Карлин, Стадден

Чебышёвские системы с применением в анализе и статистике 1976

часть 1, 2

Мелас (пособие по функциональному подходу)

---

ivs.boku.ac.at

Eight Interaction

Workshop on Simulation

E-оптимальные планы экспериментов (Мелас

ЭКЗ

Дополнительные главы теории оптимального планирования эксперимента

Глава 1. Нелинейный регрессионный анализ

E – мат.ож.

D – дисп.

§ 1. Уравнение регрессии

$$y_j = \eta(x;\theta) + \varepsilon_j, \qquad j = 1, 2, \dots N$$

$y_1, \dots, y_N$ — результаты наблюдений

ε_j — сл. ошибки $\qquad E\varepsilon\varepsilon^T = \sigma^2 I$

$E\varepsilon = 0$

$\eta(x;\theta)$ — функция регрессии

– в явном виде $\qquad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$

– как решение системы уравнений

Основные задачи:
- оценивание параметров
- дискриминация модели

какая из?

$$\eta = \eta_1 (x, \theta_1)$$

$$\eta = \eta_2 (x, \theta_2)$$

$$f_i(x, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \eta(x, \theta) \qquad i = 1, \dots, n.$$

$f_i(x, \theta)$ не зависит от θ_i — линейно входящий парам

$f_i(x, \theta)$ зависит от θ_i — нелинейно входящий параметр

Если имеется хотя бы один нелинейно входящий параметр, то и η нел. нелин.

$\xi_N = (x_1, \dots, x_n)$ — точный план эксперимента

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ \mu_1, \dots, \mu_n \end{pmatrix}$$ — непрерывный (приближённый) план эксперимента

дискретно-вероятностный

$x_1, \dots, x_n$ ~ $x_1 \sim \mu_1 N, \dots, x_n \sim \mu_n N$

измерения

§2. Примеры нелинейных моделей

1. Модель Михаэлиса — Ментен

$$\eta(x, \theta) = \frac{\theta_1 x}{x + \theta_2}$$

$$\eta(x, \theta) = \frac{\theta_1 x^h}{x^h + \theta_2}$$

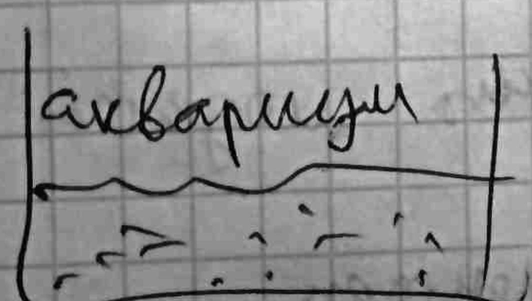
2. Модель Моно (Monod)

$$\eta(x) = \eta(x, \Theta), \qquad \Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)^T$$

$$\eta'(x) = \mu(x)\,\eta(x)$$

$$\mu(x) = \frac{\Theta_1 s(x)}{s(x) + \Theta_2}$$

$$s(x) - S_0 = (\eta(x) - \eta_0)\,\Theta_3$$



$s(x)$ — питат. субстрат

$\eta(x)$ — масса микроорг.

развитие среды в аквариуме

3. Экспоненциальные модели

$$\eta(x) = \begin{cases} \Theta_1 e^{-\Theta_2 x} \\ \Theta_1 e^{-\Theta_2 x} + \Theta_3 e^{-\Theta_4 x} \\ \ldots \end{cases}$$

— решения системы линейных диф. уравнений

$$\eta(x) = \alpha + \gamma x + \beta(e^{-\beta x} + 1) + \varepsilon$$

([illegible])

§ 3. Асимптотические свойства оценок метода наименьших квадратов (МНК)

θ^* — истинное значение

$\theta^* \in \Omega$ — замкнутому ограниченному множеству в $\mathbb{R}^m$.

1) $\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \eta(x, \theta)$, $\theta \in \Omega$

существуют

2) последовательность планов слабо сходится

$\xi_N \longrightarrow \xi$

$g(x)$

$$\int g(x)\, \xi_N(dx) \longrightarrow \int g(x)\, \xi(dx)$$

3) $\int \left(\eta(x, \theta) - \eta(x, \theta^*)\right) \xi(dx) = 0$

совпадают во всех точках

$\Longleftrightarrow \theta^* = \theta$.

$M(\xi, \theta) = \int f(x, \theta)\, f^T(x, t)\, \xi(dx)$;

$f(x, \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} \eta(x, \theta)$ (вектор производной)

(информационная матрица плана ξ)
(матрица информации)

4) предположим, что $M(\xi, \theta^*)$ обратима
(в точке истинного значения)

Теорема. $\hat{\theta}_N - \theta^*$

Последовательность значений $\hat{\theta}_N - \theta^*$, где θ_N — оценка метода МНК, полученная по результатам экспериментов в точках плана ξ_N, обладает следующими свойствами:

последовательность

$$(\hat{\theta}_N - \theta^*)\cdot\sqrt{N}$$

сходится к $\mathcal{N}(0,\ \sigma^2 M^{-1}(\xi, \theta^*))$

$$\eta(x,\theta) \approx \eta(x,\theta^0) + \frac{\partial \eta(x,\theta^0)}{\partial \theta}(\theta - \theta^0) + \dots$$

Д-во: техническое

$$\tilde{y}_i = y_i - \eta(x,\theta^0)^{+\varepsilon} = \beta^T f(x,\theta) + \varepsilon$$

<u>Предложение:</u> информационная матрица нелинейной регрессионной модели совпадает с информационной матрицей линейной модели, которая является линеаризацией модели в окрестности истинного значения вектора параметра.

§4. Локально оптимальные планы эксперимента

$\theta^0 \approx \theta^*$ (1953)

начальное приближение Чернов

принимается за истинное и строится оптимальный план

Построить оптимальный план

Оценить

их зависимости от параметров

Локальный D-оптимальный план

$$\det M(\xi, \theta^*)$$

- минимаксный подход к выбору начального приближения

$$\max_{\xi} \min_{\theta \in \Omega} \det M(\xi, \theta)$$

- максиминно-эффективный подход

$$\max_{\xi} \min_{\theta \in \Omega} \frac{\left(\det M(\xi, \theta)\right)^{1/n}}{\left(\det M(\xi(\theta), \theta)\right)^{1/2}} = \xi^*$$

---

1. Чебышёвские системы
2. Функциональный подход
3. Численные методы

Глава 2. Чебышёвские системы

§ 1. Степенные функции как чебышёвские системы

1. загол.
2. форм. постановка задачи
3. факты
4. идеи
5. техн. д-во

Определитель Вандермонда:

$$\left(f_i(x_j)\right)^m = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdot & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdot & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdot & x_3^{n-1} \\ \cdots & & \cdot & \cdots \\ 1 & x_m & \cdot & x_m^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{i<j} (x_i - x_j) \neq 0$$

$f_1(x), \ldots, f_n(x)$ $\quad x \in [a, b]$ называется системой Чебышёва, если $\forall\ a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$

$$\left(\det f_i(x_i)\right) > 0$$

$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ не более $n-1$ раз обращается в ноль

$$\det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_m(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_{n-1}) & \dots & f_m(x_{n-1}) \\ f_1(x) & \dots & f_m(x) \end{pmatrix}$$

разложение по последней строчке:

$$\det(\dots) = \sum a_i f_i(x)$$

(обобщённый многочлен)

$x_1, \dots, x_{m-1}, x^* = x_m$

обращается в ноль не более $m-1$ раз

Многочлен Чебышёва 1^го рода

$T_n(x) = \cos(n \arccos t)$ $\quad T_n(\cos t) = \cos(nt)$

$x = \cos t$

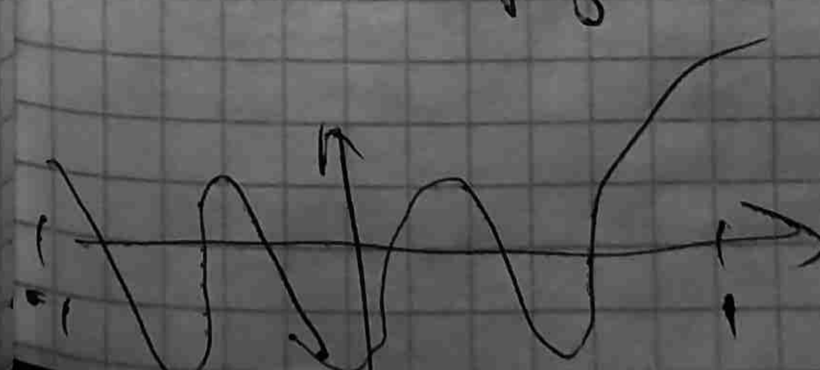
$|T_n(x)| \leq 1$

$x_1 = -1, \quad x_{n+1} = 1$

$x_i = \cos\left[\frac{2\pi}{n}(i-1)\right]$

$T_n(x)$ достигает максимального значения (по мод) в $n+1$ точке

$T_n(x)$ — единственный многочлен степени n, достигающий своего максимального (по модулю) значения $n+1$ раз



Существует единственный обобщённый многочлен, достигающий ...

чебышевская альтернанса (в этих точках происходит перемена знака)

$$M(\overset{*}{\xi}) = \int f_i(x) \cdot f_i(dx)\, \xi^*(dx) \;\; ?$$

$$\int_{-1}^{1} x^i \xi^*(dx) = \int_{-1}^{1} x^i \xi^*(dx)$$

(вводим другую меру)

$$F = \left\{ c; \quad c_i = \int_{-1}^{1} x^i \xi(dx), \;\; \xi \right\}$$

(всевозможные вероятностные меры)

Выпуклая оболочка F

$\mathcal{L}(F)$

построим в точке c опорную выпуклую плоскость

$$\sum a_i f_i(x) \geq 0$$

$= 0$ в точках ... меры ξ

$\operatorname{supp} \xi$

Всегда существует такая мера, в которой сосредоточено не более m ~~[illegible]~~ опорных точек

Интеграл

$$\int_{-1}^{1} x^i \xi^*(dx)$$

можно вычислить не более, чем по n точкам

$\Longrightarrow$

то же справедливо и для систем Чебышёва

§2. Определение и примеры чебышёвских систем

<u>Опр 1.</u> $u_0, \dots, u_n$ заданы и непрерывны на $[a, b]$. Система называется системой функций Чебышёва, если

$\forall \; a \le t_1 < t_2 < \dots < t_n \le b$

определители

$$U\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u_0(t_1) & \dots & u_0(t_n) \\ u_1(t_1) & \dots & u_1(t_n) \\ \dots & & \dots \\ u_n(t_1) & \dots & u_n(t_n) \end{pmatrix} > 0$$

строго положительны

(либо строго отрицательны — умножением любой функции на -1)

Обобщённым многочленом называется

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i u_i(t) \; ; \qquad a_0, \dots, a_n$$

(далее используются обобщённые многочлены)

Многочлен нетривиален, если

$\sum_{i=0}^{n} a_i^2 \neq 0$, $u(t) \not\equiv 0$

Опр. 2. Система функций называется системой Чебышёва, если любой нетривиальный обобщённый многочлен имеет не более n нулей.

Теорема 2.1.

1. Если $\{u_i\}_{i=0}^{n}$ образуют систему Чебышёва, то любой нетривиальный многочлен имеет не более, чем n нулей

$u(t)$ $\quad Z(u) \le n$

2. Если $\{u_i\}_{i=0}^{n}$ $\quad [a, b]$ и

$u(t)$ $\quad Z(u) \le n$,

то эта система функций является чебышёвской, либо может в неё переведена умножением на -1.

$u(t) = \sum a_i u_i(t)$

$u(t_0), \dots, u(t_n)$

$U a = \overline{u}$

матрица — вектор

где $U = \begin{pmatrix} u_0(t_0) & \dots & u_0(t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n(t_0) & \dots & u_n(t_n) \end{pmatrix}$

<u>Д-во</u>: от противного

1. пусть $Z(u) \geq n+1$

первые n нулей: $t_0, \dots, t_n$

Тогда $U a = 0$

[СЛУ $Ax = 0$ имеет нетривиальное решение $\Leftrightarrow$ A вырождена

$|U| = 0$, что противоречит определению

След-но, $Z(u) \le n$

2. допустим, $\{u_i\}_{i=0}^{n}$ не является системой Чебышёва и

$$Ua = 0$$

и существует многочлен, у которого более n нулей. Противоречие.

<u>Пример 1.</u> Экспоненциальная регрессия

$$\eta(t, \Theta) = \sum_{i=1}^{n} b_i e^{\lambda_i t}$$

$b_1, \ldots, b_k$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$

$$\frac{\partial \eta(t, \Theta)}{\partial \lambda_i}$$ зависит от λ_i

Покажем, что производные образуют систему функций Чебышёва на любом интервале

$$\det\left(e^{\lambda_1 t_j}, t b_1 e^{\lambda_1 t_j}, \ldots, e^{\lambda_k t_j}, t b_k e^{\lambda_k t_j}\right)_{j=1}^{k}$$

$$\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}\} \text{ —}$$

система функций Чебышёва на $[a, b]$.

От противного:

тогда $\exists \sum_{i=1}^{k} a_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^{k} a_{i+k} t e^{\lambda_i t}$,

который обращается в 0 в $2k$ точках.

Будем считать $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$

$$a_1 e^{\lambda_1 t}\left[1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i}{a_1} e^{(\lambda_i - \lambda_1)t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_{i+k}}{a_1} t e^{(\lambda_i - \lambda_1)t}\right]$$

обращается в нуль в $2k$ точках $\Longleftrightarrow$ обращается в нуль

$$\varphi(t) = 1 + \sum \frac{a_i}{a_1} e^{(\lambda_i - \lambda_1)t} + \sum \frac{a_{i+k}}{a_1} t e^{(\lambda_i - \lambda_1)t}$$

По теореме Ролля

в т. c и d $\quad \varphi(t) = 0$

$\exists\ c < \hat{t} < d \quad \varphi'(\hat{t}) = 0$

$$\varphi'(t) = (2k-1)\ (\text{сист. } \varphi(t))$$

$\vdots$

$e^{\tilde\lambda t}$ обращается в 0 в некоторой точке

строго положителен, но 0

— противоречие.

произвольные $u_0(t), \dots, u_n(t)$

$$F_{00}(t) = u_0'(t)$$

$\dots$

$$F_{0n}(t) = u_n'(t)$$

$$F_{11}(t) = \left(\frac{F_{01}}{F_{00}}\right)'$$

$$F_{1n}(t) = \left(\frac{F_{0n}}{F_{00}}\right)'$$

$$F_{l1} = \left(\frac{F_{l-1,l}}{F_{l-1,l-1}}\right)'$$

$$F_{ln} = \left(\frac{F_{l-1,n}}{F_{l-1,n-1}}\right)'$$

$$F_{nn} = \left(\frac{F_{n-1,n}}{F_{n-1,n-1}}\right)'$$

Теорема 2.2. $F_{ii}(t) > 0$, то система является системой функций Чебышёва.

Пример 2. Модель Михаэлиса – Ментен

$$\eta(t,\theta) = \frac{at}{t+b} \quad \text{на } [a,b],\ a>0$$

образует систему функций Чебышёва

$$u_0(t) = \frac{t}{t+b}$$

$$u_1(t) = \frac{-t}{(t+b)^2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{t_0}{t_0+b} & \frac{t_0}{(t_0+b)^2} \\ \frac{t_1}{t_1+b} & \frac{t_1}{(t_1+b)^2} \end{pmatrix}$$

показать, что

$$\frac{a_1 t}{t+b} + \frac{a_2 t}{(t+b)^2} = 0$$

имеет не более одного решения

$$\frac{t}{(t+b)^2}\underbrace{\left(a_1(t+b)+a_2\right)}_{\text{не более одного нуля}} = 0$$

$u_0^2(t),\quad u_0(t)u_1(t),\quad u_1^2(t)$

тоже образуют систему функций Чебышёва

§3. Обобщённые и слабые системы Чебышёва.

Рассмотрим $u_0(t),\ u_1(t)$.

$u_0(t) = 1$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u_1(t_1) & u_1(t_2) \end{pmatrix} > 0 \iff u_1(t_2) > u_1(t_1)$$

слабая система Чебышёва: ≥ 0 $\qquad \geq$

$u_0, \ldots, u_n$ образуют слабую систему Чебышёва на $[a,b]$, если

$$U\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix} > 0$$

Второе обобщение: $\qquad u_1'(t) > 0.$

$$U^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

$$t_0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_n$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$\tilde t_0, \tilde t_1, \dots, \tilde t_k$

$l_0 \; l_1 \quad l_k$ раз

$$\sum_{i=1}^{k} l_i = n$$

$$\tilde t_i = t_j \qquad \sum_{s=0}^{i-1} l_s \le j \le \sum_{s=0}^{i} l_s$$

$$u_0(t_i) \quad \longrightarrow \quad u_0'(t_i) \dots u_0^{(l_i-1)}(t_i)$$

$$u_n(t_i) \qquad\qquad u_n'(t_i) \dots u_n^{(l_i-1)}(t_i)$$

$$\begin{pmatrix} u_0(\tilde t_i) & \dots & u_n(\tilde t_i) \\ u_0'(\hat t_i) & \dots & u_n'(\hat t_i) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_0^{(l_i-1)}(\hat t_i) & \dots & u_n^{(l_i-1)}(\hat t_i) \end{pmatrix}$$

Если две точки совпадают $t_k = t_{k+1}$

$$\begin{pmatrix} u_0(t_k) & \dots & u_n(t_k) \\ u_0(t_{k+1}) & \dots & u_n(t_{k+1}) \end{pmatrix} \longrightarrow$$

делим $\frac{1}{t_{k+1} - t_k}$

предельный переход

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} u_0(t_k) & \dots & u_n(t_k) \\ u_0'(t_k) & \dots & u_n'(t_k) \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} u_0(\tilde t_0) & u_1(\tilde t_0) & \dots & u_n(\tilde t_0) \\ u_0'(\tilde t_0) & u_1'(\tilde t_0) & \dots & u_n'(\tilde t_0) \\ \dots & & & \\ u_0^{(l_0-1)}(\tilde t_0) & u_1^{(l_0-1)}(\tilde t_0) & \dots & u_n^{(l_0-1)}(\tilde t_0) \\ \dots & & & \\ u_0(\tilde t_k) & u_1(\tilde t_k) & \dots & u_n(\tilde t_k) \\ \dots & & & \\ u_0^{(l_k-1)}(\tilde t_k) & u_1^{(l_k-1)}(\tilde t_k) & \dots & u_k^{(l_k-1)}(\tilde t_k) \end{pmatrix}^T = U^*\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

$$U^*\begin{pmatrix} 0 & \dots & n \\ t_0 & \dots & t_n \end{pmatrix} > 0$$

число совпадений не больше, чем p

Функции $u_0(t), \dots, u_n(t)$ образуют расширенную систему Чебышёва порядка p,
если эти функции $p-1$ раз непрерывно дифференцируемы и неравенства определителей выполняются для всех наборов точек, где число совпадающих точек не больше p.

При $p = n+1$ система называется расширенной системой Чебышёва.

<u>Опр.</u> Система $p-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций называется расширенной системой Чебышёва порядка p, если произвольный

$\sum_{i=0}^{n} a_i u_i(t)$ имеет не более, чем n нулей, где кратные нули порядка p и менее засчитываются с учётом их кратности.

$$U^* a = \bar{u}$$

$$\bar{u} = \left(u(\tilde{t}_0),\ u'(t_0), \dots, u^{(k_0-1)}(\tilde{t}_0), \dots \right.$$
$$\left. u(\tilde{t}_k),\ u'(\tilde{t}_k), \dots, u^{(k_k-1)}(\tilde{t}_k) \right)^T$$

$$U^* a = 0 \iff \det(U^*) = 0$$

доказывается эквивалентность определений

$\eta(t, \theta)$ — нелинейная

$\beta^T f(t, \theta^0)$,

$f(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \eta(t, \theta)$

$u_0(t) = f_1(t)$

$\beta^T f(t)$ — линеар. модель

$\vdots$

$u_n(t) = f_{n+1}(t)$

$\boxed{\beta^T f'(t)}$ построить план, позволяющий оценить наилучшим образом

Теорема Элвинга

$f_1, \dots, f_n$ (лин. нез.) $[a, b]$

$N \le m$

точек параметров

$\exists \xi = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_N \\ \omega_1 & & \omega_N \end{pmatrix}$

для оценивания произв.

1\. $\exists \xi : N \le m$

2\. 1) $|p^T f(t)|^2 \le h^2$

2) $p^T f(t_i) = \varepsilon_i h$

$\varepsilon_i = \pm 1$

3) $p^T \sum f(t_i) \omega_i = \beta f'(x_i$

$U \gamma = f'(x)$

$U = \begin{pmatrix} u_0(t_0) & \dots & u_0(t_N) \\ \dots & \ddots & \dots \\ u_n(t_0) & \dots & u_n(t_N) \end{pmatrix}$

Пусть $u_0, \dots, u_1$ образуют расширенную систему Чебышёва порядка 2.

Тогда $N \ge m - 1 = n$

(число точек в плане)

$m \ge N$

Число точек либо m, либо $m-1$.

От противного:

пусть $\exists$ план, $N = m - 2 = n - 1$

тогда уравнение $U\nu = f'(x)$

справедливо для U, где $N = n-1$.

вектор значений $f'(x)$ является

линейной комбинацией столбцов (до него)

$$U = \begin{pmatrix} u_0(t_0)^{u_0(x)} \ldots u_0(t_N) & u_0'(x) \\ \vdots & \\ u_n(t_0)^{u_n(x)} \ldots u_n(t_N) & u_n'(x) \end{pmatrix}$$

(можно добавить)

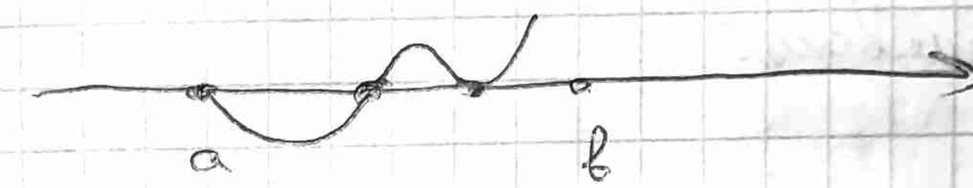
$\det U = 0$ — противоречие;

$N \geq n = m-1$.

§ 4. Теорема о числе нулей

f $\qquad Z(f)$ — число нулей f

на промежутке $[a, b]$



Ноль называется узловым, если

1) он совпадает с граничной точкой;

2) функция меняет знак, проходя через этот ноль.

$f(t_0-\varepsilon)f(t_0+\varepsilon) < 0$

Остальные узлы называются неузловыми.

Пусть $\tilde{Z}(f)$ — число нулей, где

неузловые нули засчитываются дважды.

Теорема 4.1. Если система функций

$\{u_i\}_{i=1}^{n}$ — чебышёвская на $[a, b]$,

то любой нетривиальный многочлен, где

неузловые нули засчитываются дважды, $\tilde{Z}(u) \leq n$.

И если для любого нетривиального многочлена при том, что неузловые нули засчитываются дважды, число нулей не превышает n, то эта система является Чебышёвской.

<u>Д-во.</u> от противного

$\tilde{Z}(u) \geq n+1$ (хотя бы один нуль — не узловой)

различные нули $t_1, \dots, t_k$;

$\tilde{t}_i = t_i + \varepsilon$

для узловых: $\tilde{t}_i = t_i - \varepsilon$ / содержатся внутри $[a, b]$

как минимум ~~n+1~~ точка n+2 точки?

$s_0, s_1, \dots, s_{n+1}$:

$s_0 < s_1 < \dots < s_{n+1}$

в силу $U_a = 0$

$$\begin{vmatrix} u(s_0) & \dots & u(s_{n-1}) \\ u_0(s_0) & \dots & u_0(s_{n-1}) \\ \dots & & \\ u_n(s_0) & \dots & u_n(s_{n-1}) \end{vmatrix} = 0$$

линейная комбинация нижних строк

разложим по первой строке:

$$\sum a_i u_i(s_i) = 0$$

$\operatorname{sign} a_i \overset{\text{sign}}{=} (a_{i-1}) \cdot (-1)$

$\operatorname{sign} u(s_i) \overset{\text{sign}}{=} (u)(s_{-i}) \cdot (-1)$ / чередуются в знаке

$u(s_i) = 0$, в $n+2$ точках, что невозможно

§5. Неотрицательные многочлены с заданными нулями

$\forall t_i \in (a, b)$

будет заведомо узловым

вес $\omega\{a\} = 1$

вес $\omega\{b\} = 1$

вес $\omega\{t_i\} = 2$

k заданных точек $t_1, \dots, t_k$

$$\sum_{i=1}^{k} \omega(t_i)$$

<u>Теорема 5.1.</u> $t_1, \dots, t_k$ — различные, такие, что $\sum_{i=1}^{n} \omega(t_i) \leq n$

и система $u_0, \dots, u_n$ — чебышёвская.

Тогда $\exists\, u(t)$, который обращается в ноль в этих и только этих точках.

Исключение: $n = 2m+1$ и одна из точек совпадает с одной из граничных точек.

<u>Д-во:</u> пусть $n = 2m+1$, $a < t_1 < \dots < t_k < b$

(остальные случаи — аналогично)

к $t_1, \dots, t_k$ добавим a, $t'_1, \dots, t'_{m-k}$

$$a < t_1 < \dots < t_k < t'_1 < \dots < t'_k$$

Образуем

$$\{s_i\}_{i=0}^{2m} : \quad a, t_1, t_1+\varepsilon, \dots, t_k, t_k+\varepsilon, \; t'_1, t'_1+\varepsilon, \dots, t'_k, t'_k+\varepsilon$$

Строим многочлен $u(t)$.

$$u(t) = U\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 2m & 2m+1 \\ s_0 & s_1 & & s_{2m} & t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_0(s_0) & \dots & u_n(s_0) \\ \vdots & & \vdots \\ u_0(s_{2m}) & & u_n(s_{2m}) \\ u_0(t) & & u_n(t) \end{vmatrix}$$

$u_0(t) > 0 \qquad s_i, s_{i+1}$ (простые нули)

$u_0(t) < 0 \qquad s_{i+1}, s_{i+2}$

$\varepsilon \to 0$

$\tilde{u}(t)$ обращается в 0 в точках

$a, t_1, \dots, t_k, t'_1, \dots, t'_{m-k}$

можно построить

$t_1, \dots, t_k, t''_1, \dots, t''_{m-k}, b \quad (t''_i \neq t'_i)$

$\tilde{u}_1(t) \; \tilde{u}_2(t)$

$u(t) = \tilde{u}_1(t) + \tilde{u}_2(t)$

Глава 3. Моментные пространства, связанные с T-системами

§1. Определение

$\{u_i\}_0^n \qquad [a, b]$

$\Xi_n = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \\ \nu_1 & \dots & \nu_n \end{pmatrix}$

$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n$

$M_{n+1} = \{ c; \quad c = (c_0, \dots, c_n)$

$c_i = \int u_i \, d\sigma(t), \quad \sigma \in \Xi \}$

$C_{n+1} = \{ c = (c_0, \dots, c_n); \quad c_i = u_i(t),$
$t \in [a, b], \quad i = 0, \dots, n \}$

$\mathcal{C}(C_{n+1})$

$\Gamma = \{ c; \quad c_j = \sum_{i=1}^{n+2} \gamma_i \, u_i(t_j),$
γ_i — произв. $\}$

$M_{n+1} = \mathcal{C}(C_{n+1}) = \Gamma.$

Опр 1. $\alpha v_1 + (1-\alpha) v_2 \qquad 0 \le \alpha \le 1$

(выпуклая комбинация)

$\sum \alpha_i v_i, \quad \sum \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i$

Опр. 2. Мн-во называется выпуклым, если оно содержит любую выпуклую комбинацию любых двух своих векторов

Опр. 3. Выпуклой оболочкой мн-ва ~~называется~~ называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное мн-во. $\mathrm{Conv}(V)$

Лемма $V_n = \{ v : v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i ,$

$\sum \alpha_i = 1, \quad \alpha_i > 0 \}$

$\hat{V} = \bigcup V_n$

$\mathrm{Conv}\, V = \hat{V}$

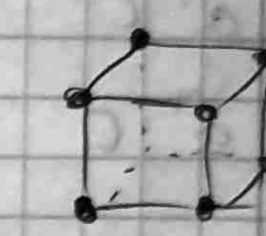
(выпуклая об. состоит из всевозможных выпуклых комбинаций элементов этого мн-ва)

Теорема Каратеодори

$V \subset \mathbb{R}^k$ — огранич. замкнутое

любой элемент его выпуклой оболочки может быть представлен в виде линейной комбинации не более, чем $k+1$ эл-тов этого мн-ва.

$V = (\pm 1, \pm 1, \pm 1) \in \mathbb{R}^3$



выпуклой оболочкой является сам гиперкуб

(3 точки — для точки на грани,

4 точки — внутри куба)

Если точка принадлежит границе вып. оболочки, то она представима в виде линейной оболочки не более, чем k точек.

M_{n+1}

если $c \in M_{n+1}$,

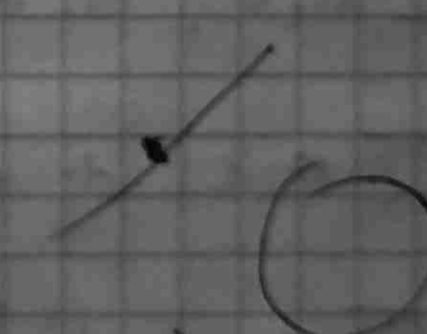
то $\lambda c \in M_{n+1}$

По лемме $\mathcal{C}(C_{n+1}) = \Gamma$

! $c \in M_{n+1}$,

$c \notin \mathcal{C}(C_{n+1})$

(теорема отделимости:



$a^T c^* + d > 0$

$a^T c + d \leq 0 \quad \forall c \in \mathcal{C}$)

в нашем случае гиперплоскость — конус и

$a^T c^* > 0$

$a^T c \leq 0.$

(*) $c: \; c_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i(t_i) \qquad a \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_p \leq b$

$I(c)$ — индекс точки — наименьшее число точек t_i в представлении c, где внутренние точки считаются за 1, а внешние — за 1/2.

Теорема. $c \in \partial M_{n+1} \iff I(c) < \frac{n+1}{2}.$

Д-во: пусть $c^* \in \partial M_{n+1}$

можно провести касательную гиперплоскость

$\sum a_i c_i^* + d = 0$

$\sum a_i c_i + d \leq 0 \qquad \forall c \in M_{n+1}$

$\sum a_i c_i + d > 0 \qquad \forall c \notin M_{n+1}$

Д-во:

$d \geq 0$, т.к. $0 \in M_{n+1}$

$d = 0$, т.к.

если $d > 0 \qquad \sum a_i c_i^* < 0$

$\lambda \sum a_i c_i + d < 0$

$\lambda \sum a_i c_i + d \geq 0 \quad \forall \lambda$

противоречие.

$c \in M_{n+1}$

$\sum a_i c_i \geq 0 \qquad \forall t$

$\sum a_i c_i^* = 0$

рассмотрим $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(t) \geq 0$

$\int \sum a_i u_i(t) \, d\sigma^*(t) = 0$

$\exists \, I(c) < \frac{n+1}{2}.$

$\tilde{Z}(u) = 2I(c^*) < \frac{n+1}{2} \cdot 2$

$r(u) \le n$

т.е существует такой многочлен и точка c имеет представление $(*)$.

Единственность:

$$c = U\lambda$$

для чебышёвских систем U невырожденна

$$\lambda = U^{-1} c$$

$\lambda_i = 0$ могут быть добавлены, если точек не хватает.

$$\eta(x,\theta) = \frac{\theta_1 x^{\theta_2}}{\theta_3 + x^{\theta_2}}$$

$$M(\xi, \theta) = \sum_{i=1}^{k} f(x, \theta)\, f^T(x, \theta)\, \omega_i$$

$$f(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \eta(x, \theta)$$

$$u_i \longrightarrow f_2 f_s \qquad \ell \le 5$$

$$u_0(x), \ldots, u_5(x)$$

Покажем, что $u_0, \ldots, u_5$ образуют систему Чебышёва.

обычная граница (точек в плане):

$$\frac{m(m+1)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

по т. 3.1: $\quad \frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3 \qquad \left(I(c) < 3\right)$

число точек в плане $n \geq 3$

$\Rightarrow$ по крайней мере одна из точек плана граничная

$$\theta_1 x^{\theta_2} = c(x)$$

$$x \in [a, b] \qquad c(x) \in [A, B]$$

$$M(\xi) = \sum \left(P^T(\theta)\; C(\theta, c_i)\; P(\theta)\right) \omega_i$$

$$\begin{matrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \omega_1 & \ldots & \omega_n \end{matrix}$$

$$p(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\theta_2}{\theta_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\theta_1 \log \theta_2}{\theta_1} & -\frac{\theta_2}{\theta_1} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+c_i)^2} & \frac{1}{(1+c_i)^3} & \frac{c_i \log c_i}{(1+c_i)^3} \\ \frac{1}{(1+c_i)^3} & \frac{1}{(1+c_i)^4} & \frac{c_i \log c_i}{(1+c_i)^4} \\ \frac{c_i \log c_i}{(1+c_i)^2} & \frac{c_i \log c_i}{(1+c_i)^4} & \frac{c_i^2 \log^2 c_i}{(1+c_i)^4} \end{pmatrix}$$

x

$$\left\{ \frac{1}{(1+x)^2} \quad \frac{1}{(1+x)^3} \quad \frac{x \log x}{(1+x)^3} \right.$$

$$\left. \frac{1}{(1+x)^4} \quad \frac{x \log x}{(1+x)^4} \quad \frac{x^2 \log^2 x}{(1+x^4)} \right\}$$

является ли чебышёвской?

$$(\cdot (1+x)^4)$$

$$\left\{ (1+x)^2 \quad (1+x) \quad x(\log x)(1+x) \quad 1 \right.$$

$$\left. x \log x \quad x^2 \log^2 x \right\} \quad 6 \text{ раз}$$

$\sum a_i u_i(x)$ не обращается в 0 слишком часто.

предположим, что $\sum a_i u_i(x)$ обращается в ноль 6 раз. Тогда её производная обращается в ноль 5 раз.

$$\left\{ 1, \quad 2(1+x), \quad (\log x)(1+x) + (1+x) + x \log x, \quad 1 + \log x, \quad 2x \log^2 x + x \cdot 2 \log x \right\}$$

преобразования

$$\left\{ 1, \ x, \ \log x, \ x \log x, \ x \log^2 x \right\}$$

$$\left\{ 1, \ \frac{1}{x}, \ \log x, \ \log^2 x + \log x \right\}$$

$$\left\{ 1, \ \frac{1}{x}, \ \log x, \ \log^2 x \right\} \quad 4 \text{ раза}$$

является ли чебышёвской

$$\left\{ \frac{1}{x^2}, \ \frac{1}{x}, \ x \log x \right\}$$

...

x_1, x_2, x_3

Проверить для

$$\eta(x,\theta) = \frac{\theta_1 x^{\theta_2}}{\theta_3 + x^{\theta_2}}$$

Глава 3. Экспоненциальные модели

§1. Постановка задачи.

$$y = \eta(x,\theta) + \varepsilon(x)$$

$$\eta(x,\theta) = \sum_{i=1}^{k} a_i e^{-\lambda_i x} \qquad x \in [0; +\infty)$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$$

$k = 1$

$$a_1 e^{-\lambda_1 x} \qquad \theta = (a_1, \lambda_1)$$

$$f_1(x) = \frac{\partial\eta}{\partial a_1} = e^{-\lambda_1 x}$$

$$f_2(x) = \frac{\partial\eta}{\partial \lambda_1} = -x a_1 e^{-\lambda_1 x}$$

$f_1(x)$ не зависит от a_1

$f_2(x)$ зависит от λ_1

$x_1, \ldots, x_n$

$\omega_1, \ldots, \omega_n$

Информационная матрица

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f^T(x_i)\, \omega_i \;;$$

$$\det M(\xi) \longrightarrow \max_{\xi}$$

$n \geqslant m$ (числа параметров)

$n \geqslant 2$

По теореме, (о рангах)

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_{x_i}) \cdot \omega_i$$

$$\operatorname{rank} M \leq n$$

(матрица вырождена, $\det M = 0$).

в прошлый раз

(теорема о представлении граничной точки множества M-ва)

Теорема (эквивалентности)

Следующие утв. эквивалентны

determinant 1. ξ^* — $\mathcal{D}$-оптимален $\quad (\det M \to \max)$

general 2. ξ^* — G-оптимален

3. $\max\limits_{x} d(x, \xi^k) = m$

$d(x, \xi^*) = m$

G-оптимальность

$$d(x, \xi) = f^T(x) M^{-1}(\xi) f(x) = \mathcal{D}(f^T(x)\hat{\theta})$$

$$\mathcal{D}(f^T(x)\hat{\theta}) = E(f^T(x)\hat{\theta} - f^T(x)\theta)^2 =$$

$$= E f^T(x)(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T f(x) \quad \boxed{a^T b = b^T a}$$

$$= f^T(x) E(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T f(x) =$$

$$= f^T(x) \mathcal{D}_{\hat{\theta}} f(x) \; =$$

$$\mathcal{D}_{\hat{\theta}} = \frac{\sigma^2}{n} M^{-1}(\xi)$$

$$\frac{\sigma^2}{n} = 1$$

$$= \; f^T(x) M^{-1}(\xi) f(x) = d(x, \xi)$$

(дисперсия предсказания в точке x)

G-оптимальный план: (g-general) (обобщённая дисперсия)

$$\max_{x \in X} d(x, \xi) \to \min_{\xi}$$

Предположим, мы нашли $\mathcal{D}$-опт. план ξ^*.

$$f^T(x) M^{-1}(\xi) f(x) = m = 2$$

Введём функции

$u_0(x) = 2$

$u_1(x) = f_1^2(x)$

$u_2(x) = f_1(x) f_2(x)$

$u_3(x) = f_2^2(x)$.

$$d(x,\xi) - m = u_0(x) + b_1 u_1(x) + b_2 u_2(x) + b_3 u_3(x) \leq 0$$

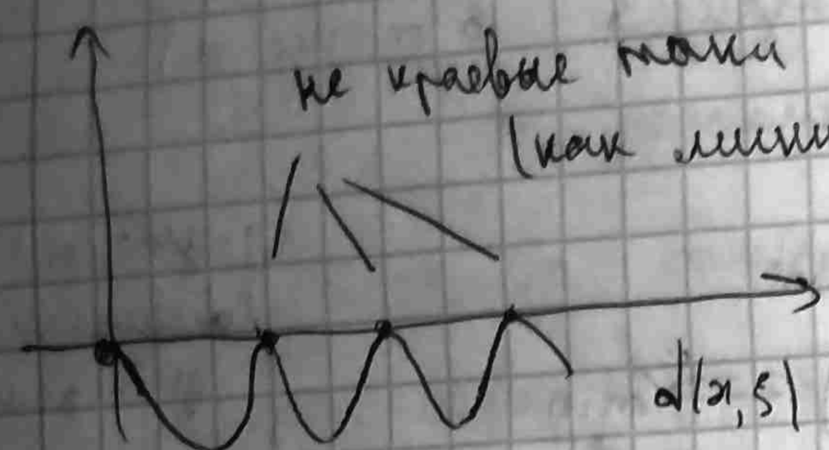
$$= 0 \quad \xi^*$$

$$-2 \quad + \underbrace{(M^{-1}(\xi))_{11}}_{b_1 =} \quad + \underbrace{2(M^{-1}(\xi))_{12}}_{b_2 =} \quad + \underbrace{(M^{-1}(\xi))_{22}}_{b_3 =}$$

(обобщённый многочлен)

$x_i = 0$

не краевые точки
(как минимумы кратности 2)



Оценка n сверху:

Теорема о числе нулей:
Любой обобщённый многочлен, построенный из n многочленов Чебышёва, обращается в ноль не более n раз.

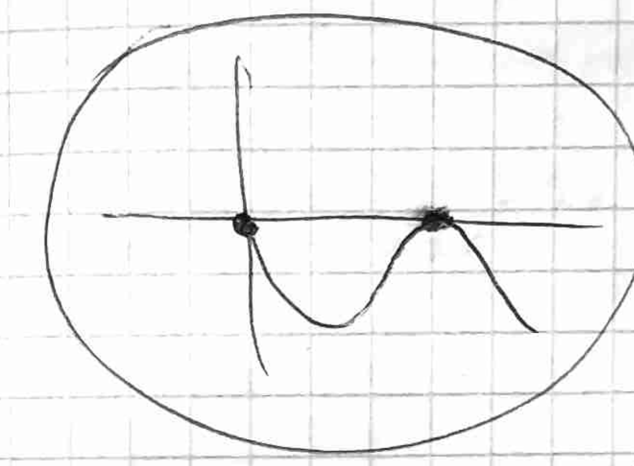
n_1 раз (неузловые нули засчитываются дважды)

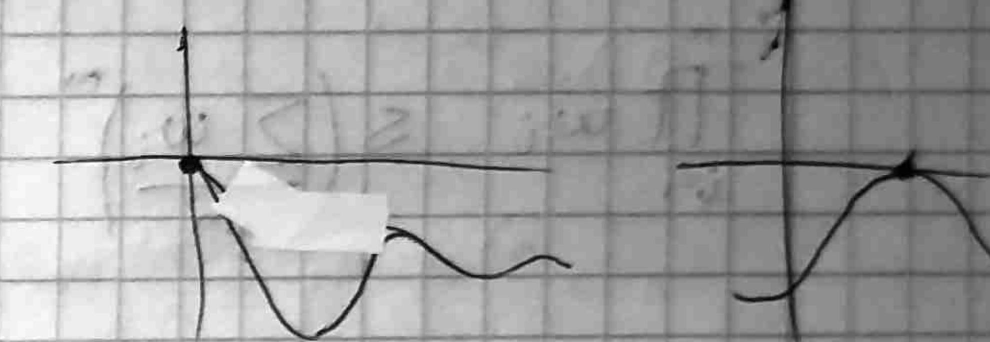
$n_1 + 1$

$u_0, \dots, u_{n_1}$

$$\sum_{i=0}^{n_1} a_i u_i$$

$d(x, \xi)$ обращается в ноль не более трёх, причём неузловые нули засчитываются дважды.





≤ 3 ; > 2

$x_1^* = 0$ (на границе)

$x_2^* > 0$

$m = 2$, $\xi = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* \\ \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix}$

Лемма:
когда число точек в оптимальном плане совпадает с числом параметров, все веса одинаковы

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i) f^T(x_i) = F W F^T$$

$$F^T = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_m(x_1) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_1(x_m) & \dots & f_m(x_m) \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n \end{pmatrix}$$

$$\det M(\xi) = \det(FWF^T) =$$
$$= \det(F)\det(W)\det(F^T) =$$
$$= (\det F)^2 \det(W) = (\det F)^2 \cdot \prod_{i=1}^{m} w_i$$

$$\prod_{i=1}^{m} w_i \le \left(\frac{\sum w_i}{m}\right)^m$$

$$= \text{ при } w_i = \frac{1}{m}$$

(оптимально, когда все веса одинаковы)

$$\max_{x_2} (\det F)^2$$

$$\det \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x_1} & -e^{-\lambda_1 x_2} \\ -x_1 a_1 e^{-\lambda_1 x_1} & -x_2 a_1 e^{-\lambda_1 x_2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \max$$

$$x_1 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & e^{-\lambda_1 x} \\ 0 & x e^{-\lambda_1 x} \end{pmatrix} = x e^{-\lambda_1 x}$$

$$x e^{-\lambda x} \longrightarrow \max$$

$$e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x} = 0$$

$$\lambda x = 1$$

$$x = \frac{1}{\lambda}. \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{\lambda}$$

Или

Докажем, что система u_i чебышёвская

$$u_0(x) = 1$$
$$u_1(x) = e^{-2\lambda_1 x}$$
$$u_2(x) = x e^{-2\lambda_1 x}$$
$$u_3(x) = x^2 e^{-2\lambda_1 x}$$

$\sum_{i=0}^{n} a_i u_i$ обращается в ноль ≤ 3 раз

$$\left(\sum a_i^2 \ne 0\right)$$

Пусть он обращается в ноль 4 и более раз. Тогда его производная обращается в ноль не менее 3 раз.

$$-2\lambda_1 e^{-2\lambda_1 x}$$

$a_1 u_1'(x) + a_2 u_2'(x) + a_3 u_3'(x)$ обр. в ноль ≤ 3 раз

$$\ldots e^{-\lambda_1 x}(1 + \ldots)$$

дифференцируем далее,
выносим общий член...
и т.д.

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1/\lambda_1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

проверим оптимальность (по теореме)

$$f^T(x) M^{-1}(\xi^*) f(x) \leq 2$$

$$M(\xi^*) = F W F^T$$

$$M^{-1}(\xi^*) = (F^T)^{-1} W^{-1} F^{-1}$$

F

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-1} \\ 0 & \frac{1}{\lambda_1} e^{-1} \end{pmatrix} \quad -a_1 = 1$$

$$\| $$

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) \end{pmatrix}$$

F^{-1}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 e \end{pmatrix} ?$$

$$\|$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\det F = \frac{1}{\lambda_1} e^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2\lambda_1 & 2\lambda_1 e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 e \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2\lambda_1 \\ 2\lambda_1 & 2\lambda_1^2 + 2\lambda_1^2 e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2\lambda_1 \\ 2\lambda_1 & 2\lambda_1^2(1+e^2) \end{pmatrix}$$

$$d(x, \xi^*) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x} & x e^{-\lambda_1 x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2\lambda_1 \\ 2\lambda_1 & 2\lambda_1^2(1+e^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x} \\ x e^{-\lambda_1 x} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{-\lambda_1 x} + 2\lambda_1 x e^{-\lambda_1 x} \\ 2\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + 2\lambda_1^2 x(1+e^2)e^{-\lambda_1 x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x} \\ x e^{-\lambda_1 x} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-2\lambda_1 x}(2 + 2\lambda_1 x^2) + e^{-2\lambda_1 x}(2x_1 + 2\lambda^2 x^2) =$$

$$= e^{-2\lambda_1 x}(2 + 2\lambda_1 x^2 + 2\lambda^2 x^2)$$

$$d(0, \xi^*) = 2$$

$$d\left(\frac{1}{\lambda_1}, \xi^*\right) = e^{-2}\left(2 + \frac{2}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1} + 2\right)$$

не сошлось.

проверить

$k = 2$ $\qquad a_1 e^{-\lambda_1 x} + a_2 e^{-\lambda_2 x}$ $\qquad a_1 = -1$, $a_2 = -1$

$f_1(x) = e^{-\lambda_1 x}$ $\qquad f_2(x) = x e^{-\lambda_1 x}$

$f_3(x) = e^{-\lambda_2 x}$ $\qquad f_4(x) = x e^{-\lambda_2 x}$

Сколько точек в оптимальном плане?

$$g(x) = d(x, \xi) - m = \max_x f^T(x) M^{-1}(\xi) f(x) - 4 = 0$$

$u_0(x) = -4$

$u_1(x) = f_1(x) f_1(x)$

$u_2(x) = f_1(x) f_2(x)$

$u_3(x) = f_1(x) f_3(x)$

$u_4(x) = f_1(x) f_4(x)$

$u_5(x) = f_2(x) f_2(x)$

$u_6(x) = f_2(x) f_3(x)$

$u_7(x) = f_2(x) f_4(x)$

$u_8(x) = f_3(x) f_3(x)$

$u_9(x) = f_3(x) f_4(x)$

$u_{10}(x) = f_4^2(x)$

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{10} a_i u_i(x)$$

не более 10 нулей
узловые засчит. дважды

$$4 \le n \le ?$$

чтобы определитель
был не равен 0

$$1 + (n-1)2 \le 10$$

$$n \le 5,5$$

$$4 \le n \le 5.$$

$$e^{-2\lambda_1 x},\ xe^{-2\lambda_1 x},\ e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x},\ xe^{-(\lambda_1+\lambda_2)x},$$

$$x^2 e^{-2\lambda_1 x},\ xe^{-(\lambda_1+\lambda_2)x},\ x^2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-\lambda_1 x}(1, x, x^2), \\ e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\ (1, x, x^2) \\ e^{-(\lambda_1+\lambda_3)x}\ (1, x, x^2) \end{array}\right\}$$

9 функций
(а не 10)

$$n - 1 \le \frac{8}{2} = 4$$

$$n \le 5.$$

Как же определить n?

Введём

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_1(x) = \sum_{j=1}^{k_1} \alpha_{1j} e^{-\lambda_{1j} x} \\ \vdots \\ \varphi_r(x) = \sum_{j=1}^{k_r} \alpha_{rj} e^{-\lambda_{r_j} x} \end{cases}$$

$\alpha_{ij} \geq 0$

$i = 1, \dots, r$

$1, \dots, k_i$

<u>Лемма:</u>

$$\max_{1 \le j \le r_i} \{\lambda_i\} < \min_{1 \le j \le r_{j+1}} \{\lambda_{i+r_j}\}$$

$\{\varphi_i\}$ образуют обобщённый полином Чебышёва, имеющего не более r нулей с учётом кратности.

$$\det \begin{vmatrix} \varphi_0(x_1) & \dots & \varphi_r(x_1) \\ \vdots & & \\ \varphi_0(x_{r+1}) & & \varphi_r(x_{r+1}) \end{vmatrix} \overset{\text{sign}}{=}$$

$$\overset{\text{sign}}{=} \sum \det \begin{pmatrix} e^{-\lambda_{j_1} x_1} & \dots & e^{-\lambda_{j_1} x_{r+1}} \\ \dots & & \end{pmatrix}$$

1: $a_1 e^{-\lambda_1 x} + a_2 e^{-\lambda_2 x} \longrightarrow$

$a_1 e^{-\lambda_1 x}, \quad b_1 e^{-(\lambda_1 + \Delta)x}, \quad a_2 e^{-\lambda_2 x}, \quad b_2 e^{-(\lambda_2 + \Delta)x}$

докажем, что точек ≤ 4

$a_1 e^{-\bar\lambda_1 x} + b_1 e^{-\bar\lambda_2 x} + a_2 e^{-\bar\lambda_3 x} + b_2 e^{-\bar\lambda_4 x}$

$\bar\lambda_1 = \lambda_1$

$\bar\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta$

$\bar\lambda_3 = \lambda_2$

$\bar\lambda_4 = \lambda_2 + \Delta$

$$f^T(x) M^{-1}(\xi) f(x)$$

все миноры матрицы положительны

$$M^{-1}(\xi) = A$$

$$f^T(x) A f(x)$$

$$\begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x} & e^{-\lambda_2 x} & e^{-\lambda_3 x} & e^{-\lambda_4 x} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x} \\ e^{-\lambda_2 x} \\ e^{-\lambda_3 x} \\ e^{-\lambda_4 x} \end{pmatrix}$$

$\varphi_0(x) = 4$

$\varphi_1(x) = e^{-2\lambda_1 x} A_{11}$

$\varphi_2(x) = -2e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} A_{12}$

$\varphi_3(x) = 2e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)x} A_{13} + A_{22} e^{-2\lambda_2 x}$

$\vdots$

доделать

Глава 4. Экспоненциальные регрессионные модели

§1. Описание модели

$y = \eta(x, \theta) + \varepsilon_i$ $\qquad x \in [0, \infty)$

$$\eta(x, \theta) = \sum_{i=1}^{k} a_i e^{-\lambda_i x}$$

$$\theta = (a_1, \ldots, a_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$$

$\frac{\partial \eta}{\partial \theta_i}$ не зависит от θ_i

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \eta(x, \overset{\circ}{\theta})$$

$y = \theta^T f(x) + \varepsilon$ (построение для линеаризованной модели)

§2. Постановка задачи

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \omega_1 & \ldots & \omega_n \end{pmatrix}$$

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f^T(x_i) \omega_i$$

Будем искать локально D-оптимальные плана. Несложные вычисления показывают, что

$$\det M(\xi) = C \det \bar{M}(\xi)$$

$a_1, \ldots, a_k$
$\to 1 \quad \to 1$

§3. Чебышёвские свойства экспоненциальных систем

$$\{ a_{01}, a_{11} x, \ldots, a_{k_1} x^{k_1}$$
$$a_{02} e^{-\lambda_1 x}, a_{12} x e^{-\lambda_1 x}, \ldots, a_{k_2} x^{k_2} e^{-\lambda_1 x}$$
$$\ldots$$
$$a_{0,s+1} e^{-\lambda_s x}, \ldots, a_{k,s+1} s e^{-\lambda_s x} x^{k_1} \}$$

Лемма 1. $\forall k_1, \dots, k_{s+1}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j$

$s = 1, 2, \dots$

указанная система является чебышёвской на любом интервале $[0, b)$

$f_1(x), \dots, f_n(x)$

$$\sum a_i f_i(x) \qquad \sum a_i^2 \neq 0$$

не более $n+1$ раз обращается в ноль.

Д-во — по индукции, от противного.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i f_i(x))' = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \cdot \varphi_i(x)$$

Лемма 2.

1) $\varphi_0(x) \equiv \text{const}$

$$\varphi_1(x) = \sum_{j=1}^{k_1} \alpha_{1j} e^{-\lambda_{1j} x}$$

$\dots$

$$\varphi_s(x) = \sum_{j=1}^{k_s} \alpha_{sj} e^{-\lambda_{sj} x}$$

2) все $\alpha_{ij} > 0$

3) $\max_j \lambda_{ij} < \min_j \lambda_{i+1, j}$

Тогда указанная система функций является чебышёвской системой на любом конечном интервале $[0, b)$.

Д-во:

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_0(x_1) & \dots & \varphi_s(x_1) \\ \dots & & \dots \\ \varphi_0(x_{s+1}) & & \varphi_s(x_{s+1}) \end{pmatrix} = 0 =$$

$$= \sum \begin{vmatrix} 1 & e^{-\lambda_1 \alpha_1 x_1} & \dots & e^{-\lambda_s \alpha_s x_1} \\ \dots & & & \\ 1 & e^{-\lambda_1 \alpha_1 x_{s+1}} & \dots & e^{-\lambda_s \alpha_s x_{s+1}} \end{vmatrix} \prod \alpha_i \dots$$

§4. Теорема эквивалентности и её следствия

__Теорема.__ $f_1(x), \dots, f_n(x)$ — независимы, непрерывны на $\mathcal{X}$.

Тогда существует $\mathcal{D}$-оптимальный план и следующие условия эквивалентны:

1. ξ^* — $\mathcal{D}$-опт.
2. ξ^* — G-опт.
3. $\max\limits_{x \in \mathcal{X}} d(x, \xi^*) = m.$

$$d(x, \xi) = f^T(x) M^{-1}(\xi) f(x)$$

В опорных точках $\mathcal{D}$-опт. плана $d(x, \xi^*)$ принимает своё максимальное значение

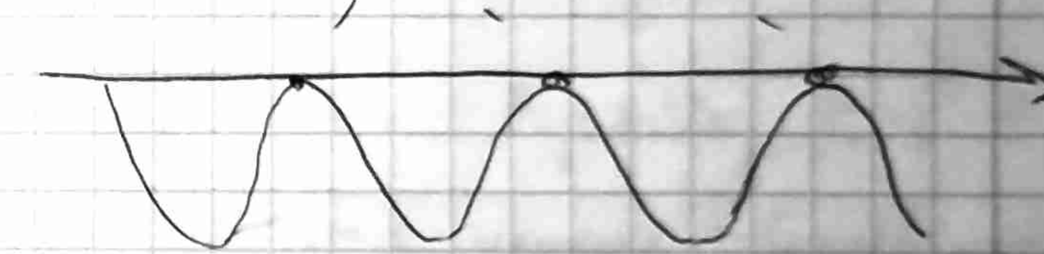
$$g(x) = f^T M^{-1}(\xi) f(x) - m = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) b_i}_{\leq 0}$$

$$\sum_{i,j} f_i(x) f_j(x) b_{ij} + \varphi_0$$

$g(x_i) = 0$ — n раз

1 граничная точка

$g'(x_i) = 0$ — $n-1$ раз $\boxed{\text{нули кратности 2}}$



ограничение на число точек:

$$2n - 1 \leq S$$

(Следствие 1.)

Дополнение. $M(\xi)$ (совпадают?)

Следствие 2. Если $n = m$ (число точек совпадает с числом параметров) то все весовые коэффициенты одинаковы и существует только один $\mathcal{D}$-опт. план и

$$\omega_1 = \dots = \omega_n$$

$M(\xi) = F^T W F$

$F = (f_i(x_j))$

$W = diag\{w_1, \ldots, w_n\}$

$\det M = (\det F)^2 \prod w_i$

План, у которых число точек совпадает с числом параметров, называется насыщенным.

В большинстве случаев для экспоненциальных моделей плана являются насыщенными.

$f_1(x), \ldots, f_n(x)$

$M(\xi) = \sum f(x) f^T(x)\, w_i$

$\det M(\xi) = \sum_{i,j} \det f_i(x_j)\, w_i$

$$\left[A^{-1} = \left(\frac{A_{ji}}{\det A} \right) \qquad A_{ji} = \Delta_{ji} (-1)^{i+j} \right]$$

(т.к. система чебышёвская).

$$M^{-1}(\xi) \approx \begin{pmatrix} + & - & \ldots \\ - & + & \\ + & - & \\ - & + & \end{pmatrix}$$

§ 5. Поиск оптимального плана

$k = 1$

$$\eta(x, \theta) = a_1 e^{-\lambda_1 x} \qquad a_1 = 1$$

$$f_1(x, \theta) = e^{-\lambda_1 x}$$

$$f_2(x, \theta) = -x a_1 e^{-\lambda_1 x} = x e^{-\lambda_1 x}$$

$$f_1(x) = e^{-\lambda_1 x}$$

$$f_2(x) = x e^{-\lambda_1 x}$$

<u>Теорема 1.</u> При $k = 1$ $\exists$ единственный D-оптимальный план:

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1/\lambda_1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

По теореме эквивалентности

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \end{pmatrix} M^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \leq 2$$

$$M(\xi) = F^T W F$$

$$F^T = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}(\xi) = F^{-1} W^{-1} (F^T)^{-1}$$

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(F^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-1} & \frac{1}{\lambda_1} e^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 e \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda_1 & \lambda_1 e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 e \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2\lambda_1 & 2\lambda_1 e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 e \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2\lambda_1 \\ -2\lambda_1 & 2\lambda_1^2 (1+e^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x} & xe^{-\lambda_1 x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2\lambda_1 \\ -2\lambda_1 & 2\lambda_1 (1+e^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x} \\ xe^{-\lambda_1 x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{-\lambda_1 x}(1-\lambda_1 x) \\ e^{-\lambda_1 x}(-2\lambda_1 + x\, 2\lambda_1^2 (1+e^2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x} \\ xe^{-\lambda_1 x} \end{pmatrix} =$$

$$-2 \le 0$$

$$= e^{-\lambda_1 x} \left[2(1 - x\lambda_1) + 2(-x\lambda_1 + \lambda_1^2 x^2 (1+e^2)) \right] \le 2$$

(3 ф-ии Чебышёва)

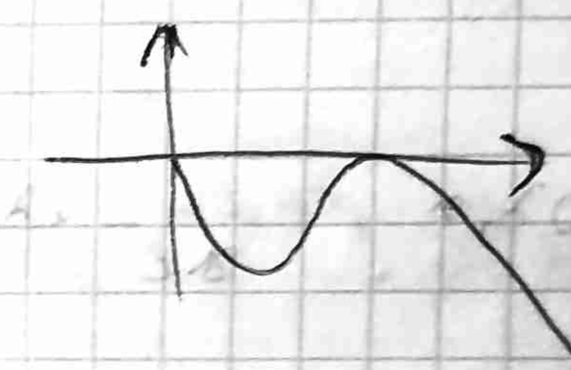
$\varphi_1(x) = 1$ $\quad \varphi_2(x) = e^{-\lambda_1 x}$ $\quad \varphi_3(x) = xe^{-\lambda_1 x}$

$\varphi_4(x) = x^2 e^{-\lambda_1 x}$

обращается в ноль не более 3 раз

(с учётом кратности)

$x = 0$: $\quad 1(2) - 2 = 0 = g(0)$



3-й пункт теоремы выполняется $\Rightarrow$ план оптимален.

$f^T(x)\, M^{-1}(\xi)\, f(x)$

|

одна из точек — 0,

Вторую находим дифференцированием

$$\begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x_1} & x_1 e^{-\lambda_1 x_1} \\ e^{-\lambda_1 x_2} & x_2 e^{-\lambda_1 x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

$\det \longrightarrow \max$

$$(xe^{-\lambda x})'_x = (1 - \lambda x) e^{-\lambda x} = 0$$

$\Rightarrow \quad x_* = \frac{1}{\lambda_1}$.

$k=2$

$$\left(e^{-\lambda_1 x} \quad xe^{-\lambda_1 x} \quad e^{-\lambda_2 x} \quad xe^{-\lambda_2 x}\right) \left(\quad \right) \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x} \\ xe^{-\lambda_1 x} \\ e^{-\lambda_2 x} \\ xe^{-\lambda_2 x} \end{pmatrix} - 4 \le 0.$$

$e^{-2\lambda_1 x} \qquad xe^{-2\lambda_1 x} \qquad x^2 e^{-2\lambda_1 x}$

$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \qquad xe^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \qquad x^2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}$

$e^{-2\lambda_2 x} \qquad xe^{-2\lambda_2 x} \qquad x^2 e^{-2\lambda_2 x}$

$g(x)$ обращается в 0 не более 9 раз (с учётом кратности)

$x_1 = 0.$ — кратности 1

$x_2, x_3, \dots$ — кратности 2

4 параметра.

Применим лемму 2.

$\varphi_0(x) = 4$

$\varphi_1(x) = e^{-2\lambda_1 x}$

$\varphi_2(x) = -2A_{12} e^{-(2\lambda_1+\Delta)x}$

$\varphi_3(x) = 2A_{13} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} +$

$+ A_{22} e^{-2(\lambda_1+\Delta)}$

$\varphi_4(x) = -A_{14} e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\Delta)x} - A_{23} e^{-(\lambda_1+\lambda_2+0)x}$

$\varphi_5(x) = \dots$

$\dots$

$\varphi_7(x) = A_{44} e^{-2\lambda_2 x}.$

$\sum a_i \varphi_i$ обращается в ноль не более 7 раз. $(1+2+2+2).$

$\Rightarrow$ D-оптимальный план является насыщенным,

$x_1 = 0,$

x_2, x_3, x_4 — необходимо найти.

Теорема 2. Для экспоненциальной модели при $k=2$ существует единственный D-оптимальный план,

$x_1 = 0$.

$k \geq 3$.

$2\lambda_1, 2\lambda_2, \ldots, 2\lambda_k, \quad \lambda_1+\lambda_2, \ldots, \lambda_1+\lambda_k,$

$\lambda_2+\lambda_3, \ldots, \lambda_2+\lambda_k, \ldots, \quad \lambda_{k-1}+\lambda_k$

$$k+(k-1)+\ldots+1 = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$s \leq \frac{k(k+1)}{2}$$

Теорема. В случае $k \geq 3$ число точек в оптимальном плане не превосходит $\frac{k(k+1)}{2}+1$.

$2\lambda_1 = u_1,$

u_2

$\vdots$

u_s

$$\varphi_0(x) \equiv 2k$$

$$\varphi_1(x) = A_{11} e^{-2\lambda_1 x}$$

$$\varphi_2(x) = -2A_{12} e^{-(2\lambda_1+\Delta)x}$$

$\ldots$

$$\varphi_{2l-1}(x) = a_l e^{-(u_1+2\Delta)x} +$$

$$\varphi_{2l}(x) = -b_l e^{-(u_1+\Delta)x}$$

$$\varphi_{2l+1}(x) = a_{s+1} e^{-(u_1+2\Delta)x}.$$

В специальном случае

$$\frac{\lambda_i+\lambda_{i+1}}{2} = \lambda_{i+1} \qquad n=2k$$

план насыщенный.

При $k=1,2$ план насыщенный

$k=3$ $\qquad 6, 7 \ldots$

§6. Численный метод нахождения D-оптимальных планов

Насыщенный D-оптимальный план

$$\varphi(x_2, \ldots, x_{2k}) \longrightarrow \max$$

$$0 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{2k}$$

$$\left(x_2^{(s)}, \ldots, x_{2k}^{(s)}\right) \quad \text{— } s\text{-шаг}$$

$$\det \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x_2} & x_2 e^{-\lambda_1 x_2} & e^{-\lambda_2 x_2} & x_2 e^{-\lambda_2 x_2} & \ldots \\ \\ e^{-\lambda_1 x_{2k}} & x_{2k} e^{-\lambda_1 x_{2k}} & \ldots & x_{2k} e^{-\lambda_2 x_{2k}} & \ldots \end{pmatrix} =$$

$$= g(x) = \sum_{l=1}^{k} a_l e^{-\lambda_l x} + \sum_{l=1}^{k} b_l x e^{-\lambda_l x}$$

$$x_{l-1} \le x \le x_{l+1}$$

ровно один локальный максимум $x_l^{(s+1)}$

Сходимость:

$$g\left(x_l^{(s+1)}\right) - g\left(x_l^{(s)}\right)$$

$$\det M(\xi^{(s)}) \geqslant \det M(\xi^{(s+1)})$$

$$\varphi(x) = \det M(\xi^{(s)})$$

$$\varphi(x^*)$$

$$\varphi'_{x_i}(x^*) = \varepsilon > 0 \qquad g'(x) > \frac{\varepsilon}{2}$$

$$g(x+\alpha) = g(x) + \alpha g'(x) + \frac{\alpha^2}{2} g''(\tilde{x}) \geqslant$$
$$k$$

$$g(x) + \alpha g'(x) + \frac{\alpha^2}{2} k$$

$$\max_\alpha g(x+\alpha)$$

$$? g(x+\alpha) - g(x) \geqslant \max_\alpha \alpha \frac{\varepsilon}{2} - \alpha^2 k$$

ограничена

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{4k}$$

противоречие $\Longrightarrow$ процесс сходится

$f_1(x) = e^{-\lambda_1 x}$ $\quad f_2(x) = xe^{-\lambda_1 x}$ $\quad f_{2k-1}(x) = e^{-\lambda_k x}$

$f_{2k}(x) = xe^{-\lambda_k x}$ $\quad (0, \infty)$

— базисные функции линеаризованной модели

$\lambda^*_{min} = 0$ (крайняя точка плана)

$$g_j^s(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x_1^{(s+1)}) & \dots & f_n(x_1^{(s+1)}) \\ f_1(x_2^{(s+1)}) & \dots & f_n(x_2^{(s+1)}) \\ \dots & & \\ f_1(x_{j-1}^{(s+1)}) & \dots & f_n(x_{j-1}^{(s+1)}) \\ f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1(x_{j+1}^{(s)}) & \dots & f_n(x_{j+1}^{(s)}) \\ \dots & & \\ f_1(x_{2k}^{(s)}) & \dots & f_n(x_{2k}^{(s)}) \end{pmatrix}$$

(линейная функция, метод половинного деления)

$$x_j^{(s+1)} = \arg\max g_j(x)$$

$$x_j^{(s+1)} \le x \le x_{j+1}^{(s+1)}$$

$$\tau^{(s+1)} = \left(x_1^{(s+1)} \equiv 0;\ x_2^{(s+1)}, \dots, x_{2k}^{(s+1)}\right)$$

Теорема. 1) $\det\left(f_i(x_j^{(s)})\right)_{i,j}^{2k} \longrightarrow \det\left(f_i(x_j^*)\right)_{i,j}^{2k}$

$i^* = (x_1^*, \dots, x_{2k}^*)$

2) существует сходящаяся подпоследовательность

$\tau^{(s_j)} \longrightarrow \tau^k$

Если существует только одна точка локального максимума, то последов. планов сходится к этой точке.

Глава 5. Функциональный подход к построению и исследованию оптимальных планов

§1. Идея подхода и теорема о неявной функции

$k = 1$, $\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1/\lambda_1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$x_2^* = \arg\max \det M(\xi, \lambda)$

$\frac{\partial}{\partial x} x e^{-\lambda_1 x} = 0$

$\xi = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & \dots & x_{2k} \\ 1/2k & 1/2k & & 1/2k \end{pmatrix}$ $\frac{\partial}{\partial x_i}$

$M(\xi) = F^T W F$ (W известна (единичная?))

$\overline{M}(\tau, A)$

$\tau = \{x_1, x_2, \dots, x_{2k}\}$

$\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{M}(\tau, A) = 0$, $i = 2, \dots, 2k$

$$\overline{M}(\tau, A) = \begin{vmatrix} e^{-\lambda_1 x_1} & x_1 e^{-\lambda_1 x_1} & e^{-\lambda_k x_1} & x_1 e^{-\lambda_k x_1} \\ \dots \\ e^{-\lambda_1 x_{2k}} & x_{2k} e^{-\lambda_1 x_{2k}} & e^{-\lambda_k x_{2k}} & x_{2k} e^{-\lambda_k x_{2k}} \end{vmatrix}$$

Опр. Ф-я называется вещественно-анал. на некотором открытом множестве, если она разложима в ряд Тейлора, сходящийся в окрестности любой точки этого множества.

$q(u) = (q_1(u), \dots, q_s(u))^T$

$u = (\tau, z)$ $\tau \in R^s$, $z \in R^k$

непрерывно-дифференцируемая в открытом множестве $U \ni (\tau, z)$

Рассмотрим $q(\tau, z) = 0$

$q(\tau_0, z_0) = 0$

Тогда существует

$\tau(z)$ со следующими свойствами.

1) $\tau(z_0) = \tau_0$

2) $q(\tau(z), z) = 0$ $\quad \forall z_0$

$(\tau(z), z) \in W \quad (\tau_0, z_0)$

в окрестности

Теорема.

(I) Пусть имеется

непрерывно дифференцируемая на множестве U,

и выполнено условие

$$J = \frac{\partial u(\tau, z)}{\partial z_i}\bigg|_{\tau_0, z_0}$$ (матрица Якоби)

$\det J \neq 0$.

Тогда

$q(\tau(z), z) = 0 \quad \Longleftrightarrow$

(II) Если функция $q(u)$ является вещественно-аналитической, то и решения $\tau(z)$ являются вещественно-аналитическими.

$\tau(z)$: $\quad J\tau'_{z_j}(z) = L_j$

$$L_j = \frac{\partial q(\tau, z)}{\partial z_j}$$

(можем найти значения производных)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \bar{M}(\tau^0, \Lambda^0) = 0$$

$$J = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \bar{M}(\tau, \Lambda) \right)$$

$$\tilde{M}(\tau, \Lambda) = \frac{1}{\prod (\lambda_i - \lambda_j)^4} \bar{M}(\tau, \Lambda)$$

вещественно-аналитическая при любых Λ

при $\lambda_1, \dots, \lambda_k \to d$

можем найти решение задачи.

§2. Предельный план

Лемма 2.1. Справедливо разложение:

$$\bar{M}(\tau, \lambda) = \left[2^1 \dots (2k - \lambda^1) \prod_{1 \le j < i \le k} (\lambda_i - \lambda_j)^4 \prod (x_i - x_j) \right.$$

$$\cdot \prod x_i \Big] x \cdot \Big[1 - \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^{k} (\lambda_i - d) \sum_{j=2}^{2k} x_j + \sum (\lambda_j - d)^2 R_1(x) +$$

$$+ \left(\sum (\lambda_i - d) \right)^2 R_2(x) + o(\alpha)$$

$$\alpha = \max_{1 \le j \le k} (\lambda_i - d)^2$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - \lambda x + \frac{\lambda x^2}{2} - \dots$$

$$\det M(\tau, \lambda) = \det \left(x_i^j \right)_{i,j=1}^{2k}$$

$$J(\Theta, x) = \det \left(e^{-\theta_i x_j} \right)$$

$\theta_1 = \lambda_1$ $\qquad$ $\theta_{2k-1} = \lambda_k$

$\theta_2 = \lambda_1 + \Delta$ $\qquad$ $\theta_{2k} = \lambda_k + \Delta$

$$e^{-\theta x} = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(-\theta x)^k}{k!} + o(\theta^{k+1})$$

$$\det \left(\sum_{k=1}^{n} g_i(x_k) \tau_j(x_k) \right)^m =$$

$$= \sum_{\substack{1 \le s_1 \le \dots \le s_m \le n \\ s_1 = 1 \quad s_2 = 1 \quad \dots \quad s_n = m = 2k}} \det^2 \left(g_i(x_{s_j}) \right) \det \left(\tau_j(x_{s_j}) \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_{2k} \\ x_1^2 & \dots & x_{2k}^2 \\ \vdots & & \\ x_1^{2k-1} & & x_{2k}^{2k-1} \end{vmatrix}_{= \prod (x_j - x_i)} \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ \theta_1 & \dots & \theta_{2k} \\ \theta_1^2 & \dots & \theta_{2k}^2 \\ \vdots & & \\ \theta_1^{2k-1} & \dots & \theta_{2k}^{2k-1} \end{vmatrix} = \prod (\theta_j - \theta_i)$$ (определитель Вандермонда)

$+$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & & 1 & 1 \\ x_1 & & x_{2k} & x_{2k+1} \\ x_1^2 & \dots & x_{2k}^2 & x_{2k+1}^2 \\ x_1^{2k-1} & \dots & x_{2k}^{2k-1} & x_{2k+1}^{2k} \\ x_1^{2k} & & x_{2k}^{2k} & x_{2k+1}^{2k} \end{vmatrix} = \prod_{2k \ge j \ge i \ge 1} (x_j - x_i) \Big| \sum x_i \prod_{2k \ge j \ge i \ge 1} (x_j - x_i)$$

$$x^{n+1} + a_1 x^n + \dots + a_n = 0$$

$$\mathcal{J}(\theta, x) = \prod (x_j - x_i) \prod (\theta_j - \theta_i) \cdot$$

$$\cdot \left[1 - \frac{1}{2k} \sum \theta_j \sum x_i + \dots \right]$$

$\theta_{2l} = \lambda_l$

$\theta_{2l+1} = \lambda_l + \Delta$

поделить на Δ^k

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta^k} \mathcal{J}(\theta, x) = \prod (x_j - x_i) \prod |\lambda_j - \lambda_i|^4 \cdot e^{-d \sum x_i} \cdot$$

$$\cdot \left[1 - \frac{1}{2k} \sum (\lambda_j - d) \sum x_j + \dots \right]$$

— разложение в ряд Тейлора,

т.е. $\tilde{M}(\tau, \mathbf{A})$ — вещественно-аналитическая

$\lambda_j \to d$

$$\tilde{M}(\tau, \mathbf{A}) \longrightarrow e^{-d \sum x_i} \prod_{j<i} (x_i - x_j) \longrightarrow \max$$

$$\left\{ e^{-d \sum x_i} \prod (x_i - x_j) \right\}'_{x_i} = -d + \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} = 0$$

(Стилтьес)

$$\frac{1}{2} \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \Bigg|_{x = x_i} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$\varphi''(x) + r(x) \varphi'(x) + C \varphi(x) = 0$$

Полином Лагерра L^1_{2k-1}

<u>Лемма 2.</u> При $\mathbf{A} \longrightarrow (d, \dots, d)^T$

Точки оптимального плана

$$(0, x_2, \dots, x_{2k}) \longrightarrow (0, \gamma_2, \dots, \gamma_{2k})$$

$$\gamma_j = \frac{2\gamma'_{j-1}}{d}$$

$\gamma'_1, \dots, \gamma'_{2k-1}$ — нули многочлена L'_{2k-1}.

vb melas @ post.ru

§3. Структура матрицы Якоби

$$J = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{M}(\tau, \mathbb{A}) \right)_{i,j=2}^{2k}$$

$\tau = \tau(\lambda)$ — локально-оптимальный план

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{M}(\tau, \mathbb{A}) = 0 \qquad j = 2, \ldots, 2k$$

$$J = (J_{ij})_{i,j=2}^{2k}$$

<u>Лемма</u> В матрице Якоби

$$J_{ii} < 0, \quad J_{ij} > 0 \quad i \neq j.$$

$$g(z) = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{M}(\tau_z, \mathbb{A})$$

$$\tau_z = \{ x_2, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_{2k} \}$$

$$g(x_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} M(\tau, \mathbb{A}) = 0 \qquad \text{при фикс. } i$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} M(\tau, \mathbb{A}) < 0$$

1) $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} M(\tau, \mathbb{A}) \neq 0$

берём $J(\Theta, \Lambda)$ с предельным переходом будем получать требуемое)

$$J(\Theta, \Lambda) = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_m(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_{i-1}) & & f_m(x_{i-1}) \\ f_1'(t) & & f_m'(t) \\ f_1(x_{i+1}) & & \\ f_1(x_{2k}) & \ldots & f_m(x_{2k}) \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i t} b_i + \sum_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i t} t c_i$$

(вторые производные отрицательны в точке локального максимума)

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} M(\tau, \Lambda) > 0$$

$$J = \begin{pmatrix} - & + & + & + & \\ + & - & + & + & \\ + & + & - & + & \vdots \\ + & + & + & - & \\ & & & & - \\ - & \ldots & - & & \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=2}^{2k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{M}(\tau, \Lambda) < 0.$$

$$\sum_{i=1}^{2k} \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{M}(\tau, \Lambda) = -2 \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \tilde{M}(\tau, \Lambda)$$

$$\det \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 (x_1+\Delta)} & (x_1+\Delta) e^{-\lambda_1(x_1+\Delta)} & \ldots \\ \ldots\ e^{-\lambda_k (x_1+\Delta)} & & (x_1+\Delta) e^{-\lambda_k (x_1+\Delta)} \\ e^{-\lambda_1 (x_{2k}+\Delta)} & (x_{2k}+\Delta) e^{-\lambda_1 (x_{2k}+\Delta)} & \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{2k} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta^{2k}} \det \ldots$$

$$e^{-\lambda_1 \Delta} \quad e^{-\lambda_1 \Delta} \quad e^{-\lambda_1 \Delta} \ldots$$

$$= \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{M}(\tau, \Lambda) - 2 \sum \lambda_i \tilde{M}(\tau, \lambda) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = 0$$

$$\sum_{j=2}^{2k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{M}(\tau, \Lambda) \leq 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots$$

$$|J_{ii}| > \sum_{j \neq i} |J_{ij}| = \sum J_{ij}$$

1) критерий Адамара

$\det P \neq 0$ $\qquad |p_{ii}| > \sum_{i \neq j} |p_{ij}|$

2) $P_{ii} < 0$, $\quad P_{ij} > 0 \quad j \neq i \quad$ и

P обратима.

Тогда P^{-1} состоит из отрицат. эл-тов

аналогично

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = (\quad)$$

$|\cdot|$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$|\cdot| = 10$

① J обратима — применима теорема о неявной функции

$\lambda^0, \ \tau(\lambda) \qquad \frac{\partial \tilde{M}(\tau, \Lambda)}{\partial x_j} = 0$

② J^{-1} состоит из отрицательных эл-тов

$J\tau'_{z_j}(z) = J'_{z_j}$

Единственность решения:
(теорема о неявной функции — единственность только в окрестности)

$$\bar{M}(\tau,\Lambda) = \det \left\| e^{-\lambda_1 x_i}, x_i e^{-\lambda_1 x_i}, \dots, e^{-\lambda_k x_i}, x_i e^{-\lambda_k x_i} \right\|_{i=1}^{2k}$$

$\tau = \{x_1, \dots, x_{2k}\} \longrightarrow \max_{\tau}$ Λ

$0 \le x_1 < \dots < x_{2k} < \infty$

В случаях $k=1$, $k=2$

локально оптимальные планы насыщенные

$$\tilde{M}(t,\Lambda) = \frac{\bar{M}(\tau,\Lambda)}{\prod_{j>i} (\lambda_j - \lambda_i)^4}$$

вещественно-аналитическая

$$\tilde{\tilde{M}}(\tau,\Lambda) = \frac{\tilde{M}(\tau,\Lambda)}{\prod_{j>i} (x_j - x_i)}$$

Утв. 1. Если $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+s} \longrightarrow \bar{x}$, то функция $\tilde{\tilde{M}}(\tau,\Lambda)$ имеет конечный положительный предел.

Лемма 1. Пусть $f_1(x), \dots, f_s(x)$ — произвольные $(s-1)$ раз дифф. функции на некотором интервале $[a,b]$.

$x_1 < x_2 < \dots < x_s$

$$\frac{\det \left(f_i(x_j) \right)_{i,j=1}^{s}}{\prod_{s \ge j > i \ge 1} (x_j - x_i)} \xrightarrow[x_i \to \bar{x}]{} \det \left(f_i(\bar{x}), f_i'(\bar{x}), \dots, f_i^{(s-1)}(\bar{x}) \right)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_s(x_1) \\ \vdots & & \\ f_1(x_s) & & f_s(x_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (x_1-x_2)^{-1} & (x_1-x_2)^{-1}(x_1-x_3)^{-1} & \prod_{j\ne 1}(x_1-x_j)^{-1} \\ 0 & (x_2-x_1)^{-1} & (x_2-x_1)^{-1}(x_2-x_3)^{-1} & \prod_{j\ne 1}(x_2-x_j)^{-1} \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \prod_{j\ne s}(x_s-x_j)^{-1} \end{pmatrix}$$

$s = 2$

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (x_1 - x_2)^{-1} \\ 0 & (x_2 - x_1)^{-1} \end{pmatrix} = \frac{\det(f_i(x_j))}{x_2 - x_1}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dfrac{f_1(x_1) - f_1(x_2)}{x_1 - x_2} \\ f_2(x_1) & \dfrac{f_2(x_1) - f_2(x_2)}{x_1 - x_2} \end{pmatrix} \xrightarrow[x_1, x_2 \to \bar{x}]{x_2 \to x_1}$$

$$\to \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) & f_1'(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) & f_2'(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & f_1(x_3) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & f_2(x_3) \\ f_3(x_1) & f_3(x_2) & f_3(x_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (x_1 - x_2)^{-1} & (x_1 - x_2)^{-1}(x_1 - x_3)^{-1} \\ 0 & (x_2 - x_1)^{-1} & (x_2 - x_1)^{-1}(x_2 - x_3)^{-1} \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1)^{-1}(x_3 - x_2)^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dfrac{f_1(x_1) - f_2(x_2)}{x_2 - x_1} \\ f_2(x_1) & \dfrac{f_2(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ f_3(x_1) & \dfrac{f_3(x_2) - f_3(x_1)}{x_3 - x_1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\dfrac{f_i(x_3) - f_i(x_2)}{x_3 - x_2} - \dfrac{f_i(x_2) - f_i(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} \to \frac{f_i'(x_2) - f_i'(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$= f''(x_2)$$

Будем говорить, что функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ образуют расширенную систему Чебышёва на отрезке $[a, b]$ порядка k, если

$$\lim \frac{\det(f_i(x))}{\prod\limits_{j>i} (x_j - x_i)} > 0$$

$x_i, \dots, x_{i+k-1} \to x$

(остальные фиксированы)

(является конечным и положительным)

$x \neq x_i$

$$\det \left(f_i(\bar{x}) f_i'(\bar{x}) \dots f_i^{(k-1)}(\bar{x}),\ f_i(x_{s+1}), \dots, f_i(x_n) \right) \neq 0$$

$x_1, \dots, x_s$

$\sum_{i=1}^{n} a_i f(x)$ имеет не более $(S-1)$ нулей с учётом кратности до k-го порядка

$\sum a_i^2 > 0$

(иначе можно прийти к противоречию)

наша система — порядка..

$$\sum_{i=1}^{k} a_i e^{-\lambda_i x} =$$

$e^{-\lambda x} [\dots \sum \ ]'$ $k-1$ нуль (для производных)

$$\tilde{M}(\tau, \Lambda) = \frac{\check{M}(\tau, \Lambda)}{\Pi (x_j - x_i)}$$ предел конечен и положителен

<u>Лемма</u>. Пусть W — максимальная окрестность точки $\Lambda^{(0)}$, в которой существует непрерывная $\tau(\Lambda)$:

$\tau(\Lambda^{(0)}) = \tau^{(0)}$

$$\frac{\partial \tilde{M}(\tau, \Lambda)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 2, \dots, 2k$$

$0 < x_2 < \dots < x_k$

$W \supset S_d \qquad \forall d > 0$

$S_d = \{ \Lambda,\ \lambda_i \geq d,\ i = 1, \dots, k \}$

От противного: пусть это не так $(W \not\supset S_d)$

тогда $\exists\ \Lambda' \notin W$

$\Lambda' + \alpha U \in W$, $\alpha > 0$

$\tau(\Lambda') = \lim \tau(\Lambda)$ (по непрерывности)

но числа могут совпасть

$0 < x_2 \leq \dots \leq x_{2k}$

тогда $\forall \varepsilon\ \exists \delta$:

$\forall \alpha < \varepsilon \qquad \Lambda' + \alpha U \in W \qquad |x_i - x_{i+1}| < \delta$

$$\infty > \frac{\partial \tilde{M}(\tau, \Lambda)}{\partial x_i} = \underbrace{\left(\partial \tilde{M}(\tau, \Lambda)\right)'_{x_i}}_{0} \frac{1}{\Pi(x_i - x_j)} + \frac{\tilde{M}(\tau, \Lambda)}{\Pi(x_i - x_j)} \underbrace{\sum \frac{1}{x_i - x_j}}_{\infty}$$

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{M}(\tau, \Lambda)}{\partial x_i} = 0 \\ 0 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{2k} \\ \tau(\Lambda') \end{cases}$$

может быть распространено на все мн-ва...

приводит к противоречию.

Лемма. Система $(*)$ имеет единственное решение.

Д-во: в какой-то точке

$\tau_1(\Lambda) = \tau_{(1)}$

$\tau_2(\Lambda) = \tau_{(1)}$

$\Lambda \in S_d, \quad \Lambda_d$

...

противоречие — система имеет единственное решение

есть в сборнике

$$J = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{M}(\tau, \Lambda)\right)^{2k}_{i,j=2}$$

$$L_j = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{M}(\tau, \Lambda)\right)^{k}_{i=1}$$

$$\boxed{J\tau'_{\lambda_i} = L_i}$$

Опр. Оптимальный план $\mathcal{G}$... са

$\tau(\Lambda): S \to [0, \infty)^{2k-1}$ — ОП функции, если при каждом фиксированном Λ $\tau(\Lambda)$ есть план, локально-оптимальный в классе насыщенных планов

Теорема. Оптимальный план функции существует и определён единственным образом; координаты этой функции (кроме первой) есть вещественно-аналитические функции, которые строго монотонно убывают по любому из параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

рекуррентная формула (в книге Functional Approach to Optimal Experimental Design, Melas 2006 Springer) (глава 2)

$$J \sim \begin{pmatrix} + & + & - \\ & \ddots & \\ - & & + \end{pmatrix}$$ (в случае экспоненты)

Строим разложение $\tau(\Lambda)$ в ряд Тейлора

$$\tau_{(s)}(z) = \tau_0 + \tau_1 z + \ldots + \tau_s z^s$$

$$\tau_{s+1} = -J_{(0)}\, g_{(s+1)}(\tau_{(s)}(z), z)$$

$$g_{(s)}(u) = \frac{d^s}{du^s} g(u)\Big|_{u=u_0}$$

Глава 6. Функ.

§1. Основные уравнения

$$y = \eta(x, \theta) + \xi \qquad \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$$

$$M(\xi, \theta) = \sum f(x_i, \theta)\, f^T(x_i, \theta)\, \omega_i$$

$$f_i(x, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \eta(x, \theta)$$

$$\psi(t, \theta) = \left(\det M(\xi, \theta)\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$x_i \in [a, b] \qquad 0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$$

$$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \ldots \quad \omega_n$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} \psi(\tau, \theta) = 0$$

$$\tau_1 = x_2$$

$$\ldots$$

$$\tau_{n-1} = x_n$$

$$\tau_n = \omega_1$$

$$\ldots$$

$$\tau_{2n-2} = \omega_{n-1}$$

$$g_i(\tau, \theta) = \frac{\partial}{\partial \tau_i} \psi(\tau, \theta)$$

$$g(\tau, \theta) = 0$$

$$(g_1, \ldots, g_m)$$

§2.

$\tau \in \mathbb{R}^m, \quad z \in \mathbb{R}^r$

$g(\tau, z)$

$g = (g_1, \dots, g_m)$

$u = (\tau, z) \in \mathbb{R}^{n+k} \qquad u \in U$

$\tau_{(0)}, z_{(0)} : \quad g(\tau_{(0)}, z_{(0)}) = 0$

$$J(\tau, z) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau_i} g_j (\tau, z) \right)_{i,j=1}^{m}$$

$J_{(0)} = J(\tau_{(0)}, z_{(0)})$

Th. $\Rightarrow \quad \det (J(\tau_{(0)}, z_{(0)})) \neq 0$

$\tau(z) \qquad \tau(z_0) = \tau_0$

$g(\tau(z), z) = 0 \qquad z \in V$

случай $k = 1$

$$\tau(z) = \tau_{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \tau_{(i)} z^i$$

$\tau_{(0)}$ известно

$$\tau_{<n>}(z) = \tau_0 + \sum_{i=1}^{n} \tau_{(i)} z^i \quad ;$$

$$\tau_{<0>}(z) \equiv \tau_{(0)}$$

$\tau_{(0)}, \dots, \tau_{(n-1)}$; будем искать $\tau_{(n)}$.

$$\tau_{(n)} = -\frac{1}{n!} J_{(0)}^{-1} \left(g(\tau_{<n-1>}(z), z) \right)^{(n)} \Big|_{z = z_0}$$

Пример 1.

$g(\tau, z) = \sin z - \ln \tau \quad ;$

$\left(g(\tau, z) = e^{\sin z} \right)$

рекуррентные формулы:

$z_0 = 0$

$\tau_{(0)} : \quad -\ln(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{(0)} = 1.$

$\tau_{(1)}(z) = 1 - \tau_{(1)} z$

$$\tau_{(1)} = -J_{(0)}^{-1} g'(\tau, z) \Big|_{\substack{z = z_{(0)} \\ \tau = \tau_{(0)}}}$$

$$(\sin z)'_z \Big|_{z=0} = \cos z_0 = 1$$

$$J(1,0) = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\sin z - \ln \tau) = -\frac{1}{\tau}\Big|_{\tau=\tau_0} = 1$$

$$\tau_{(1)} = (-1)(-1)\cdot 1 = 1$$

$$\tau_{(2)} = -\frac{1}{2} J^{-1}_{(0)} \left(g(\tau_{<1>}(z), z)\right)'' \Big|_{z=z_0} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\sin z - \ln(1+z)\right)''\Big|_{z_0} = \frac{1}{2}(-1)\left(\frac{1}{1+z}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\tau_{(3)} = -\frac{1}{2} J^{-1}_{(0)}\, g^{(3)}\left(\tau_{<2>}(z), z\right)\Big|_{z=z_0} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin z - \ln\left(1+z+\frac{z^2}{2}\right)\right)'''\Big|_{z=z_0} =$$

$$= \frac{1}{2}(-1-1)$$

$$\left(\frac{1+z}{1+z+\frac{z^2}{2}}\right)'' \overset{?}{=} \frac{\left(1+z+\frac{z^2}{2}\right)-(z+1)^2}{1+z+\frac{z^2}{2}} = \ldots = -1$$

<u>Пример 2.</u>

$$g(\tau, z) = \tau^3 + \tau^2 - 2\tau + z$$

$$g(\tau, z) = 0.$$

$$\tau^3 + \tau^2 - 2\tau \qquad \tau_{(0)} = 1,\ -2,\ 0$$

$\tau_{(0)} = 0$

(три начальных условия)
(по любому)

$$J(\tau, z) = \frac{\partial}{\partial \tau} g(\tau, z) = 3\tau^2 + 2\tau - 2$$

$$J(0, z) = -2$$

$$g(0, z) = z \qquad g(0, z)'_z = 1$$

$$\tau_{(1)} = -\frac{1}{2} J^{-1}_{(0)} \left(g(\tau, z)\right)'_{z=0} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3.

$$\eta(x,\theta) = a_1 e^{-\lambda_1 x} + a_2 e^{-\lambda_2 x}$$

$$g(\tau, z) = \det\left(e^{-\lambda_1 x_i},\ x_i e^{-\lambda_1 x_i},\ e^{-\lambda_2 x_i},\ x_i e^{-\lambda_2 x_i}\right)$$

$$x_1 = 0$$

$$\tau = (x_1, x_3, x_4)$$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 1 \quad \text{без ограничения общности т.к.}$$

$$\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = h_i \Rightarrow x_i = \frac{\tilde{x}_i}{h}\right]$$

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} = z$$

$$\frac{\partial}{\partial z} g(\tau(z), z)$$

Лемма 1.

$$\frac{\partial}{\partial z} g(\tau(z), z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \tau_i} g(\tau(z), z)\frac{\partial \tau_i(z)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} g(\tau, z)\Big|_{\tau=\tau(z)}$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{g(\tau(z+\Delta), z+\Delta) - g(\tau, z)}{\Delta} =$$

$$= \frac{g(\tau(z+\Delta); z+\Delta) - g(\tau(z+\Delta), z)}{\Delta} + \frac{g(\tau+\Delta, z) - g(\tau, z)}{\Delta\tau} \ldots$$

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} g(\tau(z), z) = \frac{\partial^n}{\partial z^n} g(\tau, z)\Big|_{\tau=\tau(z)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \tau_i} g(\tau(z), z)\frac{\partial \tau_i}{\partial z} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_j} g(\tau(z), z)\frac{\partial \tau_i}{\partial z}\frac{\partial \tau_j}{\partial z} + \ldots +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_n=1}^{m} \frac{\partial^n}{\partial \tau_{i_1}\ldots\partial \tau_{i_n}} g(\tau(z), z)\frac{\partial \tau_{i_1}}{\partial z}\frac{\partial \tau_{i_2}}{\partial z}\cdots\frac{\partial \tau_{i_n}}{\partial z}$$

$$z \longrightarrow z_0$$

($\tau(z)$ — решение)

$$0 \equiv \frac{\partial^n}{\partial z^n} g(\tau(z), z)\Big|_{z=z_0} =$$

$$= n!\, J_{(0)} \tau_{(n)} + \frac{\partial^n}{\partial z^n} g(\tau_{(0)}, z_{(0)}) + \ldots +$$

$$+ \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{m} \frac{\partial^n}{\partial \tau_{i_1} \ldots \partial \tau_{i_n}} g(\tau_{(0)}, z_{(0)})\, \tau_{i_1(1)} \ldots \tau_{i_n(1)} \tau_{i_1} \ldots \tau_{i_n} =$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial z_n} g(\tau_{\langle n \rangle}(z), z) = \underbrace{n!\, J_{(0)} \tau_{(n)} + \frac{\partial^n}{\partial z^n} g(\tau_{\langle n-1 \rangle}(z), z)}_{=0}$$

$$-\frac{1}{n!} J^{-1}_{(0)} \frac{\partial^n}{\partial z^n} g(\tau_{\langle n-1 \rangle}(z), z) = \tau_{(n)}$$

[в выкладках файле]

$k > 1$ (обобщённая рекуррентная ф-я)

$$\tau(z) = \tau_{(0)} + \sum_{t=1}^{\infty} \sum \tau_{(s)} (z_1 - z_{1(0)})^{s_1} \cdot \ldots \cdot (z_k - z_{k(0)})^{s_k}$$

$$s = (s_1, \ldots, s_k) \qquad \sum_{i=1}^{k} s_i = t$$

$$\tau_{(s)} = \tau(s_1, \ldots, s_k)$$

$$(z_1 - z_{1(0)}) \ldots (z_k - z_{k(0)}) \quad ?$$

$$\psi_{(s)}(z) = \frac{\psi^{(s_1, s_2, \ldots, s_k)}_{z_1 \ldots z_k}}{s_1!\, s_2! \ldots s_k!}$$

$$\tau_{(s)} = -J_{(0)}\, g(\tau_{\langle I \rangle}(z), z)_s, \qquad s \in S_t \quad I = I_{t-1}$$

$$\tau_{\langle I \rangle}(z) = \sum_{s \in I} \tau_{(s)} (z_1 - z_{1(0)})^{s_1} \cdot \ldots \cdot (z_k - z_{k(0)})^{s_k}$$

$s \in S_t$

$I = I_{t-1}$

$$I_n = \bigcup_{t=0}^{m} S_t \qquad S_t = \{ s,\ \sum_{i=1}^{k} s_i = t \}$$

при вычислениях

$\tau_{(s)}, s$ $\quad \sum s_i = t$ определяем

$\tau_{(s)}$ $\quad \sum s_i = t+1$

(Зависимость точек плане от параметров в многомерном случае)

(Подробнее — в файле)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^n} g(\tau(z), z) \Big| = \frac{\partial^n}{\partial z^n} g(\tau_{<n>}(z), z)$$

(зависит от первых n членов)

Упражнение:

$\tau_0 = 1$

$$g(\tau, z) = \tau^3 + \tau^2 - 2\tau + z$$

(5-6 итераций в Maple, дальше не работает)

$\tau_{(1)} = -\frac{1}{6}$?

$\left(g\left(1 - \frac{1}{6}, z\right)\right)' = ?$

Глава 7 Дробно-рациональные модели.

$$y = \eta(x, \theta) + \varepsilon$$

$$\eta(x, \theta) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{d_2} p_i x^i}{\sum_{i=0}^{d_1 - 1} q_i x^i + x^{d_1}};$$

$$\theta = (p_0, \dots, p_{d_2}, q_0, \dots, q_{d_1 - 1}).$$

Два ограничения: (и одно требует дополнительного анализа)

1) дробь несократима (иначе число параметров можно уменьшить)

2) $Q(x) \neq 0 \quad x \in \mathcal{X} = [0, 1]$

3) $d_2 \geq d_1 - 1$

Пример 1. $\eta(x, \theta) = \frac{\theta_1}{x + \theta_2} = \frac{a}{x + b}$

$$f_1(x) = \frac{\partial}{\partial a} \eta(x, \theta) = \frac{1}{x + b}$$

$$f_2(x) = \frac{\partial}{\partial b} \eta(x, \theta) = -\frac{a}{(x+b)^2} \sim \frac{1}{(x+b)^2}$$

линеаризация

(константы не влияют)

$$f(x) = \left(\frac{1}{x+b}, \ \frac{1}{(x+b)^2} \right)^T.$$

$b > 0, \qquad \mathcal{X} = [0, d].$

Число точек в плане — ?

предположим $n = m$ (числу параметров)

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1+b} & \frac{1}{(x_1+b)^2} \\ \frac{1}{x_2+b} & \frac{1}{(x_2+b)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x_1+b)^2} \frac{1}{(x_2+b)^2} \begin{pmatrix} x_1+b & 1 \\ x_2+b & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{x_1 - x_2}{(x_1+b)^2 (x_2+b)^2} \qquad (x_1 > x_2)$$

$x_1 - h, \quad x_2 - h$ — смещение

знаменатель уменьшается

$\Downarrow x_2 = 0$ (левая граница промежутка)

$M = F^T W F$

$\det M = (\det F)^2 \det W$

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{x}{(x+c)^2} \right)' = 0$$

$$\frac{1}{(x+b)^2} + \frac{?\,bx}{(x+b)^2} = 0$$

$x + b - ?x = 0$

$x = b$

Пример 2. Модель Михаэлиса–Ментен

(не входит в класс дробно-рациональных!)

$$\eta(x) = \frac{\theta_1 x}{x + \theta_2} = \frac{ax}{x+b}$$

$$f_1(x) = \frac{\partial}{\partial a} \eta = \frac{x}{x+c}$$

$$f_2(x) = \frac{\partial}{\partial b} \eta = \frac{-ax}{(x+b)^2} = \frac{x}{(x-b)^2}$$

$$\left(\frac{x}{x+b}, \ \frac{x}{(x+b)^2} \right) \qquad x \in [0, d]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_1+b} & \frac{x_1}{(x_1+b)^2} \\ \frac{x_1}{(x_1+b)^2} & \frac{x_2}{(x_2+b)^2} \end{pmatrix} = \frac{x_1 x_2}{(x_1+b)^2 (x_2+b)^2} \begin{pmatrix} x_2+b & x_1+b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2) x_1 x_2}{(x_1+b)^2 (x_2+b)^2}$$

предполагаем $n = m$

однако с нулём точки не совпадают.

Максимальная точка совпадает с правой границей

$$\frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{x_1} - \frac{2}{(x_1+b)}$$

$$\left(\frac{1}{x_1 - x_2} - \frac{1}{x_1+b}\right) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1+b}\right) > 0$$

$\Rightarrow$ по x_1 возрастает

$\Rightarrow$ макс. точка плана на правой границе.

$$\frac{(d-x)xd}{(d+b)^2(x+b)^2} \longleftrightarrow \max_x$$

производная:

$$-\frac{1}{d-x} + \frac{1}{x} - \frac{2}{(x+b)} = 0$$

$$-x(x+b) + (d-x)(x-b) - 2x(d-x)$$

$$db - \cancel{2x^2} - 2xb + xd + \cancel{2x^2} - 2xd = 0$$

$$db - 2xb - xd = 0$$

$$x = \frac{db}{d+2b} < \frac{d}{2} < d$$

§2. Теорема о числе точек

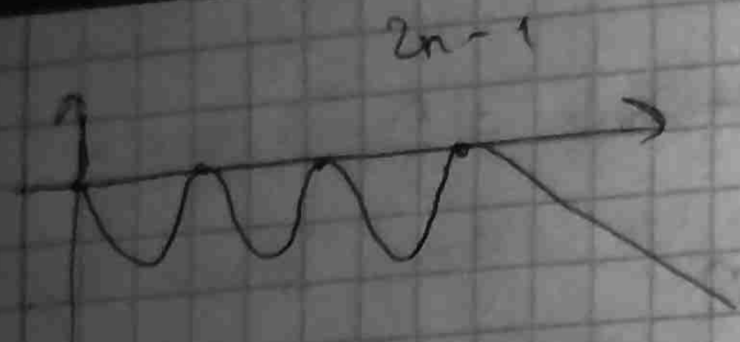
$$f_i(x) = \frac{x^{i-1}}{Q(x)} \qquad i = 1, \dots, d_2+1$$

$$f_{i+d_2+1}(x) = \frac{x^{i-1}}{Q^2(x)} P(x)$$

$$f^T(x) M^{-1}(\xi) f(x) - m = \frac{V(x)}{Q^4(x)} - m \leq 0.$$

$$\frac{V(x) - m Q^4(x)}{Q^4(x)} = 0 \qquad \text{во всех точках плана}$$

производная $= 0$ во всех точках, не совп. с границей



считаем нули $\Rightarrow$ число точек не больше числа параметров

§3. Формула для определителя

$$F = \left(f_1(x_i), \dots, f_n(x_i) \right)_{i=1}^{n}$$

$$\det F = \frac{\prod (x_j - x_i)}{\prod_{i=1}^{n} Q^2(x_i)}$$ (линейные преобразования строк)

§4. Метод Стилтьеса

$$\frac{\prod_{j>i} (x_j - x_i)}{\prod \omega(x_i)} \qquad x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

в нашем случае: $\omega(x) = Q^2(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \det F = \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} + \frac{\omega'(x_i)}{\omega(x_i)} \right) \det F = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \Big|_{x = x_i} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} =$$

$$\varphi(x) = \prod_{j=2}^{n} (x - x_i)$$ (одна точка нулевая)

$$= \frac{1}{2} \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \Big|_{x = x_i} + \frac{\omega'(x_i)}{\omega(x_i)} = \frac{\varphi(x) \cdot q(x)}{R(x)}$$

делится на φ

$$\varphi''(x)\, \omega(x) + 2 \varphi'(x)\, \omega'(x) = \varphi(x) \cdot q(x)$$

произвольный многочлен $r(x) = \sum_{i=1}^{k} r_i x^i$

$$r'(x) = f^T(x) A r$$

$ax^2 + bx + c$

$a 2x + b$ — производная

$$c^T \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = c^T \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

производные

$$\begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 0 \\ & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\varphi'(x) = f^T(x)\, A_\varphi$$

$$\varphi(x) = \prod_{i=2}^{n} (x - x_i) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i x^{n-i}$$

$$\varphi''(x)\,\omega(x) + 2\varphi'(x)\,\omega'(x) = f^T(x)\, A\psi = \sum (q_i x^i)\varphi(x)$$

$$\begin{pmatrix} x^{n-1+r} \\ x^{n-2+r} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T \qquad A\psi = f^T(x) \sum \lambda_i E_i\, \psi$$

$$\omega(x) = (x + z_1)(x + z_2)$$

$$\varphi''(x)\, x\,(x + z_1)(x + z_2) + 2\varphi'(x)\Big((x+z_1)(x+z_2) - 2x \cdot$$

$$\cdot\,(2x + z_1 + z_2)\Big)$$

$$\psi(x) = x^3 + \psi_1 x^2 + \psi_2 x + \psi_3$$

$\Delta = z_1 + z_2$ $\qquad$ $z_1 z_2 = 1$

$$x(6x + 2\psi_1)(x^2 + \Delta x + 1) + 2(3x^2 + 2\psi_1 x + \psi_2)\cdot$$

$$\cdot\left[-3x^2 - \Delta x + 1\right] =$$

x^4 : -12

x^3 : $6 + 2\psi_1 - 12\psi_1$

x^2 : $2\Delta + 6 - 4\psi_1 - 6\psi_2$

x^1 : $2\psi_1 + 4\psi_1 - 2\Delta\psi_2$

x^0 : $2\psi_2$

$$(x^4\ x^3\ x^2\ x\ 1)\underbrace{\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 12 & -2\Delta & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -2\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} 1 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \sum \lambda_i x^i \varphi(x)$$

$$= q(x)\varphi(x)$$

$$\left(A - \sum \lambda_i E_i\right)\psi = 0$$

E_0 $\qquad \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0\ 0 \\ 0 \\ \ I \\ \ \ 0 \end{pmatrix}$

E_1

$\lambda_0 = 12$

$$\begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0-\lambda & 2 & 0 & \cancel{0} \\ 12 & -2\Delta-\lambda & 6 & \cancel{0} \\ 0 & 6 & -2\Delta-\lambda & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 2 & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{matrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 12 & -2\Delta-\lambda & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -2\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{matrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 12 & -2\Delta-\lambda & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -2\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det B_{(1)} = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 12 & -2\Delta-\lambda & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2\Delta-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda^2 - 2\Delta\lambda - 24)^2 - 36\lambda^2$$

$$\lambda = -\Delta - 3 - \sqrt{(\Delta+3)^2 + 24}$$

$$\psi = x^3 - \frac{\lambda}{2}x^2 + \frac{\lambda}{2}x - 1 = (x-1)\left(x^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)x + 1\right)$$

$$x_3 = 1$$

$$x_{2,4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right)^2 + 4}\right)$$

$$Q(x) = (x + z_1)(x + z_2)$$

$$\frac{P(x)}{(x+z_1)(x+z_2)}$$

$z_1 z_2 = 1$

умножением на h знаменателя
критерий не изменится

$$x_i = \sqrt{z_1 z_2}\, x_i^k.$$

Теорема.

1) нужно найти $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — решение уравнения

$$\left(A - \sum \lambda_i E_i\right)\psi = 0$$

$B_1, \dots, B_r$ — матрицы

$\det B_i = 0$

ψ можно рекуррентно выписать в явном виде.

Основные шаги:

1. метод Стилтьеса

$$\left(\frac{\Pi(x_i - x_j)}{Q(x)}\right)'_{x_i} = 0$$

$$f^T(x) A \psi = \left(\sum \lambda_i E_i\right)\psi$$

$$p^T f(x) \to p^T f'(x)$$

производную 2-3 матрицу в Maple

решение ψ соответствует плану, для которого выражение имеет локальный оптимум

$\Rightarrow$ локальный план.

Для модели Михаэлиса-Ментен

$x_1 = d \qquad x_2 = \frac{bd}{2b+d}$

$\frac{x}{x+b} \qquad \frac{x}{(x+b)^2}$

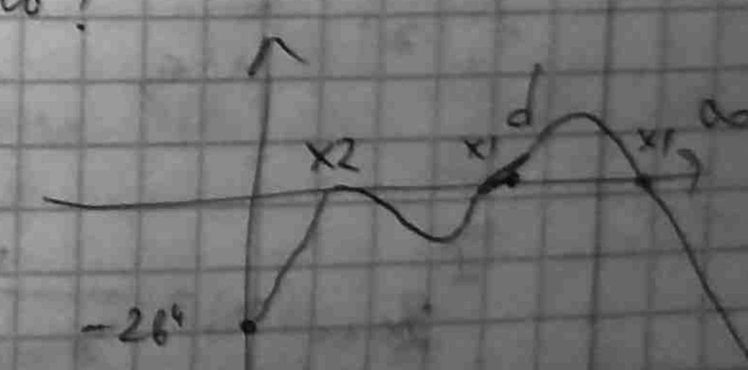
$$\begin{pmatrix} \frac{x}{x+b} \\ \frac{x}{(x+b)^2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{x+b} \\ \frac{x}{(x+b)^2} \end{pmatrix} \le 2$$

$$\left(\frac{x}{x+b}\right)^2 a + \frac{x^2}{(x+b)^3} b + \frac{x^2}{(x+b)^4} c - 2 \le 0$$

$$\frac{a(x+b)^2x^2 + b(x+b)x^2 + cx^2 - 2(x+b)^4}{(x+b)^4} \le 0$$

Сколько раз обращается в ноль?

Если ещё одно „касание“ — корень кратности 2, что невозможно



$$\frac{\theta_1}{x+\theta_2} + \frac{\theta_3}{x+\theta_4}$$

(глава 3 пособия)

§3.

$$\eta(x,\theta) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\theta_{2i-1}}{x+\theta_{2i}}$$

$k=1$ $[0,1]$

$k=2$

Шаг 1

$\tilde{x} = x - c$

$\tilde{\theta}_{2i} = \theta_{2i} + c$

$\tilde{d} = d - c$ $[0, \tilde{d}]$

Шаг 2. $f_i(x) = \dfrac{\partial \eta(x,\theta)}{\partial \theta_i}$

$\tilde{f}_1(x) = \dfrac{1}{x+\theta_2}$ $\tilde{f}_2(x) = \dfrac{1}{(x+\theta_2)^2}$

$\tilde{f}_{2k+1}(x) = \dfrac{1}{x+\theta_{2k}}$ $\tilde{f}_{2k} = \dfrac{1}{(x+\theta_{2k})^2}$

$f(x) = L\tilde{f}(x)$

$L = \mathrm{diag}\left\{1, -\frac{1}{\theta_1}, \dots, 1 - \frac{1}{\theta_k}\right\}$

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(x) f^T(x)\, \omega_i = L\tilde{M}(\xi)L^T$$

$$\det M(\xi) = \det \tilde{M} \cdot (\det L)^2$$

<u>Лемма 1.</u> Число опорных точек в оптимальном плане — $2k$.

$\exists\ \xi^* = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \omega_1 & \dots & \omega_n \end{pmatrix}$ — D-оптимальный план

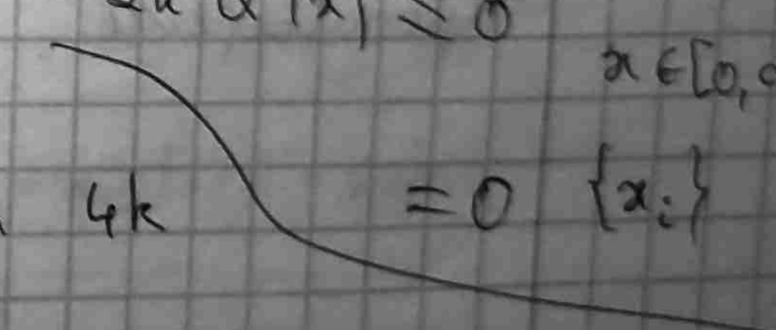
$f^T(x) M^{-1}(\xi) f(x) \leq 2k$ $\left(\cdot\ Q^4(x) = \left(\prod_{i=1}^{k} (x+\theta_{2i})\right)^4\right.$ (избавляемся от дробей)

$f^T(x_i) M^{-1}(\xi^*) f(x_i) = 2k$

$g(x) = Q^4(x) f^T(x) M^{-1}(\xi^*) f(x) - 2k\, Q^4(x) \leq 0$ $x \in [0,d]$

$g(x)$ — многочлен степени $4k$ $=0$ $\{x_i\}$

deg: $4k-2$ $4k$



Число точек: $n \geq 2k$.

Предположим $n \geq 2k+1$.

$0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq d$

В т. $x_2, \ldots, x_{n-1}$ производная равна 0

$2(2n-1)+2$

$n \geq 2k+1$

$2(2n-1)+2 \geq 4k$

Может иметь $4k$ корней с учётом кратности

Если $\deg g = 4k$, то т. d — простой корень

$x \to \infty$ ф-я отрицательна

если ф-я > 0 при $x > d$, корней $4k+1$.

Противоречие.

$F = \left(f_i(x_j)\right)_{i,j=1}^{2k}$ $\qquad W = \operatorname{diag}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$

$\det M = (\det F)^2 \prod \omega_i$

$\prod \omega_i \leq \left(\frac{2\omega_i}{2k}\right)^{2k}$

$M(\xi) = F^T W F \longrightarrow \max.$

$\Downarrow$

$\det F \longrightarrow \max.$

Лемма 2. формула для определителя

$$\det F = \frac{\prod\limits_{j>i}(\theta_j-\theta_i)^2 \prod\limits_{j>i}(x_j - x_i)}{\prod\limits_{i=1}^{2k}\prod\limits_{j=1}^{n}(x_i+\theta_{2j})}$$

$$G = \left(\frac{1}{x_i+\theta_j}\right)_{i,j=1}^{n}$$

Лемма 3.

$$\det G = \frac{\prod(x_j-x_i)\prod(\theta_j-\theta_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i+\theta_j)}$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{x_i + b_1} \\ \frac{1}{x_i + b_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_i + b_n} \end{pmatrix}_{i=1}^{n} = \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (x_i + b_j)\right)^{-1} \det \begin{pmatrix} \prod_{j\neq 1} (x_i + b_j) \\ \prod_{j \neq 2} (x_i + b_j) \\ \vdots \\ \prod_{j \neq n} (x_i + b_j) \end{pmatrix}_{i=1}^{n}$$

из ~~втор~~ всех строк вычтем первую

$n = 4$:

$$\begin{pmatrix} (x_i + b_2)(x_i + b_3)(x_i + b_4) \\ (x_i + b_1)(x_i + b_3)(x_i + b_4) \\ (x_i + b_1)(x_i + b_2)(x_i + b_4) \\ (x_i + b_1)(x_i + b_2)(x_i + b_3) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} (x_i + b_3)(x_i + b_4)(b_1 - b_2) \\ (x_i + b_2)(x_i + b_4)(b_1 - b_3) \\ \vdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \prod_{j \neq 1} (x_i + b_j) \\ \prod_{j \neq 1,2} (x_i + b_j)(b_1 - b_2) \\ \prod_{j \neq 1,3} (x_i + b_j)(b_1 - b_3) \\ \vdots \\ \prod_{j \neq 1,n} (x_i + b_j)(b_1 - b_n) \end{pmatrix} = \cancel{\prod_{j \neq 1} (b_1 - b_j)}$$

$$= \prod_{j>i} (b_j - b_i) \begin{pmatrix} \prod_{j \neq 1} (x_i + b_j) \\ \prod_{j \neq 1,2} (x_i + b_j) \\ \vdots \\ (x_i + b_n)(x_i + b_1) \\ \prod (x_i + b_n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

вычитаем последнюю строку

$$= \prod_{j>i} (b_j - b_i) \begin{pmatrix} x_i^{n-1} \\ \vdots \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\prod (b_j - b_i) \prod (x_j - x_i)}{\prod (x_i + b_j)}$$

определитель Вандермонда

применяем формулу:

$G = \left(\frac{1}{x_i + b_j} \right)$

$b_1 = \theta_1, \ b_2 = \theta_2 + \Delta$

$b_{2k-1} = \theta_{2k}, \quad b_{2k} = \theta_{2k} + \Delta$

$\det G\left(\frac{1}{x_i + b_j} \right) = \det \left(\frac{1}{x_i + \theta_2}, \frac{1}{x_i + \theta_2 + \Delta} - \frac{1}{x_i + \theta_2}, \ldots \right.$

$\left. \ldots \frac{1}{x_i + \theta_{2k}}, \frac{1}{x_i + \theta_{2k} + \Delta} - \frac{1}{x_i + \theta_k} \right)$

$\vdots \ \frac{1}{\Delta^k}$

$\lim\limits_{\Delta \to 0} \ldots \quad = \det \left(f_i(x_j) \right)_{i,j=1}^{2k}$

$\ldots\ldots\ldots$

$\det F = \ldots$

$$\frac{\prod\limits_{j>i} (x_j - x_i)}{\prod\limits_{i=1}^{2k} \prod\limits_{j=1}^{n} (x_i + \theta_{2i})} \longrightarrow \max$$

$0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k} < d$

Лемма 3. Пусть $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{2k}$ — опорные точки локально-оптимального плана. Тогда $t_1 = 0$.

Д-во: $t_1 = \Delta > 0$

$\tilde{t}_i = t_i - \Delta$

знаменатель $\det F$ уменьшится, произведение будет меньше, $\det F$ увеличится — противоречит предположению о максимальности

$$\left(\frac{\prod\limits_{2k\geq j\geq i\geq 2}(x_j-x_i)\prod\limits_{i=2}^{2k}x_i}{\prod\limits_{i=2}^{2k}\prod\limits_{j=1}^{k}(x_i+\theta_{2j})}\right)'_{x_i} = G'(x_2,\dots,x_{2k})$$

$$Q(x)=\prod_{i=1}^{2k}(x+\theta_{2i})$$

$$\left(\frac{1}{x_i}+\sum_{i\neq j}\frac{1}{x_i-x_j}-2\frac{Q'(x_i)}{Q(x_i)}\right)G=0 \qquad i=2,\dots,2k$$

$$G\neq 0$$

$$\psi(x)=\prod_{j=2}^{2k}(x-x_j)=\sum_{i=0}^{2k}\psi_i x^{2k-1-i}$$

$$\psi_0=1$$

$$\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i-x_j}=\frac{1}{2}\frac{\psi''(x_i)}{\psi'(x_i)}$$

В случае 2-х точек:

$$(x-x_2)(x-x_3)$$

$$\psi'(x)=(x-x_2)+(x-x_3)$$

$$\psi''(x)=2$$

$$\frac{\psi''(x_2)}{\psi'(x_2)}=\frac{2}{x_2-x_3}$$ — проверили.

$$\frac{1}{x_i}+\frac{1}{2}\frac{\psi''(x_i)}{\psi'(x_i)}-2\frac{Q'(x_i)}{Q(x_i)}\Bigg)=0 \qquad i=3,\dots,2k$$

$$\frac{\psi''(x)\,x\,Q(x)+2\psi'(x)\left[Q(x)-2xQ'(x)\right]}{x\;2\psi'(x)\,Q(x)}$$

в точках $x=t_i$ обращается в 0

$$\psi''(x)\,x\,Q(x)+2\psi'(x)\left[Q(x)-2xQ'(x)\right]=0$$

$x=t_2,\dots,t_{2k}$.

$2k-3+1+k$

$\varphi''(x)\,x\,Q(x) - 2\varphi'(x)\left[Q(x) - 2xQ'(x)\right] = \varphi(x)\lambda(x)$

$\lambda(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i x^{k-1-i}$

степень $2k-1$,

<u>Лемма.</u> Пусть $\varphi(x) = (x^k, \dots, 1)$

$\exists$ единственная матрица A, т.ч.

$\varphi^T(x) A = (\varphi'(x))^T$

$x^n \cdot \underset{0}{a_{11}} + x^{n-1} \cdot \underset{n}{a_{12}} + \dots + x\underset{0}{a_{1n}} + \underset{0}{a_{1n+1}} = n x^{n-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ n & 0 & & 0 \\ & n-1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \; 0 \end{pmatrix}$$

$\hat\varphi(x)$, $\quad \varphi(x)\cdot\lambda(x)$

$\deg \lambda(x) = 5$

$\exists A: \quad \hat\varphi^T(x) A = \varphi(x)\cdot\lambda(x)$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x^n \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \hat\varphi(x) = \begin{pmatrix} x^{n+5} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi^T(x) A \psi$

$\varphi(x) = (x^{3k-1}, \dots, 1)$

$\varphi^T(x)\, C_\lambda\, \psi$

$$C_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \\ & \lambda_1 & \ddots \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i E_i$$

где $E_0^T = \left(\underset{2k-1}{I} \,:\, \underset{k-1}{0} \right)$

$E_1^T = \left(0 \; I \; O_{k-2} \right)$

$k=2$

$$Q(x) = (x+\theta_2)(x+\theta_4) = x^2 + ax + b$$

$$a = \theta_2 + \theta_4$$

$$b = \theta_2 \cdot \theta_4$$

$b=1$

$$\tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{b}} \qquad \tilde{\theta}_2 = \frac{\theta_2}{\sqrt{b}}$$

$$\psi(x) = x^3 + \psi_1 x^2 + \psi_2 x + \psi_3$$

$$\Big((6x+2\psi_1)x(x^2+ax+1) + 2(2\psi_1 x + \psi_2)\Big[\ldots$$

$$\underbrace{(x^2+ax+1) - 2x(2x+a)}_{-3x^2-ax+1}\Big] =$$

$-12x^4$

$-10\psi_1 x^3$

$+(12-2a\psi_1-6\psi_2)x^2$

$$+(6\psi_1 - 2a\psi_2)x + 2\psi_2 = (\lambda_0 x + \lambda_1)(x^3+\psi_1 x^2+\psi_2 x \ldots$$

$$(x^4\ x^3\ x^2\ x\ 1)\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 12 & -2a & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \psi(x) = \lambda_1 (x^3\ x^2\ x\ 1)\psi$$

$\lambda_0 = -12$

$$\cancel{x^4}(x^3\ x^2\ x\ 1)\begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ & 2 & & & \\ & & 6 & & \\ & & & 12 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & -2a & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2a & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\psi = \lambda_1 \cdot \psi$$

$+$
$-$
$+$
$-$

ищем собственные числа и собственные вектора

$$\psi(x) = \prod_{i=2}^{4}(x - x_i)$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & -2a & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2a & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda I\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 12 & -2a-\lambda & 6 & 6 \\ & & -2a-\lambda & 12 \\ 0 & 6 & & -\lambda \\ 0 & 0 & 2 & \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 12 & -2a-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} -2a-\lambda & 12 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} -$$

$$- \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$(\lambda^2 + 2a\lambda - 24)^2 - 36\lambda^2 = \left[\lambda^2 + (2a+6)\lambda - 24\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\lambda^2 + (2a-6)\lambda - 24\right] = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda = -(a+3) \pm \sqrt{(a+3)^2 + 24}$$

$$\lambda = -(a-3) \pm \sqrt{(a+3)^2 + 24}$$

$$2\psi_1 = \lambda$$

$$\psi_1 = \frac{\lambda}{2} \qquad \lambda \to \text{одно из}$$

ψ_1 должно быть < 0.

$$12 - 2a\psi_1 + 6\psi_2 = \lambda\psi_1$$

$$12 - a\lambda + 6\psi_2 = \frac{\lambda^2}{2}$$

$$\lambda^2 + 2a\lambda - 12\psi_2 - 24 = 0.$$

$$\psi_2 = -\frac{\lambda}{2} \qquad \psi_2 = \pm\frac{\lambda}{2} \ ?$$

и λ:

$$\lambda^2 + 2a\lambda + 12\lambda - 24 = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & -2a & 6 & 6 \\ 0 & 6 & -2a & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \lambda\psi$$

$2\psi_2 = \lambda\psi_3$

$\psi_3 = -1$

$\psi(x) = x^3 + \frac{\lambda x^2}{2} - \frac{\lambda}{2}x - 1$

$\det\begin{pmatrix} 12 & -2a-1 & \\ 0 & 6 & \\ 0 & 6 & \end{pmatrix} = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$= (x-1)(x^2+x-\frac{\lambda}{2}x+1)$

$x_1 = 0 \quad x_3 = 1;$

$x_{2,4} = \frac{-1}{2}\left(\left(1-\frac{\lambda}{2}\right) \mp \sqrt{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 4}\right)$

решение

т.к. $b = 1$

$t_1 = 0$

$t_2 = \frac{\sqrt{b}}{2}\left(\left(1-\frac{\lambda}{2}\right) \mp \sqrt{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 4}\right)$

$t_3 = \sqrt{b}.$

— оптимальный план

при $d \geqslant \frac{\sqrt{b}}{2}\left(\left(1-\frac{\lambda}{2}\right) + \sqrt{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 4}\right)$

$a = 2$

$\theta_2 = \theta_1 = 1$

$\theta_2\theta_1 = 1$

$\theta_2 + \theta_1 = 2$

$\eta(x,\theta) = \frac{\theta_1}{x+\theta_2} + \frac{\theta_3}{x+\theta_4}$

$\lambda = \frac{-5-\sqrt{25+24}}{\cancel{}} = \frac{-5-7}{\cancel{}} = -12$

$t_1 = 0$

$t_{2,4} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$$(6x+2)\,x\,\underbrace{(x^2+2x+1)}_{=(x+1)^2} + (3x+2\psi_1)\cdot$$

$$\cdot\left[2(x+1)^2 - 2x(2x+2)\right] =$$

$$= (6x+2)\,x(x+1)^2 + (3x+2\psi_1)\cancel{(x+1)}\cdot$$

$$\cdot\left[2(x+1)-4x\right] = (\lambda_0 x+\lambda_1)(x^3+\psi_1 x^2+\psi_2 x+1)$$

$$\lambda_0\cancel{(x+1)}$$

$$-12$$

Пусть k-произв.

$Q(x) =$

делится на $(x+1)^{k-1}$

$$(\theta_2,\dots,\theta_k) \to (1,\dots,1)$$

$$\psi''(x)\,x\,(x+1)^k + 2\psi'(x)\left[(x+1)^k - 2xk(x+1)^{k-1}\right] = \lambda(x)\cdot\psi(x)$$

$\deg\lambda = k-1$

$$\psi''(x)\cdot x + 2\psi'(x)\left[(x+1)-2kx\right] = \lambda_0\cdot\psi(x)$$

$$\lambda_0 = (2k-1)(2k-2)+2\cdot(2k-1)(1-2k)$$

(коэффициенты определяются рекуррентно)

Далее d:

$$\left[\prod_{2k-1>j>i\geq 1}(x_j-x_i)\prod_{i=2}^{2k-1}(x_i)\right]\prod_{j=2}^{2k-1}(d-x_j)\cdot d$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-d}+\frac{1}{2}\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}-2\frac{Q'(x)}{Q(x)}$$

новый член

для $k=2$, $d=1$

$$\frac{\theta_1}{x+\theta_2}+\frac{\theta_3}{x+\theta_4}=\frac{\theta_1(x+\theta_4)+\theta_3(x+\theta_2)}{(x+\theta_2)(x+\theta_4)}=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$\frac{p_0x+p_1}{x^2+q_1x+q_2}$$

$q_1 = 2$

$q_2 = 1$

и по исследованной модели

$$f_1(x) = \frac{1}{Q(x)}$$

$$f_2(x) = \frac{p_0 x + p_1}{Q^2(x)}$$

$$f_3(x) = \frac{x}{Q(x)}$$

$$f_4(x) = \frac{(p_0 x + p)}{Q^2(x)}$$

Опт. план

<u>Упр.</u> не зависит от p_0 и p_1

В общем случае

$$f_1(x) = \frac{1}{Q(x)}$$

$$f_2(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

. . .

Определители отличаются множителем

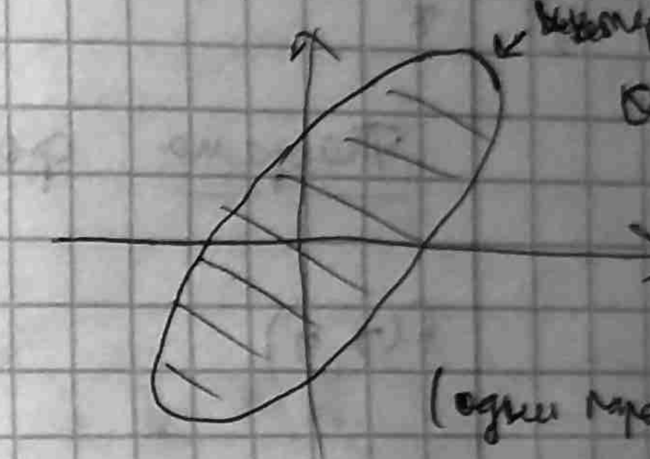
$$\prod (\theta_{2_j} - \theta_{2_i})$$

Глава. E-оптимальные планы эксперимента

§1. Постановка задачи

$$\lambda_{min}(M(\xi)) \longrightarrow \max_{\xi}$$

Статистический смысл:



$$V_{эл} \sim \sqrt{M^{-1}(\xi)}$$

1. $\lambda_{max}(M^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda_{min}(M(\xi))}$

2. $\lambda_{min}(M) = \min\limits_{\|p\|=1} p^T M p$

$$D(p^T \hat{\theta}) = p^T M^{-1}(\xi)\, p$$

§2. Вспомогательные результаты

Экстремальные задачи: $f(x) \longrightarrow \max_x$

$\max_y \min_x f(x,y)$ — минимакса

<u>Теорема</u> фон-Неймана о минимаксе.

$f(x,y)$ $\quad x \in \Omega_1, \quad y \in \Omega_2$

$f(x,y)$ — выпукла по x

— вогнута по y

Ω_1, Ω_2 — выпуклые множества

хотя бы одно компактно

$f(x,y)$ непрерывна.

$$\min_{x \in \Omega_1} \max_{y \in \Omega_2} f(x,y) = \max_{y \in \Omega_2} \min_{x \in \Omega_1} f(x,y).$$

60-е Кирх-Вольфовиц

70 Е критерий

$\lambda_{min}(M)$ — простое

$$\lambda_{min}(M) = \min_{\|p\|=1} p^T M p \;\; (=)$$

Заменим $p^T M p$ на $\sum_{i=1}^m p_i^T M p_i \alpha_i =$

$\alpha_i \geqslant 0$;

$\sum \alpha_i = 1$.

$$= \operatorname{tr} \sum = \operatorname{tr} M \sum p_i p_i^T \alpha_i = \operatorname{tr} MA;$$

$$A = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i p_i^T$$

$\operatorname{tr} A = 1$

$(=) \min_{A \in \mathcal{A}} \operatorname{tr} MA$

$\mathcal{A} : \{ \geqslant 0; \ \operatorname{tr} A = 1; \ m > n \}$

§3. Теорема эквивалентности

Теорема 1. (эквивалентности)

Пусть $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$, $x \in \mathcal{X}$, непрерывная

I. план ξ^* явл. E-опт. $\Leftrightarrow$ $\exists A^* \in \mathcal{A}$

$$\max_{x \in \mathcal{X}} f^T(x) A f(x) \leq \lambda_{min}(M(\xi))$$

II. $$\min_A \max_{x \in \mathcal{X}} f^T(x) A f(x) = \lambda_{min}(M(\xi))$$

$$f^T(x_i) A^* f(x_i) = \lambda_{min}(M(\xi^*)).$$

Теорема 2.

$$f(x) = (1, \sin x, \cos x, \dots, \sin kx, \cos kx)^T \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$\xi: \quad M(\xi) = diag\{1, 1/2, \dots, 1/2\} \text{ — } E\text{-опт.}$$

Проверим: $A^* = diag\{0; \frac{1}{2k}; \dots, \frac{1}{2k}\}$

$$f^T(x) A^* f(x) = (1, \sin x, \cos x, \dots, \sin kx, \cos kx) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{2k} & \\ & & \ddots \\ & & & \frac{1}{2k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sin x \\ \vdots \\ \cos kx \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\sin^2 x}{2k} + \frac{\cos^2 x}{2k}\right) + \left(\frac{\sin^2 2x}{2k} + \frac{\cos^2 2x}{2k}\right) + \dots + \frac{\sin^2 kx}{2k} + \frac{\cos^2 kx}{2k}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2k} + \dots + \frac{1}{2k}}_{k \text{ раз}} = \frac{1}{2}.$$

$$\max f^T(x) A^* f(x) = \frac{1}{2}$$

ю т. — E-опт.

$$\left\{ \frac{(i-1)2\pi}{n}, \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

с весами $\frac{1}{n}$ $\quad n \geq 2k+1$

(все D-оптимальные плана имеют одинаковую матрицу M)?

E-опт. план (как и D) может быть не единственным.

<u>Теорема 3.</u> В условиях теоремы 1

$$A' = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i P_{(i)} P_{(i)}^T$$

где $S = \operatorname{diag} \mathcal{P}$, $P_{(1)}, \ldots, P_{(s)}$ — ортонорм. базис

$\alpha_i \geq 0$; $\sum \alpha_i = 1$.

$$\lambda_{\min} M(\xi) = \min_{\|p\|=1} p^T M(\xi) p = \min_{A \in \mathcal{A}} \operatorname{tr} AM$$

$$\max_{\xi} \min_{A} \operatorname{tr} AM(\xi) =$$

$\mathfrak{M} = \{M(\xi)\}$ ← выпуклое, компактное

$$= \max_{M \in \mathfrak{M}} \min_{A \in \mathcal{A}} \operatorname{tr} AM =$$

tr линейна выпукла и вогнута

$$= \min_{A \in \mathcal{A}} \max_{M} \operatorname{tr} AM = \min_{A \in \mathcal{A}} \max_{\xi} \operatorname{tr} A \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f^T(x_i) \omega_i$$

$$= \min_{A \in \mathcal{A}} \max_{x} f^T(x) A f(x).$$ $\Rightarrow$ вытекает утверждение и эквивалентности

<u>Д-во Т.3.</u>

$$A^* = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_{(i)} P_{(i)}^T =$$

$$\sum \alpha_i = 1$$

$$\alpha_i \geq 0.$$

Выберем базис так, что первые s векторов соответствуют α.

$$= \sum_{i=1}^{s} \alpha_i P_{(i)} P_{(i)}^T + \sum_{i=s+1}^{m} \alpha_i P_{(i)} P_{(i)}^T$$

$$\| $$

$$\operatorname{tr} AM(\xi)$$

$$P_{(i)}^T M P_{(i)} > \lambda_{\min}$$

Замечание. (кратность с.г.)

пусть $s = 1$.

$A = p_{1} p_{1}^T$

$\max\limits_x f(x)\, pp^T f(x) \le \lambda_{min}$

$\max\limits_x \left(p^T f(x)\right)^2$

§4. Полиномиальная регрессия на отрезке

$f^T(x) = (1, x, \dots, x^{(n-1)})$ $\quad x \in [r_1, r_2]$

отличие:

D-опт: $[-1, 1] \longrightarrow [a, b]$

преобразуем линейным образом, как и точки плана

В случае E-опт. это неверно.

Теорема 4. о числе точек

пусть $m > 2$

Тогда $\exists$ единственный E-опт. план с m опорными точками, две из которых совпадают с ~~предельными~~ граничными точками

Д-во: пусть $\xi^* = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \omega_1 & & \omega_n \end{pmatrix}$ — опт. план.

По т. экв. $\quad \exists A^*$:

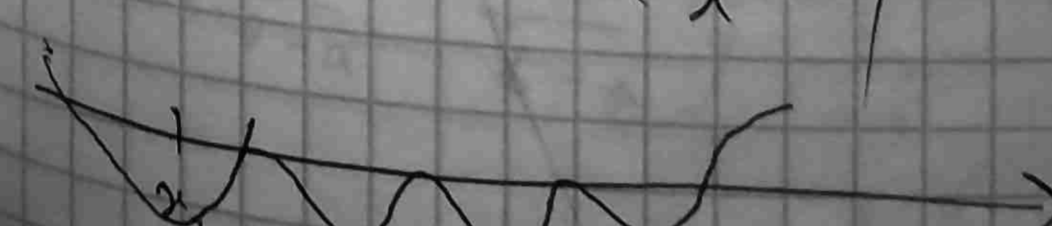
$f^T(x) A f(x) \le \lambda_{min}$

$f^T(x) A f(x) = \lambda_{min}$

$g(x) = f^T(x) A^* f(x) - \lambda_{min}$.

$g(x) \le 0$.

$(1\ x \dots x^{n-1})\, A^* \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} - \lambda_{min} = \sum\limits_{i=0}^{2n-2} x b_i \overset{\text{либо}}{\underset{\text{либо}}{\equiv}} const$



Во втором случае:

$2(n-1)+2$ корней с учётом кратности

$2(n-1)+2 \le 2n-2$

$n=m$ и две точки на краях

проверить единственность

$\equiv const$: $b_i = 0$

кроме b_0

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix} \qquad A^* = e_1 e_1^T$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ — собств. вектор опт. плана

$Me_1 = \lambda e_1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \sum \omega_i x_i & \sum \omega_i x_i^2 \\ \sum \omega_i x_i & & \\ \sum \omega_i x_i^2 & & \end{pmatrix}$$

$Me_1 = \lambda e_1$

максимум, когда такая ситуация возможна, это $m = 2$.

Линейная модель

$f(x) = (1, x)^T \qquad x \in [r_1, r_2]$

<u>Теорема 5.</u>

1) $r_1 r_2 \ge -1$, то $\xi = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix}$

$$\omega_1 = \frac{2 + r_1^2 + r_1 r_2}{4 + (r_1 + r_2)^2}$$

$$\omega_2 = \frac{2 + r_1^2 + r_1 r_2}{4 + (r_1 + r_2)^2}$$

с. з. $\lambda_{min}(M) = \dfrac{r^2}{r^2 + \mu^2}$

$r = \dfrac{r_2 - r_1}{2}$

$\mu = \dfrac{r_2 + r_1}{2}$

2) $r_1 r_2 < -1$

$$\xi_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{b}{b-a} & \frac{-a}{b-a} \end{pmatrix}$$

$r_1 \le a < 0$

$0 < b \le r_2$

$|ab| > 1.$

Д-во:

2) $r_1 r_2 < -1$

$$M(\xi_{a,b}) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -ab \end{pmatrix}$$

$$\sum x_i \omega_i = a \cdot \frac{b}{b-a} - b\frac{a}{b-a} = 0$$

$$\sum x_i^2 \omega_i = a^2 \frac{b}{b-a} + b^2 \frac{-a}{b-a} = -ab$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & d \end{pmatrix}$$ если $c \neq 0$

то $\lambda_{min}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \geq \lambda_{min}\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & d \end{pmatrix}$

1) $q \leftarrow \lambda_{min}$

$A^* = qq^T$, $\|q\| = 1$.

$Mq = \lambda q$ проверить

$q^T f(r_1) = -h$

$q^T f(r_2) = h$

Положим $q = (1, q_1)^T$

$f(x) = (1, x)^T$

$1 + q_1 r_1 = -h$

$+$ $1 + q_1 r_2 = h$

$2 + q_1(r_1 + r_2) = 0$

$$q_1 = -\frac{2}{r_1 + r_2} = -\frac{1}{r}$$

$$1 - \frac{r_2}{r} = h$$

проверим $Mq = \lambda q$ (и найдём λ)

$$\left[f(r_1) f^T(r_1)\omega_1 + f(r_2) f^T(r_2)\overbrace{(1-\omega_1)}^{\omega_2}\right] q = \lambda q$$

$$f(r_1) \cdot h \cdot \omega + f(r_2) \cdot (-h) \cdot (1-\omega) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

$$h\omega + (1-\omega)(-h) = \lambda$$

$$\lambda = 2h\omega - h = \frac{r^2}{r^2+r^2}$$

λ соотв. $q = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$

из предположения кратности $= 1$, теряем оптимальность

проверяется вычислениями

Случай $m = 3$.

Теорема 6.

Для квадратичной регрессии на симметричном промежутке существует единственный E-оптимальный план

$$\begin{pmatrix} -r & 0 & r \\ \omega & 1-2\omega & \omega \end{pmatrix}$$

где при $r \le \sqrt{2}$

$\cancel{\lambda_{min} = \frac{1}{1+r^2}}$

$$\omega = \frac{1}{1-r^4} \quad \Big| \quad \lambda^* = \frac{r^4}{4+r^4}$$

при $r \geq \sqrt{2}$

$\cancel{\lambda_{min} = \frac{r^2-1}{2r^2}}$

$$\omega = \frac{r^2-1}{2r^4} \quad \Big| \quad \lambda^* = \frac{r^2-1}{r^2}$$

Д-во: 3 точки в плане — из Т.

Число точек, две на концах.

Из единственности — план симметричный

Т.к. при $x \neq 0$ $\quad \underset{\xi}{x} \longrightarrow \underset{\bar{\xi}}{-x}$

$$M(\xi) = M(\bar{\xi})$$

$$\lambda_{min}\, M\left(\frac{\xi+\bar{\xi}}{2}\right) < \frac{\lambda_{min} M(\xi) + \lambda_{min} M(\bar{\xi})}{2}$$

$$\begin{pmatrix} M_1 & C \\ C & M_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1 & -C \\ -C & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

противоречие $\Longrightarrow$ симметричность плана.

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2r^2\omega \\ 0 & 2r^2\omega & 0 \\ 2r^2\omega & 0 & 2r^4\omega \end{pmatrix}.$$

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

$$M(\xi) - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2r^2\omega \\ 0 & 2r^2\omega - \lambda & 0 \\ 2r^2\omega & 0 & 2r^4\omega - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(M - \lambda I) = \underbrace{(2r^2\omega - \lambda)}_{\textcircled{5}}\left[\lambda^2 - \lambda(1 + 2r^4\lambda) + 2r^4\omega - 4r^4\omega^2\right),$$

$$2r^2\omega - \lambda = 0$$

$$\lambda = 2r^2\omega$$

$$\lambda = \frac{1 + 2r^4\omega - \sqrt{(1 + 2r^4\omega)^2 - 8r^4\omega + 16r^4\omega^2}}{2}$$

$$\lambda'_\omega = 2r^4 - \frac{1 \cdot (\ldots)'}{2\sqrt{\ldots}} = \ldots$$

$$\sqrt{\ldots} = -1 + 8\omega + 2r^4\omega$$

$$(1 + 2r^4\omega)^2 - 8r^4\omega + 16r^4\omega^2 = (-1 + 8\omega + 2r^4\omega)^2$$

$$\omega\left((r^4 + 1)\omega - 1\right) = 0$$

$$\omega = \frac{1}{r^4 + 1}$$

$$\lambda_2 \leq 2r^2\omega$$

Для произвольного отрезка и произвольного n кратность $\lambda_{min} \leq 2$.

Теорема 7.

$M(\xi^*)$ неизвестна

ξ – любой невырожденный план

$\lambda_{min}(M) > 0$

тогда кратность ~~минимального~~ любого собственного числа информационной матрицы ≤ 2

Д-во: от противного.

Предположим, кратность некоторого с. з. ≥ 3.

Рассмотрим векторы

$$\underbrace{p_{(1)}, p_{(2)}, \dots, p_{(s)}}_{\text{ортонорм.}}, \underbrace{p_{(s+1)}, \dots, p_{(m)}}_{\text{ортонорм.}}$$

ортогональны

$p_{(1)}, \dots, p_{(s)}$ можно выбрать так, что

$$\deg p_{(i)}^T f(x) \le m-1$$

при своем выборе α, β

$p_{(1)}, p_{(2)}$

$$(\alpha p_{(1)} + \beta p_{(2)})(\beta p_{(1)} - \alpha p_{(2)})$$

$p_{(1)}$ $p_{(2)}$ ортонормированны

$$\psi_1(x) = p_{(2)}^T x$$

$$\psi_2(x) = p_{(3)}^T f(x)$$

Рассмотрим функции

$$p_{(i)}^T f(x)\, \psi_1(x)$$

$i = 1, 4, \dots, n$

$$p_{(i)}^T f(x)\, \psi_2(x)$$

$i = 1, 4, \dots, m$

$$\psi_1(x) \cdot \psi_2(x)$$

$$\psi_1^2(x) - \psi_2^2(x)$$

$2(m-2) + 2 = 2m-2$ функций.

Интегралы от них $= 0$.

$m - 1 + m - 2 = 2m-3$ их число $2m-2$

$\psi(x)$ степени $2m-3$ может быть представлен как линейная комбинация полиномов например:

$\int 1 \, d\xi = 1$ $\qquad 1 = \sum \alpha_i \int q_i(x) = 0$

противоречие

$\Rightarrow$ размерность пр-ва соответствующего

любому с.з., не превосходит 2.

$\dim P \leq 2$.

<u>Теорема</u>. $[-1, 1]$ ξ $n > 2$

кратность λ_{min} равна 1.