Multiplicación de Karatusuba

Multiplicación de Karatusuba

Entrada: Dos enteros *X* y *Y*, ambos con *N* dígitos

Salida: *X*Y*

¿Qué problema hay con el viejo y conocido método?

$$
\begin{array}{r}
123 \\
\underline{456} \\
738 \\
615 \\
\underline{492} \\
56088
\end{array}
$$

$O(N^2)$ ¿Se puede hacer mejor?

Solución mediante Divide & Vencerás

Podemos definir X como ($10^{\frac{N}{2}}$)*a+b, y a Y como ($10^{\frac{N}{2}}$)*c+d

Siendo *a*, *c* la primera mitad de los dígitos de *X* y *Y* respectivamente; mientras que *b*, *d* son la segunda mitad

a, *b*, *c*, *d* son números enteros de *N/2* dígitos

Por ejemplo si *X* es 1234 y *Y* es 5678 tendríamos:

a = 12, b = 34, c = 56, d = 78

Luego *X*Y* = [$10^{\frac{N}{2}}$*a+b]*[$10^{\frac{N}{2}}$*c+d] = 10^{N}ac + $10^{\frac{N}{2}}$(ad+bc) + bd

Se repite el proceso para *ac, ad, bc y bd* recursivamente hasta llegar a los casos base

Solución mediante Divide & Vencerás

¿Cuál es la eficiencia de este algoritmo según el método maestro?

a = 4, b = 2, d = 1

Caso 3: $a > b^d$, por tanto $n^{log_b a} = N^{log_2 4} = N^2$

Es decir, pese a usar la aproximación Divide & Vencerás, la complejidad sigue siendo la misma que con el método tradicional.

¿Se podrá hacer algo al respecto?

Solución mediante Divide & Vencerás

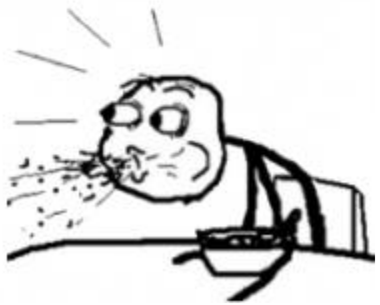
Multiplicación de Karatsuba*:

$X*Y = 10^{N}\underline{ac} + 10^{\frac{N}{2}}(\underline{ad+bc}) + \underline{bd}$

Solucionar recursivamente ac
Solucionar recursivamente bd
Solucionar recursivamente (a+b)(c+d) dado que
ad + bc = (a+b)(c+d) – bd - ac

De esta manera reducimos el número de llamados recursivos de 4 a 3

¿Cómo se ve afectada la eficiencia? $O(N^{log_2(3)}) = O(N^{1.82}) < O(N^2)$



*http://es.wikipedia.org/wiki/Anatolii_Alexeevitch_Karatsuba