

基于 Matlab 重力的固体潮理论计算

时潜 PB18051157

2020 年 12 月 20 日

摘要

本文推导了在刚性球型地球假设下重力固体潮的理论计算过程，指出了重力固体潮理论的基本物理定律成立条件，并结合实测数据计算了某测点的重力固体潮值，分析了实测值理论值差异的原因。指出具体的原因有待结合仪器测量原理、测点地质条件作进一步分析处理。

目录

1 引言	2
2 起潮力位及其调和展开	2
2.1 地球在宇宙中的运动	2
2.2 起潮力	3
2.3 起潮力位	3
3 重力固体潮直接方法	4
3.1 天球坐标系	4
3.2 幅角数	5
3.3 Newcomb 公式与 Brown 公式	5
3.4 计算实例	7
4 重力固体值杜森调和函数展开法	7
4.1 起潮力位 Laplace 展开	7
4.2 起潮力的谐波展开	7
4.3 计算实例	8
5 计算结果分析	8
5.1 潮汐修正	9
5.2 高程影响	9
5.3 其他影响	9
6 结语	10
7 致谢	10

1 引言

在月亮和太阳的引力作用下,地球表面和内部各处存在重力值周期性变化。地球整体在该重力影响下发生的周期性变形被称为固体潮。由于固体潮幅度很小,例如重力固体潮幅度约为 200 微伽,对它们的观测需要高精度的测量仪器^[1]。本文选用了中华人民共和国湖北省武汉市某测站(30.5°N, 114.5°E, 89.3mMSE)重力观测数据,并与由理论值直接法和调和函数展开方法两种方法得到的该点理论值比较。

2 起潮力位及其调和展开

2.1 地球在宇宙中的运动

由于考虑问题的尺度(低速、宏观),采用平直时空中的牛顿力学定律。实际上,宇宙天体的运动用广义相对论描述更准确,但是对于我们所讨论的潮汐问题使用平直时空的牛顿定律已经足够精确。

通过天文观测可知,地球和月球绕二者的公共质心旋转,公共质心绕太阳作椭圆轨道运动,太阳同时绕银心作轨道运动。同时地球本身绕通过质心的旋转轴自转(图 1)。

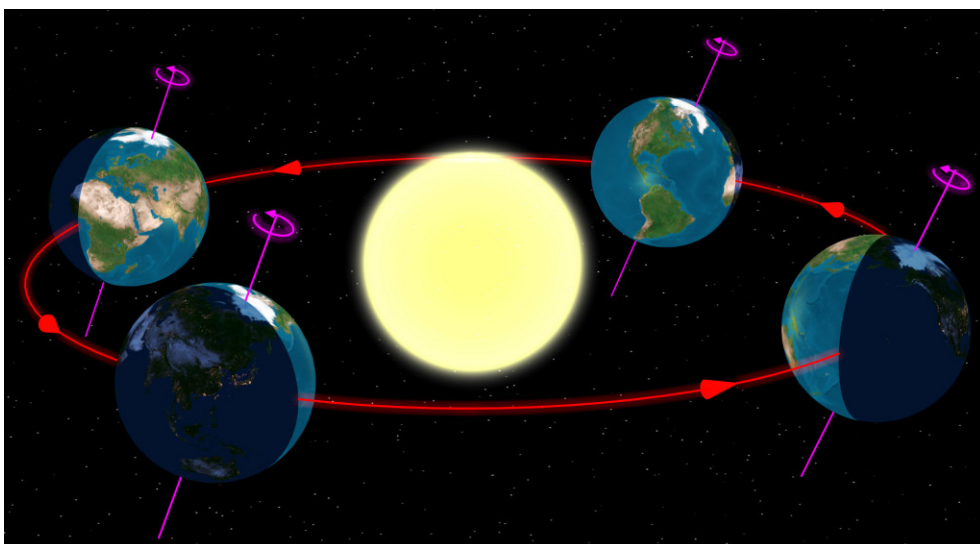


图 1: 地球在宇宙中的运动

由于牛顿定律成立需要建立在惯性系上,而惯性系的选取的“基准”问题,即“第一惯性系”的选取问题揭示了牛顿定律自身的漏洞,并促成了狭义相对论的诞生。尽管如此,众多实验和观测表明,认为太阳系近似是惯性系推导的结果与实验观测值的误差可以忽略不计,在讨论固体潮问题时也是如此。因此我们取太阳系为惯性系,这样,我们选取的参考系上物体的受力就是确定的了。

我们取随地球质心运动的平动参考系,由牛顿定律和平直时空的几何性质可以推导出惯性力公式

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

由于讨论的对象是地表以下岩石、地表海水等物体受起潮力的影响,容易估计,它们相对地球的运动速度较小。例如,虽然忽略涨潮的速度导致不幸的事故时有发生,但是涨潮的绝对速度仍然较小($\approx 1m/h$)。而地下岩石受起潮力后相对地球运动速度更小。因此,在考虑受力时,可以忽略起潮力造成的相对地球运动的科里奥利力。

同时由于选取平动质心参考系，不考虑离心力。

于是，起潮力在地球某处为

$$\vec{g} = \vec{f} - \vec{a}_0$$

其中， \vec{f} 是单位质量受力， \vec{a}_0 是相对惯性系的加速度。

2.2 起潮力

质心平动参考系同时作绕和月球公共质心的轨道运动以及随公共质心绕太阳的椭圆运动，公共质心绕太阳椭圆运动的加速度为

$$\frac{GS}{r_s^2} \vec{e}_s$$

其中 S 是太阳质量， r_s 是公共质心距离太阳距离。

地球绕公共质心的平动加速度为

$$\frac{GM}{r_m^2} \vec{e}_m$$

M 是地球质量， r_m 是地球质心距离月球距离。

由于地球离公共质心的距离 $OG = 0.73R$ 相比地球太阳距离小到忽略不计，可以认为太阳到公共质心的位移就是太阳到地球质心的位移。因此起潮力在地球某处的值为

$$\vec{g}_t = \vec{f}_m + \vec{f}_s - \frac{GS}{r_s^2} \vec{e}_s - \frac{GM}{r_m^2} \vec{e}_m$$

其中 \vec{f}_m 是该点所受月球引力， \vec{f}_s 是该点所受太阳引力。 r_m 是地球质心距离公共质心的位移， r_s 是地球质心相对太阳的位移。

2.3 起潮力位

在平直时空中，空间是 R^3 三维欧式空间，力是矢量。在某一时刻，质心平动参考系中太阳、月亮分别处在某处位置，地面上某点 A 受到重力加速度 g_t ，改变 A 点， g_t 不同。

可以验证 $f_m, f_s, \frac{GS}{r_s^2} \vec{e}_s, \frac{GM}{r_m^2} \vec{e}_m$ 均满足

$$\nabla \times \vec{A}_i = 0$$

满足保守力条件，因此均存在对应的 Φ_i ，使得 $\nabla \Phi_i = \vec{A}_i$

在 R^3 中 Φ 是标量，具空间坐标变换不变性。通过旋转坐标系容易得到 Φ_i

$$\begin{aligned} \vec{f}_m &= \nabla \frac{GM}{r_{m,A}} \\ \vec{f}_s &= \nabla \frac{GS}{r_{s,A}} \\ \frac{GM}{r_m^2} \vec{e}_m &= \nabla \left(-\frac{GM}{r_m} r \cos Z_m \right) \\ \frac{GS}{r_s^2} \vec{e}_s &= \nabla \left(-\frac{GS}{r_s} r \cos Z_s \right) \end{aligned} \tag{1}$$

其中 r 是 A 点距地球质心距离， Z_m 和 Z_s 分别是 A 点与地心连线与地心-月亮，地心-太阳连线的夹角。

令 $T_m(A) = \frac{GM}{r_{m,A}} - \frac{GM}{r_m} r \cos Z_m$ 由

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_{m,A}} &= \frac{1}{r_m} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_m}\right)^n P_n(\cos Z_m) \\ \frac{1}{r_{s,A}} &= \frac{1}{r_s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_s}\right)^n P_n(\cos Z_s)\end{aligned}\quad (2)$$

并且考虑到 $\frac{r}{r_m} \approx \frac{1}{60.3}$, $\frac{R}{r_s} \approx \frac{1}{234000}$

化简得到

$$\begin{aligned}T_m(A) &= G \frac{M}{r_m} \left[\left(\frac{r}{r_m}\right)^2 P_2(\cos Z_m) + \left(\frac{r}{r_m}\right)^3 P_3(\cos Z_m) \right] \\ T_s(A) &= \frac{GS}{r_s} \left(\frac{r}{r_s}\right)^2 P_2(\cos Z_s)\end{aligned}\quad (3)$$

3 重力固体潮直接方法

引入 Doodson 常数

$$\begin{aligned}D_m &= \frac{3GMR^2}{4c_m^3} = 26277 \text{ cm}^2/\text{s}^2 \\ D_s &= \frac{3GSR^2}{4c_s^3} = 0.46046 D_m\end{aligned}$$

其中, c_m 和 c_s 是地球月亮、地球太阳间平均距离。

月亮在地球表面上 A 点的固体潮理论值为 (太阳同理)

$$\Delta g_m(A, t) = -\frac{\partial T_m}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

代入 T_m, T_s 表达式, 可得

$$\begin{aligned}\Delta g_m(A, t) &= 54.993 \left(\frac{c_m}{r_m}\right)^3 (1 - 3 \cos^2 Z_m) + 1.369 \left(\frac{c_m}{r_m}\right)^4 (3 \cos Z_m - 5 \cos^3 Z_m) \mu\text{gal} \\ \Delta g_s(A, t) &= 25.318 \left(\frac{c_s}{r_s}\right)^3 (1 - 3 \cos^2 Z_s) \mu\text{gal}\end{aligned}\quad (4)$$

3.1 天球坐标系

Z_m 是地心与公共质心连线, 地心 A 点连线的夹角。由于月球相对地球在不断运动, 因此 Z_m 也在随时间不断变化。天文学上一般在天球坐标系中考察天文学运动。

以地球质心为球心, 地球自转轴为 z 轴, 半径为 1 的单位球面就是天球, 又称赤道坐标系, 如图 2 所示。将月球、太阳投影至天球上, 则随着时间变化它们的运动在球面上为闭合曲线。

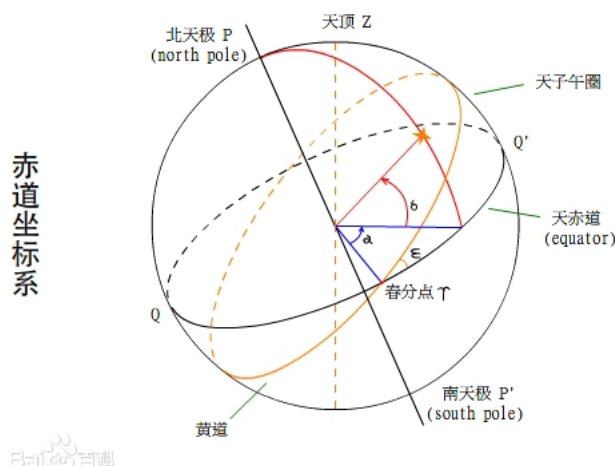


图 2: 天球

利用球面上的三角公式，可以得到

$$\begin{aligned} \cos Z_m &= \sin \phi (\sin \omega \sin \lambda_m \cos \beta_m + \cos \omega \sin \beta_m) \\ &+ \cos \phi \left[\cos \lambda_m \cos \beta_m \cos \chi + \sin \chi (\cos \omega \sin \lambda_m \cos \beta_m - \sin \omega \sin \beta_m) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \cos Z_s &= \sin \phi \sin \lambda_s \sin \omega + \cos \phi (\cos \lambda_s \cos \chi \\ &+ \sin \lambda_s \sin \chi \cos \omega) \end{aligned} \quad (6)$$

3.2 幅角数

为了描述月亮、太阳天文学参数的变化，Doodson 引入了 6 个天文学参量，如表 1 所示：

参数	意义
t	平太阳日
$\tau = 15^\circ t + h - s + L$	平月亮地方时
s	月亮平黄经
h	太阳平黄经
$N = -N'$	月亮升交点的平黄经
p_s	地球近日点的平黄经

表 1: 6 个天文学参数

利用这 6 个天文学参量，可以得到其他天文学参量的表达式。

3.3 Newcomb 公式与 Brown 公式

1895 年 Newcomb 根据 140 多年的 40000 个观测结果多项式插值，给出某一瞬时 T 的太阳参数 h, p_s

$$\begin{aligned} h &= 279^\circ.69668 + 36000^\circ.76892T + 0^\circ.00030T^2 \\ p_s &= 281^\circ.22083 + 1^\circ.71902T + 0^\circ.00045T^2 + 0^\circ.000003T^3 \end{aligned} \quad (7)$$

1919 年 Brown 对月亮在某一瞬时的参数 s 、 p 、 N' 给出类似公式

$$\begin{aligned} s &= 270^\circ.43659 + 481267^\circ.89057T + 0^\circ.00198T^2 + 0^\circ.000002T^3 \\ p &= 334^\circ.32956 + 4069^\circ.03403T + 0^\circ.01032T^2 + 0^\circ.000002T^3 \\ N &= 259^\circ.18328 + 1934^\circ.14201T + 0^\circ.00208T^2 + 0^\circ.000002T^3 \end{aligned} \quad (8)$$

其中 T 是从 1900 年 1 月 0 日 12 时起算的儒略世纪数

$$T = \frac{J_t - 2415020}{36525}$$

可以从天文年历^[2] 中查出。

根据 Brown 月亮理论, 月亮轨道参数 $c_m/r_m, \lambda_m, \beta_m$ 在某一瞬间的数值可以由 6 个天文学参数给出:

$$\begin{aligned} \frac{c_m}{r_m} &= 1 + \sum_1^{72} K_{abcdef} \cos(a\tau + bs + ch + dp + eN + fp_s) \\ &\approx 1 + 0.054501 \cos(s - p) \\ &\quad + 0.010025 \cos(s - 2h + p) \\ &\quad + 0.008249 \cos(2s - 2h) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \lambda_m &= s + \sum_1^{101} K_{abcdef} \sin(a\tau + bs + ch + dp + eN + fp_s) \\ &\approx s + 0.109760 \sin(s - p) \\ &\quad + 0.022236 \sin(s - 2h + p) \\ &\quad + 0.003728 \sin(2s - 2h) \\ &\quad + 0.011490 \sin(2s - 2h) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \beta_m &= \sum_1^{72} K_{abcdef} \sin(a\tau + bs + ch + dp + eN + fp_s) \\ &\approx 0.089504 \sin(s - N) \\ &\quad + 0.004897 \sin(2s - p + N) \\ &\quad + 0.004837 \sin(p - N) \\ &\quad + 0.003024 \sin(s - 2h + N) \end{aligned} \quad (11)$$

太阳轨道参数也可类似表示:

$$\begin{aligned} \frac{c_s}{r_s} &\approx 1 + 0.016750 \cos(h - p_s) \\ &\quad + 0.000281 \cos(2h - 2p_s) \\ &\quad + 0.00005 \cos(3h - 3p_s) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \lambda_s &\approx h + 0.03350 \sin(h - p_s) \\ &\quad + 0.000351 \sin(2h - 2p_s) \\ &\quad + 0.000005 \sin(3h - 3p_s) \end{aligned} \quad (13)$$

于是, 只要已知某时刻的儒略世纪数, 则该时刻的月球、太阳轨道参数可由 6 个天文学参量计算得出, 因而 $\Delta g_m(A, t)$, $\Delta g_s(A, t)$ 理论值可以计算得出。

3.4 计算实例

以中华人民共和国湖北省武汉市某测站 ($30.5^\circ N, 114.5^\circ E, 89.3mMSE$) 位置为例, 计算该点在 2015 年 10 月 1 日至 10 月 30 日 (格林威治时) 的固体潮理论值, 并与实际值相比对。

根据天文学史, 得到 2015 年 10 月 1 日至 10 月 30 日儒略世纪数, 代入上述计算过程。计算结果如图 3 所示

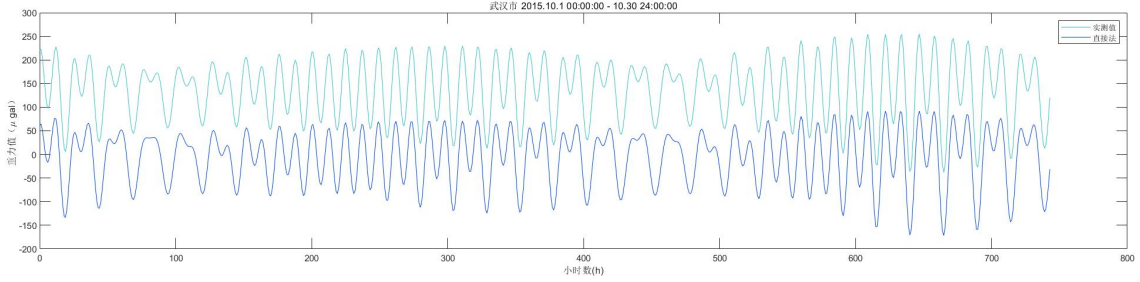


图 3: 直接法计算结果

4 重力固体值杜森调和函数展开法

4.1 起潮力位 Laplace 展开

在天球上中, 有

$$\cos Z_m = \sin \phi \sin \delta_m + \cos \phi \cos \delta \cos H_m$$

其中 H_m 是天球上 PA、PM 连线夹角。因此由勒让德函数加法定理

$$\begin{aligned} P_n(\cos Z_m) &= P_n(\sin \phi) P_n(\sin \delta_m) \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{m=n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\sin \phi) \cdot P_n^m(\sin \delta_m) \cos(mH_m) \end{aligned} \quad (14)$$

可以得到用 ϕ , δ_m , H_m 表示的 T_m 和 T_s , 称为起潮力位的 Laplace 展开。

4.2 起潮力的谐波展开

将起潮力位式代入

$$\begin{aligned} \Delta g_m(A, t) &= -\frac{\partial T_m}{\partial r} \Big|_{r=R} \\ \Delta g_s(A, t) &= -\frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{r=R} \end{aligned} \quad (15)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \Delta g_m(A, t) &= \Delta g_{m2}(A, t) + \Delta g_{m3}(A, t) \\ \Delta g_s(A, t) &= \Delta g_{s2}(A, t) \\ \Delta g_{m2}(A, t) &= -C_0 \left(\frac{c_m}{r_m} \right)^3 H_0 - C_1 \left(\frac{c_m}{r_m} \right)^3 H_1 - C_2 \left(\frac{c_m}{r_m} \right)^3 H_2 \\ \Delta g_{m3}(A, t) &= -C'_0 \left(\frac{c_m}{r_m} \right)^4 H'_0 - C'_1 \left(\frac{c_m}{r_m} \right)^4 H'_1 - C'_2 \left(\frac{c_m}{r_m} \right)^4 H'_2 - C'_3 \left(\frac{c_m}{r_m} \right)^4 H'_3 \end{aligned} \quad (16)$$

根据天球三角公式的推导,所有形如 $(\frac{c_m}{r_m})^3 H_i$ 以及 $(\frac{c_m}{r_m})^4 H'_i$ 项都可以用 6 个天文学参数展开,即全部表达成 $K_{abcdef} \cos(a\tau + bs + ch + dp + eN + fp_s + \phi_0)$ 形式。因此 Δg 就可表示成各种 $\cos(a\tau + bs + ch + dp + eN +$ 乘以系数 K_{abcdef} 之和。将相同 a, b, c, d, e, f, ϕ_0 的系数合并 (包括 Δg_m 和 Δg_s 的), 即可制得起潮力谐波表, 见^[1]。

在各种谐波中, 选取系数最大的 5 个谐波作为 Δg 的值, 它们的性质列于表 2。

名称	系数	大地系数	幅角
$M2$	0.90812	$C \cos^2 \phi$	$2\tau + 180^\circ$
$N2$	0.17387	$C \cos^2 \phi$	$2\tau - s + p + 180^\circ$
$S2$	0.42358	$C \cos^2 \phi$	$2\tau + 2s - 2h + 180^\circ$
$K1$	0.53050	$C \sin 2\phi$	$\tau + s - 90^\circ$
$O1$	0.37689	$C \sin 2\phi$	$\tau - s + 90^\circ$

表 2: 5 个谐波性质

4.3 计算实例

以中华人民共和国湖北省武汉市某测站 ($30.5^\circ N, 114.5^\circ E, 89.3mMSE$) 位置为例, 计算该点在 2015 年 10 月 1 日至 10 月 30 日 (格林威治时) 的固体潮理论值, 并与实际值相比对。

根据天文学历, 得到 2015 年 10 月 1 日至 10 月 30 日儒略世纪数, 算出 6 个天文学参量值, 代入表 2 即可求出每个谐波在每个时刻的具体值。计算结果如图 4 所示

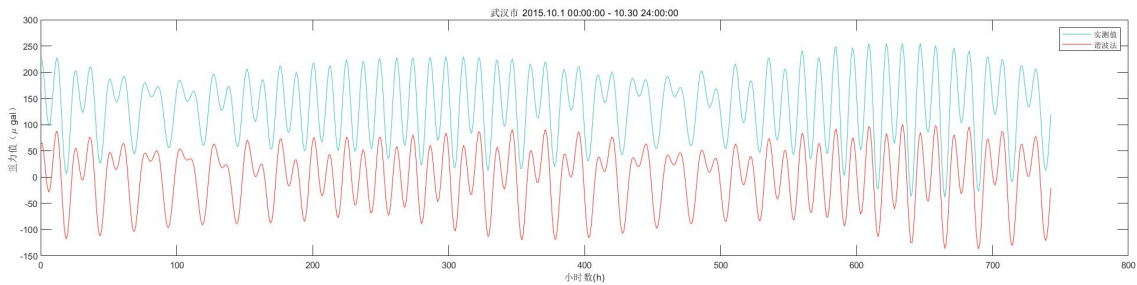


图 4: 谐波法计算结果

5 计算结果分析

两种方法得到的理论值与实测值见图 5。

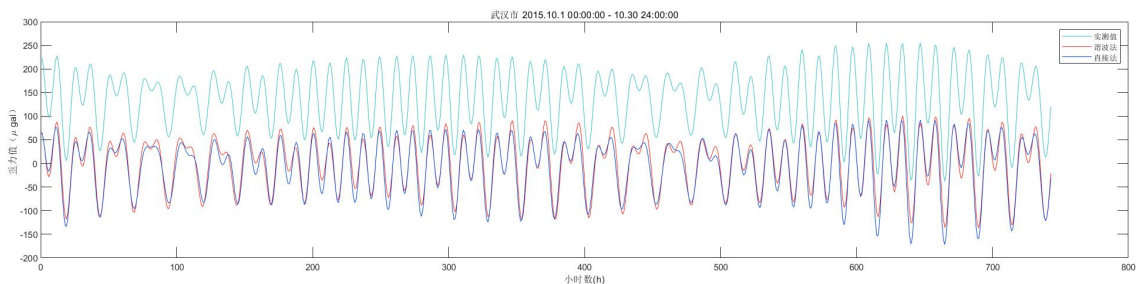


图 5: 两种方法与实测值差异

从图 5 中可以看出, 谐波法和直接法计算得到的差异很小, 说明了 5 个主要谐波已足够能代表总的重力固体潮值, 这是因为这 5 个谐波的振幅几乎远大于其他谐波的振幅。

并且, 可以看出两种方法与实测值的相位几乎处处相同, 说明我们采用的两种理论方法都应是正确的。但是, 实测值的振幅却明显大于两种理论值方法的振幅。

5.1 潮汐修正

首先考虑潮汐因子的影响, 潮汐因子的产生是由于地球的弹性: 在起潮力作用下, 地球将发生形变, 使得重力固体潮产生变化。这种变化一般由 2 个部分组成:

(1) 地球的潮汐形变引起的地球内部的密度变化在 A 点产生的重力变化 Δg_1 。

(2) 地球的潮汐形变引起的地面升降在 A 点产生的重力变化 Δg_2 。

采用不同的地球模型, 两种重力变化的取值均不同。但是, 无论哪种模型, Δg_1 和 Δg_2 几乎是 Δg 的常数比值, 考虑这种常数比值后对重力固体潮的修正称为潮汐修正。一般地, 取潮汐因子

$$\delta_2 \approx \delta_3 = 1.16$$

5.2 高程影响

接着考虑高程影响: 由于重力固体潮计算的是太阳和月亮对地球表面 A 点地重力值, 所以高程只改变了 A 点距离地心的距离。也就是

$$\Delta g(A, t) = -\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R'}$$

项, $R' = R + h$ 。而地球本身物质的引力变化已经被计入到了潮汐修正中。由于 A 点地高程 (83m) 相比地球半径 (6371km) 小到忽略不计, 因此高程的影响是可以略去的。

5.3 其他影响

因此我们作出实测数据减去经由潮汐修正后的理论值, 如图 6 所示:

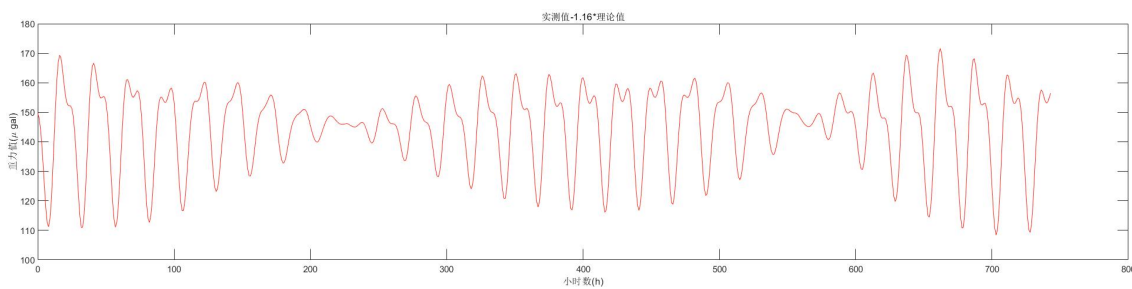


图 6: 潮汐修正理论值与实测值差值

从图 6 中可以明显看到, 实测值与理论值的差值是随时间而变化的波包, 而在较短时间内仪器的零漂通常可视为不随时间变化的常数值, 因此除了仪器零漂之外, 一定有其他潮汐重力项对测量值产生了影响。于是认为实测值与理论值的差异主要来源于以下原因:

(1) 海潮负荷重力效应、地球极移引起的重力变化、地球椭球修正以及环境噪声对观测的影响等。但是在以上各种改正中, 极移主要引起重力的长期变化, 年变化约为 $0.09\mu gal$ 左右。而海潮负荷影响在近海

地区最大一般仅能达到 $0.05\text{---}0.06\mu\text{gal}$ 。^[3] 其他的各项改正又远小于这两项改正。因此, 尽管这些改正确实是随时间变化的, 但是它们造成的重力值改正较微小, 远小于图 6 中的差值。

(2) 仪器零漂非线性变化。传统的重力网平差模型主要采用线性零漂的处理方法, 即认为重力仪零漂率在观测过程中保持不变。但是也有可能个别的仪器零漂率较大, 有最大能达到 $30\mu\text{gal}/\text{h}$ ^[4], 可见仪器零漂非线性变化确实会对实测数据造成不可忽略影响。

(3) 仪器测量条件的变化。例如: 由于重力测量仪器对温度敏感, 测量环境温度的时间变化可能造成实测数据误差周期性波动。具体影响有待于仪器的测量原理作更深一步分析。

(4) 地质影响。有文献指出, 在相对重力测量中, 测线一定要远离江河湖泊, 避免在地下水变化剧烈的环境条件下进行测量。^[5] 武汉毗邻长江, 可能存在地下水条件的变化。测点处重力值可能还受地下水以外的其他地质因素影响, 具体应结合实际情形作进一步分析。

6 结语

本文推导了在刚性球型地球假设下重力固体潮两种方法的理论假设与计算过程, 指出了重力固体潮理论的基本物理定律条件, 并结合实测数据计算了某测点的理论重力固体潮值, 分析了实测值理论值差异的原因。本文发现即便考虑了潮汐改正后, 实测数据值与两种理论方法结果均有较大差异, 具体的原因有待结合仪器测量原理、测点地质条件作进一步分析处理。

7 致谢

本文是中国科学技术大学 2020 年秋季学期《重力固体潮》课程大作业。感谢授课老师黄金水老师一学期的教授, 让我对大地测量以及地球动力学有了更深入的了解。

参考文献

- [1] 三校合编. 重力与固体潮教程[M]. 北京: 地震出版社, 1982.
- [2] 中科院紫金山天文台. 2016 年中国天文年历[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [3] 王勇, 张为民, 王虎彪, 周旭华. 绝对重力观测的潮汐改正[J]., 2003.
- [4] 隗寿春, 徐建桥, 郝洪涛, 等. 零漂改正对中国地壳运动观测网络重力数据处理的影响[J]. 大地测量与地球动力学, 2017, 37(004): 403-406.
- [5] 王庆宾, 吴晓平. 相对重力测量值的改正[J]. 测绘学院学报, 2001, 18(B09): P.8-10.