重力与固体潮第二次作业：地球重力场

时潜 PB18051157

2020 年 11 月 5 日

目录

1 第一题

基本概念：重力 / 垂线 / 大地水准面 / 正高 / 椭球扁率 / 重力扁率 / 动力学扁率 / 扰动位 / 垂线偏差 / 重力异常 / 重力扰动 / 大地水准面高（起伏）/ 位基数 / 力高 / 正常高 / 大地（几何）高 / 高程异常 / 似地表 / 似大地水准面/天文经纬度/大地经纬度

解： 重力：单位质量物体所受到重力场作用的力

垂线：垂线是这样一条曲线，其上任意一点切向方向都平行于该点的重力方向

大地水准面：与静止海平面垂直的等位面

正高：一个点从大地水准面沿垂线量取的长度

椭球扁率：描述椭球形状的几何参量，定义为 $\frac{a-b}{a}$

重力扁率：定义为 $\frac{\gamma_p-\gamma_e}{\gamma_e} \approx 2m-3n$

动力学扁率：定义为 $J_2=\frac{C-\frac{A+B}{2}}{Ma^2}$

扰动位：扰动位 T 定义为某一点地球实际重力位（W）与正常重力位（U）之差

垂线偏差：某点实际重力方向与正常重力方向之偏差，用两个方位参数 ϵ,η 表征

重力异常：指大地水准面上点重力与椭球面上正常重力大小之差

重力扰动：指某一点实际重力值与椭球面在该点产生的正常重力值大小之差

大地水准面高（起伏）：大地水准面上点到（通过铅垂线确定）椭球面上对应点的距离

位基数：大地水准面上参考点与考察点的重力位之差

力高：定义为 $\frac{C}{\gamma_0}$，其中 γ_0 是正常重力，由标准纬度（一般是 $45°$）的值为准。

正常高：在假设地球重力场正常时计算出的正高，以 H^* 表示。

大地（几何）高：地面上一点沿铅垂线方向到参考椭球面的高度

高程异常：定义为 $L=h-H^*$，即似大地水准面至地球椭球面的高度

似地表：从大地水准面每一点沿垂线 H^* 后生成的曲面。

似大地水准面：从地球表面每一个点沿铅垂线量取正常高距离后生成的曲面。

天文经纬度：是指以地面某点铅垂线和地球自转轴为基准的经纬度。以大地水准面和铅垂线为依据，纬度是通过某点铅垂线与赤道夹角；经度是过观测点子午面与本初子午面夹角

大地经纬度：根据地面点对参考椭球面的法线定义的经纬度。大地经度是指地面点与参考椭球体的自转轴构成的面与参考椭球起始子午面的夹角 ，大地纬度是指地面点相对于参考椭球体的法线方向与赤道面的夹角 。

2 第二题

推导公式并说明地球引力位球谐展开中零、一和二阶项的物理意义。

解： 在球状近似下，地表以外无质量，于是有

$$\triangle V = 0$$

必有

$$V = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} [A_{nm} R_{nm} + B_{nm} S_{nm}]$$

由 V 的具体表达式

$$V = G \iiint \frac{\rho dV}{l}$$

以及分解公式的推广式

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{P_n(\cos(\theta))}{r^{n+1}} r'^n P_n(\cos(\theta')) + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[\frac{R_{nm}(\theta, \lambda)}{r^{n+1} r'^n} R_{nm}(\theta', \lambda') + \frac{S_{nm}(\theta, \lambda)}{r^{n+1} r'^n} S_{nm}(\theta', \lambda') \right] \right)$$

代入后化简可得

$$A_{n0} = G \iiint r'^n P_n(\cos\theta') \rho(V') dV'$$

$$A_{nm} = 2G \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint r'^n R_{nm} dM'$$

$$B_{nm} = 2G \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint r'^n S_{nm} dM'$$

可得

$$\begin{aligned}
A_{00} &= GM \\
A_{10} &= G \iiint z dM \\
A_{11} &= G \iint x dM \\
B_{11} &= G \iiint y dM \\
A_{20} &= G \iiint (z^2 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2) dM \\
A_{21} &= G \iint xz dM \\
A_{22} &= G \iiint \frac{1}{4} (x^2 - y^2) dM \\
B_{21} &= G \iiint yz dM \\
B_{22} &= G \iiint \frac{1}{2} xy dM
\end{aligned} \tag{1}$$

易知（除以 G 后）：A_{00} 代表地球所有质量的总和。

B_{11}, A_{11}, A_{10} 表示地球质量的一阶矩，除以总质量后代表质心的坐标。

A_{21}, B_{21}, B_{22} 表征了地球惯性积，即惯性张量的非对角元素。当坐标轴与惯量轴重合时他们全都为 *0*. 由于 z 轴（自转平均方向）是最大特征值对应的惯量主轴，因此 A_{21}, B_{21} 都为零。

A_{20}, A_{22} 是地球惯量矩，即惯量张量的对角元元素的线性组合。

3 第三题

为什么要引进地球正常重力场? 如何定义并确定正常重力场? 并给出正常重力二阶近似计算公式, 即 γ 和 γ_h 的实用计算公式。

解: 为什么引进: 因为

1. 正常重力场与实际重力场非常接近, 两者偏差仅想差 *100-200mgal,* 且大地水准面与参考椭球面相差极小。

2. 简化了复杂的实际重力场, 便于计算。

3. 为几何高程测量提供了简单参数。

如何引进: 假定了地球"正常形状"为椭球, 并且是等重力位势面。再给定

1. 椭球几何参数, 即 a,b

2. 椭球总质量 M

3. 旋转角速度 ω

之后, 便可以唯一确定椭球表面以及外部的重力势, 而不需要知道椭球内部具体的重力分布。

$$\gamma_h = \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial h} h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} h^2 + ...$$

有

$$\gamma_h = \gamma \left[1 - \frac{2}{a}\left(1 + f + m - 2fsin^2\phi\right) h + \frac{3}{a^2} h^2\right]$$

4 第四题

推导大地水准面高（N）与高程异常（ζ）之间的关系

解：

$$\begin{aligned} N-\zeta &= h-H-(h-H^*) \\ &= H^*-H \\ &= \frac{C}{\bar{\gamma}}-\frac{C}{\bar{g}} \\ &= \frac{C}{\bar{\gamma}}\left(1-\frac{\bar{\gamma}}{\bar{g}}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

5 第五题

确定地球形状及其外部重力场就是解算地球外部边值问题。在微扰法中，转化为确定扰动位。如果边界扰动位已知，其解可用 Poisson 积分式表示；如果已知边界扰动重力，扰动位可用科赫（Koch）积分公式表示；如已知边界重力异常，其解是 Pizzetti 公式或 Stokes 公式。请利用球谐展开方法给出下述 Stokes 核函数级数形式的推导过程，并进而借助 1/l 的球谐展开导出 Stokes 核函数的函数形式。

解： 由地球外部

$$\triangle T = 0$$

可得

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n$$

又由

$$\triangle g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T$$

代入得到

$$r \triangle g(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} T_n$$

在 $r = R$ 处，得到

$$R \triangle g = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) T_n$$

因此 $\triangle g$ 调和所以

$$\triangle g = \sum_{n=2}^{\infty} g_n$$

其中

$$\triangle g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \iint \triangle g P_n(\cos\Psi) d\sigma = \frac{n-1}{R} T_n$$

由调和展开唯一性，得到

$$T_n = \frac{R}{n-1} \frac{2n+1}{4\pi} \iint \triangle g P_n(\cos\psi) d\sigma$$

于是

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\Psi) \triangle g \, d\sigma$$

注意到：

$$\frac{R(r^2 - R^2)}{l^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi)$$

两边同乘以 $\frac{r}{R}$，并对 r 积分有

$$\int \frac{r(r^2 - R^2)}{l^3} dr = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\psi) \int \left(\frac{R}{r}\right)^n dr$$

得到

$$\frac{2r^2}{l} - 3l - 3R\cos\psi ln(r - R\cos\psi + l) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \frac{R^n}{r^{n-1}} P_n(\cos\psi) + r + 3R\cos\psi lnr$$

整理得

$$
\begin{aligned}
&S(r,\psi) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi) \\
&= \frac{2R}{l} + \frac{R}{r} - 3\frac{Rl}{r^2} - \frac{R^2}{r^2}\cos\psi\left(5 + 3ln\frac{r - R\cos\psi + l}{2r}\right)
\end{aligned}
\tag{3}
$$