tilde{f}(y) = (1, y, \ldots, y^{k-1})^T$.

Это представление будем называть *двойственным представлением*, так как оно связано с теоремой двойственности.

Лемма 2.3. *Для $r > r^*$ двойственное представление совпадает с представлением Карлина-Шепли.*

Доказательство. Рассмотрим все возможные представления $\tilde{g}(y) = g(x)$, $y = x^2$, следующего вида

$$\tilde{g}(y) = \varphi_1^2(y) + y\varphi_2^2(y), \tag{2.1}$$

где $\varphi_1(y) = p^T\tilde{f}(y)$, $\varphi_2(y) = q^T\tilde{f}(y)$ и p, q — произвольные векторы. По крайней мере одно такое представление существует — это двойственное представление. Проинтегрируем обе части равенства (2.1) по мере $\tilde{\xi}^*(dy) = \xi^*(dx)$. Тогда получим

$$\lambda^* = p^T M_1(\xi^*)p + q^T M_2(\xi^*)q,$$

где матрицы M_1 и M_2 определены в доказательстве леммы 2.1. Отсюда

$$||p||^2 + ||q||^2 \leq 1$$

и равенство имеет место для $p = \alpha p^*$, $q = (1-\alpha)q^*$. Так как представление Карлина-Шепли единственное, которое максимизирует $||p||^2 + ||q||^2$, то оно совпадает с двойственным представлением. $\square$

§3. **О функциональном подходе к решению экстремальных задач**

Пусть функция $\psi(\theta, z)$, где $\theta \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}$ задана, непрерывна по z и непрерывно дифференцируема по θ при $\theta \in \Omega$, $z \in I$, Ω — замкнутое множество в $\mathbb{R}^d$, I — конечный интервал. Пусть эта функция является вещественно аналитической на множестве $Int\Omega \times IntI$ и при $z = z_0 \in I$, $\theta = \theta_{(0)} \in Int\Omega$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}\psi(\theta, z) = 0, \qquad i = 1, \ldots, d. \tag{3.1}$$

При некотором дополнительном условии мы можем построить вектор-функцию $\theta(z)$, являющуюся решением системы (3.1) в некоторой окрестности точки z_0.

Для любой (скалярной, векторной или матричной) функции $\varphi(z)$, вещественно аналитической в некоторой окрестности точки z_0, обозначим

$$\varphi_{(0)} = \varphi(z_0), \quad \varphi_{(s)} = \frac{1}{s!}\varphi^{(s)}(z_0), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

$$\varphi_{<s>}(z) = \sum_{t=0}^{s} \varphi_{(t)}(z - z_0)^t.$$

Пусть $J(\theta, z)$ — матрица Якоби для системы (3.1),

$$J(\theta, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\psi(\theta, z)\right)_{i,j=1}^{d},$$

$$\bar{J}(u) = J(\theta_0, u), \quad g(\theta, z) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}\psi(\theta, z)\right)_{i=1}^{d}.$$

Теорема 3.1 *Предположим, что функция $\psi(\theta, z)$ обладает перечисленными свойствами и $\bar{J}_{(i)} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, s-1$, $\det \bar{J}_{(s)} \neq 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(I) В некоторой окрестности (U) точки z_0 существует вещественно аналитическая функция $\theta(z)$ такая, что $\theta(z_0) = \theta_{(0)}$,

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}\psi(\theta, z) = 0, \quad i = 1, \ldots, d$$

при любом фиксированном $z \in U$ и $\theta = \theta(z)$ и ряд

$$\sum_{t=0}^{\infty} \theta_{(t)}(z - z_0)^t$$

абсолютно сходится при $z \in U$.

(II) Коэффициенты $\theta_{(t)}$ могут быть вычислены по формуле

$$\theta_{(t)} = -\frac{1}{(t+s)!}\bar{J}_{(s)}\Big(g\big(\theta_{<t-1>}(z), z\big)\Big)^{(t+s)}\Big|_{z=z_0}.$$

(III) Если при $z = z_0$ решение $\theta = \theta_{(0)}$ системы уравнений (3.1) единственно, то при любом $z \in U$ решение этой системы единственно.

Утверждения (I) и (III) теоремы вытекают из теоремы о неявном отображении [12], более подробное доказательство можно найти в работе [9]. В этой же работе дано доказательство утверждения (II).

Для применения теоремы 3.1 к исследованию оптимальных планов нужно записать необходимые условия оптимальности в виде уравнения (3.1), решить (аналитически или численно) систему уравнений (3.1) в некоторой точке z_0 и проверить условие невырожденности матрицы Якоби.

Для случая E-оптимальных планов полиномиальной регрессии на симметричном отрезке эти шаги будут описаны в следующем разделе. Основная идея состоит в том, чтобы включить в вектор θ параметры решения обеих задач — прямой и двойственной.

§4. Основное уравнение для E-оптимальных планов

Рассмотрим полиномиальную регрессионную модель ($f_i(x) = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$) на симметричном отрезке $\mathfrak{X} = [-r, r]$.

Согласно лемме 2.1 точки и веса E-оптимального плана ξ^* симметричны, поэтому в случае $m = 2k$ обозначим план ξ^* следующим образом:

$$\xi^* = \left\{ \begin{array}{cccccccc} -r & -x^*_{k-1} & \ldots & -x^*_1 & x^*_1 & \ldots & x^*_{k-1} & r \\ \mu^*_k & \mu^*_{k-1} & \ldots & \mu^*_1 & \mu^*_1 & \ldots & \mu^*_{k-1} & \mu^*_k \end{array} \right\}$$

Рассмотрим экстремальный многочлен

$$g(x) = f^T(x) A^* f(x),$$

где A^* — матрица из теоремы двойственности. Используя представление для экстремального многочлена из леммы 3.1 главы 1 и двойственное представление (см. §2 настоящей главы), в случае $m = 2k$ получаем

$$\lambda^* + \gamma(y - r^2) \prod_{i=1}^{k-1} (y - y^*_i)^2 = \alpha \left(p^{*T} \tilde{f}(y) \right)^2 + (1 - \alpha) y \left(q^{*T} \tilde{f}(y) \right)^2, \quad (4.1)$$

где $y = x^2$, $y^*_i = x^{*2}_i$, $i = 1, \ldots, k-1$, $\gamma > 0$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $\tilde{f}(y) = (1, y, \ldots, y^{k-1})^T$, $p^* = (p^*_0, p^*_1, \ldots, p^*_{k-1})^T$ и $q^* = (q^*_0, q^*_1, \ldots, q^*_{k-1})^T$ — нормированные младшие собственные векторы матриц $M_1(\xi^*)$ и $M_2(\xi^*)$ соответственно.

Введем новые обозначения. Для векторов $p \in \mathbb{R}^k$, $q \in \mathbb{R}^k$ определим векторы π, π_α и матрицу P_π:

$\pi = (p^T, q^T)^T$, $\pi_\alpha = (\sqrt{\alpha} p^T, \sqrt{1 - \alpha} q^T)^T$ при $0 \leq \alpha \leq 1$ и

$$P_\pi = \left(\begin{array}{ccccccc} p_0 & p_1 & \ldots & p_{k-1} & & & \\ & p_0 & p_1 & \ldots & p_{k-1} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & p_0 & p_1 & \ldots & p_{k-1} & 0 \\ 0 & q_0 & q_1 & \ldots & q_{k-1} & & \\ & 0 & q_0 & q_1 & \ldots & q_{k-1} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & 0 & q_0 & q_1 & \ldots & q_{k-1} \end{array} \right)$$

(размер матрицы $2k \times 2k$, всюду где ничего не написано, подразумеваются нули).

Непосредственным вычислением получаем следующее представление

$$g(x) = \tilde{g}(y) = {\pi^*_{\alpha^*}}^T P_{\pi^*_{\alpha^*}} f(y),$$

где $\pi_\alpha = \pi^*_{\alpha^*} = \left(\sqrt{\alpha^*} p^{*T}, \sqrt{1-\alpha^*} q^{*T}\right)$ и $\alpha^* \in (0,1)$ такое, что

$$A^* = \alpha^* \bar{p}\bar{p}^T + (1-\alpha^*)\bar{q}\bar{q}^T,$$

$\bar{p} = (p^*_0, 0, p^*_1, 0, \ldots, p^*_{k-1}, 0)^T$, $\bar{q} = (0, q^*_0, 0, \ldots, 0, q^*_{k-1})^T$.

Поделим обе части (4.1) на $\gamma = (1-\alpha) q^{*2}_{k-1}$ и сделаем замену $p = \dfrac{\sqrt{\alpha} p^*}{\sqrt{1-\alpha} q^*_{k-1}}$, $q = \dfrac{q^*}{q^*_{k-1}}$. Получим

$$\frac{\lambda^*}{\gamma} + (y - r^2) \prod_{i=1}^{k-1} (y - y^*_i)^2 = (p_0 + p_1 y + \ldots + p_{k-1} y^{k-1})^2 +$$
$$+ y(q_0 + q_1 y + \ldots + q_{k-2} y^{k-2} + y^{k-1})^2, \tag{4.2}$$

причем $\gamma = \dfrac{1}{\pi^T \pi}$, $\pi^T = (p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}, q_0, q_1, \ldots, q_{k-2}, 1)$.

Обозначим $z = 1/r^2$. Произведем замену переменных: $yz \to y$, $\tilde{y}^*_i = y^*_i z$, $i = 2, \ldots, k-1$. Умножим обе части (4.2) на z^{2k-1}, получим

$$\frac{\lambda^*}{\gamma} z^{2k-1} + (y-1)(y - y^*_1 z)^2 \prod_{i=2}^{k-1} (y - \tilde{y}^*_i)^2 =$$
$$= (p_0 z^{k-1}\sqrt{z} + p_1 z^{k-2}\sqrt{z} y + \ldots + p_{k-1}\sqrt{z} y^{k-1})^2 +$$
$$+ y(q_0 z^{k-1} + q_1 z^{k-2} y + \ldots + y^{k-1})^2. \tag{4.3}$$

Обозначим $\tilde{p}^*_0 = p_0 z^{k-1}\sqrt{z}$, $\tilde{p}^*_1 = p_1 z^{k-2}\sqrt{z}$, $\ldots$, $\tilde{p}^*_{k-1} = p_{k-1}\sqrt{z}$;

$\tilde{q}^*_0 = q_0 z^{k-1}$, $\tilde{q}^*_1 = q_1 z^{k-2}$, $\ldots$, $\tilde{q}^*_{k-2} = q_{k-2} z$.

Таким образом, $\tilde{p}^* = z^{k-1}\sqrt{z} Z^{-1} p$, $\tilde{q}^* = z^{k-1} Z^{-1} q$,
$Z = diag\{1, z, z^2, \ldots, z^{k-1}\}$ и $\pi^*_{\alpha^*} \to \tilde{\pi} = (\tilde{p}^T, \tilde{q}^T)^T$, где

$$\tilde{\pi} = \left(Z_1^{-1} \pi^*_{\alpha^*} / \left(\sqrt{1-\alpha^*} q^*_{k-1}\right) \sqrt{z} z^{k-1}\right),$$

$$Z_1 = diag\{1, z, \ldots, z^{k-1}, \sqrt{z}, \ldots, \sqrt{z}z^{k-1}\}.$$

Переходя к новым обозначениям, можно переписать (4.3) в следующем виде $\left(\tilde{g}(y)z^{2k-1}/\gamma = \tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f(\tilde{y})\right)$:

$$\frac{\lambda^*}{\gamma} z^{2k-1} + (y-1)(y - y_1^* z)^2 \prod_{i=2}^{k-1} (y - \tilde{y}_i^*)^2 =$$
$$= (\tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 y + \ldots + \tilde{p}_{k-1} y^{k-1})^2 + y(\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 y + \ldots + y^{k-1})^2. \qquad (4.4)$$

Заметим, что решения прямой и двойственной задач выражаются через величины

$$y_1^* = x_1^{*2}, \ldots, y_{k-1}^* = x_{k-1}^{*2},$$
$$\nu_2^* = 2\mu_2^*, \ldots, \nu_k^* = 2\mu_k^*,$$

$$p_0^*, \ldots, p_{k-1}^*, q_0^*, \ldots, q_{k-2}^*.$$

Обозначим $\tilde{\nu}_i^* = \nu_i^*/z$. Нам удобнее будет искать нормированные величины (в случае $m = 2k$ не нормируется только величина y_1^*). Поэтому введем следующее определение:

Определение 4.1. Вектор

$$\tilde{\theta}^* = \tilde{\theta}^*(z) = (\tilde{p}_0^*, \ldots, \tilde{p}_{k-1}^*, \tilde{q}_0^*, \ldots, \tilde{q}_{k-2}^*, \tilde{\nu}_2^*, \ldots, \tilde{\nu}_k^*, y_1^*, \tilde{y}_2^*, \ldots, \tilde{y}_{k-1}^*)^T$$

назовем *вектором параметров решения пары двойственных задач* в случае симметричных промежутков.

Подставляя в (4.4) вместо y значения $y_1^* z, \tilde{y}_2^*, \ldots, \tilde{y}_{k-1}^*, 1$ и суммируя с соответствующими весами, получим формулу:

$$\lambda(\tilde{\theta}^*, z) = \frac{\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} \tilde{c}}{\tilde{\pi}^T Z_* \tilde{\pi}},$$

где $Z_* = Z_1^2$, $\tilde{c} = \sum_{i=2}^{k} (f(\tilde{y}_i) - f(y_1 z))\tilde{\nu}_i z + f(y_1 z)$.

Очевидно, $\lambda(z, \tilde{\theta}^*) = \lambda^*(z) = \lambda_{min}(M(\xi^*))$.

Пусть $\tilde{\theta} = (\tilde{p}_0, \ldots, \tilde{p}_{k-1}, \tilde{q}_0, \ldots, \tilde{q}_{k-2}, \tilde{\nu}_2, \ldots, \tilde{\nu}_k, y_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_{k-1})^T$ — произвольный вектор, и пусть выполняются соотношения:

$$\tilde{q}_{k-1} = 1, \quad \tilde{y}_k = 1.$$

Рассмотрим производные $\lambda(\tilde{\theta}, z) = \dfrac{\tilde{\pi} P_{\tilde{\pi}} \tilde{c}}{\tilde{\pi}^T Z_* \tilde{\pi}}$ по $\tilde{\theta}_i$, $i = 1, \ldots, 4k-1$:

$$\lambda'_{\tilde{\pi}} = \frac{2(P_{\tilde{\pi}}\tilde{c})^T - 2\tilde{\pi}^T Z_* \lambda}{\tilde{\pi}^T Z_* \tilde{\pi}},$$

$$\lambda'_{\tilde{\nu}_i} = \frac{\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}}(f(\tilde{y}_i) - f(y_1 z))z}{\tilde{\pi}^T Z_* \tilde{\pi}}, \quad \lambda'_{\tilde{\nu}_k} = \frac{\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}}(f(1) - f(y_1 z))z}{\tilde{\pi}^T Z_* \tilde{\pi}},$$

$$\lambda'_{y_1} = \frac{\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f'(y_1 z)(1 + \tilde{\nu}_1 z) z}{\tilde{\pi}^T Z_* \tilde{\pi}}, \quad \lambda'_{\tilde{y}_i} = \frac{\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f'(\tilde{y}_i)\tilde{\nu}_i z}{\tilde{\pi}^T Z_* \tilde{\pi}}, \quad i = 2, \ldots, k-1,$$

$$\tilde{\nu}_1 = -\sum_{i=2}^{k} \tilde{\nu}_i.$$

Лемма 4.1. *При $m > 2$ для любого z, $0 < z < z^*$, где $z^* = 1/r^{*2}$ и r^* — минимальный положительный корень уравнения границы, вектор $\tilde{\theta}^*(z)$ является решением уравнения*

$$\frac{\partial \lambda(\tilde{\theta}, z)}{\partial \tilde{\theta}} = 0, \tag{4.5}$$

причем $\lambda(\tilde{\theta}^*(z), z) = \lambda^*(z)$.

Доказательство. Заметим, что равенство

$$\lambda'_{\tilde{\pi}}(\tilde{\theta}^*, z) = 0 \tag{4.6}$$

эквивалентно равенству $P_{\tilde{\pi}}\tilde{c} = \lambda Z_* \tilde{\pi}$, где $\lambda = \lambda(\tilde{\theta}^*, z)$, а последнее эквивалентно $M(\tilde{\xi})\tilde{\pi} = \lambda Z_* \tilde{\pi}$, где

$$Z_* = diag\left\{1, z^2, \ldots, z^{2k-2}, z, z^3, \ldots, z^{2k-1}\right\},$$

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi}^*(z) = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} -1 & -x^*_{k-1}\sqrt{z} & \ldots & -x^*_1\sqrt{z} & x^*_1\sqrt{z} & \ldots & x^*_{k-1}\sqrt{z} & 1 \\ \mu^*_k & \mu^*_{k-1} & \ldots & \mu^*_1 & \mu^*_1 & \ldots & \mu^*_{k-1} & \mu^*_k \end{array} \right\}$$

$$M(\tilde{\xi}) = \begin{pmatrix} M_1(\tilde{\xi}) & O \\ O & M_2(\tilde{\xi}) \end{pmatrix},$$

$$M_1(\tilde{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{f}(\tilde{y}_i^*)\tilde{f}^T(\tilde{y}_i^*)\nu_i^*, \qquad M_2(\tilde{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i^*\tilde{f}(\tilde{y}_i^*)\tilde{f}^T(\tilde{y}_i^*)\nu_i^*.$$

Поскольку $\tilde{f}(\tilde{y}) = Z\tilde{f}(y)$, $Z = diag\{1, z, z^2, \ldots, z^{k-1}\}$ то

$$M_1(\tilde{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} Z\tilde{f}(y_i^*)\tilde{f}^T(y_i^*)Z\nu_i^* = ZM_1(\xi^*)Z,$$

$$M_2(\tilde{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} zy_i^*Z\tilde{f}(y_i^*)\tilde{f}^T(y_i^*)Z\nu_i^* = zZM_2(\xi^*)Z.$$

$M_1(\tilde{\xi})\tilde{p}^* = \lambda Z^2\tilde{p}^*$ эквивалентно $ZM_1(\xi^*)Z\tilde{p}^* = \lambda Z^2\tilde{p}^*$, а $\tilde{p}^* = z^{k-1}\sqrt{z}Z^{-1}p$ по определению, т.е. $M_1(\xi^*)p = \lambda p$.

$M_2(\tilde{\xi})\tilde{q}^* = \lambda zZ^2\tilde{q}^*$ эквивалентно $zZM_2(\xi^*)Z\tilde{q}^* = \lambda zZ^2\tilde{q}^*$, а $\tilde{q}^* = z^{k-1}Z^{-1}q$ по определению, т.е. $M_2(\xi^*)q = \lambda q$.

Таким образом, пришли к утверждению $M_1(\xi^*)p = \lambda p$, $M_2(\xi^*)q = \lambda q$, т. е. к тому, что собственное число $\lambda = \lambda(\tilde{\theta}^*, z)$ имеет кратность 2. Таким образом, (4.6) есть необходимое условие E-оптимальности плана ξ^*.

Далее, равенства

$$\lambda'_{y_1}(\tilde{\theta}^*, z) = 0, \quad \lambda'_{\tilde{y}_i}(\tilde{\theta}^*, z) = 0, \quad \lambda'_{\tilde{\nu}_i}(\tilde{\theta}^*, z) = 0 \tag{4.7}$$

эквивалентны равенствам

$$\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f'(y_i) = 0, \quad \tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}}(y_k) = \tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f(y_i),$$

где $\tilde{\pi} = \pi^*_{\alpha^*}$, $y_i = y_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Так как ${\pi^*_{\alpha^*}}^T P_{\pi^*_{\alpha^*}} f(y)$ — экстремальный многочлен, то условия (4.7) являются необходимыми условиями E–оптимальности плана ξ^*.

Равенство $\lambda(\tilde{\theta}^*, z) = \lambda^*$ получено выше. □

Уравнение

$$\frac{\partial\lambda(\tilde{\theta}, z)}{\partial\tilde{\theta}} = 0$$

будем называть *основным уравнением.*

Будем изучать вектор $\tilde{\theta}^* = \tilde{\theta}^*(z)$.

Утверждение 4.1. *При любом $z \in (0, 1/r^{*2})$ вектор $\tilde{\theta}^*(z)$ определен единственным образом.*

Доказательство. По теореме 3.1 векторы $(\tilde{y}_1^*, \ldots, \tilde{y}_{k-1}^*)^T$ и $(\nu_2^*, \ldots, \nu_k^*)^T$ определены единственным образом. Согласно лемме 2.3 вектор $\pi_{\alpha^*}^*$ определен единственным образом. Следовательно, и вектор $\tilde{\pi}$ определен единственным образом. □

Случай нечетных m рассматривается аналогично.

В случае $m = 2k+1$ план ξ^* имеет следующий вид:

$$\xi^* = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} -r & -x_{k-1}^* & \ldots & -x_1^* & 0 & x_1^* & \ldots & x_{k-1}^* & r \\ \mu_k^* & \mu_{k-1}^* & \ldots & \mu_1^* & 1 - \sum\limits_{i=1}^{k} 2\mu_i^* & \mu_1^* & \ldots & \mu_{k-1}^* & \mu_k^* \end{array} \right\},$$

где $1 - \sum\limits_{i=1}^{k} 2\mu_i^* > 0$.

Используя два представления для экстремального многочлена, получим:

$$\frac{\lambda^*}{\gamma} + y(y - \frac{1}{z}) \prod_{i=1}^{k-1} (y - y_i^*)^2 = (p_0 + p_1 y + \ldots + p_{k-1} y^{k-1} + y^k)^2 +$$
$$+ y(q_0 + q_1 y + \ldots + q_{k-1} y^{k-1})^2, \quad y_i^* = x_i^{*2},$$

причем $\gamma = \dfrac{1}{\pi^T \pi}$, $\pi^T = (p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}, 1, q_0, q_1, \ldots, q_{k-1})$.

Заметим, что $\tilde{g}(y) = \dfrac{\pi^T P_\pi f(y)}{\pi^T \pi}$, где

$$P_\pi = \left(\begin{array}{cccccccc} p_0 & p_1 & \ldots & p_{k-1} & 1 & & & \\ & p_0 & p_1 & \ldots & p_{k-1} & 1 & & \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & p_0 & p_1 & \ldots & p_{k-1} & 1 \\ 0 & q_0 & q_1 & \ldots & q_{k-1} & & & \\ & 0 & q_0 & q_1 & \ldots & q_{k-1} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & 0 & q_0 & q_1 & \ldots & q_{k-1} & 0 \end{array} \right)$$

(размер матрицы $(2k+1)\times(2k+1)$).

Проделав преобразования, аналогичные (4.2)—(4.4), и осуществив замену $\tilde\pi = z^k Z_1^{-1}\pi$, $Z_1 = diag\left\{1, z, \ldots, z^k, \sqrt{z}, \ldots, z^{k-1}\sqrt{z}\right\}$, получим

$$\lambda(\tilde\theta^*, z) = \frac{\tilde\pi^T P_{\tilde\pi}\tilde c}{\tilde\pi^T Z_*\tilde\pi},$$

где $Z_* = Z_1^2$, $\tilde c = \sum_{i=1}^{k}(f(\tilde y_i) - f(0))\tilde\nu_i z + f(0)$, $\tilde\nu_i^* = 2\mu_i^*/z$, $\tilde y_i^* = y_i^* z$, $i = 1, \ldots, k-1$.

Вектор параметров решения пары двойственных задач в случае нечетных m имеет вид:

$$\tilde\theta^* = \tilde\theta^*(z) = (\tilde p_0^*, \ldots, \tilde p_{k-1}^*, \tilde q_0^*, \ldots, \tilde q_{k-1}^*, \tilde\nu_1^*, \ldots, \tilde\nu_k^*, \tilde y_1^*, \tilde y_2^*, \ldots, \tilde y_{k-1}^*)^T.$$

Лемма 4.1 и утверждение 4.1 для нечетных m доказываются аналогично.

§5. **Предельный план**

Пусть $T_n(x)$— многочлен Чебышева первого рода, а $U_n(x)$ — многочлен Чебышева второго рода степени n, и пусть $\tilde y^* = (\tilde y_1^*, \ldots, \tilde y_k^*)^T$, $\tilde y_k^* \equiv 1$, $\tilde p^* = (\tilde p_0^*, \ldots, \tilde p_{k-1}^*)^T$, $\tilde q^* = (\tilde q_0^*, \ldots, \tilde q_{k-2}^*, 1)^T$.

Теорема 5.1

При $m = 2k$ существуют пределы векторов $\tilde p^*(z)$, $\tilde q^*(z)$, $\tilde y^*(z)$ при $z \to +0$, причем

$$\begin{aligned}
&(1, x^2, \ldots, x^{2k-2})\tilde p_{(0)}^* = |\tilde p_{0_{(0)}}| T_{2(k-1)}(x),\\
&(x, x^3, \ldots, x^{2k-1})\tilde q_{(0)}^* = |\tilde p_{0_{(0)}}|(x^2-1)U_{2k-3}(x),\\
&\quad \tilde y_{i_{(0)}}^* = t_{k+i-1}^2, \quad i = 1, 2, \ldots, k,
\end{aligned}$$

где $0 = t_k < t_{k+1} < \cdots < t_{2k-1} = 1$ — неотрицательные экстремальные точки многочлена $T_{2(k-1)}(t)$ на отрезке $[0,1]$.

Доказательство.

Пусть $m = 2k > 2$, $z = 1/r^2$,

$$\xi^*(z) = \left\{ \begin{array}{cccccccc} -r & -x_{k-1}^* & \ldots & -x_1^* & x_1^* & \ldots & x_{k-1}^* & r \\ \mu_k^* & \mu_{k-1}^* & \ldots & \mu_1^* & \mu_1^* & \ldots & \mu_{k-1}^* & \mu_k^* \end{array} \right\}$$

где $x_i^* = x_i^*(z)$, $\nu_i^* = \nu_i^*(z)$, $i = 1, 2, \dots, k$, $x_k^* = r = 1/\sqrt{z}$, является единственным E-оптимальным планом для полиномиальной регрессии на отрезке $[-r, r]$.

Рассмотрим равенство

$$\lambda + \gamma(y - \frac{1}{z}) \prod_{i=1}^{k-1} (y - y_i)^2 = \frac{(p^T \tilde{f}(y))^2 + y(q^T \tilde{f}(y))^2}{p^T p + q^T q}, \tag{5.1}$$

где $\tilde{f}(y) = (1, y, \dots, y^{k-1})^T$, $0 < y_1 < \dots < y_{k-1} < 1/z$, $\lambda \leqslant 1$.

По лемме 3.1 главы 1 и лемме 2.1 левая часть этого равенства при $\lambda = \lambda^*(z)$, $y_i = x_i^{*2}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$ и $\gamma > 0$ совпадает с $\tilde{g}(y) = g(\sqrt{y})$, где $g(x)$— экстремальный многочлен (см. определение 2.1). Поскольку $\lambda^*(z) < 1$, то по лемме 3.1 главы 1 и лемме 2.2 правая часть равенства (5.1) при

$$\frac{p}{\sqrt{p^T p + q^T q}} = \sqrt{\alpha} p^*, \qquad \frac{q}{\sqrt{p^T p + q^T q}} = \sqrt{1 - \alpha} q^*,$$

(p^*, q^* — нормированные младшие собственные векторы матриц $M_1(\xi^*)$ и $M_2(\xi^*)$ соответственно) также равна $\tilde{g}(y)$.

Таким образом, равенство (5.1) имеет место при $\lambda = \lambda^*(z)$, $y_i = x_i^{*2}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$,

$$\frac{p}{\sqrt{p^T p + q^T q}} = \sqrt{\alpha} p^*, \qquad \frac{q}{\sqrt{p^T p + q^T q}} = \sqrt{1 - \alpha} q^*,$$

для некоторого $\gamma > 0$. Приравнивая коэффициенты при y^{2k-1} в обеих частях этого равенства, мы получаем соотношение

$$\gamma = \frac{q_{k-1}^2}{p^T p + q^T q}.$$

Умножим обе части (5.1) на z^{2k-1}/γ и сделаем замену
$yz \to y$, $\tilde{y}_i = y_i z$, $\quad \tilde{p}_i = \dfrac{p_i}{q_{k-1}} z^{k-1-i} \sqrt{z}$, $\quad \tilde{q}_i = \dfrac{q_i}{q_{k-1}} z^{k-1-i}$.

Таким образом,

$$\tilde{p} = z^{k-1} \sqrt{z} Z^{-1} \hat{p}, \quad \tilde{q} = z^{k-1} Z^{-1} \hat{q}, \tag{5.2}$$

где $Z = diag\{1, z, z^2, \ldots, z^{k-1}\}$ и $\hat{p} = \frac{p_i}{q_{k-1}}$, $\hat{q} = \frac{q_i}{q_{k-1}}$.

Переходя к новым обозначениям, можно переписать (5.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda}{\gamma} z^{2k-1} + (y-1)\prod_{i=1}^{k-1}(y-\tilde{y}_i)^2 = \\ =&(\tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 y + \ldots + \tilde{p}_{k-1}y^{k-1})^2 + \tilde{y}(q_0 + \tilde{q}_1 y + \ldots + y^{k-1})^2. \qquad (5.3)\end{aligned}$$

При этом

$$\gamma = \frac{q_{k-1}^2}{p^T p + q^T q} = \frac{1}{\hat{p}^T\hat{p} + \hat{q}^T\hat{q}} = \frac{z^{2k-1}}{\tilde{p}^T Z^2\tilde{p} + z\tilde{q}^T Z^2\tilde{q}} = \frac{z^{2k-1}}{\Delta}, \text{ где}$$

$$\Delta = \tilde{p}_0^2 + \tilde{p}_1^2 z^2 + \cdots + \tilde{p}_{k-1}^2 z^{2k-2} + \tilde{q}_0^2 z + \tilde{q}_1^2 z^3 + \cdots + z^{2k-1}.$$

Равенство (5.3) можно записать по-другому:

$$\lambda + \frac{1}{\Delta}(y-1)\prod_{i=1}^{k-1}(y-\tilde{y}_i)^2 = \frac{1}{\Delta}\left[\left(\tilde{p}^T\tilde{f}(y)\right)^2 + y\left(\tilde{q}^T\tilde{f}(y)\right)^2\right]. \qquad (5.4)$$

В силу леммы 2.3 нули многочленов $\tilde{p}^T\tilde{f}(y)$ и $\tilde{q}^T\tilde{f}(y)$ принадлежат отрезку $[0,1]$. Так как $\tilde{q}_{k-1} \equiv 1$, то все величины $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(z)$ ограничены при $z \in (0, z^*)$. Кроме того, по определению, $\tilde{y}_i^* \in [0,1]$, $i = 1, \ldots, k-1$.

Приравнивая коэффициенты при y^0 и y^{2k-2} в (5.3), получим:

$$\frac{\lambda}{\gamma} z^{2k-1} - \prod_{i=1}^{k-1}\tilde{y}_i^2 = \tilde{p}_0^2, \quad \tilde{p}_{k-1}^2 = -2\tilde{q}_{k-2} - 2\sum_{i=1}^{k-1}\tilde{y}_i^* - 1,$$

откуда $\tilde{p}_{k-1}$, а значит, и все величины $\tilde{p}_i$, $i = 0, \ldots, k-1$ ограничены при $z \in [0,1]$. Поэтому все величины $\tilde{y}_i^*$, $\tilde{p}_i$ и $\tilde{q}_i$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ стремятся к конечным пределам при $z \to +0$.

Теперь находим выражения для λ:

$$\lambda = \frac{\tilde{p}_0^2 + \prod\limits_{i=1}^{k-1}\tilde{y}_i^2}{\tilde{p}_0^2 + \tilde{p}_1^2 z^2 + \cdots + \tilde{p}_{k-1}^2 z^{2k-2} + \tilde{q}_0^2 z + \tilde{q}_1^2 z^3 + \cdots + z^{2k-1}} = \frac{\tilde{p}_0^2 + \prod\limits_{i=1}^{k-1}\tilde{y}_i^2}{\Delta}.$$

Так как $\lambda^*(z) < 1$ в силу леммы 3.1 главы 1, и, значит, $\lim\limits_{z\to 0}\lambda(z) \le 1$, получаем, что $\tilde{y}_{(0)} = 0$ (в силу упорядоченности $\tilde{y}_i$) и при $z \to 0$

$$\lambda = 1 - \frac{\tilde{q}^2_{0_{(0)}}}{\tilde{p}^2_{0_{(0)}}} z + o(z).$$

Приравнивая коэффициенты при y в первой степени в (5.3), получим:

$$\prod_{i=1}^{k-1} \tilde{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{k-1} 2\tilde{y}_j \prod_{i\neq j} \tilde{y}_i^2 = \tilde{q}_0^2 + 2\tilde{p}_0\tilde{p}_1.$$

Отсюда $\tilde{q}^2_{0_{(0)}} = -2\tilde{p}_{0_{(0)}}\tilde{p}_{1_{(0)}}$, так как $\tilde{y}^*_{1_{(0)}} = 0$. Тогда

$$\lambda_{(1)} = 2\frac{\tilde{p}_{1_{(0)}}}{\tilde{p}_{0_{(0)}}}.$$

Обозначим

$$\lambda(z, \tilde{p}, \tilde{q}) = (\tilde{p}_0^2 + \prod_{i=1}^{k-1} \tilde{y}_i^2)/\Delta.$$

Заметим, что минимум $\lambda(z, \tilde{p}, \tilde{q})$ для всех векторов $\tilde{p}$ и $\tilde{q} \in \mathbb{R}^k$ таких, что $\tilde{q}_{k-1} = 1$ и

$$\left(\tilde{p}^T \tilde{f}(\tilde{y}_i^*)\right)^2 + \tilde{y}_i^* \left(\tilde{q}^T \tilde{f}(\tilde{y}_i^*)\right)^2 = C, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{5.5}$$

где C — некоторое положительное число, равен $\lambda^*(z)$.

Более того, этот минимум достигается если и только если $\tilde{p} = \tilde{p}^*$ и $\tilde{q} = \tilde{q}^*$, где $\tilde{p}^*$ и $\tilde{q}^*$ удовлетворяют уравнению (5.4) с $\lambda = \lambda^*(z)$, $\tilde{y}_i = \tilde{y}_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Умножим обе части (5.5) на ν_i^*/Δ и просуммируем по $i = 1, 2, \ldots, k$.

Тогда, используя (5.2), получим

$$\frac{C}{\Delta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\tilde p^T\tilde f(\tilde y_i^*)\right)^2\nu_i^* + \sum\limits_{i=1}^{k}\tilde y_i^*\left(\tilde q^T\tilde f(\tilde y_i^*)\right)^2\nu_i^*}{\tilde p^T Z^2\tilde p + z\tilde q^T Z^2\tilde q} =$$
$$=\frac{z^{2k-1}\left(\hat p^T M_1(\xi^*)\hat p + \hat q^T M_2(\xi^*)\hat q\right)}{z^{2k-1}\hat p^T\hat p + z^{2k-1}\hat q^T\hat q} = \frac{p^T M_1(\xi^*)p + q^T M_2(\xi^*)q}{p^T p + q^T q} \geqslant$$
$$\geqslant\lambda_{min}(M(\xi^*(z))) = \lambda^*(z),$$

поскольку $\tilde f(\tilde y) = Z\tilde f(y)$, $Z = diag\left\{1, z, z^2, \ldots, z^{k-1}\right\}$. Равенство имеет место если и только если $\tilde p = \tilde p^*$, $\tilde q = \tilde q^*$.

Переходя к пределу в (5.4) при $z \to 0$ мы получим, что $\tilde p_{(0)}$ и $\tilde q_{(0)}$ доставляют минимум выражения

$$\lim_{z\to 0}\frac{\lambda(z)-\lambda(0)}{z} = 2\tilde p_{1_{(0)}}/\tilde p_{0_{(0)}}$$

при условии

$$\varphi^2(y_i) + y_i\psi^2(y_i) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

где $y_i = \tilde y^*_{i_{(0)}}$, $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$\varphi(y) = \frac{\tilde p_{(0)}^T\tilde f(y)}{|\tilde p_{0_{(0)}}|}, \quad \psi(y) = \frac{\tilde q_{(0)}^T\tilde f(y)}{|\tilde p_{0_{(0)}}|}.$$

Перепишем условие в виде

$$|\varphi(y_i)| = \sqrt{1 - y_i\psi^2(y_i)}, \;\; y_i = \tilde y^*_{i_{(0)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \qquad 5.6$$

По лемме 1.1 максимум абсолютной величины коэффициента многочлена φ при y (равного $\tilde p_{1_{(0)}}/\tilde p_{0_{(0)}}$) будет достигаться при ограничениях (5.6), если

$$\varphi(y_i) = (-1)^{i-l}\sqrt{1 - y_i\psi(y_i)}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

где

$$l = 0 \text{ и } 1, \;\; \psi(y_i) = 0, \;\; y_i = \tilde y^*_{i_{(0)}}, \;\; i = 2, \ldots, k.$$

Из последних равенств следует, что

$$\psi(y) = \frac{1}{|\tilde{p}_{0_{(0)}}|} \prod_{i=2}^{k} (y - \tilde{y}^*_{i_{(0)}})$$

Введем полиномы

$$h_1(t) = \varphi(t^2), \quad h_2(t) = \frac{t}{|\tilde{p}_{0_{(0)}}|} \prod_{i=2}^{k-1} (t^2 - \tilde{y}^*_{i_{(0)}}).$$

Перепишем равенство (5.4) в следующем виде

$$\lambda\Delta + (y-1) \prod_{i=1}^{k-1} (y - \tilde{y}^*_i)^2 = \left(\tilde{p}^T \tilde{f}(y)\right)^2 + y \left(\tilde{q}^T \tilde{f}(y)\right)^2.$$

Поделим обе части равенства на $\tilde{p}^2_{0_{(0)}}$ и перейдем к пределу при $z \to 0$. Получим

$$1 + \frac{y^2(y-1)}{\tilde{p}^2_{0_{(0)}}} \prod_{i=2}^{k-1} (y - \tilde{y}^*_{i_{(0)}})^2 = \varphi^2(y) + y\psi^2(y). \tag{5.7}$$

Заметим, что

$$y\psi^2(y) - \frac{y^2(y-1)}{\tilde{p}^2_{0_{(0)}}} \prod_{i=2}^{k-1} (y - \tilde{y}^*_{i_{(0)}})^2 = \frac{y(1-y)}{\tilde{p}^2_{0_{(0)}}} \prod_{i=2}^{k-1} (y - \tilde{y}^*_{i_{(0)}})^2 = (1-y)h_2^2(\sqrt{y}).$$

Тогда в равенстве 5.7 получим $1 = \varphi^2(y) + (1-y)h_2^2(\sqrt{y})$, или

$$1 = h_1^2(t) + (1-t^2)h_2^2(t).$$

Это тождество выполнимо на множестве многочленов тогда и только тогда, когда $h_1(t)$ и $h_2(t)$ — многочлены Чебышева первого и второго родов, соответственно, с точностью до знака (*Карлин, Стадден, 1976*). Таким образом, учитывая степени $h_1(t)$ и $h_2(t)$, получим

$$h_1(t) = T_{2k-2}(t), \;\; h_2(t) = U_{2k-3}(t).$$

Отсюда

$$(1, x^2, \ldots, x^{2k-2})\tilde{p}_{(0)} = const T_{2(k-1)}(x), \text{ где } const = |\tilde{p}_{0_{(0)}}|.$$

Неотрицательные точки альтернанса $T_{2k-2}(t)$: $0 = t_k < t_{k+1} < \cdots < t_{2k-1} = 1$. Поскольку $h_1(t) \leqslant 1$, то имеем:

$$\tilde{y}^*_{1_{(0)}} = t_k^2 = 0, \quad \tilde{y}^*_{i_{(0)}} = t^2_{k+i-1}, \quad i = 2, \ldots, k-1, \quad \tilde{y}^*_k = t^2_{2k-1} = 1.$$

Поскольку

$$\sqrt{y}\psi(y)\frac{\sqrt{y}(y-1)}{|\tilde{p}_{0_{(0)}}|}\prod_{i=2}^{k-1}(y - \tilde{y}^*_{i_{(0)}})(y-1)U_{2k-3}(\sqrt{y}),$$

то получаем утверждение:

$$\tilde{q}_{0_{(0)}}x + \tilde{q}_{1_{(0)}}x^3 + \cdots + x^{2k-1} = |\tilde{p}_{0_{(0)}}|(x^2-1)U_{2k-3}(x).$$

Теорема доказана. □

Найдем теперь значение $y^*_{1_{(0)}}$ и предельные значения весов $\tilde{\nu}^*_i$. Так как $\nu^*_i(z) = 2\mu^*_i(z) > 0$ и $\sum_{i=1}^k \nu^*_i(z) = 1$, то существуют пределы $\nu^*_{i_{(0)}} = \lim_{z\to 0}\nu^*_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Найдем эти пределы.

Пусть

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi}^*(z) = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} -1 & -x^*_{k-1}\sqrt{z} & \ldots & -x^*_1\sqrt{z} & x^*_1\sqrt{z} & \ldots & x^*_{k-1}\sqrt{z} & 1 \\ \mu^*_k & \mu^*_{k-1} & \ldots & \mu^*_1 & \mu^*_1 & \ldots & \mu^*_{k-1} & \mu^*_k \end{array} \right\}$$

Так как $\lambda'_{\tilde{\pi}} = 0$, то $M\tilde{\pi} = \lambda Z_*\tilde{\pi}$, где

$$Z_* = diag\left\{1, z^2, \ldots, z^{2k-2}, z, z^3, \ldots, z^{2k-1}\right\},$$

$$M = \left(\begin{array}{cc} M_1(\tilde{\xi}) & O \\ O & M_2(\tilde{\xi}) \end{array} \right),$$

$$M_1(\tilde{\xi}) = \sum_{i=1}^k \tilde{f}(\tilde{y}^*_i)\tilde{f}^T(\tilde{y}^*_i)\nu^*_i,$$

$$M_2(\tilde{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} \hat{f}(\tilde{y}_i^*)\hat{f}^T(\tilde{y}_i^*)\nu_i^*,$$

$$\hat{f}(y) = (\sqrt{y}, \ldots, y^{k-1}\sqrt{y})^T.$$

Рассмотрим равенство:

$$M_1(\tilde{\xi})\tilde{p} = \lambda diag\left\{1, z^2, \ldots, z^{2k-2}\right\}\tilde{p}. \tag{5.8}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $z \to +0$:

$$M_{1_{(0)}}\tilde{p}_{(0)} = \lambda_{(0)}\tilde{p}_{0_{(0)}}e_1. \tag{5.9}$$

Вспомним, что

$$\frac{\tilde{p}_{(0)}^T \tilde{f}(\tilde{y}_{i_{(0)}}^*)}{|\tilde{p}_{0_{(0)}}|} = \varphi(\tilde{y}_{i_{(0)}}^*) = T_{2k-2}(\sqrt{\tilde{y}_{i_{(0)}}^*}) = (-1)^{i+k}. \tag{5.10}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{f}(\tilde{y}_{i_{(0)}}^*)\tilde{f}^T(\tilde{y}_{i_{(0)}}^*)\nu_{i_{(0)}}^*\tilde{p}_{(0)} = \sum_{i=1}^{k} \tilde{f}(\tilde{y}_{i_{(0)}}^*)\nu_{i_{(0)}}^*(-1)^{i+k}|\tilde{p}_{(0)}| = F\nu_{(0)}^*(-1)^{k-1}|\tilde{p}_{(0)}|,$$

где $F = \left(\tilde{y}_{j_{(0)}}^{*i-1}(-1)^{j-1}\right)_{i,j=1}^{k}$.

Равенство(5.9) примет вид:

$$F\nu_{(0)}^*(-1)^{k-1}|\tilde{p}_{(0)}| = \tilde{p}_{0_{(0)}}e_1.$$

В силу теоремы 5.1 выражение $\dfrac{\tilde{p}_{0_{(0)}}}{|\tilde{p}_{0_{(0)}}|}$ равно свободному члену полинома Чебышева $T_{2k-2}(x)$, т.е.

$$\frac{\tilde{p}_{0_{(0)}}}{|\tilde{p}_{0_{(0)}}|} = (-1)^{k-1}. \tag{5.11}$$

Тогда $F\nu_{(0)}^* = e_1$, отсюда $\nu_{(0)}^* = e_1$.

Используя это предельное значение, получим

$$M_{1_{(0)}} = \tilde{f}(\tilde{y}^*_{1_{(0)}})\tilde{f}^T(\tilde{y}^*_{1_{(0)}}) = e_1 e_1^T,$$
$$M_{2_{(0)}} = \left[\sum_{i=1}^k \hat{f}(\tilde{y}^*_i)\hat{f}^T(\tilde{y}^*_i)\nu^*_i\right]_{(0)} = \hat{f}(0)\hat{f}^T(0) = \mathbb{O}.$$

Рассмотрим теперь равенство:

$$M_2(\xi)\tilde{q} = \lambda diag\left\{z, z^3, \ldots, z^{2k-1}\right\}\tilde{q}.$$

Разделим это равенство на z и перейдем к пределу при $z \to +0$, получим:

$$M_{2_{(1)}}\tilde{q}_{(0)} + M_{2_{(0)}}\tilde{q}_{(1)} = \lambda_{(0)}\tilde{q}_{0_{(0)}}e_1, \quad e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T.$$

Поскольку $M_{2_{(0)}}$ — нулевая матрица, имеем:

$$\sum_{i=2}^k \hat{f}(\tilde{y}^*_{i_{(0)}})\hat{f}^T(\tilde{y}^*_{i_{(0)}})\tilde{\nu}_{i_{(0)}}\tilde{q}_{(0)} + y^*_{1_{(0)}} e_1 e_1^T \tilde{q}_{(0)} = \lambda_{(0)}\tilde{q}_{0_{(0)}}e_1$$

(здесь используется обозначение $\tilde{\nu}_1 z = -\sum_{i=2}^k \tilde{\nu}_i z$.)

Согласно теореме 5.1, $\hat{f}^T(y)\tilde{q}_{(0)} = |\tilde{p}_{0_{(0)}}|(y-1)U_{2k-3}(\sqrt{y})$.

Отсюда следует, что $\hat{f}^T(\tilde{y}^*_k)\tilde{q}_{(0)} = \hat{f}^T(1)\tilde{q}_{(0)} = 0$.

По определению $U_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{dT_{n+1}(x)}{dx}$, а $\sqrt{\tilde{y}^*_{i_{(0)}}}$ — экстремальные точки многочлена $T_{2k-2}(t)$ на отрезке $[0, 1]$, следовательно,

$$U_{2k-3}\left(\sqrt{\tilde{y}^*_{i_{(0)}}}\right) = 0 \text{ для } 1 < i < k.$$

Тогда имеем:

$$y^*_{1_{(0)}}\tilde{q}_{0_{(0)}} = \lambda_{(0)}\tilde{q}_{0_{(0)}},$$

следовательно,

$$y^*_{1_{(0)}} = 1. \tag{5.12}$$

Вернемся теперь к равенству (5.8) и разделим обе части его на z. Перейдем к пределу при $z \to +0$, получим:

$$M_{1_{(1)}}(\xi)\tilde{p}_{(0)} + e_1 e_1^T \tilde{p}_{(1)} = \lambda_{(0)}\tilde{p}_{0_{(1)}} e_1 + \lambda_{(1)}\tilde{p}_{0_{(0)}} e_1. \tag{5.13}$$

Здесь $M_{1_{(0)}} = e_1 e_1^T$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$, $\lambda_{(1)} = 2\dfrac{\tilde{p}_{1_{(0)}}}{\tilde{p}_{0_{(0)}}}$.

Так как все пределы в правой части равенства (5.13) конечны, то существуют конечные пределы $\tilde{\nu}_i^*(z) = \nu_i^*(z)/z$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Используя значения $\nu_{(0)}^* = e_1$, $y_{1_{(0)}}^* = 1$, мы находим матрицу $M_{1_{(1)}}$:

$$M_{1_{(1)}} = \left[\sum_{i=1}^{k} \tilde{f}(\tilde{y}_i^*)\tilde{f}^T(\tilde{y}_i^*)\tilde{\nu}_i^* z + \tilde{f}(y_1^* z)\tilde{f}^T(y_1^* z)\right]_{(1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \tilde{f}(\tilde{y}_{i_{(0)}}^*)\tilde{f}^T(\tilde{y}_{i_{(0)}}^*)\tilde{\nu}_{i_{(0)}}^* + e_1 e_2^T + e_2 e_1^T.$$

Теперь, используя соотношение (5.10), приведем (5.13) к виду:

$$|\tilde{p}_{0_{(0)}}| \sum_{i=1}^{k} f_1(\tilde{y}_{i_{(0)}}^*)(-1)^{i+k}\tilde{\nu}_{i_{(0)}} + \tilde{p}_{1_{(0)}} e_1 + \tilde{p}_{0_{(0)}} e_2 = \lambda_{(1)}\tilde{p}_{0_{(0)}} e_1.$$

Так как $\lambda_{(1)} = 2\dfrac{\tilde{p}_{1_{(0)}}}{\tilde{p}_{0_{(0)}}}$, то получаем формулу:

$$\begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{k} \tilde{\nu}_{i_{(0)}} \\ \tilde{\nu}_{2_{(0)}} \\ \ldots \\ \tilde{\nu}_{k_{(0)}} \end{pmatrix} = (-1)^k F^{-1} \left(2\frac{\tilde{p}_{1_{(0)}}}{\tilde{p}_{0_{(0)}}} \frac{\tilde{p}_{0_{(0)}}}{|\tilde{p}_{0_{(0)}}|} e_1 - \frac{\tilde{p}_{1_{(0)}}}{|\tilde{p}_{0_{(0)}}|} e_1 - \frac{\tilde{p}_{0_{(0)}}}{|\tilde{p}_{0_{(0)}}|} e_2 \right),$$

$$F = \left((-1)^j \tilde{y}_{j_{(0)}}^{*\,i-1} \right)_{i,j=1}^{k}.$$

Тогда, используя (5.11), получим

$$\begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{k} \tilde{\nu}_{i_{(0)}} \\ \tilde{\nu}_{2_{(0)}} \\ \cdots \\ \tilde{\nu}_{k_{(0)}} \end{pmatrix} = F^{-1}\left((-1)^k \frac{\tilde{p}_{1_{(0)}}}{|\tilde{p}_{0_{(0)}}|} e_1 + e_2\right). \tag{5.14}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5.2. *При $m = 2k > 2$ вектор $\tilde{\theta}^*(z)$ при $z \to +0$ стремится к предельному вектору $\tilde{\theta}^*_{(0)}$, компоненты которого определены теоремой 5.1 и формулами (5.12) и (5.14).*

Из этой теоремы мы получаем, что многочлены $\bar{p}^T f(x)$ и $\bar{q}^T f(x)$ не имеют общих корней при достаточно больших r, так как соответствующие предельные многочлены не имеют общих корней.

Случай $m = 2k + 1$ рассматривается аналогично.

Пусть $\tilde{p}^* = (\tilde{p}^*_0, \ldots, \tilde{p}^*_{k-1}, 1)^T$, $\tilde{q}^* = (\tilde{q}^*_0, \ldots, \tilde{q}^*_{k-1}, 1)^T$,$\tilde{\nu}^* = (\tilde{\nu}^*_1, \ldots, \tilde{\nu}^*_k)^T$.

Теорема 5.3. *При $m = 2k + 1 > 2$ вектор $\tilde{\theta}^*(z)$ при $z \to +0$ стремится к предельному вектору $\tilde{\theta}^*_{(0)}$, компоненты которого определены формулами:*

$$(1, x^2, \ldots, x^{2k})\tilde{p}^*_{(0)} = |\tilde{p}_{0_{(0)}}|(x^2 - 1)U_{2(k-1)}(x),$$
$$(x, x^3, \ldots, x^{2k-1})\tilde{q}^*_{(0)} = |\tilde{p}_{0_{(0)}}|T_{2k-1}(x),$$
$$\tilde{y}^*_{i_{(0)}} = t^2_{k+i}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

где $0 < t_{k+1} < t_{k+2} < \cdots < t_{2k} = 1$ — неотрицательные экстремальные точки многочлена $T_{2k-1}(t)$ на отрезке $[0, 1]$,

$$\tilde{\nu}^*_{(0)} = \frac{\tilde{q}_{0_{(0)}}}{|\tilde{p}_{0_{(0)}}|} F^{-1} e_1, \text{ где } F = \left((-1)^{j+k} \sqrt{\tilde{y}^*_{j_{(0)}}}\, \tilde{y}^{*\,i-1}_{j_{(0)}}\right)_{i,j=1}^{k}.$$

§6. Исследование матрицы Якоби

Введем матрицу Якоби системы уравнений $\dfrac{\partial \lambda(\tilde{\theta}, z)}{\partial \tilde{\theta}_i} = 0$:

$$J = J(\tilde{\theta}, z) = \left(\frac{\tilde{\pi}^T Z_* \tilde{\pi}}{2} \frac{\partial^2 \lambda(\tilde{\theta}, z)}{\partial \tilde{\theta}_i \partial \tilde{\theta}_j}\right)_{i,j=1}^{s},$$

где $s = 2m - 3$ —размер вектора $\tilde{\theta}$.

Используя явное представление для $\lambda(\theta, z)$ получим, что матрица J имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} \tilde{M} - \lambda Z_* & zP_{\tilde{\pi}}Y & zP_{\tilde{\pi}}H \\ (zP_{\tilde{\pi}}Y)^T & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ (zP_{\tilde{\pi}}H)^T & \mathbb{O} & zE \end{pmatrix}_{-}.$$

В случае $m = 2k$ $(s = 4k - 3)$ знак "_" у матрицы в правой части означает, что нее вычеркнуты $2k$-я строка и $2k$-й столбец, а матрицы $\tilde{M}$, Y, H и E имеют вид, соответственно:

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 & \cdots & \tilde{c}_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ \tilde{c}_{k-1} & \cdots & \tilde{c}_{2k-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_1 & \cdots & \tilde{c}_k \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_k & \cdots & \tilde{c}_{2k-1} \end{pmatrix},$$

$$\text{где } \tilde{c} = \sum_{i=2}^{k} (f(\tilde{y}_i) - f(y_1 z))\tilde{\nu}_i z + f(y_1 z).$$

$$Y = (f(\tilde{y}_i) - f(y_1 z))_{i=2}^{k},$$

$$H = \left(f'(y_1 z)(1 + \tilde{\nu}_1 z) \vdots (f'(\tilde{y}_i)\tilde{\nu}_i)_{i=2}^{k-1} \right), \quad \tilde{\nu}_1 = -\sum_{i=2}^{k} \tilde{\nu}_i,$$

$$E = \frac{1}{2} diag \left\{ \tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f''(y_1 z) z(1 + \tilde{\nu}_1 z) \vdots \left(\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f''(\tilde{y}_i)\tilde{\nu}_i \right)_{i=2}^{k-1} \right\}.$$

В этом представлении опущены функциональные члены, принимающие нулевое значение, например, вида $\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f'(\tilde{y}_i)$.

В случае $m = 2k + 1$ $(s = 4k - 1)$ знак "_"у матрицы в правой части означает, что у нее вычеркнуты (k+1)-я строка и (k+1)-й столбец).

Напомним, что вектор $\tilde{\theta}$ в случае нечетного m имеет вид

$$\tilde{\theta} = (\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_{k-1}, \tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{k-1}, \tilde{\nu}_1, \ldots, \tilde{\nu}_k, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{k-1})^T.$$

Матрицы $\tilde{M}$, Y, H и E в случае нечетного m имеют вид, соответственно:

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 & \cdots & \tilde{c}_k & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \tilde{c}_k & \cdots & \tilde{c}_{2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_1 & \cdots & \tilde{c}_k \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_k & \cdots & \tilde{c}_{2k-1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{c} = \sum_{i=1}^{k} \left(f(\tilde{y}_i) - f(0)\right) \tilde{\nu}_i z + f(0), \quad \tilde{y}_k = 1,$$

$$Y = \left(f(\tilde{y}_i) - f(0)\right)_{i=1}^{k}, \quad H = \left(f'(\tilde{y}_i)\tilde{\nu}_i\right)_{i=1}^{k-1},$$

$$E = \frac{1}{2} diag\left\{ \left(\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f''(\tilde{y}_i)\tilde{\nu}_i\right)_{i=1}^{k-1} \right\}.$$

Лемма 6.1. *Для* $m > 2$ $\det J(z) \neq 0$ *при* $z \in (0, \hat{z})$, *где* $\hat{z}$ *— некоторое число, такое, что* $0 < \hat{z} \leqslant z^*$.

Доказательство. Пусть $m = 2k$ (случай $m = 2k+1$ аналогичен). Пусть A – матрица J с вычеркнутыми k-м столбцом и k-й строкой, a – удаленный столбец с вычеркнутым k-м элементом, $a^* = J_{kk}$. Заметим, что матрица A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^T & \mathcal{D} \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

где $\mathcal{C}$ — матрица $\tilde{M} - \lambda Z_*$ с вычеркнутыми k-м и $2k$-м столбцами и k-й и $2k$-й строками, $\mathcal{B}$ — матрица $\left(zP_{\tilde{\pi}}Y \vdots zP_{\tilde{\pi}}H\right)$ с вычеркнутыми k-й и $2k$-й строками, матрица $\mathcal{D}$ имеет вид:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & zE \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица $Z_1 \tilde{M} Z_1$ имеет минимальное собственное число кратности не более двух, а вектор $\tilde{\pi}^*$ не имеет нулевых элементов, то матрица $\mathcal{C}$ положительно определена.

Из неравенства нулю определителя Вардермонда вытекает, что матрица $\left(Y \vdots H\right)$ имеет полный ранг. Так как многочлены $\hat{p}^T f(x)$ и $\hat{q}^T f(x)$

не имеют общих множителей, а $P_{\tilde{\pi}}$ является матрицей результанта этих многочленов, то $\det P_{\tilde{\pi}} \neq 0$ (см. *ван дер Варден, 1976*). Следовательно, матрица $\mathcal{B}$ — полного ранга.

Рассмотрим диагональную матрицу $\mathcal{D}$.

Используя соотношение (4.4), запишем

$$\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f''(y) = \left((y-1)(y-y_1 z)^2 \prod_{i=2}^{k-1} (y-\tilde{y}_i)^2 \right)''_y .$$

Продифференцировав, получим:

$$\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f''(y_1 z) = 2(y_1 z - 1) \prod_{i=2}^{k-1} (y_1 z - \tilde{y}_i)^2,$$

$$\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f''(\tilde{y}_s) = 2(\tilde{y}_s - 1)(\tilde{y}_s - y_1 z)^2 \prod_{i=2, i\neq s}^{k-1} (\tilde{y}_s - \tilde{y}_i)^2, \quad s = 2, \ldots, k-1.$$

Так как $0 < y_1 z < \tilde{y}_2 < \cdots < \tilde{y}_{k-1} < 1$, то, очевидно, все элементы диагональной матрицы E отрицательны, а, значит, $\mathcal{D} \leqslant /$.

По формуле Фробениуса (см. *Федоров, 1971*) имеем

$$\det A = \det \mathcal{C} \det(\mathcal{D} - \mathcal{B}^T \mathcal{C}^{-1} \mathcal{B}).$$

Так как матрица $\mathcal{B}$ полного ранга, то $\mathcal{B}^T \mathcal{C}^{-1} \mathcal{B} > 0$.

Поскольку все элементы матрицы $\mathcal{D}$ неположительны и $-\mathcal{D} \geq 0$, то отсюда вытекает, что

$$\det A > 0,$$

так как размер матриц $\mathcal{D}$ и $\mathcal{B}^T \mathcal{C}^{-1} \mathcal{B}$ равен $(2k-2) \times (2k-2)$.

Докажем теперь, что $\det J(z) \neq 0$ при $z \in (0, \hat{z})$. Умножая 2-ю, 3-ю, $\ldots$, k-ю строки матрицы $J(z)$ на $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_{k-1}$, соответственно и добавляя их к первой строке, умноженной на $\tilde{p}_0$, а затем осуществляя ту же операцию со столбцами, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{(1)}^T & b_{(2)}^T \\ b_{(1)} & \mathcal{C} & \mathcal{B} \\ b_{(2)} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D} \end{pmatrix},$$

где $b_{(1)}^T = (\underbrace{0, 0 \ldots, 0}_{2k-2})$, $b_{(2)}^T$ имеет вид:

$$\left(\left(\tilde{p}^T \tilde{f}(\tilde{y}_2)\right)^2 z - \left(\tilde{p}^T \tilde{f}(y_1 z)\right)^2 z, \ldots, \left(\tilde{p}^T \tilde{f}(\tilde{y}_k)\right)^2 z - \left(\tilde{p}^T \tilde{f}(y_1 z)\right)^2 z,\right.$$
$$\left.\left(\left(\tilde{p}^T \tilde{f}(y_1 z)\right)^2\right)' z(1 + \tilde{\nu}_1 z), \ldots, \left(\left(\tilde{p}^T \tilde{f}(\tilde{y}_{k-1})\right)^2\right)' \tilde{\nu}_{k-1} z\right).$$

Заметим, что вектор $b_{(2)} \neq 0$, так как в противном случае $\tilde{p}^T \tilde{f}(y)$ являлся бы чебышевским полиномом, что невозможно. Следовательно,

$$\det J(z) = \det A \left(- \left(b_{(1)}^T, b_{(2)}^T\right) A^{-1} \left(b_{(1)}^T, b_{(2)}^T\right)^T \right) =$$
$$= -(\det A) b_{(2)}^T (\mathcal{D} - \mathcal{B}^T \mathcal{C}^{-1} \mathcal{B})^{-1} b_{(2)}.$$

Таким образом, $\det J(z) \neq 0$. Лемма доказана. □

Используя теорему 5.2, легко проверить, что для любого $m > 2$ при $z \to 0$ матрица $J(\tilde{\theta}^*(z), z)$ стремится к нулевой матрице:

$$J_{(0)} = \lim_{z \to 0} J(\tilde{\theta}^*(z), z) = \mathbb{O}.$$

Рассмотрим матрицу $J_{(1)}$. Очевидно, что в точке $z_0 = 0$
$J_{(1)} = \lim\limits_{z \to 0} (\frac{1}{z} J)$, так как $J_{(0)} = \mathbb{O}$.

Лемма 6.2. $\det J_{(1)} \neq 0$. *Доказательство.* Матрица $J_{(1)}$ имеет вид:

$$J_{(1)} = \begin{pmatrix} M_{(1)} - (\lambda Z_*)_{(1)} & P_{\tilde{\pi}_{(0)}} Y_{(0)} & P_{\tilde{\pi}_{(0)}} H_{(0)} \\ (P_{\tilde{\pi}_{(0)}} Y_{(0)})^T & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ (P_{\tilde{\pi}_{(0)}} H_{(0)})^T & \mathbb{O} & E_{(0)} \end{pmatrix}_{-}.$$

Пусть $m = 2k$. Рассмотрим сначала матрицу $M_{(1)} - (\lambda Z_*)_{(1)}$.

$$(\lambda Z_*)_{(1)} = \lambda_{(1)} e_1 e_1^T + \lambda_{(0)} e_{k+1} e_{k+1}^T = -\frac{\tilde{q}_{0_{(0)}}^2}{\tilde{p}_{0_{(0)}}^2} e_1 e_1^T + e_{k+1} e_{k+1}^T.$$

$$M_{(1)} \begin{pmatrix} M_{1_{(1)}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_{2_{(1)}} \end{pmatrix},$$

$$M_{1_{(1)}} \left(\begin{array}{cccc} 0 & \tilde{c}_{1_{(1)}} & \cdots & \tilde{c}_{k-1_{(1)}} \\ \tilde{c}_{1_{(1)}} & \cdots & \cdots & \tilde{c}_{k_{(1)}} \\ \hdashline \tilde{c}_{k-1_{(1)}} & \cdots & \cdots & \tilde{c}_{2k-2_{(1)}} \end{array}\right),$$

$$M_{2_{(1)}} \left(\begin{array}{ccc} \tilde{c}_{1_{(1)}} & \cdots & \tilde{c}_{k_{(1)}} \\ \hdashline \tilde{c}_{k_{(1)}} & \cdots & \tilde{c}_{2k-1_{(1)}} \end{array}\right), \quad \text{г}$$

$$\tilde{c}_{1_{(1)}} = \left(\sum_{j=2}^{k} (\tilde{y}_j - y_1 z)\tilde{\nu}_j z + y_1 z \right)_{(1)} = \sum_{j=2}^{k} \tilde{y}_{j_{(0)}} \tilde{\nu}_{j_{(0)}} + y_{1_{(0)}},$$

$$\tilde{c}_{i_{(1)}} \left(\sum_{j=2}^{k} (\tilde{y}_j^i - y_1^i z^i)\tilde{\nu}_j z + y_1^i z^i \right)_{(1)} = \sum_{j=2}^{k} \tilde{y}_{j_{(0)}}^i \tilde{\nu}_{j_{(0)}}, \;\; i = 2, \ldots, 2k-1.$$

Далее, матрицы $Y_{(0)}$, $H_{(0)}$ и $E_{(0)}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} Y_{(0)} &= \left(f(\tilde{y}_{2_{(0)}}) - e_1, \ldots, f(1) - e_1 \right), \\ H_{(0)} &= \left(e_2, f'(\tilde{y}_{2_{(0)}})\tilde{\nu}_{2_{(0)}}, \ldots, f'(\tilde{y}_{k-1_{(0)}})\tilde{\nu}_{k-1_{(0)}} \right) \\ E_{(0)} &= \frac{1}{2} diag \left\{ 0, \tilde{\pi}_{(0)}^T P_{\tilde{\pi}_{(0)}} f''(\tilde{y}_{i_{(0)}})\tilde{\nu}_{i_{(0)}} \right\}_{i=2}^{k-1}. \end{aligned}$$

В случае $m = 2k + 1$ матрица $M_{(1)} - (\lambda Z_*)_{(1)}$ имеет вид:

$$(\lambda Z_*)_{(1)} \lambda_{(1)} e_1 e_1^T + \lambda_{(0)} e_{k+2} e_{k+2}^T - \frac{\tilde{q}_{0_{(0)}}^2}{\tilde{p}_{0_{(0)}}^2} e_1 e_1^T + e_{k+2} e_{k+2}^T.$$

$$M_{(1)} \begin{pmatrix} M_{1_{(1)}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M_{2_{(1)}} \end{pmatrix},$$

$$M_{1_{(1)}} \left(\begin{array}{cccc} 0 & \tilde{c}_{1_{(1)}} & \cdots & \tilde{c}_{k_{(1)}} \\ \tilde{c}_{1_{(1)}} & \cdots & \cdots & \tilde{c}_{k+1_{(1)}} \\ \hdashline \tilde{c}_{k_{(1)}} & \cdots & \cdots & \tilde{c}_{2k_{(1)}} \end{array}\right),$$

$$M_{2_{(1)}} \begin{pmatrix} \tilde{c}_{1_{(1)}} & \cdots & \tilde{c}_{k_{(1)}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{c}_{k_{(1)}} & \cdots & \tilde{c}_{2k-1_{(1)}} \end{pmatrix}, \quad \text{г}$$

$\tilde{c}_{i_{(1)}} = \sum_{j=1}^{k} \tilde{y}_{j_{(0)}} \tilde{\nu}_{j_{(0)}}$, $i = 1, 2 \ldots, 2k$.

$$\begin{aligned} Y_{(0)} &= \left(f(\tilde{y}_{1_{(0)}}) - e_1, \ldots, f(1) - e_1\right), \\ H_{(0)} &= \left(f'(\tilde{y}_{1_{(0)}})\tilde{\nu}_{1_{(0)}}, \ldots, f'(\tilde{y}_{k-1_{(0)}})\tilde{\nu}_{k-1_{(0)}}\right) \\ E_{(0)} &= \frac{1}{2} diag \left\{ \tilde{\pi}_{(0)}^T P_{\tilde{\pi}_{(0)}} f''(\tilde{y}_{i_{(0)}})\tilde{\nu}_{i_{(0)}} \right\}_{i=1}^{k-1}. \end{aligned}$$

Соотношение $\det J_{(1)} \neq 0$ можно проверить следующим образом. Матрица $P_{\tilde{\pi}_{(0)}} H_{(0)}$ имеет полный ранг в силу тех же аргументов, что и в доказательстве леммы 6.1. И так же, как в доказательстве этой леммы, мы можем проверить, что необходимое и достаточное условие равенства $\det J_{(1)} = 0$ не выполняется. Лемма доказана.□

Для примера найдем матрицу $J_{(1)}$ в случае $m = 4$.

$$J_{(1)} = \begin{pmatrix} M_{(1)} - (\lambda Z_*)_{(1)} & P_{\tilde{\pi}_{(0)}}(f(1) - e_1) & P_{\tilde{\pi}_{(0)}} e_2 \\ (P_{\tilde{\pi}_{(0)}}(f(1) - e_1))^T & 0 & 0 \\ (P_{\tilde{\pi}_{(0)}} e_2)^T & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Согласно теореме 5.2, имеем:

$$\tilde{p}_{0_{(0)}} = -\frac{1}{2}, \ \tilde{p}_{1_{(0)}} = 1, \ \ \tilde{q}_{0_{(0)}} = -1, \ \tilde{\nu}_{(0)} = 1, \ y_{1_{(0)}} = 1.$$

Тогда

$$P_{\tilde{\pi}_{(0)}} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{c}_{1_{(1)}} = \tilde{y}_2 \tilde{\nu}_{(0)} + y_{1_{(0)}} = 2, \quad \tilde{c}_{2_{(1)}} = \tilde{y}_2^2 \tilde{\nu}_{(0)} = 1.$$

Матрица $J_{(1)}$ будет иметь вид:

$$J_{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§7. Рекуррентное построение коэффициентов рядов

Обозначим

$$G(\tilde{\theta}, z) \frac{\tilde{\pi}^T Z_* \tilde{\pi}}{2} \frac{\partial \lambda(\tilde{\theta}, z)}{\partial \tilde{\theta}},$$

$$\theta_{<n>}(z) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\theta}_{(i)} z^i + \tilde{\theta}_{(0)}.$$

В нашем случае $G(\tilde{\theta}, z) = z\tilde{G}(\tilde{\theta}, z)$, причем, согласно лемме 6.2, $\det J_{(1)} \neq 0$, где $J_{(1)} \left. \dfrac{\partial \tilde{G}(\tilde{\theta}, z)}{\partial \tilde{\theta}} \right|_{z=0}$.

Тогда по теореме 3.1 $\tilde{\theta}_{(n)}$, $n \geq 1$ можно вычислить по формуле:

$$\tilde{\theta}_{(n)} = -\frac{1}{(n+1)!} J_{(1)}^{-1} \left. \frac{\partial^{n+1} G(\theta_{<n-1>}(z), z)}{\partial z^{n+1}} \right|_{z=0}.$$

Эту формулу можно записать по-другому:

$$\tilde{\theta}_{(n)} = -J_{(1)}^{-1} \left[G(\theta_{<n-1>}(z), z) \right]_{(n+1)}, \tag{7.1}$$

где $[G(\tilde{\theta}, z)]_{(n)}$— коэффициент при z^n в разложении функции $G(\tilde{\theta}, z)$ в ряд Тейлора.

Для примера опишем, как вычисляется вектор коэффициентов $\tilde{\theta}_{(1)}$ в случае $m = 4, k = 2$. По теореме 5.2 вектор $\tilde{\theta}_{(0)}$ имеет вид:

$$\tilde{\theta}_{(0)} = \left(-\frac{1}{2}, 1, -1, 1, 1 \right)^T.$$

Вектор $\tilde{\theta}_{(1)}$ можно вычислить по формуле

$$\tilde{\theta}_{(1)} = -J_{(1)}^{-1}\left[G(\tilde{\theta}_{(0)}, z)\right]_{(2)}.$$

Вид матрицы $J_{(1)}$ описан в конце предыдущего параграфа. Найдем $\left[G(\tilde{\theta}_{(0)}, z)\right]_{(2)}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\tilde{\pi}^T Z_* \tilde{\pi}}{2}\frac{\partial\lambda(\tilde{\theta}, z)}{\partial\tilde{\pi}}(P_{\tilde{\pi}}\tilde{c})^T - \tilde{\pi}^T Z_*\lambda,\\
&\frac{\tilde{\pi}^T Z_* \tilde{\pi}}{2}\frac{\partial\lambda(\tilde{\theta}, z)}{\partial\tilde{\nu}_2}\frac{1}{2}\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}}(f(1) - f(y_1 z))z,\\
&\frac{\tilde{\pi}^T Z_* \tilde{\pi}}{2}\frac{\partial\lambda(\tilde{\theta}, z)}{\partial y_1}\frac{1}{2}\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f'(y_1 z)(1 - \tilde{\nu}_2 z)z.
\end{aligned}$$

$\tilde{c} = f(1)\tilde{\nu}z + f(y_1 z)(1 - \tilde{\nu}z)$, $Z_* = diag\{1, z^2, z, z^3\}$, поэтому

$$\begin{aligned}
&\left[\left((P_{\tilde{\pi}}\tilde{c})^T - \tilde{\pi}^T Z_*\lambda\right)\Big|_{\tilde{\theta}=\tilde{\theta}_{(0)}}\right]_{(2)} =\\
=&P_{\tilde{\pi}_{(0)}}\left(-y_{1_{(0)}}\tilde{\nu}_{(0)} + y_{1_{(0)}}^2 e_3\right) - \tilde{\pi}_{(0)} diag\left\{\left[\lambda(\tilde{\theta}_{(0)}, z)\right]_{(2)}, \lambda_{(0)}, \lambda_{(1)}, 0\right\} =\\
=&P_{\tilde{\pi}_{(0)}}(e_3 - e_2) - \tilde{\pi}_{(0)} diag\{8, 1, -4, 0\} = (3, 1/2, -2, -1)^T,
\end{aligned}$$

так как $\lambda_{(0)} = 1$, $\lambda_{(1)} = 2\tilde{p}_{1_{(0)}}/\tilde{p}_{0_{(0)}} = -4$,

$$\begin{aligned}
\left[\lambda(\tilde{\theta}_{(0)}, z)\right]_{(2)} &\left[\frac{\tilde{\pi}_{(0)}^T P_{\tilde{\pi}_{(0)}}\left(f(1)\tilde{\nu}_{(0)}z + f(y_{1_{(0)}}z)(1 - \tilde{\nu}_{(0)}z)\right)}{\tilde{\pi}_{(0)}^T Z_*\tilde{\pi}_{(0)}}\right]_{(2)} =\\
&= \left[\frac{(1/4, 0, -1, 1)(1, 2z - z^2, z + z^2 - z^3, z + z^3 - z^4)^T}{1/4 + z + z^2 + z^3}\right]_{(2)} =\\
&= \left[(1 - 4z^2 + o(z^2))(1 - 4z - 4z^2 + 16z^2 + o(z^2))\right]_{(2)} = 8.
\end{aligned}$$

Далее

$$[G_4(\tilde{\theta}_{(0)}, z)]_{(2)} = \frac{1}{2}\tilde{\pi}_{(0)}^T P_{\tilde{\pi}_{(0)}}(-y_{1_{(0)}})e_2\frac{1}{2}(1/4, 0, -1, 1)(-e_2) = 0,$$

$$[G_5(\tilde{\theta}_{(0)}, z)]_{(2)} = \frac{1}{2}\tilde{\pi}^T_{(0)} P_{\tilde{\pi}_{(0)}}(2y_{1_{(0)}}e_3 - \tilde{\nu}_{(0)}e_2) =$$

$$= \frac{1}{2}(1/4, 0, -1, 1)(0, -1, 2, 0)^T = -1.$$

Таким образом, $\Big[G(\tilde{\theta}_{(0)}, z)\Big]_{(2)} = (3, 1/2, -2, 0, -1)^T$. Тогда

$$\tilde{\theta}_{(1)} = -\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

§8. Оценка точности разложений

Посмотрим, насколько найденный нами план ξ близок к E-оптимальному плану ξ^* при различном количестве используемых коэффициентов разложений.

Пусть $\xi_{(n)}$ — план, построенный на основе n коэффициентов разложений ($n = 0, 1, 2, \dots$), а $g_n(y)$ — многочлен, который получается из экстремального многочлена $g(y) = \dfrac{\tilde{\pi}^T P_{\tilde{\pi}} f(y)}{\tilde{\pi}^T Z_* \tilde{\pi}}$ заменой $\tilde{\pi}$ на его приближенное значение, вычисляемое с помощью первых n коэффициентов.

Согласно теореме двойственности,

$$\min_{A \in \mathcal{A}} \max_{x \in \chi} f^T(x) A f(x) \max_{\xi} \lambda_{\min}(M(\xi) = \lambda_{\min}(M(\xi^*)),$$

где $\mathcal{A}$ — класс всех неотрицательно определенных матриц A, таких, что $trA = 1$.

Следовательно, для нашего плана $\xi_{(n)}$ должно выполняться соотношение:

$$\lambda_1 = \lambda_{\min}(M(\xi_{(n)})) \le \lambda^* \le \max_{0 \le y \le 1} g_n(y) = \lambda_2.$$

Разность между $\max\limits_{y \in [0,1]} g_n(y)$ и $\lambda_{\min}(M(\xi_{(n)}))$ и показывает точность наших вычислений.

В следующей главе приведены таблицы значений λ_1 и λ_2 при различном количестве используемых коэффициентов разложений для некоторых значений z.