§ 3. Построение локально D-оптимальных планов с помощью алгебраического подхода

1) Постановка задачи

Рассмотрим дробно-рациональные модели вида

$$\eta(x, \Theta) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\theta_{2i-1}}{x + \theta_{2i}}. \qquad (1)$$

Пусть $\mathfrak{X} = [c, d]$ — множество планирования, $\theta_{i+k} > c$, $i = 1, \dots, k$.

Задача заключается в построении локально D-оптимальных планов.

Мы уже рассматривали случай $k = 1$. В случае $k = 2$ при достаточно больших d мы получим полное аналитическое решение задачи, а в общем случае — уравнение, которое позволяет исследовать поведение планов и находить их специальными численными методами.

Заменой переменных $\tilde{x} = x - c$ и сдвигом параметров $\tilde{\theta}_{2i} = \theta_{2i} + c$, $\tilde{\theta}_{2i-1} = \theta_{2i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$, $\tilde{d} = d - c$, модель приводится к виду

$$\eta(\tilde{x}, \tilde{\Theta}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\tilde{\theta}_{2i-1}}{\tilde{\theta}_{2i} + \tilde{x}}, \quad \tilde{x} \in [0, \tilde{d}].$$

В дальнейшем волну будем опускать, т.е. без ограничения общности будем считать, что $\mathfrak{X} = [0, d]$.

Так как локально D-оптимальный план не зависит от линейно входящих параметров θ_{2i-1}, $i=1,2,..,k$, положим $\theta_{2i-1}=-1$, $i=1,\dots,k$ и обозначим

$$f_1(x)=\frac{\partial \eta(x,\Theta)}{\partial\theta_1}=\frac{1}{x+\theta_2},\quad f_2(x)=\frac{\partial \eta(x,\Theta)}{\partial\theta_2}=\frac{1}{(x+\theta_2)^2},\dots,$$

$$f_{2k-1}(x)=\frac{\partial \eta(x,\Theta)}{\partial\theta_{2k-1}}=\frac{1}{x+\theta_{2k}},\quad f_{2k}(x)=\frac{\partial \eta(x,\Theta)}{\partial\theta_{2k}}=\frac{1}{(x+\theta_{2k})^2}.$$

Пусть величины $\theta_2,\theta_4,\dots,\theta_{2k}$ фиксированы. Как мы ранее обсуждали, локально D-оптимальный план для модели (1) совпадает с D-оптимальным планом для линейной по параметрам модели

$$\sum_{i=1}^{2k}\beta_i f_i(x), \qquad (2)$$

где $\beta_1,\dots,\beta_{2k}$ – оцениваемые параметры.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Для модели в виде суммы двух простейших дробей ($k=2$) на интервале $[0,d]$ любой локально D-оптимальный план имеет четыре опорные точки и одинаковые весовые коэффициенты (для любых фиксированных $\theta_2,\dots,\theta_{2k}$ такой план определяется единственным образом). Для достаточно больших интервалов, а именно при

$$d\geqslant\frac{\sqrt{\theta_2\theta_4}}{2}\left(-\frac{\bar\lambda}{2}-1+\sqrt{\left(\frac{\bar\lambda}{2}+1\right)^2-4}\right),$$

где $\bar\lambda=-(\theta_2+\theta_4+3)-\sqrt{(\theta_2+\theta_4+3)^2+24}$,

точки плана равны

$$x_1^*=0,\quad x_{2,4}^*=\frac{\sqrt{\theta_2\theta_4}}{2}\left(-\frac{\bar\lambda}{2}-1\mp\sqrt{\left(\frac{\bar\lambda}{2}+1\right)^2-4}\right).$$

Доказательство этой теоремы потребует ряда промежуточных результатов, большинство из которых справедливо для модели (1) при произвольном k.

2) Число опорных точек в локально D-оптимальном плане

Лемма 3.2. Для модели в виде суммы простейших дробей, задаваемой формулой (1) при произвольном $k = 1, 2, \ldots$ число опорных точек в локально D-оптимальном плане равно числу оцениваемых параметров модели ($2k$).

Доказательство леммы 3.2.

Пусть $\xi = \begin{pmatrix} x_1^* & \ldots & x_n^* \\ \omega_1^* & \ldots & \omega_n^* \end{pmatrix}$ — локально D-оптимальный план для модели (1).

Будем считать, без ограничения общности, что точки перенумерованы в порядке возрастания

$$0 \le x_1^* < x_2^* < \ldots < x_n^* \le d.$$

Этот план является D-оптимальным для модели (2), что следует из записи информационной матрицы.

Пусть $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{2k}(x))^T$. По теореме эквивалентности Кифера-Вольфовица имеем

$$f^T(x) M^{-1}(\xi) f(x) \le 2k, \quad x \in [0, d],$$

$$f^T(x_i^*) M^{-1}(\xi) f(x_i^*) = 2k.$$

Обозначим

$$g(x) = f^T(x) M^{-1}(\xi) f(x) \cdot Q^4(x) - 2k\, Q^4(x),$$

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (x + \theta_{2i}).$$

Прямое вычисление показывает (т.к. элементы $f(x)$ есть дроби вида $1/(x+\theta_{2i})$, $1/(x+\theta_{2i})^2$), что $g(x)$ есть многочлен степени $4k$.

Этот многочлен имеет нули второй кратности в точках x_i^*, $i = 2, \ldots, 2k-1$ и нули не менее первой кратности в точках x_1^* и x_n^*.

Заметим, что $n \geq 2k$, иначе $\det M(\xi) = 0$ по теореме об информационных матрицах.

С другой стороны, если $n \geq 2k+1$, то число нулей $g(x)$ с учетом их кратности $\geq 2(2k-1) + 2 = 4k$.

Кроме того, если $x_n^* = d$ и x_n^* — нуль кратности 1, то $g(d+\varepsilon) > 0$ для достаточно малых ε, а при $x \to \infty$ $g(x) \approx -2k x^{4k}$. Следовательно, есть по меньшей мере еще один корень функции $g(x)$ на интервале (d, ∞).

Таким образом, $g(x)$ имеет не менее $4k+1$ нулей с учетом их кратности, что невозможно, так как $g(x)$ — многочлен степени $4k$.

Полученное противоречие доказывает, что $n = 2k$. Лемма 3.2 доказана

3) Формула для определителя

В силу леммы 3.2 для оптимального плана

$$\det M(\xi) = \det\left(F^T W F\right) = (\det F)^2 \prod_{i=1}^{2k} \omega_i^*,$$

~~[illegible]~~ $F = \left(f_i(x_j^*)\right)_{i,j=1}^{2k}$.

Отсюда получаем $\omega_i^* = \frac{1}{2k}$ в силу неравенства

$$\prod_{i=1}^{n} \omega_i \leq \left(\frac{\sum_1^n \omega_i}{n}\right)^n.$$

Задача сводится к максимизации квадрата определителя $(\det F)^2$.

Рассмотрим сначала матрицу более простой структуры

$$B = \left(\frac{1}{x_i + b_j} \right)_{i,j=1}^{2k}.$$

Лемма 3.3. Для произвольных вещественных $x_1, \dots, x_{2k}, b_1, \dots, b_{2k}$

$$\det B = \frac{\prod\limits_{j>i} (x_j - x_i) \prod\limits_{j>i} (b_j - b_i)}{\prod\limits_{i} \prod\limits_{j} (x_i + b_j)}.$$

Доказательство леммы 3.3.

Умножим каждую строку $\frac{1}{x_i + b_1}, \dots, \frac{1}{x_i + b_{2k}}$ на $\prod\limits_{j=1}^{2k} (x_i + b_j)$, $i = 1, 2, \dots, 2k$ и обозначим

$$B_1 = \left(\prod_{i=1}^{2k} \prod_{j=1}^{2k} (x_i + b_j) \right)^{-1} \det B =$$

$$= \det \left(\prod_{j \neq 1} (x_i - b_j), \prod_{j \neq 2} (x_i - b_j), \dots, \prod_{j \neq 2k} (x_i - b_j) \right)_{i=1}^{2k}.$$

Вычтем первый столбец из остальных и получим

$$B_1 = \det \left(\prod_{j \neq 1} (x_i - b_j), \prod_{j \neq 1,2} (x_i - b_j)(b_2 - b_1), \dots, \prod_{j \neq 1, 2k} (x_i - b_j)(b_{2k} - b_1) \right)_{i=1}^{2k}$$

$$= \prod_{j=2}^{2k} (b_j - b_1) \det \left(\prod_{j \neq 1} (x_i - b_j), \prod_{j \neq 1,2} (x_i - b_j), \dots, \prod_{j \neq 1, 2k} (x_i - b_j) \right)_{i=1}^{2k}.$$

Далее вычтем второй столбец из третьего, …, 2k-го, затем третий столбец из четвёртого, …, 2k-го и т.д., получим

$$B_1 = \prod_{j>i} (b_j - b_i) \times$$

$$\times \det \left(\prod_{j \neq 1} (x_i - b_j), \prod_{j \neq 1,2} (x_i - b_1), \dots, (x_i - b_{2k}), 1 \right)_{i=1}^{2k}$$

Далее вычтем последний столбец, умноженный на $(-b_{2k})$ из предпоследнего и т.д. и получим

$$B_1 = \prod_{j>i} (b_j - b_i) \det \left(x_i^{2k-1}, x_i^{2k-2}, \dots, x_i, 1 \right)_{i=1}^{2k} =$$

$$= \prod_{j>i} (b_j - b_i) \prod_{j>i} (x_j - x_i)$$

в силу формулы для определителя Вандермонда:

$$\det(x_i^{j-1})_{i,j=1}^{2k} = \prod_{j>i}(x_j - x_i).$$

Теперь формулу для определителя F можно получить предельным переходом. Положим

$b_1 = \theta_2,\ b_2 = \theta_2 + \Delta, \ldots, b_{2k-1} = \theta_{2k},\ b_{2k} = \theta_{2k} + \Delta.$

Заметим, что

$$\frac{1}{(x+\theta_{2i})^2} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{x+\theta_{2i}+\Delta} - \frac{1}{x+\theta_{2i}}\right),$$

$$\det F = \det\left(\frac{1}{x_i+\theta_2}, \frac{1}{(x_i+\theta_2)^2}, \ldots, \frac{1}{x_i+\theta_{2k}}, \frac{1}{(x_i+\theta_{2k})^2}\right)_{i=1}^{2k} =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta^k} \det\left(\frac{1}{x_i+\theta_2}, \frac{1}{x_i+\theta_2+\Delta} - \frac{1}{x_i+\theta_2}, \ldots, \frac{1}{x_i+\theta_{2k}}, \frac{1}{x_i+\theta_{2k}+\Delta} - \frac{1}{x_i+\theta_{2k}}\right)_{i=1}^{2k}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta^k} \det\left(\frac{1}{x_i+b_j}\right)_{i,j=1}^{2k} = \frac{\prod_{j>i}(\theta_{2j}-\theta_{2i})\prod_{j>i}(x_j-x_i)}{\prod_i\prod_j (x_i+\theta_{2j})^2}.$$

Таким образом, справедлива

Лемма 3.4. Для любых ~~вещественных~~ $\theta_2, \ldots, \theta_{2k}, x_1, \ldots, x_{2k}$

$$\det F = \frac{\prod_{j>i}(\theta_{2j}-\theta_{2i})\prod_{j>i}(x_j-x_i)}{\prod_{i=1}^{2k}\prod_{j=1}^{k}(x_i+\theta_{2j})^2},$$

$$\left(F = \det\left(\frac{1}{x_i+\theta_2}, \frac{1}{(x_i+\theta_2)^2}, \ldots, \frac{1}{x_i+\theta_{2k}}, \frac{1}{(x_i+\theta_{2k})^2}\right)_{i=1}^{2k}\right).$$

4) Дифференциальное уравнение и его алгебраическая форма

Лемма 3.5. Пусть $0 \le t_1 < \ldots < t_{2k}$ — опорные точки локально D-оптимального плана для модели (1), $c=0$. Тогда $t_1 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию из леммы 3.4. Если из всех точек x_i вычесть $\Delta > 0$, то выражение в числителе не изменится, а выражение в знаменателе уменьшится.

Так как $t_1 \ge 0$, то $t_1 = 0$, иначе можно вычесть t_1 из всех точек и увеличить $\det F$ (что противоречит максимальности $\det F$ для точек локально D-оптимального плана).

Лемма 3.5 доказана.

Итак, задача нахождения оптимального плана сводится к максимизации величины

$$\frac{\prod\limits_{2k \ge j > i \ge 2} (x_j - x_i) \prod\limits_{i=2}^{2k} x_i}{\prod\limits_{i=1}^{2k} \prod\limits_{j=1}^{k} (x_i + \theta_{2j})^2} \qquad (3)$$

по $x_2, \ldots, x_{2k}$.

Обозначим через $\psi(t)$ многочлен

$$\psi(t) = \prod_{i=2}^{2k} (t - t_i),$$

а коэффициенты этого многочлена обозначим через $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{2k-1}$:

$$\psi(t) = \sum_{i=0}^{2k-1} \psi_i x^{2k-i-1}, \quad \psi_0 = 1.$$

Рассмотрим случай, когда $t_{2k} < d$ (случай $t_{2k} = d$ можно рассмотреть аналогичным образом).

Продифференцируем функцию (3) по x_j, $i=2,\dots,2k$. В силу необходимого условия экстремума должны обращаться в нуль при $x_i=t_i$, $i=2,\dots,2k$.

Следовательно, получаем

$$\frac{1}{x_i} + \sum_{j\neq i} \frac{1}{x_j - x_i} - 2\,\frac{Q'(x_i)}{Q(x_i)} = 0,\quad i=2,\dots,2k,$$

где $Q(x) = \prod_{j=1}^{k} (x+\theta_{2j})$, $x_i = t_i$, $i=2,\dots,2k$.

Используя формулу

$$\frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \frac{1}{x_i - x_j} = \left.\frac{\Psi''(x)}{\Psi'(x)}\right|_{x=x_i},$$

которую мы рассматривали при изучении полиномиальной регрессионной модели (Мелас, Шпилев, 2014), получаем, что функция

$$h(x) = \Psi''(x)\,x\,Q(x) + 2\Psi'(x)\left[Q(x) - 2xQ'(x)\right]$$

обращается в нуль при $t = t_2,\dots,t_{2k}$.

Следовательно, эта функция имеет вид

$$\Psi(x)\cdot\lambda(x),$$

где $\lambda(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i x^i$, так как $h(x)$ является многочленом степени $(2k-2)+k+1=3k-1$.

Итак, мы получили уравнение

$$\psi''(x)\, x\, Q(x) + 2\psi'(x)\left[Q(x) - x\, Q'(x)\right] = \lambda(x)\, \psi(x), \qquad (4)$$

где $Q(x) = \prod_{j=1}^{k} (x + \theta_{2j})$.

Преобразуем его в алгебраическую форму

Лемма 3.6. Пусть $\varphi(x) = (x^n, x^{n-1}, \dots, 1)^T$. Существует единственная матрица $A_1 = (a_{ij})_{i=1,\, j=1}^{n+1\ \ n}$, такая что

$$\varphi^T(x) A_1 = (\varphi'(x))^T. \qquad (5)$$

Доказательство. Из (5) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}\, x^{n+1-i} = (n+1-j)\, x^{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда вытекает, что

$$a_{i\,i-1} = n+2-i, \quad i = 2, \dots, n+1,$$

$$a_{ij} = 0, \quad (i,j) \neq (i, i-1), \quad i = 2, \dots, n+1.$$

Таким образом, матрица A существует и определена однозначно.

Лемма 3.6 доказана.

Аналогичным образом, существует единственная матрица A_2 такая, что

$$\varphi^T(x)\, A_2 = (\varphi''(x))^T.$$

Пусть $\lambda(x) = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i x^{s-i}$, $\tilde{\varphi}(x) = (x^{s+n}, x^{s+n-1}, \dots, 1)^T$.
Существует единственная матрица C такая, что

$$\tilde{\varphi}^T(x)\, C_\lambda = \lambda(x)\, \varphi^T(x),$$

$\varphi(x) = (x^n, x^{n-1}, \dots, 1)^T$. Так же, как в доказательстве леммы 3.6, можно проверить, что

$$C_\lambda = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i E_i,$$

где $E_0^T = (I_{n+1}\ O_s)$, $E_1^T = (O_1\ I_{n+1}\ O_{s-1}), \dots,$
$E_s^T = (O_s\ I_{n+1})$,
где I_{n+1} — единичная матрица размера $(n+1)\times(n+1)$,
O_j — нулевая матрица размера $(n+1)\times j$, $j = 1, 2, \dots, s$.

Теперь уравнение (4) можно переписать в алгебраической форме

$$\varphi^T(x)\, A\, \psi = \varphi^T(x)\, C_\lambda\, \psi, \tag{6}$$

где $\varphi(x) = (x^{n+k-1}, \dots, 1)$, $\lambda(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i x^{k-1-i}$

В случае $k=2$ и достаточно больших промежутков (таких, что $t_n < d$) это уравнение удается решить в явном виде.

5) Решение уравнения (6) для случая $k=2$.

Рассмотрим модель (1) при $k=2$. Для нахождения оптимального плана нужно максимизировать величину

$$\frac{\prod_{4\geq j>i\geq 2}(x_j - x_i)\prod_{i=2}^{4} x_i}{Q^2(x)},$$

$$Q(x) = (x+\theta_2)(x+\theta_4) = x^2 + ax + b,$$

$$a = \theta_2 + \theta_4,\ b = \theta_2\theta_4.$$

Обозначим $\tilde{x} = x/\sqrt{b}$, $\tilde{a} = a/\sqrt{b}$. Тогда

$$Q(x) = b(\tilde{x}^2 + \tilde{a}\tilde{x} + 1).$$

Поэтому достаточно решить уравнение (6) для случая $b=1$. Знак волны будем опускать.

В случае $k=2$, $b=1$ уравнение (6) принимает вид

$$(6x + 2\psi_1)x(x^2 + ax + 1) +$$

$$+ 2(3x^2 + 2\psi_1 x + \psi_2)(-3x^2 - ax + 1) =$$

$$= (\lambda_0 x + \lambda_1)(x^3 + \psi_1 x^2 + \psi_2 x + \psi_3).$$

Приводя подобные члены в левой части, получим

$$-12x^4 - 10\psi_1 x^3 + (12 - 2a\psi_1 - 6\psi_2)x^2 +$$

$$+ (6\psi_1 - 2a\psi_2)x + 2\psi_2 =$$

$$(x^4\; x^3\; x^2\; x\; 1)\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 12 & -2a & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}.$$

А в правой части имеем

$$\lambda(x)\,\psi(x) = (x^4\, x^3\, x^2\, x\; 1)\, C_\lambda\, \Psi, \quad \Psi = (1, \psi_1, \psi_2, \psi_3)^T,$$

$$C_\lambda = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда старший коэффициент $\lambda_0 = -12$, а для коэффициента λ_1 получаем уравнение

$$(A - \lambda_0 E_0 - \lambda_1 E_1)\Psi = 0.$$

Таким образом λ_1 является корнем уравнения

$$\det(B - \lambda I) = 0,$$

где B — квадратная матрица, получаемая из $A - \lambda_0 E_0$ вычеркиванием первой строки (которая состоит из нулей):

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 0 & 0 \\ 12 & -2a-\lambda & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2a-\lambda & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы равен

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 12 & -2a-\lambda \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} -2a-\lambda & 12 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} -$$

$$- \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 6 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda(2a+\lambda)-24)^2 - 36\lambda^2.$$

Получаем уравнение

$$(\lambda^2 + (2a-6)\lambda - 24)(\lambda^2 + (2a+6) - 24) = 0.$$

Отсюда возможные значения λ_1 равны (7)

$$-(a+3) \pm \sqrt{(a+3)^2+24},$$

$$-(a-3) \pm \sqrt{(a-3)^2+24}.$$

Заметим, что вектор ψ является решением уравнения

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & -2a & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2a & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}.$$

Для нас представляют интерес только такие векторы ψ, которые соответствуют многочлену с положительными корнями.

Отсюда получаем

$$\psi_1 < 0,\ \psi_2 > 0,\ \psi_3 < 0$$

(т.к. $\psi_1 = -t_2 - t_3 - t_4$, $\psi_2 = t_2 t_3 + t_3 t_4 + t_2 t_4$, $\psi_3 = -t_2 t_3 t_4$).

Теперь из первого уравнения имеем

$$2\psi_1 = \lambda_1, \quad \psi_1 = \frac{\lambda_1}{2}.$$

Из второго уравнения

$$12 - 2a\psi_1 + 6\psi_2 = \lambda_1\psi_1$$

подставляя сюда $\psi_1 = \frac{\lambda_1}{2}$ имеем

$$12 - a\lambda_1 + 6\psi_2 = \frac{\lambda_1^2}{2}$$

или, умножая на 2 и перенося в правую часть,

$$\lambda_1^2 + 2a\lambda_1 - 6\psi_2 - 24 = 0$$

Так как

$$\lambda_1^2 + 2a\lambda_1 \pm 6\lambda_1 - 24 = 0$$

из уравнения (7), а ψ_2 должно быть отрицательно, получаем $\lambda_1 < 0$, $\psi_2 = -\lambda_1/2$.

Из последнего уравнения получаем

$$2\psi_2 = \lambda_1\psi_3.$$

Таким образом, $\psi_3 = -1$.

Так как $\sqrt{(a+3)^2+24} > |a+3|$,

а λ_1 должно быть отрицательным и быть решением уравнения

$$\lambda_1^2 + 2a\lambda_1 + 6\lambda_1 - 24 = 0,$$

то единственное возможное значение

$$\lambda_1 = -(a+3) - \sqrt{(a+3)^2+24}.$$

Теперь получаем

$$\psi(x) = x^3 + \frac{\lambda_1}{2}x^2 - \frac{\lambda_1}{2} - 1 =$$

$$= (x-1)\left(x^2 + x\left(1+\frac{\lambda}{2}\right) + 1\right).$$

Точки оптимального плана являются корнями $\psi(x)$ и следовательно

$$t_{2,1} = \left(-\left(1+\frac{\lambda}{2}\right) \mp \sqrt{\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 4}\right)\frac{1}{2}, \quad t_3 = 1$$

Таким образом, теорема 3.1 доказана.

в) Нахождение решения в специальном случае

Пусть $k=2$, $\theta_2=\theta_4=1$. В этом случае модель (1) не имеет смысла, но ее можно рассматривать как предельный вариант.

Решение задачи максимизации определителя (без учета множителя $(\theta_4-\theta_2)$) в этом случае принимает вид (т.к. $a=\theta_2+\theta_4=2$)

$$\lambda = -(a+3)-\sqrt{(a+3)^2+24} = -5-7=-12$$

$$t_{2,4} = \left(-\left(1+\frac{\lambda}{2}\right) \mp \sqrt{\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^2-4}\right)\Big/2 = \frac{5\mp\sqrt{21}}{2}.$$

Это решение можно обобщить на случай произвольного $k>2$.

Теорема 3.2. В случае $(\theta_2,\dots,\theta_{2k})\to(1,\dots,1)$ опорные точки локально D-оптимального плана стремятся к корням уравнения

$$\psi''(x)(x+1)x + 2\psi'(x)(x(1-2k)+1) = \lambda_0\psi(x),$$

$$\lambda_0 = (2k-1)(2k-2)+2(2k-1)(1-2k)).$$

Коэффициенты этого уравнения могут быть найдены по рекуррентным формулам