重力与固体潮第一次作业：位论基础

时潜 PB18051157

2020 年 10 月 13 日

目录

1　第一题 **2**

2　第二题 **6**

3　第三题 **10**

1 第一题

计算 PREM 模型的地球引力场（包括引力位、引力、引力的一阶导数；给出计算公式，公式用 $\rho(r)$ 的积分形式表示，然后代入 PREM 模型参数值，给出数值计算结果的图，包括密度、引力位、引力、引力的一阶导数图，2 个地球半径的区间）。PREM 模型的密度分布见附件。

解： 首先为了方便表达，令 $\rho(r)=0,\quad r>R$

引力：由于 $\nabla\cdot\vec{F}=-4\pi G\rho$

由 $Gauss$ 定理有

$$\iint \vec{F}\cdot d\vec{S}=-4\pi GM$$

由于 $PREM$ 模型的各向同性，有

$$F(r)=\frac{GM(r)}{r^2}$$

其中 $M(r)=\int_0^R \rho(x)4\pi x^2dx$

引力势：令 $V(r)=V_{inner}+V_{outer}$

其中 V_{inner} 是 $x<r$ 处的质量引起的，V_{outer} 是 $r<x<R$ 处的质量引起的. 易得

$$V_{inner}=\frac{GM_{inner}}{r}$$

$$V_{outer}=\int_r^R \frac{G}{x}dM=\int_r^R \frac{G\rho(x)4\pi x^2}{x}dx$$

$r>R$ 时，

$$V(r)=\frac{GM(R)}{r},\quad r>R$$

引力一阶导数：由 $F(r)=\frac{GM(r)}{r^2}$ 得

$$\frac{dF}{dr}=\frac{-2GM(r)}{r^3}+\frac{G\frac{dM(r)}{dr}}{r^2}$$
$$=\frac{-2GM(r)}{r^3}+4\pi G\rho(r)$$

数值计算 $Matlab$ 代码如下

```
function [y] = funcLegendre(n,m)
% 勒让德多项式，输入输出为syms
syms t
y = (1-t^2)^(m/2)*diff( (t^2-1)^n, t,n+m )/( 2^n * factorial(n) );
end

function [y] = funcLegendre2(n,m,x)
% 勒让德多项式，输入矩阵，输出矩阵
y = subs( funcLegendre(n,m), x );
end

function [out] = PREM(r)
```

```
%PREM地球内部结构模型（密度）
%    输入：半径(km)
%    输出：密度（g/cm^3)
    R0 = 6371;
    x = r/R0;
    out = ...
    ( r>=0 & r<1221.5 ).*(13.0885-8.8381*x.^2 )+...
    ( r>=1221.5 & r<3480 ).*( 12.5815 - 1.2638 * x - 3.6426*x.^2 - 5.5281*x.^3)+...
    ( r >= 3480 & r < 5701 ).*( 7.9565 - 6.4761*x + 5.5283*x.^2 - 3.0807*x.^3 )+...
    ( r>=5701 & r<5771 ).*( 5.3197 - 1.4836*x )+...
    ( r>=5771 & r<5971 ).*( 11.2494 - 8.0298*x )+...
    ( r>=5971 & r<6151 ).*( 7.1089 - 3.8045*x )+...
    ( r>=6151 & r<6346.6 ).*( 2.6910 + 0.6924*x )+...
    ( r>=6346.6 & r<6356 ).*2.9+...
    ( r>=6356 & r<6368 ).*2.6+...
    ( r>=6368 & r<=6371 ).*1.02;
end
%%%%%%主文件%%%%%%
clear all
x = 1:1:6371*2;
G = 6.67*10^(-11);%N m^2/kg
%引力
for R=1:1:6371
    desity2 = @(x)PREM(x).*x.^2;
    desity1 = @(x)PREM(x).*x.^2*4*pi;
    desity3 = @(x)PREM(x).*x*4*pi;
    Mass(R) = integral( desity1 ,0,R );
    V_inner(R) = G*Mass(R)/R;
    V_outer(R) = G*integral( desity3 , R,6371 );
    V(R) = V_inner(R) + V_outer(R);
    DForce(R)=4*pi*G*PREM(R)-2*G*Mass(R)/R^3;
    %Force(R) = integral( desity2 , 0, R)/( R^2 )*G*10^6*4*pi;
end
for r = 6371:1:6371*2
    Mass(r) = Mass(6371);
    V(r) = G*Mass(r)/r;
    DForce(r) = -2*G*Mass(r)/r^3;
end
Force = G*Mass./(x.^2);

subplot(2,2,1);
```

```
plot( x, PREM(x) );
axis([0 6371*2 -inf inf]);
title( '密度' );
xlabel('r/km');
ylabel('rho(g/cm^3)');

subplot(2,2,2);
plot( x, Mass );
axis([0 6371*2 -inf inf]);
title('质量');
xlabel('r/km');
ylabel('Mass(10^9 kg)');

subplot( 2,2,3 );
plot( x, Force );
axis([0 6371*2 -inf inf]);
title('引力');
xlabel('r/km');
ylabel('Force(10^3N/kg)');

subplot( 2,2,4 );
plot( x, V );
axis([0 6371*2 -inf inf]);
title('引力位');
xlabel('r/km');
ylabel('V(10^6 N/m)');

plot( x, DForce )
axis([0 6371*2 -inf inf]);
title('引力一阶导数');
xlabel('r/km');
ylabel('DForce( 10^3N/(kg km) )');
%%%%%%%%%%%%%%%%
```

数值计算结果如下图:

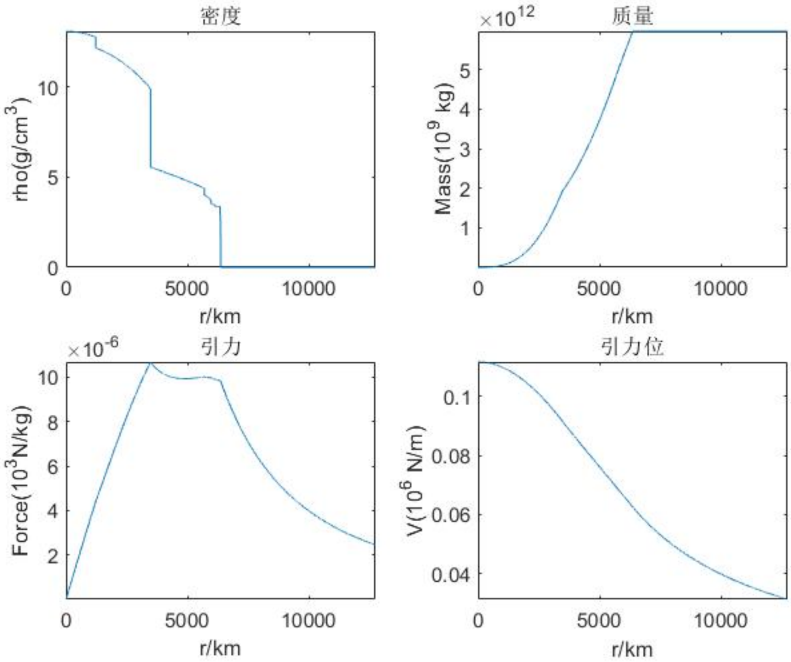

图 1: 第一题结果 1

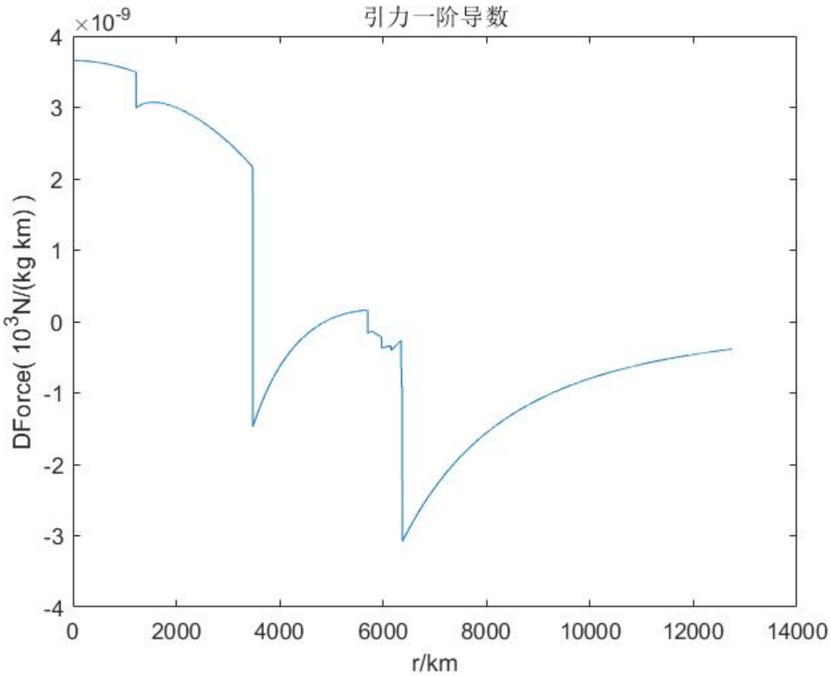

图 2: 第一题结果 2

2 第二题

什么是带谐函数？扇谐函数？田谐函数？计算零点并画图显示：
$P_4(\cos(\theta))$,$P_{6,4}(\cos(\theta))\cos(4\lambda)$,$P_{4,4}(\cos(\theta))\cos(4\lambda)$
只需给出正负区域（白表正；黑表负）和零线位置的大致数值。

解： 画图显示:

Matlab 代码如下

```
clear all
h = pi/100;
[u,v] = meshgrid( 0:h:pi,0:h:2*pi );
x = sin(u).*cos(v);
y = sin(u).*sin(v);
z = cos(u);
% [x,y,z] = sphere(100);
BLACK( :, :, 1 ) = zeros(size(x));
BLACK( :, :, 2 ) = zeros(size(x));
BLACK(:, :, 3 ) = zeros(size(x));

RED( :, :, 1 ) = ones(size(x));
RED( :, :, 2 ) = zeros(size(x));
RED( :, :, 3 ) = ones(size(x));

WHITE( :, :, 1 ) = ones(size(x));
WHITE( :, :, 2 ) = ones(size(x));
WHITE( :, :, 3 ) = ones(size(x));
subplot(2,2,1);
i = find( funcLegendre2(4,0,z) < 0 );
z1 = z;
z1(i)=NaN;
mesh( x,y,z1,BLACK );
hold on
j = find( funcLegendre2(4,0,z) >= 0 );
z2 = z;
z2(j)=NaN;
mesh( x,y,z2, RED );
title('P40');
hold off

subplot(2,2,2);
i = find( funcLegendre2(6,4,z).* cos(4*v) < 0 );
z1 = z;
```

```
z1(i)=NaN;
mesh( x,y,z1,BLACK );
hold on
j = find(funcLegendre2(6,4,z).* cos(4*v) >= 0 );
z2 = z;
z2(j)=NaN;
mesh( x,y,z2, RED );
title('P64');
hold off;


subplot(2,2,3);
i = find( funcLegendre2(4,4,z).* cos(4*v) < 0 );
z1 = z;
z1(i)=NaN;
mesh( x,y,z1,BLACK );
hold on
j = find(funcLegendre2(4,4,z).* cos(4*v) >= 0 );
z2 = z;
z2(j)=NaN;
mesh( x,y,z2, RED );
title('P44');
hold off;
```

画图结果如下:

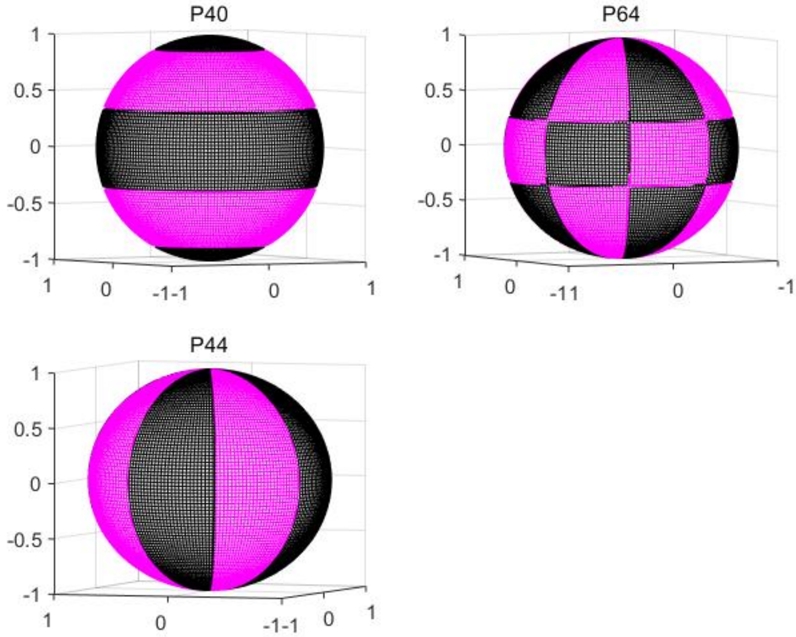

图 3: 第二题

计算零点

Matlab 代码如下

```
h = 1/100;
theta = -1:h:1;
y40 = funcLegendre2( 4,0,theta );
y64 = funcLegendre2( 6,4,theta );
y44 = funcLegendre2( 4,4,theta );
subplot(2,2,1);
plot(theta,y40)
title('P40');
hold on
plot(theta,zeros( size(theta) ))
axis([-1 1 -1 1]);
hold off

subplot(2,2,2);
plot(theta,y64);
title('P64');
hold on
plot(theta,zeros( size(theta) ));
axis([-1 1 -1000 1000]);
hold off
```

```
subplot(2,2,3);
plot(theta,y44);
title('P44');
hold on
plot(theta,zeros( size(theta) ));
axis([-1 1 -150 150]);
hold off
```

零点画图结果如下:

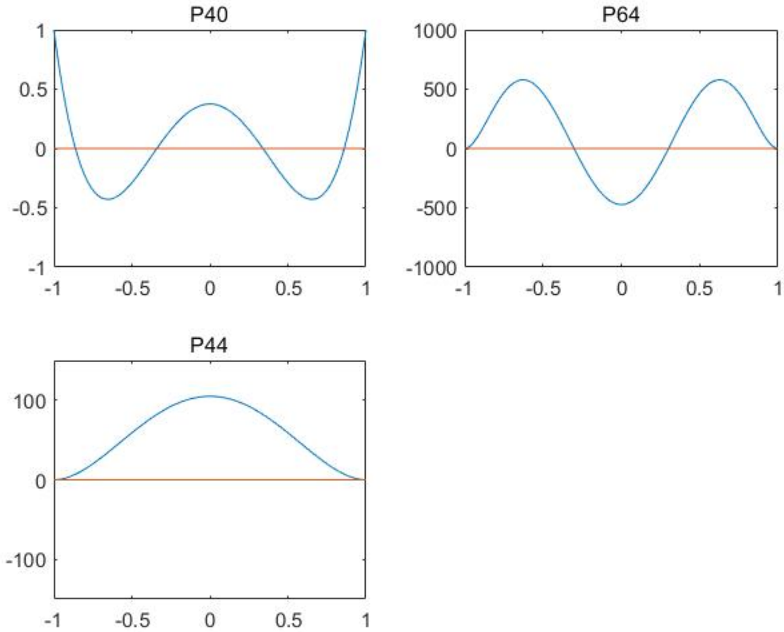

图 4: 第二题 2

从图中可以看出，$P_{40}(x)$ 的零点大概在 $\pm 0.87, \pm 0.35$ 附近。
$P_{64}(x)$ 的零点大概在 ± 0.3 附近和 ± 1
$P_{44}(x)$ 的零点为 ± 1

3　第三题

给出外部 Laplace 方程第二边值问题解的级数形式（球谐函数表示）和积分形式（Poisson 积分：可采用 Green 函数解法，也可以采用级数解方法），需给出详细推导过程

$$\begin{cases} \triangle u(r,\theta,\lambda)=0 \quad outside\ sphere\ r=R \\ \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R}=f \\ \lim\limits_{r\to\infty} u=0 \end{cases}$$

解： 由于 $\triangle u=0$ 且 $\lim\limits_{r\to\infty} u=0$ 于是

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} R(\frac{R}{r})^{n+1}(a_{nm}R_{nm}+b_{nm}S_{nm})$$

由 $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R}=f$ ，得

$$\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R}=f=\sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)(a_{nm}R_{nm}+b_{nm}S_{nm})$$

由球谐函数正交完备性，得到

$$a_{n0}=\frac{2n+1}{(n+1)4\pi}\iint -f(\theta',\lambda')P_{n0}\cos(\theta')d\sigma'$$

$$a_{nm}=\frac{2n+1}{(n+1)2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iint -f(\theta',\lambda')P_{nm}\cos(\theta')\cos(m\lambda')d\sigma'$$
$$b_{nm}=\frac{2n+1}{(n+1)2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iint -f(\theta',\lambda')P_{nm}\cos(\theta')\sin(m\lambda')d\sigma'$$

代入 u, 并利用求和表达式

$$P_n(\cos\phi)=P_n(\cos(\theta))P_n(\cos(\theta'))+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}[R_{nm}(\theta,\lambda)R_{nm}(\theta',\lambda')+S_{nm}(\theta,\lambda)S_{nm}(\theta',\lambda')]$$

可改写为：

$$\begin{aligned} u&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi(n+1)}R(\frac{R}{r})^{n+1}\iint f(\theta',\lambda')P_n(\cos(\Phi))d\sigma' \\ &=\iint \frac{-f(\theta',\lambda')R}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n+1}(\frac{R}{r})^{n+1}P_n(\cos(\Phi))\,d\sigma' \end{aligned} \tag{1}$$

我们已知

$$\frac{R}{l}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{R}{r})^{n+1}P_n(\cos(\Phi))$$

但是

$$\frac{2n+1}{n+1}=2-\frac{1}{n+1}$$

由于

$$\frac{1}{l}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{r^{n+1}}P_n(\cos(\Phi))$$

对于任意 $x<r$ 均成立，于是可以对该式两边对 x 从 0 到 R 积分

得到

$$\begin{aligned} Right = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (\frac{R}{r})^{n+1} P_n(\cos(\Phi)) = Left = \int_0^R \frac{dx}{x^2 + r^2 - 2xr\cos(\Phi)} \\ = \int_{-r\cos(\Phi)}^{R - r\cos(\Phi)} \frac{dx}{x^2 + t^2} \quad , t = r\sin(\Phi) \\ = \frac{1}{r\sin(\Phi)} [arctan(\frac{R - r\cos(\Phi)}{r\sin(\Phi)}) + \frac{\pi}{2} - \Phi] =^{def} A \end{aligned} \tag{2}$$

所以

$$\begin{aligned} V(r, \theta, \lambda) = \iint \frac{-f(\theta', \lambda')}{4\pi} R(\frac{2R}{l} - A) d\sigma' \\ with \quad A = \frac{1}{r\sin(\Phi)} [arctan(\frac{R - r\cos(\Phi)}{r\sin(\Phi)}) + \frac{\pi}{2} - \Phi] \end{aligned} \tag{3}$$