Объединение схем алгоритмов

1 Метод объединения схем алгоритмов

Нередко возникает необходимость в реализации устройства, поддерживающего выполнение сразу нескольких алгоритмов. Классическим примером подобной задачи является разработка арифметико-логического устройства (АЛУ) процессора ЭВМ. АЛУ должно иметь возможность осуществлять как стандартные арифметические (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и так далее), так и элементарные логические операции (например, сравнение чисел). Каждой из перечисленных операций соответствует своя последовательность действий, а все устройство в целом должно обеспечивать выполнение каждого из алгоритмов.

В частном случае, объединение может быть произведено путем элементарного выбора конкретного алгоритма перед началом работы: «Если требуется осуществить операцию O_1, то следует использовать алгоритм U_1, если же необходимо осуществить операцию O_2, то следует использовать алгоритм U_2, и так далее». Однако в более общем случае, такой тривиальный подход приведет к возрастанию накладных расходов(в примере с АЛУ — к увеличению аппаратных затрат) в следствие многократной реализации общих для нескольких алгоритмов фрагментов. Следовательно, для практического применения больше подойдет техника объединения, способная учитывать повторяющиеся последовательности действий.

Более формально, пусть имеются алгоритмы $U_1, U_2, ..., U_l$, заданные в форме ЛСА, и требуется получить некоторый минимальный по некоторому критерию алгоритм U, который, при определенных дополнительных условиях, мог бы быть равносилен любому из $U_1, U_2, ..., U_l$.

В роли дополнительных могут использоваться специальные логические условия $r_1, r_2, ..., r_k$, применяемые в схеме U наряду с $p_1, p_2, ..., p_m$ таким образом, чтобы каждая из возможных их конъюнкций $R_1, R_2, ..., R_{2^k}$ соответствовала не более чем одному алгоритму из $U_1, U_2, ..., U_l$.

Определение. *Конъюнкции $R_1, R_2, ..., R_{2^k}$, сформированные из дополнительных условий $r_1, r_2, ..., r_k$, сопоставленные алгоритмам $U_1, U_2, ..., U_l$, называются определяющими конъюнкциями.*

Очевидным образом, оптимальным значением k будет такое минимальное, что $2^k > l$.

Объединенной ЛСА U называется такая ЛСА, которая соответствует двум условиям.

1. Любой оператор A_i, входяший хотя бы в одну из объединяемых ЛСА $U_1, U_2, ..., U_l$, входит ровно один раз в ЛСА U.

2. Если в ЛСА $U(r_1, r_2, ..., r_k, p_1, p_2, ..., p_m)$ подставить значения определяющей конъюнкции R_i, то U трансформируется в равносильный, соответствующий R_i, алгоритм.

Кроме того, введем понятие определяющей функции β^i_j, представляющей собой условное выражение

$$\beta^i_j = R_i \vee \frac{R'_1}{0} \vee \frac{R'_2}{0} \vee ... \vee \frac{R'_q}{0}.$$

При этом будем считать, что определяющая функция указанного вида соответствует оператору A_j из U_i, R_i задает выполнение U_i, а $R'_1, R'_2, ..., R'_q$ задают выполнение алгоритмов, в которых оператор A_j или отсутствует, или имеет в точности такую же строку переходов в эквивалентной МСА.

Принимая во внимание все вышеизложенное, задача объединения алгоритмов может быть решена следующим образом.

1. Построить равносильные ЛСА $U_1, U_2, ..., U_l$ МСА.

2. Построить объединенную МСА, в которой каждый элемент α_{ij} представим как $\alpha_{ij} = \vee(k = 1, ..., l)[\alpha^k_{ij}\beta^k_i]$, где α^k_{ij} — элемент α_{ij} соответствующей U_k МСА, а β^k_i — определяющая функция для оператора A_i из U_k.

3. Построить недоопределенную систему формул перехода $S1$.

4. Построить систему скобочных формул перехода $S2$, доопределив ее.

5. Построить систему схемных формул перехода $S3$.

6. Минимизировать $S3$ по заданному критерию посредством полной системы тождественных преобразований схемных формул.

7. Преобразовать $S3$ в эквивалентную ЛСА U.

Итогом выполнения перечисленных действий будет получение логической схемы объединенного алгоритма U.

2 Пример объединения схем алгоритмов

Рассмотрим подробнее предложенный метод на примере. Пусть требуется произвести объединение следующих алгоритмов.

$$U_1 = A_0 \downarrow^3 A_1 p_1 \uparrow^1 p_2 \uparrow^1 \downarrow^4 A_2 \omega \uparrow^2 \downarrow^1 A_3 \neg p_3 \uparrow^3 \omega \uparrow^4 \downarrow^2 A_k$$
$$U_2 = A_0 \neg p_1 \uparrow^1 \downarrow^5 A_4 \neg p_4 \uparrow^1 A_5 \neg p_2 \uparrow^2 p_4 \uparrow^1 \omega \uparrow^5 \downarrow^2 \neg p_4 \uparrow^4 A_6 \downarrow^1 A_2 \downarrow^4 A_k$$
$$U_3 = A_0 A_1 \neg p_1 \uparrow^1 A_4 \neg p_4 \uparrow^2 \downarrow^4 A_6 \omega \uparrow^3 \downarrow^1 p_2 \uparrow^4 \downarrow^2 A_2 \downarrow^3 A_k$$

Построим эквивалентные каждому из представленных алгоритмов матричные схемы.

$$\begin{array}{c} \\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & - & - & - \\ - & p_1 p_2 & \neg p_1 \vee p_1 \neg p_2 & - \\ - & - & - & 1 \\ p_3 & \neg p_3 & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A_2 & A_4 & A_5 & A_6 & A_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_1 & \neg p_1 & - & - & - \\ - & - & - & - & 1 \\ p_4 & - & \neg p_4 & - & - \\ \neg p_2 \neg p_4 & \neg p_2 p_4 & - & p_2 \neg p_4 & p_2 p_4 \\ 1 & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_4 \\ A_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_4 & A_6 & A_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & - & - & - & - \\ - & p_1 p_2 & \neg p_1 & p_1 \neg p_2 & - \\ - & - & - & - & 1 \\ - & p_4 & - & \neg p_4 & - \\ - & - & - & - & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Очевидно, что для выполнения объединения понадобится два дополнительных логических условия — r_1 и r_2. Сформируем определяющие конъюнкции как $R_1 = r_1 r_2$, $R_2 = r_1 \neg r_2$ и $R_3 = \neg r_1 r_2$. Кроме того, одна из возможных комбинаций, $R = \neg r_1 \neg r_2$, остается неиспользованной. Будем считать, что она соответствует «пустой схеме», не содержащей ни одного оператора.

Тогда семейство определяющих функций будет иметь следующий вид.

$$\beta_0^1 = r_1 r_2 \vee \frac{\neg r_1 r_2}{0} = \frac{r_1}{1} r_2$$
$$\beta_1^1 = r_1 r_2 \vee \frac{r_1 \neg r_2}{0} = r_1 \frac{r_2}{1}$$
$$\beta_2^1 = r_1 r_2 \vee \frac{r_1 \neg r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 \neg r_2}{0} = 1$$
$$\beta_3^1 = r_1 r_2 \vee \frac{r_1 \neg r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 \neg r_2}{0} = 1$$

$$\beta_0^2 = r_1 \neg r_2 \vee \frac{\neg r_1 \neg r_2}{0} = \frac{r_1}{1} \neg r_2$$
$$\beta_2^2 = r_1 \neg r_2 \vee \frac{r_1 r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 \neg r_2}{0} = 1$$
$$\beta_4^2 = r_1 \neg r_2 \vee \frac{r_1 r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 \neg r_2}{0} = \frac{r_1 \dfrac{\neg r_2}{1}}{\dfrac{r_1}{1} \neg r_2}$$
$$\beta_5^2 = r_1 \neg r_2 \vee \frac{r_1 r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 \neg r_2}{0} = 1$$
$$\beta_6^2 = r_1 \neg r_2 \vee \frac{r_1 r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 \neg r_2}{0} = \frac{r_1 \dfrac{\neg r_2}{1}}{\dfrac{r_1}{1} \neg r_2}$$

$$\beta_0^3 = \neg r_1 r_2 \vee \frac{r_1 r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 \neg r_2}{0} = \frac{\dfrac{\neg r_1}{1} r_2}{\neg r_1 \dfrac{r_2}{1}}$$
$$\beta_1^3 = \neg r_1 r_2 \vee \frac{\neg r_1 \neg r_2}{0} = \neg r_1 \frac{r_2}{1}$$
$$\beta_2^3 = \neg r_1 r_2 \vee \frac{r_1 r_2}{0} \vee \frac{r_1 \neg r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 \neg r_2}{0} = 1$$
$$\beta_4^3 = \neg r_1 r_2 \vee \frac{r_1 r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 \neg r_2}{0} = \frac{\dfrac{\neg r_1}{1} r_2}{\neg r_1 \dfrac{r_2}{1}}$$
$$\beta_6^3 = \neg r_1 r_2 \vee \frac{r_1 r_2}{0} \vee \frac{\neg r_1 \neg r_2}{0} = \frac{\dfrac{\neg r_1}{1} r_2}{\neg r_1 \dfrac{r_2}{1}}$$

Объединенная матричная схема примет вид.

$$
\begin{array}{c}
\\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_k
\end{array}
\\
\begin{pmatrix}
\frac{r_1}{1} r_2 \vee \frac{\frac{\neg r_1}{1} r_2}{\neg r_1 \frac{r_2}{1}} & \frac{r_1}{1} \neg r_2 p_1 & - & \frac{r_1}{1} \neg r_2 \neg p_1 & - & - & - \\
- & (r_1 \frac{r_2}{1} \vee \neg r_1 \frac{r_2}{1}) p_1 p_2 & r_1 \frac{r_2}{1} (\neg p_1 \vee p_1 \neg p_2) & \neg r_1 \frac{r_2}{1} \neg p_1 & - & \neg r_1 \frac{r_2}{1} p_1 \neg p_2 & - \\
- & - & - & - & - & - & 1 \\
p_3 & \neg p_3 & - & - & - & - & - \\
- & (\frac{r_1 \frac{\neg r_2}{1}}{\frac{r_1}{1} \neg r_2} \vee \frac{\frac{\neg r_1}{1} r_2}{\neg r_1 \frac{r_2}{1}}) p_4 & - & - & \frac{r_1 \frac{\neg r_2}{1}}{\frac{r_1}{1} \neg r_2} \neg p_4 & \frac{\frac{\neg r_1}{1} r_2}{\neg r_1 \frac{r_2}{1}} \neg p_4 & - \\
- & \neg p_2 \neg p_4 & - & \neg p_2 p_4 & - & p_2 \neg p_4 & p_2 p_4 \\
- & \frac{r_1 \frac{\neg r_2}{1}}{\frac{r_1}{1} \neg r_2} & - & - & - & - & \frac{\frac{\neg r_1}{1} r_2}{\neg r_1 \frac{r_2}{1}}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Эквивалентная недоопределенная система формул перехода $S1$.

$$
\begin{cases}
A_0 \rightharpoondown (\frac{r_1}{1} r_2 \vee \frac{\frac{\neg r_1}{1} r_2}{\neg r_1 \frac{r_2}{1}}) A_1 \vee \frac{r_1}{1} \neg r_2 p_1 A_2 \vee \frac{r_1}{1} \neg r_2 \neg p_1 A_4 \\
A_1 \rightharpoondown (r_1 \frac{r_2}{1} \vee \neg r_1 \frac{r_2}{1}) p_1 p_2 A_2 \vee r_1 \frac{r_2}{1} (\neg p_1 \vee p_1 \neg p_2) A_3 \vee \neg r_1 \frac{r_2}{1} \neg p_1 A_4 \vee \\
\vee \neg r_1 \frac{r_2}{1} p_1 \neg p_2 A_6 \\
A_2 \rightharpoondown A_k \\
A_3 \rightharpoondown p_3 A_1 \vee \neg p_3 A_2 \\
A_4 \rightharpoondown (\frac{r_1 \frac{\neg r_2}{1}}{\frac{r_1}{1} \neg r_2} \vee \frac{\frac{\neg r_1}{1} r_2}{\neg r_1 \frac{r_2}{1}}) p_4 A_2 \vee \frac{r_1 \frac{\neg r_2}{1}}{\frac{r_1}{1} \neg r_2} \neg p_4 A_5 \vee \frac{\frac{\neg r_1}{1} r_2}{\neg r_1 \frac{r_2}{1}} \neg p_4 A_6 \\
A_5 \rightharpoondown \neg p_2 \neg p_4 A_2 \vee \neg p_2 p_4 A_4 \vee p_2 \neg p_4 A_6 \vee p_2 p_4 A_k \\
A_6 \rightharpoondown \frac{r_1 \frac{\neg r_2}{1}}{\frac{r_1}{1} \neg r_2} A_2 \vee \frac{\frac{\neg r_1}{1} r_2}{\neg r_1 \frac{r_2}{1}} A_k
\end{cases}
$$

Доопределение и приведение формул по логическим переменных позволит получить систему $S2$.

$$
\begin{cases}
A_0 \rightharpoondown r_2 A_1 \vee \neg r_2(p_1 A_2 \vee \neg p_1 A_4) \\
A_1 \rightharpoondown p_1(p_2 A_2 \vee \neg p_2(r_1 A_3 \vee \neg r_1 A_6)) \vee \neg p_1(r_1 A_3 \vee \neg r_1 A_4) \\
A_2 \rightharpoondown A_k \\
A_3 \rightharpoondown p_3 A_1 \vee \neg p_3 A_2 \\
A_4 \rightharpoondown p_4 A_2 \vee \neg p_4(r_1 A_5 \vee \neg r_1 A_6) \\
A_5 \rightharpoondown p_4(p_2 A_k \vee \neg p_2 A_4) \vee \neg p_4(p_2 A_6 \vee \neg p_2 A_2) \\
A_6 \rightharpoondown r_1 A_2 \vee \neg r_1 A_k
\end{cases}
$$

Построим систему $S3$.

$$
\begin{cases}
A_0 \rightharpoondown r_2 \uparrow^1 A_1 * \downarrow^1 p_1 \uparrow^2 A_2 * \downarrow^2 A_4 \\
A_1 \rightharpoondown p_1 \uparrow^3 p_2 \uparrow^4 A_2 * \downarrow^4 r_1 \uparrow^5 A_3 * \downarrow^5 A_6 * \downarrow^3 r_1 \uparrow^6 A_3 * \downarrow^6 A_4 \\
A_2 \rightharpoondown A_k \\
A_3 \rightharpoondown p_3 \uparrow^7 A_1 * \downarrow^7 A_2 \\
A_4 \rightharpoondown p_4 \uparrow^8 A_2 * \downarrow^8 r_1 \uparrow^9 A_5 * \downarrow^9 A_6 \\
A_5 \rightharpoondown p_4 \uparrow^{10} p_2 \uparrow^{11} A_k * \downarrow^{11} A_4 * \downarrow^{10} p_2 \uparrow^{12} A_6 * \downarrow^{12} A_2 \\
A_6 \rightharpoondown r_1 \uparrow^{13} A_2 * \downarrow^{13} A_k
\end{cases}
$$

На данном этапе могут быть выполнены минимизирующие действия в соответствии с полной системой тождественных преобразований схемных формул. Кроме того, следует исключить повторяющиеся операторы путем их замены на безусловные переходы.

$$
\begin{cases}
A_0 \rightharpoondown r_2 \uparrow^1 \downarrow^4 A_1 \downarrow^1 \neg p_1 \uparrow^2 \downarrow^6 A_4 \downarrow^2 A_2 \\
A_1 \rightharpoondown p_1 \uparrow^3 \neg p_2 \uparrow^2 \neg r_1 \uparrow^5 \downarrow^7 A_6 \downarrow^5 A_3 \downarrow^3 \neg r_1 \uparrow^5 \omega \uparrow^6 \\
A_2 \rightharpoondown \downarrow^9 A_k \\
A_3 \rightharpoondown p_3 \uparrow^2 \omega \uparrow^4 \\
A_4 \rightharpoondown \neg p_4 \uparrow^2 r_1 \uparrow^7 A_5 \\
A_5 \rightharpoondown p_4 \uparrow^8 p_2 \uparrow^6 \omega \uparrow^9 \downarrow^8 p_2 \uparrow^2 \omega \uparrow^7 \\
A_6 \rightharpoondown r_1 \uparrow^9 \omega \uparrow^2
\end{cases}
$$

После чего, в соответствии с вышеизложенным алгоритмом преобразования, может быть получена логическая схема объединенного алгоритма.

$$U = A_0 r_2 \uparrow^1 \downarrow^4 A_1 p_1 \uparrow^3 \neg p_2 \uparrow^2 \neg r_1 \uparrow^5 \downarrow^7 A_6 r_1 \uparrow^9 \omega \uparrow^2 \downarrow^5 A_3 p_3 \uparrow^2 \omega \uparrow^4 \downarrow^3 \neg r_1 \uparrow^5 \omega \uparrow^6 \downarrow^1 \neg p_1 \uparrow^2 \downarrow^6 A_4 \neg p_4 \uparrow^2 r_1 \uparrow^7 A_5 p_4 \uparrow^8 p_2 \uparrow^6 \omega \uparrow^9 \downarrow^8 p_2 \uparrow^2 \omega \uparrow^7 \downarrow^2 A_2 \downarrow^9 A_k$$