Conjunto de Mandelbrot.

S. Rodriguez Morales

***Abstract*—El propósito de este escrito es estudiar el Conjunto de Mandelbrot y sus temas asociados, como lo son los conjuntos abiertos, los conjuntos cerrados, la frontera del conjunto, dominio y conjuntos acotados y no acotados. A su vez, el documento muestra la aplicación de este conjunto por medio de simulaciones computacionales en la herramienta de MatLab. Este escrito incluye definiciones importantes para entender el Conjunto de Mandelbrot las cuales se ven aplicadas en la definición y explicación del conjunto de Mandelbrot. Este escrito va dirigido a personas interesadas en estudiar este conjunto y su aplicación.**

***Index Terms*—Conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, frontera de un conjunto, conjuntos acotados y acotados, Conjunto de Mandelbrot en MatLab.**

I. Introducción

EL conjunto de Mandelbrot debe su nombre a Benoit B. Mandelbrot, un matemático polaco nacido en 1924. En 1952 obtuvo su doctorado en matemáticas, donde empezó a desarrollar su investigación sobre los fractales [1]. Mandelbrot trabajó en IBM y a su vez, continuó son su vida académica. En 1982, publica su libro "La geometría fractal de la naturaleza", donde se da explicación a los fractales, de donde nace el Conjunto de Mandelbrot. Su interés sobre este tema nace de la pregunta ¿Cuánto mide la Gran Bretaña?, pregunta la cual se abordó desde la teoría de los fractales. El Conjunto de Mandelbrot, y en general la geometría fractal, son conceptos aplicados en problemáticas de la vida real como lo son el cáncer, el cambio climático, la robótica o el magnetismo [2][3]. En este escrito se brinda una definición precisa del conjunto y se añaden conceptos claves a tener en cuenta antes de su comprensión.

El sistema de cómputo MatLab, ofrece la oportunidad de realizar simulaciones del Conjunto de Mandelbrot y ver de forma gráfica su teoría. A lo largo del documento se irá estudiando el conjunto de Mandelbrot junto con su representación generada por MatLab.

II. Estado del arte

- **Vecindad:**
  Conjunto de puntos de la forma:
  $$|z - z_0| < p$$
  Es decir, un conjunto de puntos con forma de disco, con centro en z_0 y de radio p [4].
- **Conjunto abierto:**
  Conjunto de puntos en el que cada punto z existe una vecindad de z [4].

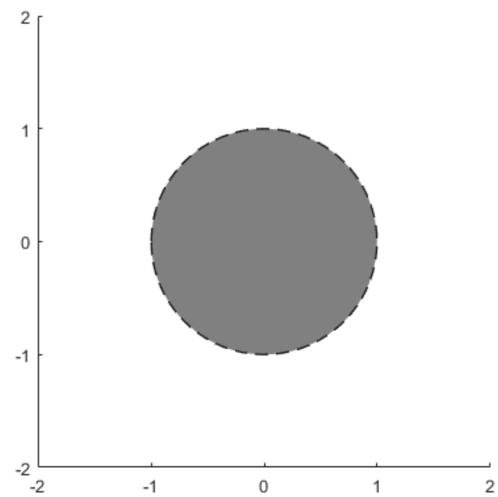

Fig. 1. Conjunto abierto.

- **Frontera de un conjunto:**
  Conjunto formado por los puntos z del conjunto de tal forma que sus vecindades contienen puntos que están en el conjunto y puntos que no lo están [4]. En otras palabras, son los puntos del borde del conjunto que no pertenecen al conjunto. En la figura 1, la frontera está delineada en negro.
- **Conjunto cerrado:**
  Conjunto que incluye los puntos de la frontera [4].

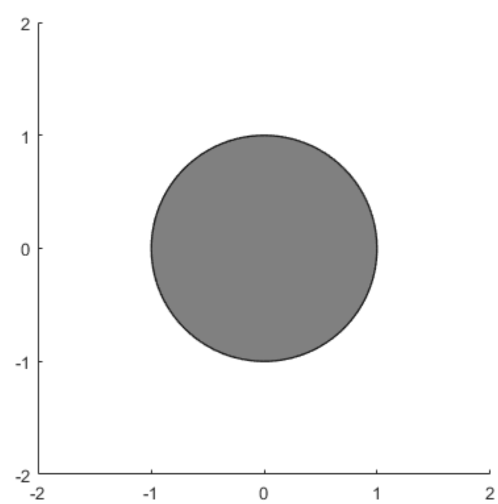

Fig. 2. Conjunto cerrado.

- **Conjunto conexo:**

Un conjunto de números complejos se dice conexo si por cada par de puntos del conjunto existe una trayectoria que los une y pertenece al conjunto [4].

- **Conjunto acotado y no acotado:**
  Se dice que un conjunto de números complejos está acotado si existe un número real r tal que todo punto z cumpla $|z| \leq r$. De lo contrario, se dice que el conjunto es no acotado [4]. Nótese que los conjuntos de la figura 1 y 2 son acotados.

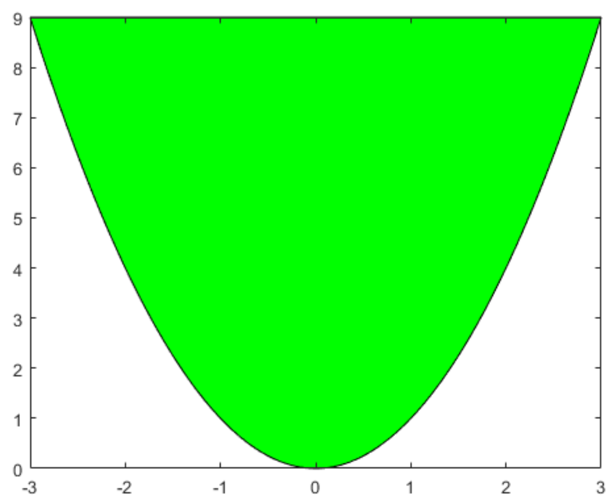

Fig. 3. Conjunto no acotado.

- **Fractal:**
  Un fractal es un objeto geométrico caracterizado por presentar una estructura que se repite a diferentes escalas. En otras palabras, se trata de un patrón sin fin [5].

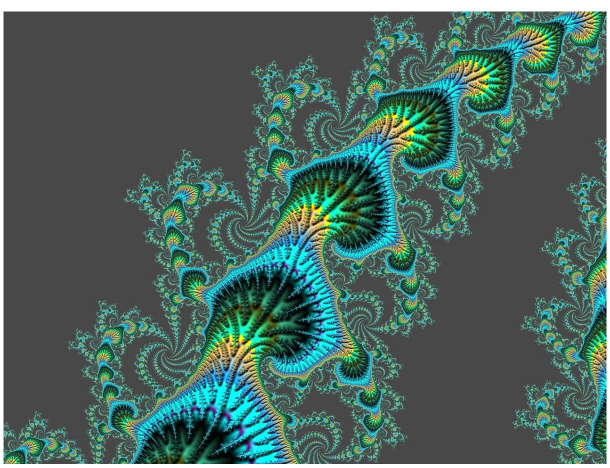

Fig. 4. Fractal. [6]

III. El Conjunto de Mandelbrot y simulaciones en MatLab.

El Conjunto de Mandelbrot es la región de los números complejos formado por un z_0 fijo, en trayectorias definidas por:

$$z_{k+1} = z_k^2 + z_0$$

para infinitos k. Si la sucesión es acotada, se dice que pertenece al conjunto de Mandelbrot.

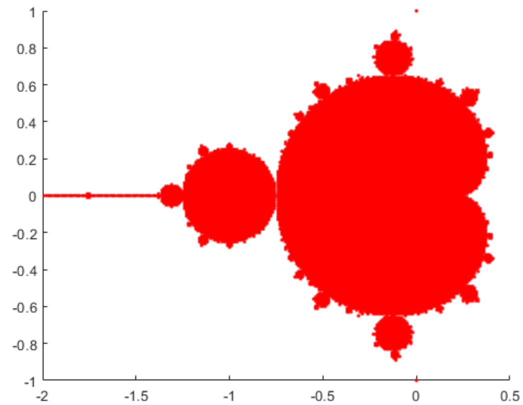

Fig. 5. Conjunto de Mandelbrot generado por código.

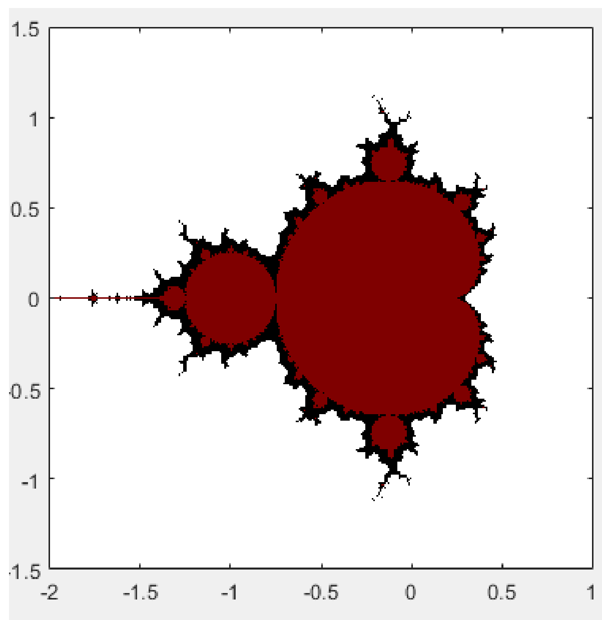

Fig. 6. Conjunto de Mandelbrot generado por la aplicación Cleve Lab.

Para saber si un elemento pertenece al conjunto de Mandelbrot, se deben calcular los elementos de la sucesión y estudiar sus resultados, si los elementos de la sucesión tienden a un número, se dice que la trayectoria que empieza en z_0 pertenece al Conjunto de Mandelbrot, de lo contrario, no pertenece al conjunto. Sin embargo, estos cálculos son extensos y se deben calcular muchos elementos. Para ello, se puede utilizar la herramienta de MatLab, el proceso se describe a continuación.

Primero, se establece el punto z_0, sobre el cuál se calculan las trayectorias y se establece un número máximo de iteraciones, donde en cada una se calculará una trayectoria. Se calculan las trayectorias mientras no se pase el número de iteraciones, y mientras el argumento de la trayectoria sea menor a dos. Al momento de detenerse, se cuestiona si se alcanzaron el número de iteraciones establecidas, o si se detuvo antes. En caso de detenerse antes, decimos que z_0 no pertenece al Conjunto de Mandelbrot, de lo contrario, decimos que sí hace parte del conjunto.

Por ejemplo, $z_0 = 0 + 0i$ si pertenece al conjunto de Mandelbrot, pues en cada iteración, $z_{k+1} = 0$, por lo que las trayectorias convergen. Tomemos un ejemplo con mejor representación, tomando $z_0 = -0.2 + 0.6i$, nuestra herramienta de MatLab nos indica que sí pertenece al conjunto de Mandelbrot. En la simulación realizada en MatLab, la respuesta 1 significa que las trayectorias de z_0 si pertenecen al conjunto, mientras que la respuesta 0 significa lo contrario.

```
mandelbrot_check(-0.2+0.6i,512)
```

Fig. 7. Función para revisar si el número pertenece al conjunto.

```
ans =

  logical

   1
```

Fig. 8. El número uno indica que el número sí hace parte del conjunto.

¿Realmente pertenecen estos puntos a el conjunto de Mandelbrot?, si la respuesta es positiva, quiere decir que cada uno de los puntos de la sucesión o trayectorias, pertenecen al conjunto, es decir, al unirlos por un segmento de recta, los puntos de la recta pertenecen al conjunto. Retomando el ejemplo anterior, visualizamos sus trayectorias con ayuda de una herramienta externa [7].

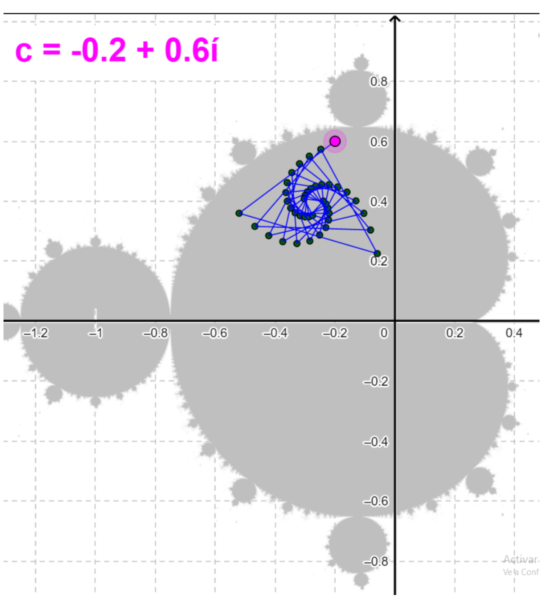

Fig. 9. Trayectorias de $z_0 = -0.2 + 0.6i$.

Note que cada una de las trayectorias del conjunto sí pertenecen al Conjunto de Mandelbrot y convergen en un punto, por lo que concluimos que z_0 pertenece al conjunto. Ahora, al repetir el proceso para $z_0 = -0.8 - 0.2i$, utilizamos la herramienta de MatLab y visualizamos sus trayectorias.

```
mandelbrot_check(-0.8-0.2i,512)
```

Fig. 10. Función para revisar si el número pertenece al conjunto.

```
ans =

  logical

   0
```

Fig. 11. El número cero indica que el número no hace parte del conjunto.

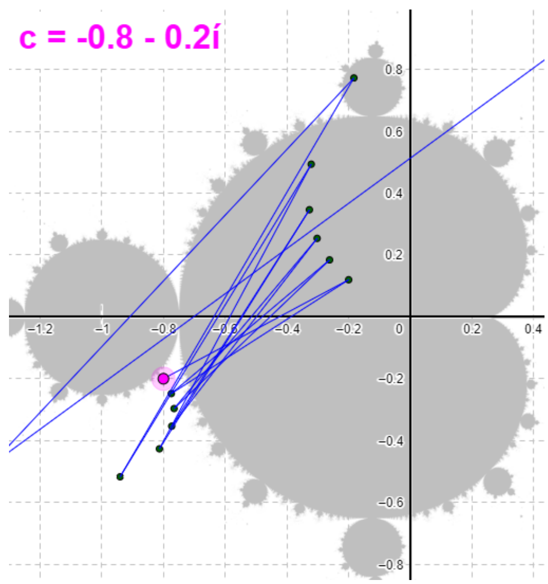

Fig. 12. Trayectorias de $z_0 = -0.8 - 0.2i$.

Note en este caso que algunas trayectorias no pertenecen al Conjunto de Mandelbrot, por lo que z_0 no pertenece. En el algoritmo de MatLab, se rechaza este número, tomando una de las trayectorias de resultado, como lo es aproximadamente $z_k = -1.4 + 1.6i$, notamos que su norma es mayor a dos, razón para que el algoritmo rechace a z_0.

¿Qué pasa con los puntos que están en la frontera del conjunto? Tomemos un $z_0 = -0.19 + 0.64i$, el cual es un punto muy cerca de la frontera, o sobre ella. Repitiendo el proceso de los dos ejemplos anteriores, concluimos que sí hace parte del conjunto, lo cual nos lleva a pensar que los puntos de la frontera harán parte del conjunto.

```
mandelbrot_check(-0.19+0.64i,512)
```

Fig. 13. Función para revisar si el número pertenece al conjunto.

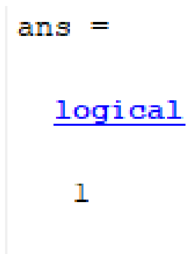

Fig. 14. El número uno indica que el número sí hace parte del conjunto.

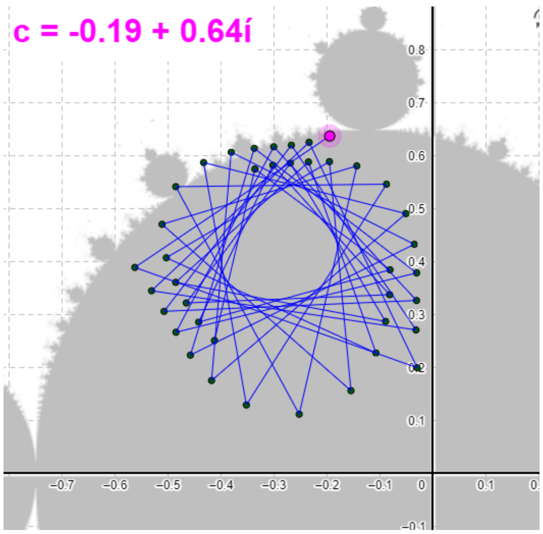

Fig. 15. Trayectorias de $z_0 = -0.19 + 0.64i$.

En base a la definición del Conjunto de Mandelbrot, se pueden obtener diferentes fractales variando la potencia de z_k.

$$z_{k+1} = z_k^n + z_0$$

Donde con cada n se puede obtener un fractal diferente.

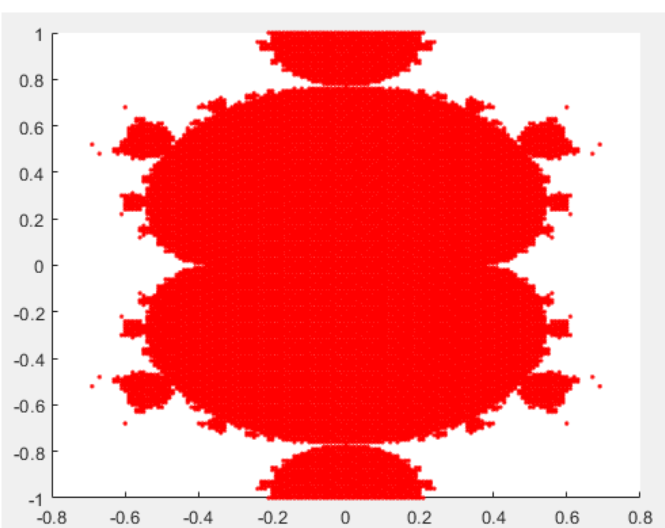

Fig. 16. Fractal generado por el código, con $n = 3$.

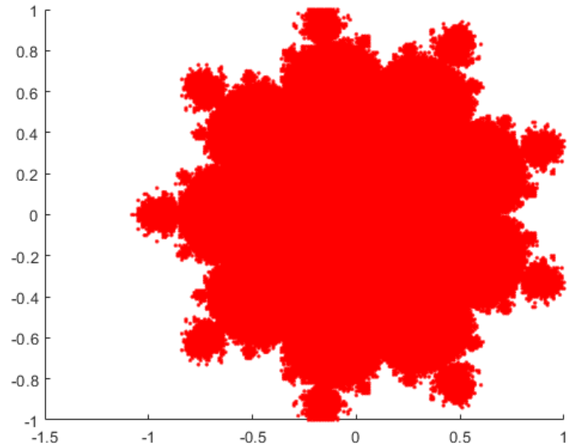

Fig. 17. Fractal generado por el código, con $n = 10$.

El Conjunto de Mandelbrot, y los fractales en general, cuentan con tres características fijas [8].

- **Autosimilitud:**
  Cada una de sus partes tiene la misma forma del conjunto completo al varias las escalas del conjunto.
- **Complejidad infinita:**
  Se refiere a la capacidad del conjunto de ser definido de forma recursiva. Note que en el caso del Conjunto de Mandelbrot, cada una de las trayectorias se hallaba de forma recursiva, por medio de la fórmula $z_{k+1} = z_k^2 + z_0$. Como se mencionó anteriormente, en general, se obtienen diferentes fractales de la forma $z_{k+1} = z_k^n + z_0$, todos con la posibilidad de hallar las trayectorias de forma recursiva.
- **Dimensión:**
  La dimensión no necesariamente es un número entero, la real dimensión del fractal es el cuánto ocupa en el espacio.

Repositorio y códigos de MatLab donde se ralizaron las simulaciones del Conjunto de Mandelbrot:

- Código de Matlab.

IV. Análisis del conjunto de Mandelbrot desde conceptos de las regiones de números complejos.

Después de analizar las generalidades del Conjunto de Mandelbrot y realizar simulaciones en MatLab sobre este con distintos z_0 de ejemplo, surge la pregunta: ¿Que propiedades cumple esta región de números complejos?

¿El Conjunto de Mandelbrot es acotado?, la respuesta es sí. Note que la circunferencia de radio dos centrada en el origen acota al conjunto y no existe elemento por fuera de esta circunfernecia que pertenezca al conjunto. Por lo anterior, durante la ejecución del código de MatLab para conocer si un z_0 hacía parte del conjunto, uno de los criterios de rechazo era si el argumento del número superaba al dos.

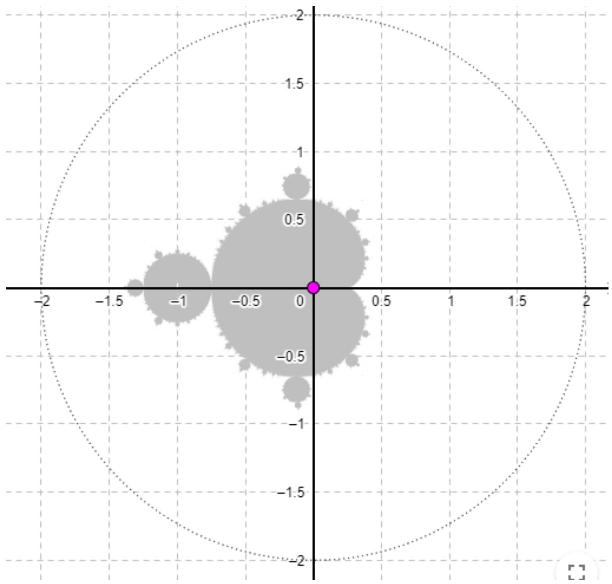

Fig. 18. Conjunto de Mandelbrot acotado.

¿Es el Conjunto de Mandelbrot un conjunto conexo? Sí. Retomando los ejemplos anteriores, veíamos que cada una de las trayectorías de un z_0 pertenecían al Conjunto de Mandelbrot, por lo que se afirma que es conexo. La figura 9 y 15 representan la conexidad de estos conjuntos, al estar sus trayectorias en el conjunto.

¿El Conjunto de Mandlbrot es abierto? ¿Es cerrado? En realidad el conjunto es cerrado, ya que es compacto [9]. El conjunto cerrado nos indica que los puntos de su frontera también hacen parte del Conjunto de Mandelbrot y sus trayectorias pertenecen al conjunto.

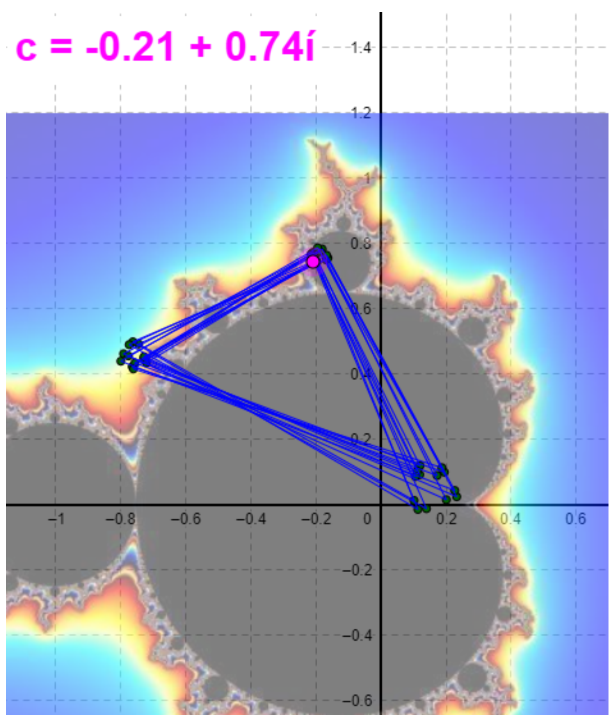

Fig. 19. Trayectorias de un punto en la frontera.

En el caso de las figuras 15 y 19, los puntos que están en la frontera del conjunto pertenecen al conjunto y los otros puntos de las sucesiones caen dentro del conjunto o, en su defecto, en la frontera.

REFERENCIAS

[1] Europa Press, ”EEUU.- Fallece el matemático Benoit Mandelbrot, padre de la matemática fractal”, europapress.es, 2010. [Online]. Disponible en: https://www.europapress.es/internacional/noticia-eeuu-fallece-matematico-benoit-mandelbrot-padre-matematica-fractal-20101016205735.html.

[2] Comunidad de conocimiento BBVA, ”Aplicaciones de la geometría fractal: del cambio climático al cáncer”, OpenMind, 2020. [Online]. Disponible en: https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/aplicaciones-la-geometria-fractal-del-cambio-climatico-al-cancer/.

[3] M. Carrillo, P. Cortés, J. Colín and S. Vázquez, Los fractales una aplicación de las matemáticas en la imagen. Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica - Unidad Culhuacan, 2006.

[4] E. Saff and A. Snider, Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering, Science, and Mathematics. Harlow: Pearson Education UK, 2013.

[5] E. Fernández, ”Fractales: bellos y sin embargo útiles”, Blog del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, 2018. [Online]. Disponible en: https://institucional.us.es/blogimus/2018/10/fractales-bellos-y-sin-embargo-utiles/.

[6] Digital Fractal. 2022. Disponible en: https://pixabay.com/es/illustrations/fractales-digital-fractal-futurista-5027865/

[7] J. White, Complex Numbers, Fractal Geometry. Disponible en: https://www.geogebra.org/m/mfewjrek, 2022.

[8] E. Bilski, ”Características de los Fractales.”, Caracteristicass.de, 2022. [Online]. Disponible en: https://www.caracteristicass.de/fractales/.

[9] ”Conjunto de Mandelbrot Historia y Definición formal”, Hmong.es, 2022. [Online]. Disponible en: https://hmong.es/wiki/Mandelbrot_Set.