Схемы алгоритмов

2 Граф-схемы алгоритмов

Впервые граф-схемы алгоритмов были предложены Л.А. Калужниным. Наиболее полное описание данного аппарата содержится в работе «Об алгоритмизации математических задач». Введем формальное определение ГСА и связанных с ними понятий.

ГСА — конечный связный граф G, удовлетворяющий следующим условиям.

- В каждом графе имеется два отмеченных узла — входной, из которого выходит лишь одна стрелка, и выходной, из которого не выходит ни одной стрелки.
- Из любого другого узла выходит либо одна (γ-узел), либо две (β-узел) стрелки.
- Стрелки, исходящие из β-узла имеют отметки «+» и «-».
- Имеются конечные множества функциональных элементов — множество преобразователей $Q = \{Q_i\}$ и множество распознавателей $R = \{R_j\}$, $i = 1...n, j = 1...m$.
- Каждому γ-узлу однозначно сопоставлен преобразователь Q_i, а β-узлу — распознаватель R_j, при этом некоторые преобразователи и распознаватели могут быть сопоставлены нескольким различным узлам.

Пример ГСА изображен на рисунке 1.

Назовем подграф-схемой H_i ГСА Г некоторый связный подграф G' графа G, удовлетворяющий следующим условиям.

- Каждый подграф G' содержит один входной γ-узел, один или более выходных γ-узлов и β-узлы.
- Будем предполагать, что к подграфу относятся и стрелки выходных γ-узлов.

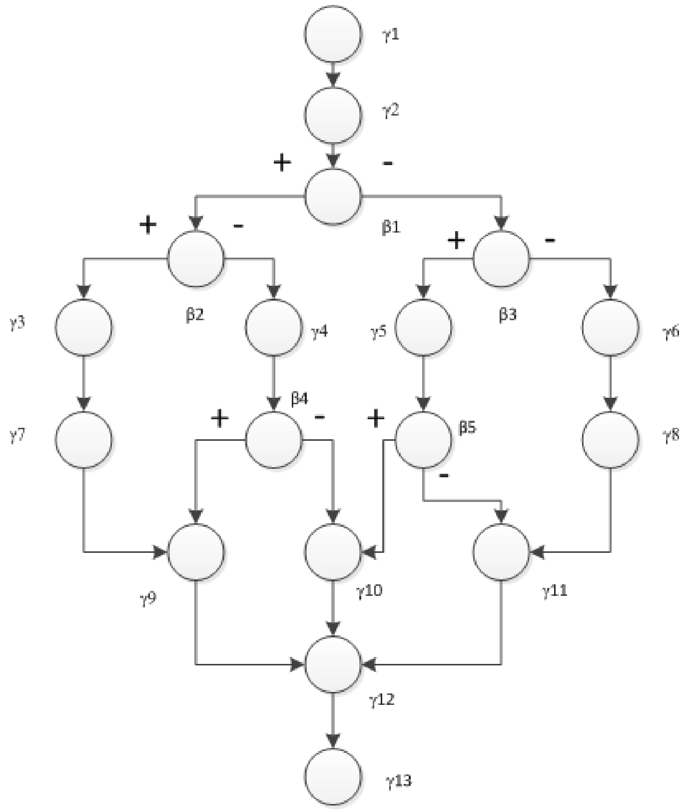

Рисунок 1 — Граф-схема алгоритма

- Узлам подграфа G' сопоставлены те же функциональные элементы, что и узлам графа G.

Пример подграф-схемы представлен на рисунке 2.

Если связный подграф G' не имеет ни одного контура, то он содержит «дерево», вершины которого — γ-узлы. «Дерево» имеет одну отмеченную вершину (вход), а также выходные узлы и их стрелки. В каждом дереве можно выделить «поддеревья» (если вершина не одна).

Определение. *Последовательность вида* $\updownarrow \beta_{i1}\beta_{i2}...\gamma_j$ *называется «ветвью».*

Здесь знак $\updownarrow$ означает («+») или («-»).

Определение. *Две ветви называются равносильными, если последовательности указного вида совпадают до порядка следования логических операторов.*

Определение. *Два дерева равносильны, если их ветви равносильны.*

Определение. *Две ГСА равносильны, если между путями от* A_0 *до* A_k *существует взаимно однозначное соответствие.*

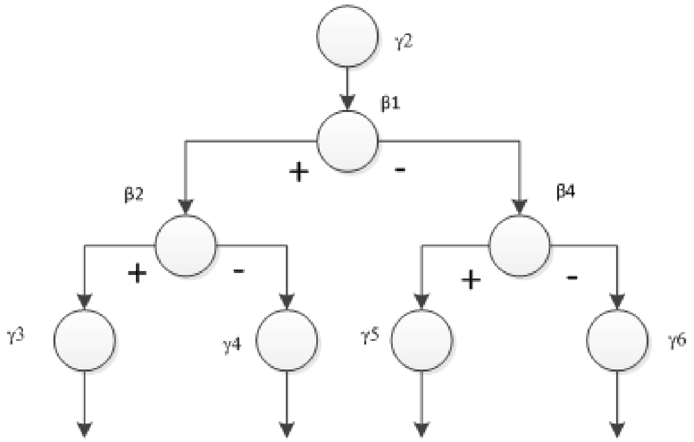

Рисунок 2 — Подграф-схема ГСА

3 Матричные схемы алгоритмов

Еще одним наглядным способом представления алгоритмов являются матричные схемы (МСА), зарекомендовавшие себя как удобный инструмент для анализа систем переходов.

Фактически, МСА является собой табличной формой отображения системы $S1$, формальное изложение которой состоится в ходе следующей лекции. Сейчас зафискируйте этот факт. Более формально.

Определение. *Матричной схемой алгоритма называется квадратная матрица, строки которой соответствуют операторам $A_0, A_1, ..., A_n$, а столбцы — операторам $A_1, A_2, ..., A_n, A_k$. При этом содержимое ячейки $[i, j]$ соответствует составному логическому условию, определяющему возможность перехода от выполнения оператора A_i к выполнению оператора A_j.*

Естественным образом, каждая строка матрицы, по аналогии с каждой формулой перехода, должна отвечать двум требованиям.

1. Ортогональность $A_{ij}A_{ik} \equiv 0, (j, k = 1, ..., n)$, то есть конъюнкция любых двух элементов строки должна быть тождественно ложна;

2. Полнота $\vee(j = 1, ..., n)[A_{ij}] = 1$, то есть дизъюнкция всех элементов строки должна быть тождественно истинна.

Определим процесс выполнения МСА U для последовательности наборов Δ.

- Задать значения переменных Δ_{i1} и определить значение функций $A_{1j}(j = 1, ..., n, k)$ в строке 1 матрицы (оператор A_0); в связи с требованием ортогональности, найдется ровно одна обращающаяся в истину логическая функция; выполнить переход к j-ой строке матрицы (соответствующей определенному оператору A_{j-1}).

- Задать значения переменных Δ_{ij} и определить значение истинной функции $A_{ij} = 1$, при этом найдя строку (и оператор), к которому выполняется очередной переход.

- Процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится оператор, символизирующий окончание алгоритма.

В результате будет получена строка $\mathrm{A}_{i1}\mathrm{A}_{i2}\mathrm{A}_{i3}...\mathrm{A}_{ik}\mathrm{A}_{i(k+1)}...$, являющаяся значением матричной схемы для последовательности наборов Δ.

Равносильная заданной ЛСА U_2 матричная схема U_1 может быть получена элементарным построением системы формул перехода $S1$ с последующим занесением логических функций в ячейки матрицы (с перечислением через символ дизъюнкции, если потребуется).

Для примера представим МСА алгоритма преобразования, речь о котором пойдет в следующей лекции.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_k \end{array} \\
\begin{array}{c} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & - & - & - & - \\
\neg p_1 \neg p_2 p_3 & p_1 \vee \neg p_1 \neg p_2 \neg p_3 \neg p_4 & \neg p_1 \neg p_2 \neg p_3 p_4 & \neg p_1 p_2 & - \\
p_3 & \neg p_3 \neg p_4 & \neg p_3 p_4 & - & - \\
- & p_1 \neg p_4 & p_1 p_4 & \neg p_1 & - \\
- & - & - & - & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$