Multiplicación de matrices de Strassen

Multiplicación de matrices de Strassen

Entrada: Dos matrices *X* y *Y*, ambas *NxN*

Salida: *X*Y*

¿Qué problema hay con el viejo y conocido método?

Zij = producto de la fila *i* de *X* por la columna *j* de *Y*

En otras palabras $Z_{ij} = \sum_{k=1}^{N} X_{ik} . Y_{kj}$

→O(N^3) ¿Se puede hacer mejor?

Solución mediante Divide & Vencerás

Podemos definir *X* como $\left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right]$ y *Y* como $\left[\begin{array}{c:c} E & F \\ \hdashline G & H \end{array}\right]$

Donde las submatrices *A-H* son de orden *N/2* x *N/2*

Así *Z* = $\left[\begin{array}{c:c} AE + BG & AF + BH \\ \hdashline CE + DG & CF + DH \end{array}\right]$

Esta descomposición es obvia cuando *N*=2, pero se puede demostrar que funciona igualmente para valores mayores

Ahora se pueden resolver recursivamente los 8 sub-problemas hasta alcanzar los casos base (*N*=1)

Solución mediante Divide & Vencerás

¿Cuál es la eficiencia de este algoritmo según el método maestro?

a = 8, b = 2, d = 1

Caso 3: $a > b^d$, por tanto $n^{log_b a} = n^{log_2 8} = N^3$

Es decir, pese a usar la aproximación Divide & Vencerás, la eficiencia sigue siendo la misma que con el método tradicional.

¿Se podrá hacer algo al respecto?

Solución mediante Divide & Vencerás

Algoritmo de Strassen*:

Igual definimos *X* como $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ y *Y* como $\left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right]$

Pero en vez de los 8 productos, utilizamos los siguientes 7:

- *P1 = A(F-H)*
- *P2 = (A+B)H*
- *P3 = (C+D)E*
- *P4 = D(G-E)*
- *P5 = (A+D)(E+H)*
- *P6 = (B-D)(G+H)*
- *P7 = (A-C)(E+F)*

Así *Z* = $\left[\begin{array}{c|c} AE+BG & AF+BH \\ \hline CE+DG & CF+DH \end{array}\right]$ pasa a ser:

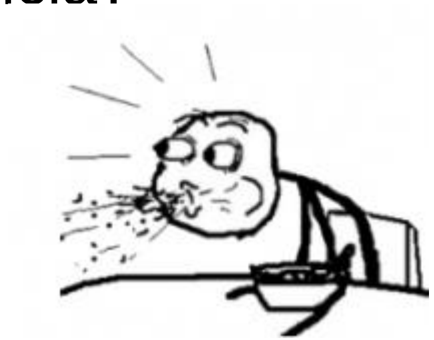
$$\left[\begin{array}{c|c} P5+P4-P2+P6 & P1+P2 \\ \hline P3+P4 & P1+P5-P3-P7 \end{array}\right]$$

*http://en.wikipedia.org/wiki/Volker_Strassen

Solución mediante Divide & Vencerás

¿Cómo se ve afectada la eficiencia?

$O(N^{log_2(7)}) = O(N^{2.81}) < O(N^3)$



¿De dónde sacó Strassen esa solución?

Nota: Aunque existen algoritmos con mejor eficiencia al de Strassen, raramente son utilizados en la práctica. En 2010 por ejemplo, Andrew Stothers logró optimizar el algoritmo de Strassen a $O(N^{2.374})$. Luego en 2011 Virginia Williams optimizó a su vez el algoritmo de Stothers a $O(N^{2.3728642})$. En 2014 François Le Gall optimizó el algoritmo de Williams hasta $O(N^{2.3728639})$