Обзор модальных логик

Модальной логикой называется раздел логики, в котором исследуются логические связи модальных высказываний, т.е. высказываний, включающих модальности. Модальная логика складывается из ряда направлений, каждое из которых занимается модальными высказываниями определенного типа. Будем называть данные направления М-логиками.

Классификация модальных логик

Существующие М-логики могут быть разделены на группы согласно семантическому смыслу используемых модальностей. На сегодняшний день можно выделить следующие группы

– алетические М-логики (используют понятия «необходимо», «возможно», «случайно»);

– деонтические М-логики (используют понятия «обязательно», «разрешено», «запрещено»);

– аксиологические М-логики (используют понятия «хорошо», «плохо», «нейтрально»);

– эпистемические М-логики (используют понятия «знание», «полагание», «незнание»);

– пространственные М-логики (используют понятия «там», «здесь», «нигде»);

– темпоральные (временные) М-логики (используют понятия «в будущем», «в прошлом», «сейчас»).

Последняя группа логик получила наиболее широкое применение на практике, в частности в области информатики и вычислительной техники.

Темпоральные логики

Термин «темпоральная логика» (TL) является обобщающим для различных расширений логики высказываний, позволяющих каким-либо образом учитывать относительный порядок событий.

Характерной особенностью всех темпоральных логик является использование наряду с логическими операторами специализированных модальностей – операторов, накладывающих на расположенные в их области действия выражения временные свойства. Примерами модальных операторов (для TL они могут также называться временными или темпоральными) могут быть следующие связки

– когда-то в прошлом выражение ϕ было истинно;

– некоторое выражение ϕ было истинно до того, как выражение ψ стало истинно;

– при любом варианте развития событий в будущем будет истинно выражение ϕ.

Проведенный в ходе выполнения работы анализ показал, что наиболее распространенными вариантами TL являются следующие логики

– интервальная темпоральная логика (ITL);
– логика Хеннесси-Милнера (HML);
– темпоральная логика линейного времени (LTL);
– темпоральная логика ветвящегося времени (CTL);
– расширенная темпоральная логика ветвящегося времени (CTL*).

Интервальная темпоральная логика

Интервальная темпоральная логика (ITL) представляет собой разновидность дискретной логики, способную оперировать как конечными, так и бесконечными последовательностями состояний.

Помимо логических операций $(\vee, \neg)$ ITL использует специальные операторы, предназначенные для работы с интервалами

– skip ($skip$) – интервальный оператор, обозначающий пустое состояние;

– chop (;) – выражение $\phi;\psi$ истинно на данном интервале, если существует такая точка разбиения этого интервала, что на первой его половине истинно будет ϕ, а на второй ψ, или же ϕ будет истинно всегда;

– chopstar (*) – выражение $\phi*$ истинно на интервале, если существует такое разбиение этого интервала на отрезки конечной длины (за исключением последнего, в случае применения операции к интервалу бесконечной длины), что ϕ истинно на каждом из этих отрезков.

Выражение (1) определяет грамматику ITL.

$$\varphi ::= atom \mid true \mid false \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid skip \mid \varphi;\varphi \mid \varphi * . \qquad (1)$$

Под *atom* здесь и далее понимается пропозициональная переменная.

Для упрощения выражений допустимо использовать некоторые выводимые операторы

– inf (inf) – интервальный оператор, обозначающий бесконечный интервал ($inf = true; false$);

– finite ($finite$) – интервальный оператор, обозначающий конченый интервал ($finite = \neg inf$);

– next (X) – темпоральный оператор, обозначающий следующий момент времени ($Xf = skip; f$);

– sometimes (S) – темпоральный оператор, обозначающий «в некоторых случаях» ($Sf = finite; f$);

– always (A) – темпоральный оператор, обозначающий «всегда» ($Af = \neg S \neg f$).

Логика Хеннесси-Милнера

Компактный вариант рекурсивной темпоральной логики получил название логики Хеннесси-Милнера (HML). Используя два дополнительных оператора пути, HML позволяет описывать множество свойств широко используемых на практике автоматных систем переходов.

Выражение (2) определяет грамматику HML.

$$\varphi ::= atom \mid true \mid false \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid [L]\varphi \mid \langle L\rangle\varphi . \tag{2}$$

Операторы $[L]\varphi$ и $\langle L\rangle\varphi$ требуют истинности φ соответственно для всех или некоторых производных функции.

Логика линейного времени

Мощными описательными возможностями обладает темпоральная логика линейного времени (LTL). В LTL будущее рассматривается как последовательность состояний, поэтому формулы LTL – это формулы пути. В дополнение к базовым логическим операторам и константам ($true$, $false$) в этой логике появляется шесть временных операторов

– next (X) – выражение Xp истинно в текущем состоянии, если в следующий момент времени p истинно;

– future (F) – выражение Fp истинно в текущем состоянии, если в будущем p станет истинно;

– globally (G) – выражение Gp истинно в текущем состоянии, если во всех будущих состояниях p будет истинно;

– until (U) – выражение pUq истинно в текущем состоянии, если в будущем q станет истинно, а до тех пор истинно будет p;

– week until (W) – выражение pWq истинно в текущем состоянии, если в будущем q станет истинно, а до тех пор истинно будет p, или же p всегда будет истинно;

– release (R) – выражение pRq истинно в текущем состоянии, если в будущем p станет истинно, а до того момента времени включительно истинно будет q, или же q всегда будет истинно.

На рисунке 1 изображены временные диаграммы истинности описанных операторов, а на рисунке 2 представлены примеры истинности формул LTL для некоторых систем переходов.

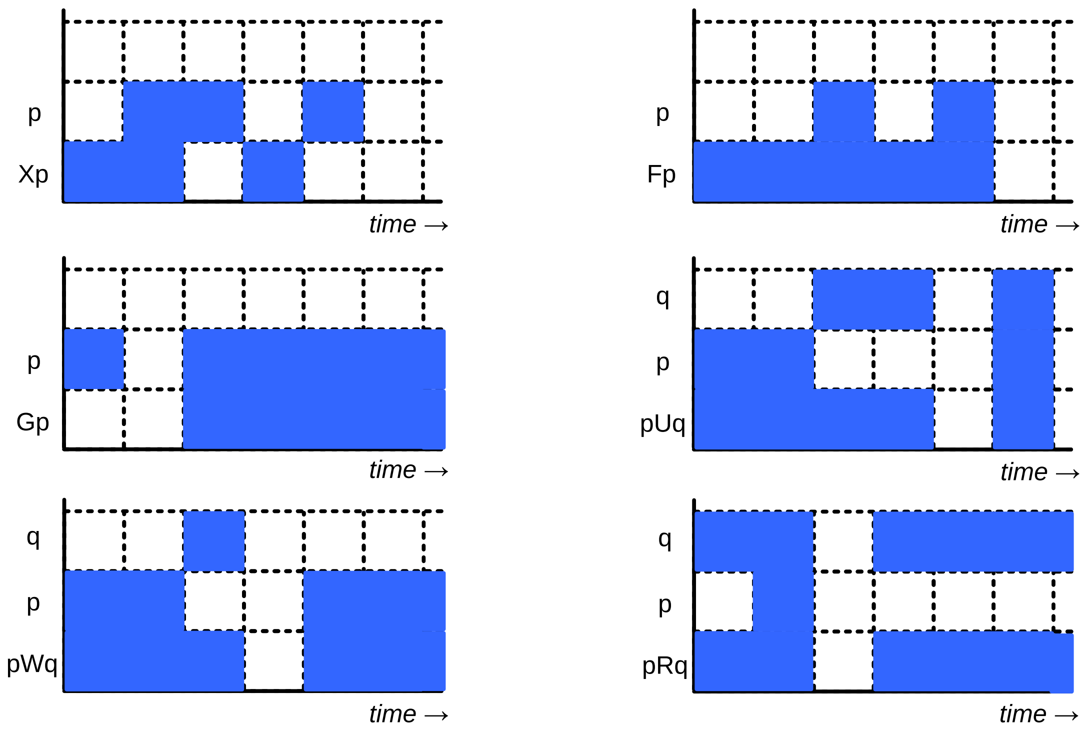

Рисунок 1 – Диаграммы истинности временных операторов LTL

Грамматика LTL может быть определена выражением (3).

$$\varphi ::= atom \mid true \mid false \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid X\varphi \mid F\varphi \mid G\varphi \mid \varphi U\varphi \mid \varphi W\varphi \mid \varphi R\varphi . \qquad (3)$$

Необходимо также заметить, что некоторые временные операторы не являются обязательными, так как могут быть выведены из других. Например, $pWq = (pUq) \wedge Gp$.

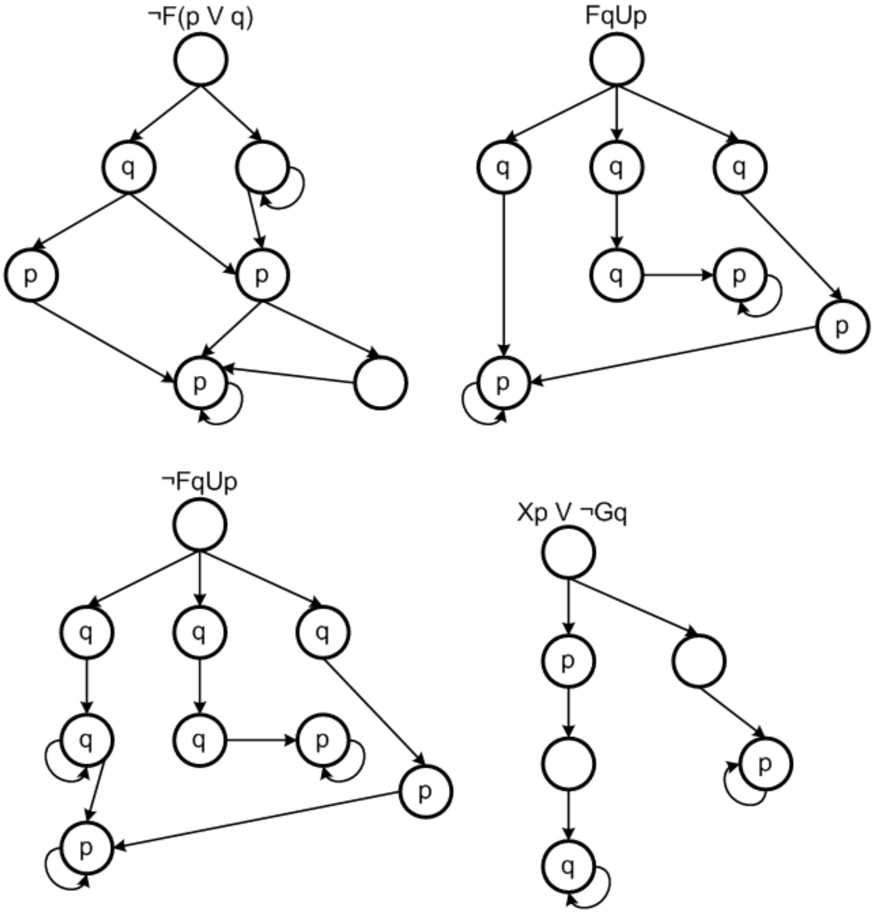

Рисунок 2 – Примеры истинности формул LTL

Логика ветвящегося времени

Специфика LTL такова, что некоторая формула истинна только в том случае, если она истинна на всех возможных путях (вычислениях). В этом заключается принципиальное отличие логики линейного времени от темпоральной логики ветвящегося времени (CTL). Согласно подходу, применяемому в CTL, время имеет структуру, подобную дереву. В каждый момент времени будущее неопределенно, и возможен только один из нескольких вариантов развития событий.

Формулы CTL (в противоположность LTL) являются формулами состояний. Грамматика CTL включает в себя логические операторы $(\vee, \wedge, \neg, \rightarrow)$, логические константы $(true, false)$, несколько рассмотренных раннее временных операторов (X, F, G, U), а также кванторы пути

– along all paths (A) – выражение $A\varphi$ истинно в текущем состоянии, если на всех путях, начинающихся в текущем состоянии истинно φ;

– along at least one path (E) – выражение $E\varphi$ истинно в текущем состоянии, если хотя бы на одном пути, начинающемся в текущем состоянии истинно φ.

В CTL каждый темпоральный оператор должен быть предварен квантором пути. Грамматика CTL может быть описана выражениями (4) – (6).

$$\varphi ::= atom \mid true \mid false \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi, \tag{4}$$

$$\varphi ::= AX\varphi \mid AF\varphi \mid AG\varphi \mid A(\varphi U \varphi), \tag{5}$$

$$\varphi ::= EX\varphi \mid EF\varphi \mid EG\varphi \mid E(\varphi U \varphi). \tag{6}$$

Несколько примеров истинности формул CTL для систем переходов представлены на рисунке 3.

Несмотря на схожесть в определении грамматик, между логиками LTL и CTL имеются весьма значительные отличия. Формулы логики LTL принимают значения на вычислениях (путях), которых бесконечно много. Формулы CTL являются формулами состояний, и значение выражения CTL связано с конкретным состоянием.

Выразительная мощность данных логик несравнима. Известны высказывания, которые могут быть записаны и с помощью LTL, и с помощью CTL. Однако существуют формулы LTL, не имеющие эквивалентных формул CTL, и наоборот. Более того, некоторые соотношения невыразимы ни в LTL, ни в CTL.

.

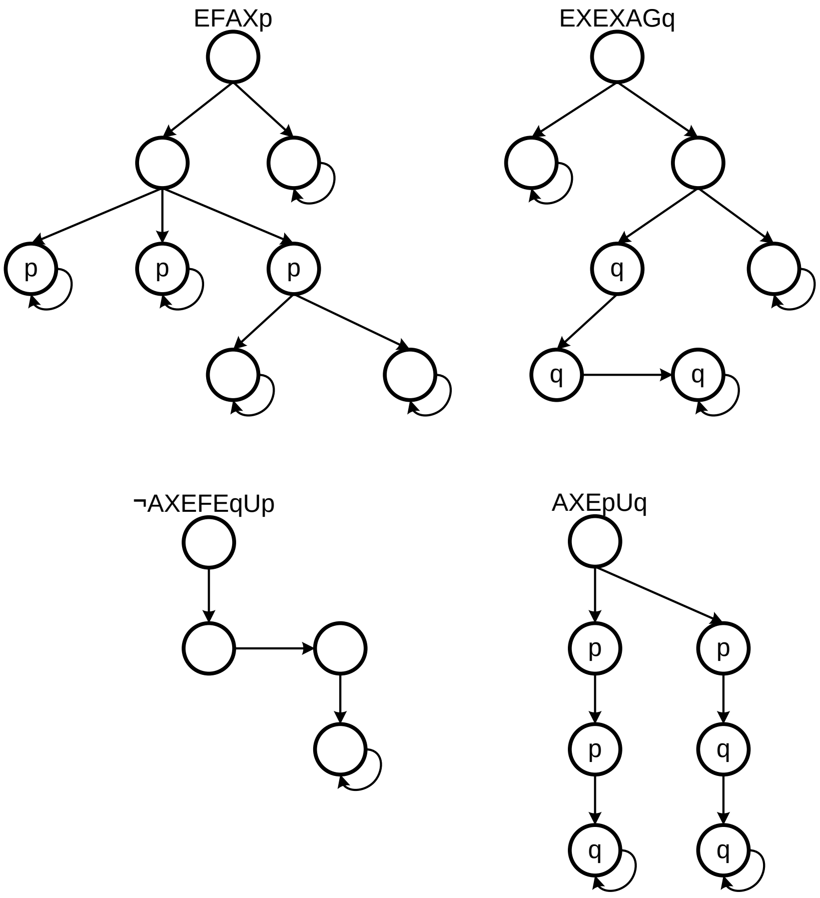

Рисунок 3 – Примеры истинности формул CTL

Расширенная логика ветвящегося времени

CTL и LTL являются подмножеством расширенной темпоральной логики ветвящегося времени (CTL*). Грамматика данной логики представлена выражениями (7) и (8).

$$\varphi ::= atom \mid true \mid false \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi, \tag{7}$$

$$\varphi ::= X\varphi \mid F\varphi \mid G\varphi \mid \varphi U\varphi \mid \varphi W\varphi \mid \varphi R\varphi \mid A\varphi \mid E\varphi. \tag{8}$$

Как следует из (8) выражение CTL* не обязательно должно содержать квантор пути. Кроме того, CTL* допускает использование операторов R и W.

Примерами выразительной мощности CTL* могут служить следующие формулы

– $AFGp$ – данное выражение корректно в LTL (достаточно отбросить квантор пути), но некорректно в CTL;

– $EpUq$ – выражение корректно в CTL, но не имеет эквивалентного в LTL;

– AGp – такое выражение допустимо и в LTL, и в CTL;

– $AFGp \wedge EpUq$ – выражения, эквивалентного данному, нет ни в LTL, ни в CTL.

В результате анализа рассмотренных М-логик можно сделать следующие выводы.

– Наиболее важное отличие М-логик от логики высказываний заключается в наличии ряда дополнительных (модальных) операторов.

– Выразительные мощности М-логик не равны, а используемые описательные средства каждой из них имеют специфические особенности. Тем не менее, грамматики всех М-логик относятся к типу II (контекстно-свободные нерегулярные грамматики) в иерархии Хомского. Данный факт позволяет выполнять обработку их формул однотипными методами.

– К модальным операторам, как и к логическим, могут быть применены преобразования, изменяющие структуру выражения, но не меняющие его семантического смысла. Данное условие является необходимым для возможности оптимизации выражений.