Бикоев Константин

Вариант 1

Явный метод Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad (9.8)$$

для количества точек разбиения $N = 10; 20; 30$ вывести графики решений, полученных дан ными методами, и точное решение (если оно есть).

Исходное уравнение:

$$y' = -4x(y+1),\ y(0) = 1$$

Differential equation solution

$$y(x) = c_1\, e^{-2x^2} - 1$$

Точное решение

Точное решение с учетом начальных условий:

Differential equation solution

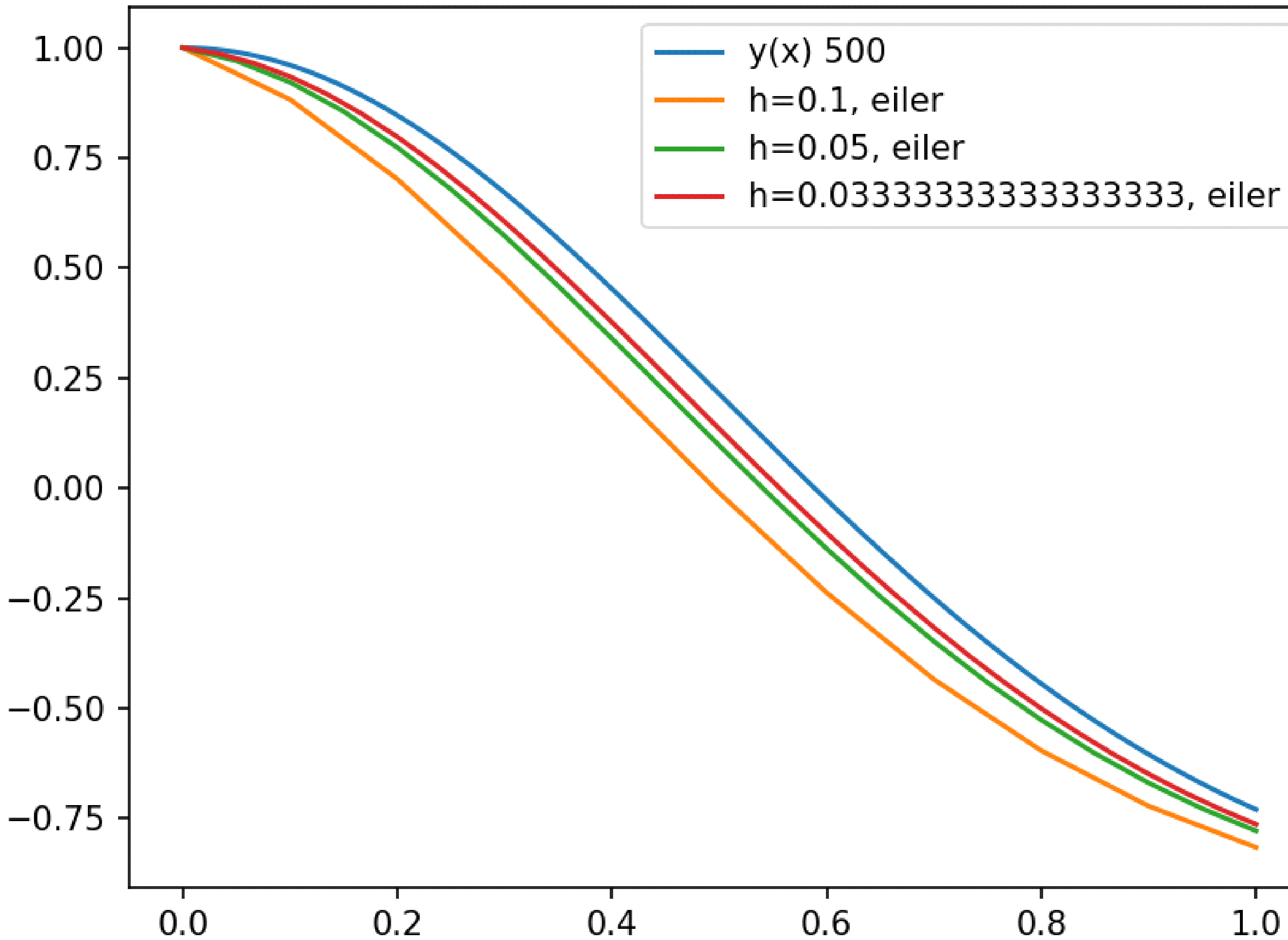
$$y(x) = 2\, e^{-2x^2} - 1$$

Метод Эйлера явный

Порядок точности явного метода Эйлера (9.8) на всем промежутке $[x_0, x_0 + X]$ на единицу меньше его порядка точности на одном шаге.

Для всех итерационных численных методов приближенного решения задачи Коши (9.1),(9.2), в результате реализации которых формируется числовая последовательность $\{y_i(h)\}_{i=1}^{n}$, определяющая приближенное решение указанной задачи, справедлива следующая закономерность.

Если погрешность такого метода на одном шаге является величиной $O(h^{k+1})$, то его погрешность на всем промежутке $[x_0, x_0 + X]$ будет величиной $O(h^k)$.



Точность метода - O(h)

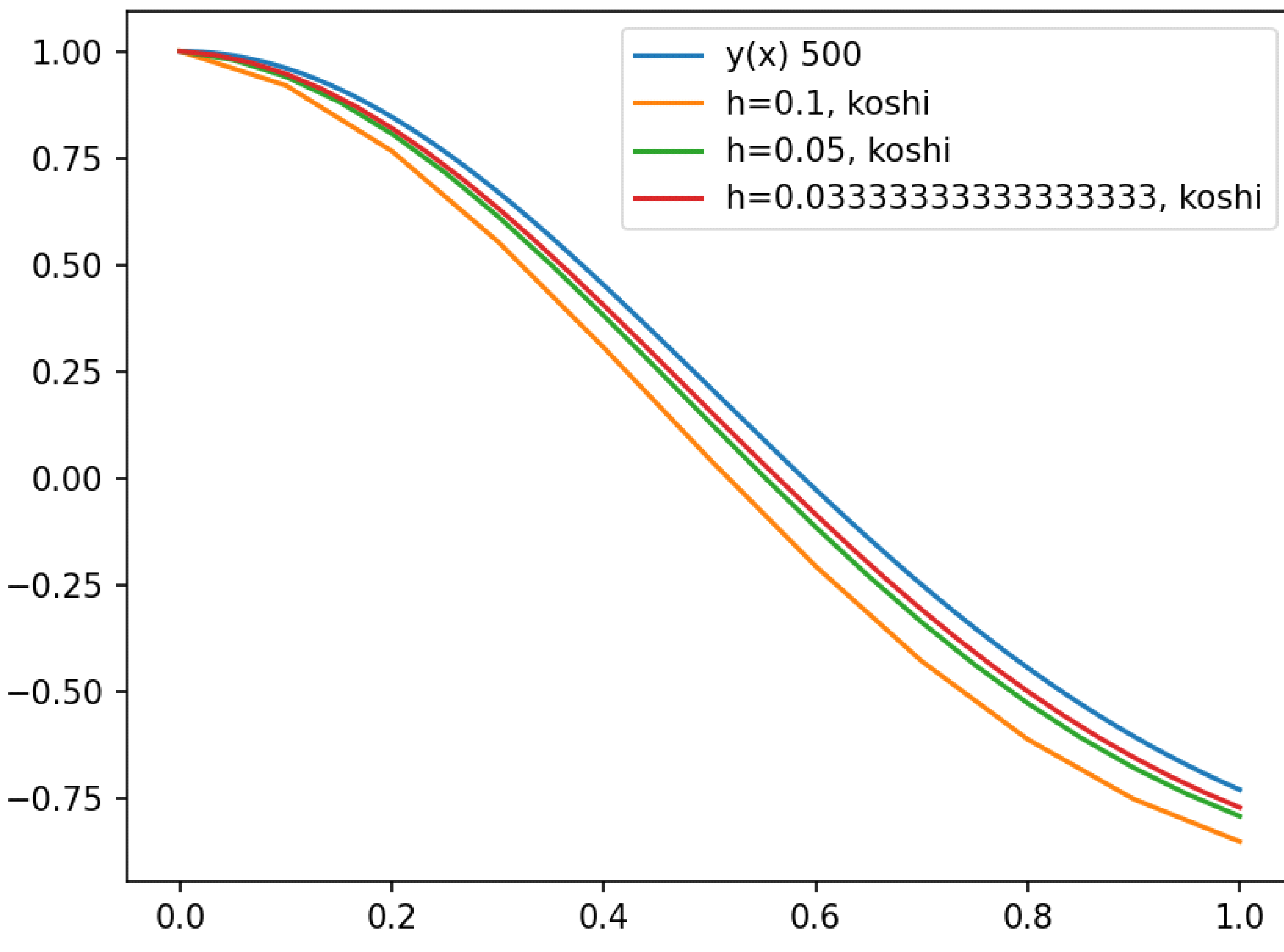
Метод Коши

Численная процедура метода Коши

$$\bar{y}_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_{k+\frac{1}{2}}, \bar{y}_{k+\frac{1}{2}}) \qquad (9.26$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$



Точность метода - O(h^3)

Метод Адамса-Мултона (Неявный метод Адамса 3-го порядка)

$k = 2$. Метод Адамса-Мултона. $O(h^4)$

$$L_2(x) = F(x_{m+1}) + F(x_{m+1}, x_m)(x - x_{m+1}) + \\ + F(x_{m+1}, x_m, x_{m-1})(x - x_{m+1})(x - x_m) =$$

$$= f_{m+1} + \frac{f_{m+1} - f_m}{h}(x - x_{m+1}) +$$

$$+ \frac{f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}}{2h^2}(x - x_{m+1})(x - x_m),$$

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} L_2(x)dx =$$

$$= y_m + \frac{h}{12}\left(5f_{m+1} + 8f_m - f_{m-1}\right),$$

$$m = 1, 2, \ldots, n-1$$

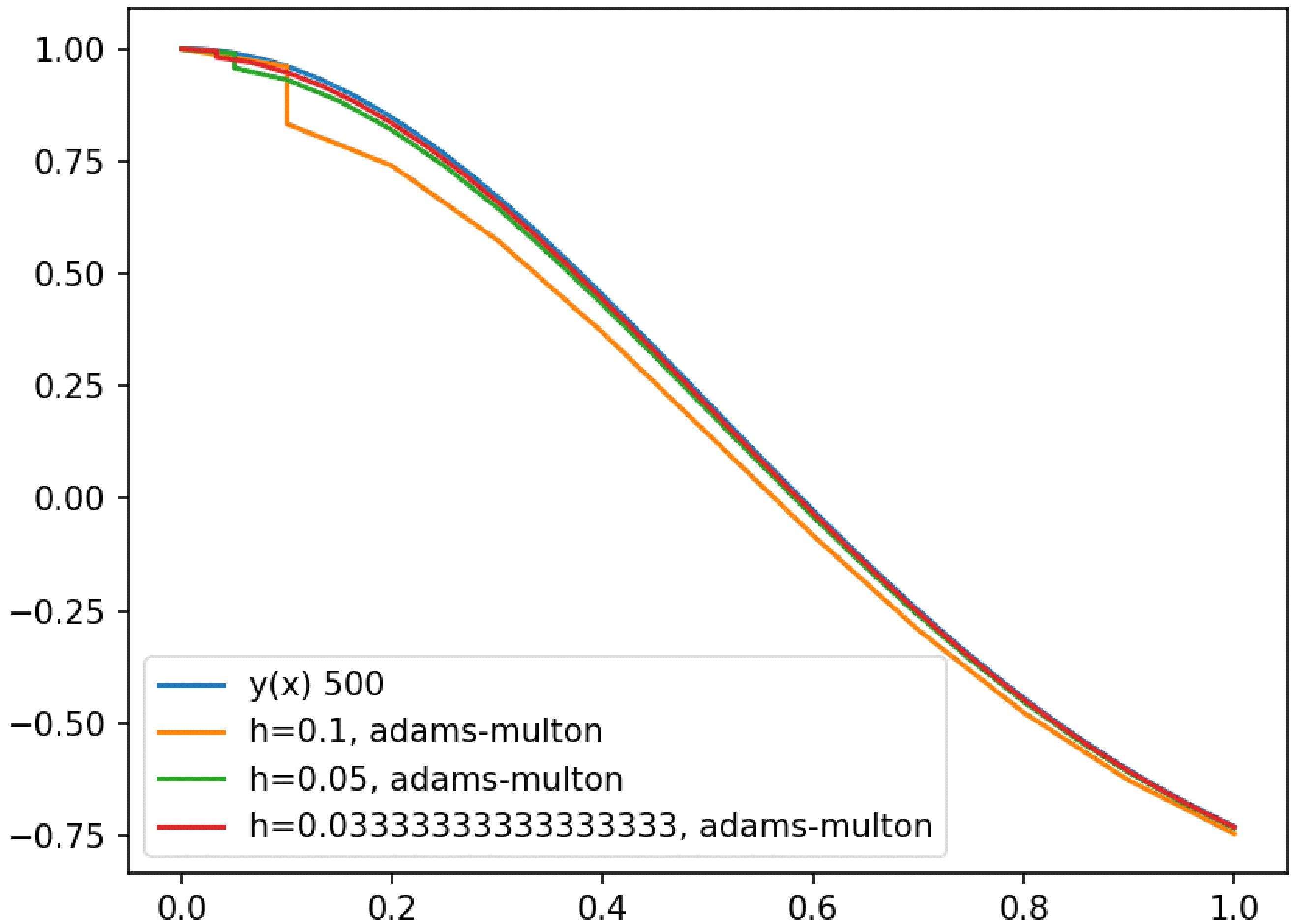
Разгон

Для всех методов Адамса, начиная с двухшаговых, кроме начального значения y_0 требуется знание стартовых значений $y_1, \ldots, y_{k-1}$. Процедура вычисления стартовых значений называется разгоном. Рекомендуется делать разгон методами (например, Рунге-Кутты) не меньшего порядка точности на одном шаге, а лучше на единицу большего.

Чтобы решить методом Адамса 3-го порядка нужно “Разогнаться” для этого воспользуемся методом Рунге-Кутты 4-го порядка

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности на всем промежутке

$$
\begin{aligned}
&y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right),\\
&K_1 = hf(x_i, y_i),\\
&K_2 = hf(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{K_1}{2}),\\
&K_3 = hf(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{K_2}{2}),\\
&K_4 = hf(x_i + h, y_i + K_3),\\
&\qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.
\end{aligned}
\tag{9.35}
$$



Точность метода O(h^3)

Вывод: Скорость сходимости методов соответствует их погрешности: метод Эйлера самый медленный, далее идет метод Коши и самый быстро-сходящийся - метод Адамса 3-го рода.