Problemele cuprinse în această culegere, se referă la noțiunile de bază ale Algebrei liniare și ale Geometriei analitice și diferențiale. Ele sunt menite să contribuie la înțelegerea mai profundă a acestor ramuri ale matematicii.

În lucrare, problemele rezolvate sunt date gradat, pornind de la cele mai simple la probleme mai dificile, iar problemele propuse au enunțuri similare cu cele rezolvate. Tocmai din acest motiv ele constituie un prilej de a aprofunda noțiunile teoretice de la curs, precum și de a exersa aplicațiile aferente.

Lucrarea se adresează cu precădere studenților din anul întâi din facultățile din institutele politehnice, precum și tuturor celor interesați.

Referent științific: Prof.dr. Gheorghe BABESCU

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
JURATONI, ADINA
Exerciții și probleme de algebră liniară, geometrie analitică și diferențială / asist.univ.dr. Adina Juratoni, asist.univ.dr. Olivia Bundău. – Ed. a 2-a, rev.. - Timișoara : Editura Politehnica, 2012
Bibliogr.
ISBN 978-606-554-549-6

I. Bundău, Olivia

51

Adina JURATONI

Olivia BUNDĂU

EXERCIȚII ȘI PROBLEME DE ALGEBRĂ LINIARĂ GEOMETRIE ANALITICĂ ȘI DIFERENȚIALĂ

Colecția "STUDENT"

EDITURA POLITEHNICA
TIMIȘOARA - 2012

EDITURA POLITEHNICA
Bd. Republicii nr. 9
300159 Timişoara, România

Tel./Fax. 0256/403.823

Consilier editorial: Prof.dr.ing. Sabin IONEL
Redactor: Claudia MIHALI

Bun de imprimat: 24.10.2012
Coli de tipar: 13,5
C.Z.U. 51
ISBN 978-606-554-549-6

Tiparul executat sub comanda nr. 74
la Tipografia Universităţii "Politehnica" din Timişoara

Prefaţă

Părţi integrante ale întinsei arii matematice, în programul de pregătire al viitorilor ingineri, algebra liniară şi geometria analitică şi diferenţială, sunt indispensabile pentru bagajul cunoştinţelor matematice ale viitorilor specialişti.

Materialul este structurat în opt capitole, primele patru ocupându-se de problematica algebrei liniare, iar următoarele de geometria analitică şi diferenţială.

Cititorul va găsi în această culegere de probleme, expuse cu grijă şi în detaliu, suficiente probleme rezolvate astfel încât fundamentul teoretic pe care se sprijină soluţiile să fie evident. Fiecare capitol cuprinde, atât probleme rezolvate, cât şi probleme propuse. Precizarea răspunsurilor la majoritatea problemelor propuse, oferă utilizatorului posibilitatea de control asupra rezultatelor sale.

Această culegere de probleme, se adresează în principal, studenţilor din învăţământul tehnic şi în special celor de la Facultatea de Construcţii din cadrul Universităţii "Politehnica" din Timişoara. Desigur, ea poate fi utilizată de către toţi cei interesaţi de capitolele de algebră şi geometrie prezentate aici.

Timişoara, octombrie 2012

Autorii

Cuprins

Capitolul 1

Spaţii vectoriale. Baze. Subspaţii vectoriale.

1.1 Spaţii vectoriale. Baze.

1.1.1 Probleme rezolvate

1.1.1. Pe mulţimea

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n \text{ ori}} = \{\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}\}$$

definim:

- adunarea prin

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n, \ \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n,$$

-înmulţirea cu scalari prin

$$\alpha \cdot \overline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ este un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$.

Soluţie. Se verifică uşor că $(\mathbb{R}^n, +)$ este grup comutativ, adică operaţia "+" este asociativă, comutativă, elementul neutru este $\overline{0} = (0, 0, ..., 0)$, opusul lui $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ este $-\overline{x} = (-x_1, -x_2, ..., -x_n) \in \mathbb{R}^n$.

În continuare vom verifica că oricare ar fi $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ şi oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, operaţia externă " $\cdot$ " satisface următoarele axiome:

i) $\alpha \cdot (\beta \cdot \overline{x}) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2, ..., \beta x_n) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, ..., \alpha\beta x_n) = (\alpha\beta) \cdot \overline{x}$;

ii)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot\overline{x} &= ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)x_2, ..., (\alpha+\beta)x_n) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) + (\beta x_1, \beta x_2, ..., \beta x_n) = (\alpha\cdot\overline{x}) + (\beta\cdot\overline{x});\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\overline{x}+\overline{y}) &= \alpha(x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n) \\ &= (\alpha(x_1+y_1), \alpha(x_2+y_2), ..., \alpha(x_n+y_n)) \\ &= (\alpha x_1+\alpha y_1, \alpha x_2+\alpha y_2, ..., \alpha x_n+\alpha y_n) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, ..., \alpha y_n) = (\alpha\cdot\overline{x}) + (\alpha\cdot\overline{y});\end{aligned}$$

iv) $1 \cdot \overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{x}$, unde 1 este elementul unitate din $\mathbb{R}$.

Deci $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ este un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$.

1.1.2. Studiaţi care din următoarele sisteme de vectori sunt liniar dependente sau independente şi în caz de dependenţă, determinaţi o dependenţă liniară.

i) $L_1 = \{v_1 = (1, 2, -4), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 4, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$,

ii) $L_2 = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (2, 1, -2), v_3 = (3, 4, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$,

iii) $L_3 = \{v_1 = (2, 1, 3, 1), v_2 = (1, 2, 0, 1), v_3 = (-1, 1, -3, 0)\} \subset \mathbb{R}^4$,

iv) $L_4 = \left\{E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\right.$
$\left.E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subset M_2[\mathbb{R}]$,

v) $L_5 = \{v_1 = X^2 + 2X, v_2 = 2X^2 - X + 1, v_3 = -X^2 + 2X + 2\} \subset \mathbb{R}_2[X]$.

vi) $L_6 = \{v_1 = -4X^2 + 6X - 2, v_2 = -2X^2 + 3X + 1, v_3 = 2X^2 - 3X + 1\} \subset \mathbb{R}_2[X]$.

Soluţie. i) *Metoda 1)* Folosim definiţia vectorilor liniar independenţi (respectiv dependenţi). Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ cu $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Obţinem sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -4\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Deoarece rangul matricei asociat sistemului omogen este 2, rezultă că sistemul admite şi alte soluţii în afară de soluţia banală, deci L_1 este un sistem de vectori liniar dependent. Pentru a determina o dependenţă liniară, determinăm o soluţie nenulă a sistemului de mai sus. Avem sistemul $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$, unde α_1, α_2 sunt necunoscute principale, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ necunoscută secundară. Obţinem $\alpha_1 = -\alpha_3$, $\alpha_2 = -2\alpha_3$, deci o relaţie de dependenţă liniară este dată de $-v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$.

Metoda 2. Folosim criteriul practic pentru studiul liniar independenţei (respectiv dependenţei) unui sistem de k vectori din $\mathbb{R}^n$.

Vectorilor $v_1, v_2, ..., v_k \in \mathbb{R}^n$ li se asociază matricea A ce are drept coloane, n-uplurile ce definesc vectorii.

Dacă rangul matricii A este egal cu numărul de vectori, atunci vectorii sunt liniar independenţi.

Dacă rangul matricii A este diferit de numărul de vectori, atunci vectorii sunt liniar dependenţi.

Calculăm rangul matricei alcătuită pe coloane cu coordonatele vectorilor sistemului L_1. Avem

$$rang A = rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2.$$

Deoarece rangul matricei A este diferit de numarul vectorilor din sistem, $|L_1| = 3$, rezultă că sistemul L_1 este liniar dependent. O relaţie de dependenţă liniară se determină ca mai sus.

ii) Din criteriul practic, avem

$$rang A = rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

iar numarul vectorilor din L_2 este 3, rezultă că $rang A = 3 = |L_2|$, aşadar sistemul L_2 este liniar independent.

iii) Fie $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$ cu $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Matricea asociată sistemului omogen $\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$ este $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi are rangul egal cu 2. Rezultă că sistemul admite şi alte soluţii în afară de soluţia banală, deci L_3 este un sistem liniar dependent.

Din sistemul $\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$, unde α_1, α_2 sunt necunoscute principale, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ necunoscută secundară, obţinem $\alpha_1 = \alpha_3$, $\alpha_2 = -\alpha_3$, deci o relaţie de dependenţă liniară este dată de $v_1 - v_2 + v_3 = 0$.

iv) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$. Se înlocuieşte fiecare vector

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizând proprietăţile matricilor se obţine sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Deoarece rangul matricei asociat sistemului omogen este

$$rang A = rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

egal cu numărul de necunoscute, rezultă că sistemul este compatibil determinat şi admite doar soluţia banală, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Rezultă că L_4 este un sistem liniar independent.

v) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Se înlocuieşte fiecare vector,

$$\alpha_1(X^2 + 2X) + \alpha_2(2X^2 - X + 1) + \alpha_3(-X^2 + 2X + 2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]},$$

se ordonează după puterile lui X,

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)X^2 + (2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3)X + (\alpha_2 + 2\alpha_3) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

şi se obţine sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Deoarece rangul matricei asociat sistemului omogen este 3, egal cu numărul de necunoscute, rezultă că sistemul este compatibil determinat şi admite doar soluţia banală, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Prin urmare, L_5 este un sistem de vectori liniar independent.

vi) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.
Se înlocuieşte fiecare vector

$$\alpha_1(-4X^2 + 6X - 2) + \alpha_2(-2X^2 + 3X + 1) + \alpha_3(2X^2 - 3X + 1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]},$$

se ordonează după puterile lui X,

$$(-4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3)X^2 + (6\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3)X + (-2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

şi se obţine sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} -4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 6\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Deoarece rangul matricei asociat sistemului omogen este 2, diferit de numarul de necunoscute, rezultă că sistemul este compatibil nedeterminat şi admite şi soluţii nebanale.

Aşadar, există trei scalari nu toţi nuli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, soluţie a sistemului omogen, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$, prin urmare L_6 este un sistem de vectori liniar dependent.

Pentru a determina relaţia de dependenţă, se determină o soluţie nebanală a sistemului omogen. Rangul matricii sistemului este 2 şi un determinant principal este: $\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Necunoscutele α_2, α_3 sunt necunoscute principale iar $\alpha_1 = \beta$ este necunoscută secundară şi se rezolvă sistemul format cu ecuaţiile unu şi trei

$$\begin{cases} -2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 4\beta \\ +\alpha_2 + \alpha_3 = 2\beta \end{cases}$$

Familia soluţiilor sistemului omogen este $\{(\beta, 0, 2\beta), \beta \in \mathbb{R}\}$. Luând $\beta = 1$, se obţine $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 2$ şi relaţia de dependenţă a celor trei vectori este $v_1 = -2v_3$.

1.1.3. Să se studieze dacă următoarele sisteme de vectori sunt sisteme de generatori în spaţiile vectoriale precizate:

i) $L_1 = \{v_1 = (2,4,2), v_2 = (2,0,-1), v_3 = (4,4,1)\} \subset \mathbb{R}^3$;

ii) $L_2 = \{v_1 = (-1,0,2), v_2 = (2,0,-1), v_3 = (1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Soluţie. i) Se verifică dacă orice vector $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se poate exprima ca o combinaţie liniară a vectorilor din L_1.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, rezultă

$$(x, y, z) = \alpha_1(2,4,2) + \alpha_2(2,0,-1) + \alpha_3(4,4,1).$$

Utilizând proprietăţile spaţiului vectorial $(\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, +, \cdot)$, se obţine sistemul neomogen

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = x \\ 4\alpha_1 + 4\alpha_3 = y \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = z \end{cases}.$$

Deoarece $\det(A) = 0$ şi există un minor de ordinul doi diferit de zero,
$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, rezultă că $rangA = 2$.

Pentru $x = 1, y = 0, z = 0$ rangul matricii extinse $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ este 3, rezultă $rangA = 2 \neq 3 = rang\overline{A}$ şi prin urmare sistemul este incompatibil.

Există $v = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ care nu se poate exprima ca o combinaţie liniară a vectorilor din L_1, deci L_1 nu este sistem de generatori deoarece nu orice vector se poate exprima ca o combinatie liniară a vectorilor din L_1.

ii) Se verifică dacă orice vector $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se poate exprima ca o combinaţie liniară a vectorilor din L_2.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, rezultă

$$(x, y, z) = \alpha_1(-1, 0, 2) + \alpha_2(2, 0, -1) + \alpha_3(1, 2, 1).$$

Utilizând proprietăţile spaţiului vectorial $(\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, +, \cdot)$, se obţine sistemul neomogen

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = x \\ \alpha_3 = y \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = z \end{cases}.$$

Deoarece $\det(A) \neq 0$ rezultă că sistemul este compatibil determinat şi folosind metoda lui Cramer se găsesc soluţiile sistemului. Aşadar, pentru orice vector $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ exista $\alpha_1 = \dfrac{x - 3y + 2z}{3}, \alpha_2 = \dfrac{2x - 3y + z}{3}, \alpha_3 = y$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, rezultă că L_2 este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$.

~~1.1.~~4. Se consideră sistemul de vectori din $\mathbb{R}^3$

$$B = \{v_1 = (-1, 2, 0), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (0, 1, 1)\}.$$

i) Să se arate că B formează o bază în $\mathbb{R}^3$.

ii) Să se determine coordonatele vectorului $v = (1, -1, -2)$ relativ la această bază.

Soluţie. i) Sistemul de vectori B este bază dacă este liniar independent şi sistem de generatori.

Pentru studiul liniar independenţei se foloseşte criteriul practic pentru studiul liniar independenţei (respectiv dependenţei) unui sistem de vectori. Pentru aceasta calculăm rangul matricei alcătuită pe coloane cu coordonatele vectorilor sistemului B

$$rangA = rang \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 = |B|.$$

Deoarece rangul matricii A este egal cu numărul vectorilor din B, rezultă că B este un sistem liniar independent.

În continuare se studiază dacă B este sistem de generatori, dacă orice vector $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se poate exprima ca o combinaţie liniară a vectorilor din B.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, rezultă

$$(x, y, z) = \alpha_1(-1, 2, 0) + \alpha_2(1, 2, 3) + \alpha_3(0, 1, 1).$$

Utilizând proprietăţile spaţiului vectorial $(\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, +, \cdot)$, se obţine sistemul neomogen

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 = x \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = y \\ 3\alpha_2 + \alpha_3 = z \end{cases}.$$

Deoarece $\det(A) \neq 0$ rezultă că sistemul este compatibil determinat şi folosind metoda lui Cramer se găsesc soluţiile sistemului. Aşadar, pentru orice vector $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ exista $\alpha_1 = x + y - z$, $\alpha_2 = 2x + y - z$, $\alpha_3 = -6x - 3y + 4z$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, rezultă că B este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$.

ii) Pentru $v = (1, -1, -2)$ se obţin $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = -11$, coordonatele lui v în baza B şi v în baza B se scrie $v = 2v_1 + 3v_2 - 11v_3$.

~~1.1.5~~. Arătaţi că următoarele sisteme de vectori sunt baze şi scrieţi matricile de trecere de la baza canonică la fiecare din aceste baze, precum şi matricea de trecere de la baza B_2 la baza B_1.

$$B_1 = \{u_1 = (1, 3, -1), u_2 = (0, 2, 1), u_3 = (-2, -1, 0)\},$$

$$B_2 = \{v_1 = u_1 - u_2, v_2 = 2u_1 + u_2 - u_3, v_3 = u_2 + u_3\}.$$

Soluţie. Deoarece B_1, B_2 conţin un număr de vectori egal cu dimensiunea subspaţiului $\mathbb{R}^3$, e suficient să arătăm că B_1 şi B_2 sunt sisteme liniar independente. Pentru aceasta vom folosi criteriul practic, adică exprimăm vectorii din cele două sisteme în baza canonică:

$$T_{B_c B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{B_c B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 9 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

deoarece

$$B_2 = \{v_1 = (1, 1, -2), v_2 = (4, 9, -1), v_3 = (-2, 1, 1)\}.$$

Cum $detT_{B_c B_1} = -9 \neq 0$, $detT_{B_c B_2} = -36 \neq 0$ rezultă că rang$T_{B_c B_1}$=3, rang$T_{B_c B_2} = 3$ egal cu numărul vectorilor din B_1, respectiv B_2 deci cele două sisteme de vectori sunt liniar independente şi prin urmare sunt baze în $\mathbb{R}^3$.

Cum vectorii bazei B_2 sunt exprimaţi în funcţie de vectorii bazei B_1 se obţine direct matricea de trecere de la B_1 la B_2, anume

$$T_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $T_{B_2 B_1} = T^{-1}_{B_1 B_2}$ avem $T_{B_2 B_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$

~~1.1.6~~. i) Să se arate că următoarele sisteme de vectori sunt baze în $\mathbb{R}^3$, respectiv $\mathbb{R}_2[X]$, unde

$$S_1 = \{u_1 = (2, 0, 1), u_2 = (0, -1, 0), u_3 = (4, -3, -1)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$S_2 = \{v_1 = 2X^2 - 3X, v_2 = X + 1, v_3 = -X^2 + 4\} \subset \mathbb{R}_2[X].$$

ii) Să se determine coordonatele vectorului $u = (12, -6, 3)$ în baza S_1 şi coordonatele vectorului $v = -2X^2 + X - 2$ în baza S_2.

Soluţie. i) Deoarece S_1, S_2 conţin un număr de vectori egal cu dimensiunea subspaţiului $\mathbb{R}^3$, respectiv $\mathbb{R}_2[X]$ e suficient să arătăm că S_1 şi S_2 sunt sisteme liniar independente. Pentru S_1 vom folosi criteriul practic, adică scriem matricea care conţine vectorii din sistem puşi pe coloane:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cum $detA_1 = 6 \neq 0$, rezultă că rangA_1=3 egal cu numărul vectorilor din S_1, deci S_1 este un sistem de vectori liniari independenţi.

Pentru studiul sistemului S_2 vom folosi definiţia.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

Se înlocuiesc vectorii, $\alpha_1(2X^2 - 3X) + \alpha_2(X+1) + \alpha_3(-X^2+4) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$, se ordonează după puterile lui X şi se obţine sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Deoarece rangul matricei asociat sistemului omogen este 3, egal cu numarul de necunoscute, rezultă că sistemul S_2 este un sistem de vectori liniar independenţi.

Prin urmare S_1 , S_2 sunt baze în $\mathbb{R}^3$, respectiv $\mathbb{R}_2[X]$.

ii) Pentru a determina coordonatele unui vector într-o bază vom folosi două metode:

Metoda I. Folosim formula

$$[w]_B = T^{-1}_{B_cB}[w]_{B_c} = T_{BB_c}[w]_{B_c}.$$

Avem

$$[u]_{S_1} = T^{-1}_{B_cS_1}[u]_{B_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectiv

$$[v]_{S_2} = T^{-1}_{B_cS_2}[v]_{B_c} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{12}{11} & \frac{8}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{3}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare $u = 4u_1 + 3u_2 + u_3$, iar $v = -v_1 - 2v_2$.

Metoda II. Exprimăm direct cei doi vectori u, respectiv v în cele două baze S_1 respectiv S_2. Fie α_1, α_2, α_3 respectiv β_1, β_2, β_3 coordonatele lui u respectiv

v în S_1, respectiv S_2. Obţinem următoarele sisteme de ecuaţii

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_3 = 12 \\ -\alpha_2 - 3\alpha_3 = -6 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2\beta_1 - \beta_3 = -2 \\ -3\beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_2 + 4\beta_3 = -2 \end{cases},$$

cu soluţiile $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1$, respectiv $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = -2$, $\beta_3 = 0$.

~~1.1.7~~. Fie $B_\alpha = \{(\alpha, 2, 3), (-1, -1, \alpha), (1, 0, -\alpha)\} \subset \mathbb{R}^3$.

i) Să se arate că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, B_α formează o bază;

ii) Să se determine matricea de trecere de la baza B_3 la baza B_1;

iii) Determinaţi baza B ştiind că matricea de trecere de la baza B_1 la baza B este $T_{B_1B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

iv) Determinaţi baza B' ştiind că matricea de trecere de la baza B' la baza B_2 este $T_{B'B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluţie. i) E suficient să arătăm că sistemul de vectori B_α e liniar independent. Deoarece determinantul asociat matricei de trecere de la baza canonică la baza B_α este

$$det T_{B_cB_\alpha} = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & \alpha & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 3 \neq 0$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $rang T_{B_cB_\alpha} = 3$ este egal cu numărul de vectori din sistem rezultă că B_α este un sistem liniar independent, deci o bază în $\mathbb{R}^3$.

ii) Cele două baze B_1 respectiv B_3 se obţin dând valorile 1 respectiv 3 lui α. Astfel avem

$$B_1 = \{u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (1, 0, -1)\}$$

$$B_3 = \{v_1 = (3,2,3), v_2 = (-1,-1,3), v_3 = (1,0,-3)\}.$$

Matricea de trecere de la B_3 la B_1 este dată de formula

$$T_{B_3B_1} = T_{B_3B_c}T_{B_cB_1} = T^{-1}_{B_cB_3}T_{B_cB_1}.$$

Cum

$$T^{-1}_{B_cB_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}, \text{ iar } T_{B_cB_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

avem

$$T_{B_3B_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

iii) Fie $\{w_1, w_2, w_3\}$ vectorii bazei B. Cum matricea de trecere de la baza B_1 la baza B este $T_{B_1B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ obţinem

$$w_1 = 2u_1 - 3u_2 + 0 \cdot u_3 = (5,7,3),$$

$$w_2 = u_1 - 2u_2 - u_3 = (2,4,2),$$

$$w_3 = u_2 + u_3 = (0,-1,0).$$

iv) Baza B_2 este $B_2 = \{b_1 = (2,2,3), b_2 = (-1,-1,2), b_3 = (1,0,-2)\}$. Determinăm mai întâi inversa matricei $T_{B'B_2}$. Avem

$$T^t_{B'B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^*_{B'B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

deci

$$T^{-1}_{B'B_2} = \frac{T^*_{B'B_2}}{detT_{B'B_2}} = \begin{pmatrix} 1 & -4/3 & 7/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = T_{B_2B'}.$$

Procedând ca la iii) se obţin vectorii bazei $B' = \{v_1'v_2', v_3'\}$, daţi de

$$v_1' = (2,2,3), v_2' = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, -4\right), v_3' = \left(\frac{11}{3}, \frac{13}{3}, 9\right).$$

1.1.8. Se consideră sistemul de vectori

$$S = \{v_1 = X + 3, v_2 = X^2 - 2X, v_3 = \alpha X^2 - 6\}.$$

Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât S să fie un sistem liniar dependent şi să se exprime unul din vectori în funcţie de ceilalţi.

Soluţie. Sistemul este liniar dependent dacă există o combinaţie liniară nulă $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$, în care nu toţi coeficienţii sunt nuli, deci

$$X^2(a_2 + \alpha a_3) + X(a_1 - 2a_2) + (3a_1 - 6a_3) = 0.$$

Această condiţie conduce la sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} a_2 + \alpha a_3 = 0 \\ a_1 - 2a_2 = 0 \\ 3a_1 - 6a_3 = 0 \end{cases}$$

care trebuie să admită şi soluţie diferită de cea banală, deci

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

de unde rezultă $\alpha = -1$. Pentru a exprima unul din vectorii din S_1 în funcţie de ceilalţi, determinăm o soluţie nenulă a sistemului de mai sus pentru $\alpha = -1$. Pentru $a_3 = 1$ rezultă $a_1 = 2$, $a_3 = 1$, deci $v_2 = -v_3 - 2v_1$.

1.1.9. Să se determine matricea de trecere de la baza

$$B = \{X^2 - 3X + 2, -X^2 + 3, 2X + 1\} \subset \mathbb{R}_2[X]$$

la baza canonică $B_c = \{X^2, X, 1\} \subset \mathbb{R}_2[X]$ şi să se scrie coordonatele vectorului $f = 10X^2 - 3X + 1$ în baza B.

Soluţie. Deoarece matricea de trecere de la baza canonică B_c la baza B este $T_{B_cB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ rezultă că matricea de trecere de la baza B la baza canonică B_c este dată de inversa lui T_{B_cB}, deci

$$T_{B_cB}^{-1} = T_{BB_c} = \begin{pmatrix} 6/13 & -1/13 & 2/13 \\ -7/13 & -1/13 & 2/13 \\ 9/13 & 5/13 & 3/13 \end{pmatrix}.$$

Fie α, β, γ coordonatele vectorului f în baza B. Avem

$$10X^2 - 3X + 1 = \alpha(X^2 - 3X + 2) + \beta(-X^2 + 3) + \gamma(2X + 1),$$

de unde prin identificarea coeficienţilor rezultă sistemul

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 10 \\ -3\alpha + 2\gamma = -3 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 1 \end{cases}, \quad \text{cu soluţia } \alpha = 5,\ \beta = -5,\ \gamma = 6.$$

Prin urmare f poate fi scris în baza B sub forma

$$10X^2 - 3X + 1 = 5(X^2 - 3X + 2) - 5(-X^2 + 3) + 6(2X + 1).$$

1.1.10. Matricea de trecere de la baza B_1 la baza

$$B_2 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{3,1}[\mathbb{R}]$$

este

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine baza B_1.

Soluţie. Determinăm mai întâi inversa matricei $T_{B_1B_2}$. Deci

$$T_{B_2B_1} = T_{B_1B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

iar dacă notăm cu $\{u_1, u_2, u_3\}$ vectorii bazei B_1 obţinem

$$u_1 = -\frac{3}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.2 Probleme propuse

1.1.11. Fie V un spaţiu vectorial real. Defnim pe $V^2 = V \times V$ o structură complexă astfel:

- adunarea: $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2), \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V^2$,

- înmulţirea cu scalari: $(a+ib)(u, v) = (au-bv, av+bu), \forall a+ib \in \mathbb{C}, (u; v) \in V^2$.

Să se arate că V^2 formează un spaţiu vectorial, numit complexificatul lui V.

1.1.12. Fie A o mulţime oarecare nevidă şi V un spaţiu vectorial. Notăm cu $V^A = \{f | f : A \to V\}$ mulţimea funcţiilor defnite pe A cu valori în V. Defnim cele două operaţii prin:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);\ \forall x \in A,\ \forall f, g \in V^A;$$

$$\forall a \in K;\ (af)(x) = a \cdot f(x);\ \forall x \in A;\ \forall f \in V^A.$$

Să se arate că mulţimea V^A formează un spaţiu vectorial.

1.1.13. Să se precizeze care din următoarele sisteme de vectori sunt liniar independente:

i) $S_1 = \{(-1,1),(0,3)\} \subset \mathbb{R}^2$;

ii) $S_2 = \{(7,0,-1),(-2,1,0),(3,2,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$;

iii) $S_3 = \{X^2 - 3X + 4; -2X^2 + 4X - 1; -X^2 + 2X + 3\} \subset \mathbb{R}_2[X]$;

iv) $S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset M_{3,1}[\mathbb{R}]$.

Răspuns: S_1, S_3 liniar independente, S_2, S_4 liniar dependente.

1.1.14. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii

i) $v_1 = (1,2,\alpha),\ v_2 = (-1,1,2),\ v_3 = (\alpha,1,0) \in \mathbb{R}^3$,

ii) $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in$ $M_2[\mathbb{R}]$, să fie liniar independenţi.

Răspuns. i) $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$; ii) $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}, 0\}$.

1.1.15. Să se studieze dacă următoarele sisteme de vectori sunt sisteme de generatori în spaţiile vectoriale precizate:

i) $L_1 = \{(1,1,0),(1,-1,1),(0,0,1),(0,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$;

ii) $L_2 = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^4$.

Răspuns. i) da; ii) nu.

1.1.16. Să se arate că următoarele sisteme de vectori

$$S_1 = \{v_1 = (2,-1), v_2 = (3,-2)\},\quad S_2 = \{w_1 = (-1,1), w_2 = (2,-3)\}$$

sunt baze în $\mathbb{R}^2$. Să se determine apoi

i) coordonatele vectorului $u = (7,-5)$ în cele două baze;

ii) matricea de trecere de la baza S_1 la baza S_2.

Răspuns. i) $u = -v_1 + 3v_2$, $u = -11w_1 - 2w_2$.

$$ii)\ T_{S_1S_2} = T^{-1}_{B_cS_1} T_{B_cS_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.1.17. Se consideră sistemul de vectori din $\mathbb{R}^3$

$$B = \{v_1 = (1,0,2), v_2 = (2,1,2), v_3 = (1,2,1)\}.$$

i) Să se arate că B formează o bază în $\mathbb{R}^3$.

ii) Să se determine coordonatele vectorului $v = (1,1,1)$ relativ la această bază.

Răspuns. $v = \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$.

1.1.18. Să se arate că sistemul de vectori

$$S = \{(1,2,1),(3,-1,0),(4,-1,-1),(0,1,-2)\} \subset \mathbb{R}^3$$

este liniar dependent. Să se extragă o bază din S.

Indicaţie. Deoarece numărul maxim de vectori liniar independenţi este egal cu dimensiunea spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$=3, rezultă că sistemul S este liniar dependent. O bază a sa este de exemplu $B = \{(1,2,1),(3,-1,0),(4,-1,-1)\}$.

1.1.19. Să se determine matricea de trecere de la baza

$$B = \{X^2 + 3X - 1, -X + 2, -X^2 + 1\}$$

la baza canonică $B_c = \{X^2, X, 1\}$.

Răspuns. $T_{BB_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

1.1.20. Determinaţi baza B ştiind că matricea de trecere de la baza

$$B_1 = \{2X-1, -3X+2\} \subset \mathbb{R}[X]$$

la baza B este $T_{B_1B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Răspuns. $B = \{16X - 10, -11X + 7\}$.

1.1.21. Determinaţi baza B_1 ştiind că matricea de trecere de la baza

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset M_{2,1}[\mathbb{R}]$$

este $T_{B_1B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Răspuns. $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.

1.1.22. Să se determine coordonatele vectorului $u \in \mathbb{R}^3$ în baza canonică, dacă în baza $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ are coordonatele $(1,2,3)$.

Răspuns. $u = (6,3,1)$.

1.1.23. Fie $B_1 = \{(1,3,1), (0,2,1), (-2,-1,0)\}$ şi $B_2 = \{(2,-1,1), (-1,-2,1), (2,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Să se arate că B_1 şi B_2 sunt baze în $\mathbb{R}^3$ şi să se scrie matricile de trecere de la baza B_1 la B_2 şi de la baza B_2 la B_1.

Răspuns. $T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} -8 & -7 & 2 \\ 9 & 8 & -3 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; $T_{B_2B_1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{15}{7} & -\frac{10}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{13}{7} & -\frac{11}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

1.2 Subspaţii liniare

1.2.1 Probleme rezolvate

1.2.1. i) Să se arate că

$$U = \{(x,y,z) | x + 2y - 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

este un subspaţiu vectorial.

ii) Să se determine o bază a lui U.

Soluţie. i) Cum $x = -2y + 3z$, $U = \{(3z - 2y, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ este subspaţiu vectorial pentru că:

Metoda 1). Pentru orice $u_1 = (3z_1 - 2y_1, y_1, z_1) \in U$, $u_2 = (3z_2 - 2y_2, y_2, z_2) \in U$ avem

$$u_1 + u_2 = (3(z_1 + z_2) - 2(y_1 + y_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (3z_3 - 2z_3, y_3, z_3) \in U,$$

unde am notat $z_3 = z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$, $y_3 = y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$.

De asemenea pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ şi orice $u_1 \in U$ rezultă

$$\alpha u_1 = \alpha(3z_1 - 2y_1, y_1, z_1) = (3\alpha z_1 - 2\alpha y_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = (3z_4 - 2y_4, y_4, z_4) \in U,$$

unde am notat $z_4 = \alpha z_1 \in \mathbb{R}$, $y_4 = \alpha y_1 \in \mathbb{R}$, deci U este un subspaţiu liniar al spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$.

Metoda 2). Oricare ar fi $u_1 = (3z_1 - 2y_1, y_1, z_1) \in U$, $u_2 = (3z_2 - 2y_2, y_2, z_2) \in U$ şi orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = (3\alpha z_1 - 2\alpha y_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (3\beta z_2 - 2\beta y_2, \beta y_2, \beta z_2) = (3z_5 - 2y_5, y_5, z_5) \in U,$$

unde $z_5 = \alpha z_1 + \beta z_2 \in \mathbb{R}$, $y_5 = \alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathbb{R}$, adică U este un subspaţiu liniar al spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$.

Metoda 3). Cum mulţimea U poate fi scrisă sub forma

$$U = \{y(-2,1,0) + z(3,0,1) | y, z \in \mathbb{R}\}$$

deducem că U este subspaţiu vectorial, fiind generat de vectorii $v_1 = (-2,1,0)$, $v_2 = (3,0,1)$, adică

$$U = \mathcal{L}(\{v_1, v_2\}).$$

ii) Deoarece $rang \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$=numărul de vectori din B, deducem că $B = \{v_1, v_2\}$ este o bază a lui U fiind un sistem de generatori liniar independent.

1.2.2. Să se arate că

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a \\ -b & -a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2[\mathbb{R}]$$

este un subspaţiu vectorial. Să se determine apoi două baze ale sale şi să se scrie matricea de trecere de la prima la cea de-a doua bază aleasă.

Soluţie. U poate fi scris sub forma

$$U = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

deci este un subspaţiu vectorial al lui $M_2[\mathbb{R}]$, fiind generat de sistemul de vectori

$$S = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Deoarece rangul matricei formată din cei doi vectori ai lui S este egal cu

numărul de vectori din S, adică

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

rezultă că S formează o bază a lui U. Schimbând ordinea celor doi vectori obţinem o altă bază a lui U diferită de prima, anume

$$S' = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Fie $T_{SS'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza S la baza S'. Din condiţiile $v_1 = au_1 + cu_2$, $v_2 = bu_1 + du_2$, echivalente cu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

se obţin $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$, deci $T_{SS'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2.3. Să se determine subspaţiul vectorial generat de

$$S = \{(2,0,1), (0,-2,-1), (1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

şi dimensiunea sa.

Soluţie. Subspaţiul vectorial generat de S este

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S) &= \{\alpha(2,0,1) + \beta(0,-2,-1) + \gamma(1,1,1) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2\alpha + \gamma, -2\beta + \gamma, \alpha - \beta + \gamma) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Dimensiunea subspaţiului generat de S este egală cu numărul maxim de vectori liniari independenţi din sistem. Cum

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

rezultă că avem doar doi vectori liniar independenţi deci $dim\mathcal{L}(S) = 2$.

1.2.4. Să se verifice că

$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y-z=0\}$, $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+3y=0, y-2z=0\}$

sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$. Să se arate apoi că $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^3$.

Soluţie. Deoarece $z = x+y$ rezultă că U_1 poate fi scris sub forma

$$U_1 = \{(x, y, x+y) | x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,1) + y(0,1,1) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Rezultă că U_1 este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$, deoarece este acoperirea liniară a sistemului de vectori $B_1 = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$.

Analog, cum $x = -3y$, $y = 2z$, avem

$$U_2 = \{(-6z, 2z, z) | z \in \mathbb{R}\} = \{z(-6,2,1) | z \in \mathbb{R}\},$$

deci U_2 este subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^3$, fiind generat de sistemul de vectori $B_2 = \{(-6,2,1)\}$.

Cum $rang \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ egal cu numărul de vectori din B_1 rezultă că B_1 este un sistem liniar independent, deci o bază a lui U_1. Prin urmare $dimU_1 = 2$.

De asemenea avem $rang \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ egal cu numărul de vectori din B_2 rezultă că B_2 este un sistem liniar independent, deci o bază a lui U_2. Avem $dimU_2 = 1$.

În baza faptului că

$$dim(U_1 \oplus U_2) = dimU_1 + dimU_2 - dim(U_1 \cap U_2)$$

rămâne să demonstrăm că $U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0)\}$. Fie $(x,y,z) \in U_1 \cap U_2$, deci avem de rezolvat următorul sistem de ecuaţii liniar omogen $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+3y=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$. Se ştie că un sistem liniar omogen admite întotdeauna soluţia banală. Pentru a vedea dacă sistemul admite şi alte soluţii în afară de cea banală determinăm rangul matricei asociate sistemului. Cum $rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$ (deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$) rezultă că sistemul admite numai soluţia banală. Prin urmare avem $U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0)\}$, deci

$$dim(U_1 \oplus U_2) = dimU_1 + dimU_2 = 3 = dim\mathbb{R}^3,$$

de unde rezultă că $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^3$.

1.2.5. Să se arate că

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x - 3y = 0, x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,1}[\mathbb{R}]$$

este un subspaţiu vectorial. Să se determine o bază a lui U şi să se completeze această bază la o bază din $M_{2,1}[\mathbb{R}]$.

Soluţie. Din condiţia $x = 3y$ rezultă că U poate fi scris sub forma

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R} \right\},$$

deci este subspaţiu liniar, fiind generat de sistemul de vectori $B = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Deoarece B este, evident, liniar independent, rezultă că B este o bază a lui U. Cum $dim M_{2,1}[\mathbb{R}] = 2$, pentru a completa baza B la o bază B' în $M_{2,1}[\mathbb{R}]$ trebuie să mai adăugăm un vector $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in M_{2,1}[\mathbb{R}]$, astfel încât $rang \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} = 2$.

Din condiţia $\begin{vmatrix} 3 & \alpha \\ 1 & \beta \end{vmatrix} \neq 0$, rezultă $\alpha \neq 3\beta$, deci o bază în $M_{2,1}[\mathbb{R}]$ este

$$B' = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} | \alpha \neq 3\beta\right\}.$$

1.2.6. Să se determine dimensiunile sumei şi intersecţiei subspaţiilor generate de sistemele de vectori:

$U = \{u_1 = (2,3,-1), u_2 = (1,2,2), u_3 = (1,1,-3)\}$

$V = \{v_1 = (1,2,1), v_2 = (1,1,-1), v_3 = (1,3,3)\}$.

Soluţie. Subspaţiul liniar generat de sistemul de vectori U este

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[U] &= \{\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2\alpha + \beta + \gamma, 3\alpha + \beta + \gamma, -\alpha + 2\beta - 3\gamma) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$ rezultă că $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ este un sistem de vectori liniar dependent. Subsistemul $\{u_1, u_2\}$ formează o bază în $\mathcal{L}[U]$. Prin urmare $dim\mathcal{L}[U] = 2$.

Analog, subspaţiul vectorial generat de sistemul de vectori V este

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V] &= \{av_1 + bv_2 + cv_3 | a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a + b + c, 2a + b + 3c, a - b + 3c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ rezultă că $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ este un sistem de vectori liniar dependent. Subsistemul $\{v_1, v_2\}$ formează o bază în $\mathcal{L}[V]$. Prin urmare $dim\mathcal{L}[V] = 2$.

O bază în subspaţiul $\mathcal{L}[U] + \mathcal{L}[V]$ este $\{u_1, u_2, v_1\}$, $dim(\mathcal{L}[U] + \mathcal{L}[V]) = 3$.

Subspaţiul $\mathcal{L}[U] \cap \mathcal{L}[V]$ conţine vectorii pentru care $\alpha u_1 + \beta u_2 = av_1 + bv_2$. Obţinem astfel un sistem de trei ecuaţii $\begin{cases} 2\alpha + \beta = a + b \\ 3\alpha + 2\beta = 2a + b \\ -\alpha + 2\beta = a - b \end{cases}$, care are rangul matricei asociate sistemului egal cu 3, (doar u_1, u_2, v_1 sunt liniar independenţi). Se găseşte $\mathcal{L}[U] \cap \mathcal{L}[V] = \{(\lambda, \lambda, 2\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$, deci $dim\mathcal{L}[U] \cap \mathcal{L}[V] = 1$.

1.2.7. Fie $U = \{X^2 + X, X - 1\}$. Să se determine un subspaţiu suplementar al subspaţiului $\mathcal{L}[U]$ generat de U.

Soluţie. Subspaţiul liniar generat de U este

$$\mathcal{L}[U] = \{\alpha(X^2 + X) + \beta(X - 1) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_2[X].$$

O bază a lui $\mathcal{L}[U]$ este chiar U, (deoarece $rang \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$ egal cu numărul de vectori din U, deci U este liniar independent). Cum $dim\mathbb{R}_2[X] = 3$, iar $dim\mathcal{L}[U] = 2$ rezultă că subspaţiul cerut este un subspaţiu V, generat de un singur vector $v = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ astfel încât $U \cup \{v\}$ să fie bază în $\mathbb{R}_2[X]$. Din condiţia

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix} = 3$$

se obţine $a \neq b+c$. Dând lui a, b, c valorile $1, 0, 2$ avem $V = \{X^2+2\} \subset \mathbb{R}_2[X]$, deci $\mathcal{L}[U] \oplus \mathcal{L}[V] = \mathbb{R}_2[X]$.

1.2.2 Probleme propuse

1.2.8. Să se arate că

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x - y + z = 0, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{3,1}[\mathbb{R}]$$

este un subspaţiu vectorial. Să se determine o bază a lui U şi să se completeze această bază la o bază din $M_{3,1}[\mathbb{R}]$.

Răspuns. $U = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | y, z \in \mathbb{R} \right\}$ este subspaţiu liniar fiind acoperirea liniară a sistemului de vectori $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

O bază a lui U este chiar B, iar o bază în spaţiul vectorial $M_{3,1}[\mathbb{R}]$ este

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} | a \neq b - c, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.2.9. Să se arate că U_i, $i = 1, 2$ sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$, unde

$$U_1 = \{(x, y, z) | x + 3y - 2z = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

$$U_2 = \{(x, y, z) | x + z = 0, 3y + z = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Este adevărată egalitatea $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^3$?

Răspuns. $U_1 = \{y(-1, 1, 0) + z(2, 0, 1) | y, z \in \mathbb{R}\}$, $U_1 = \{y(3, 1, -3) | y \in \mathbb{R}\}$ sunt subspaţii vectoriale fiind generate de sistemele de vectori $B_1 = \{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$, respectiv $B_2 = \{(3, 1, -3)\}$.

Egalitatea $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^3$ este adevărată.

1.2.10. Să se determine subspaţiul vectorial generat de

$$S = \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, -1, -1)\}$$

şi dimensiunea sa.

Răspuns. Subspaţiul vectorial generat de S este

$$\mathcal{L}[S] = \{(\alpha + \beta, -\beta - \gamma, \alpha - \gamma) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\},$$

iar dimensiunea sa este 2.

1.2.11. Fie subspaţiile vectoriale

i)

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} M_2[\mathbb{R}],\ U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2[\mathbb{R}].$$

ii)

$$U_1 = \{(\alpha + 2\gamma, \alpha + 3\beta - \gamma, \alpha + \beta + \gamma) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$U_2 = \{(x - 2y, -2x + 4y, 4x - 8y) | x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Să se determine în cele două cazuri $dim U_i$, $i = 1, 2$, $dim U_1 + U_2$, $dim U_1 \cap U_2$.

Răspuns. i) $dim U_1 = 2$, $dim U_2 = 2$, $dim U_1 + U_2 = 3$, $dim U_1 \cap U_2 = 1$;

ii) $dim U_1 = 2$, $dim U_2 = 1$, $dim U_1 + U_2 = 3$, $U_1 \cap U_2 = \{(0, 0, 0)\}$.

1.2.12. Fie $U = \{X^2 - 2X + 5, -X^2 + 3X\} \subset \mathbb{R}_2[X]$. Să se determine un subspaţiu suplementar subspaţiului $\mathcal{L}[U]$ generat de U.

Răspuns. Subspaţiul liniar generat de U este

$$\mathcal{L}[U] = \{X^2(\alpha - \beta) + X(-2\alpha + 3\beta) + 5\alpha | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

O bază în $\mathcal{L}[U]$ este chiar U, subspaţiul cerut este un subspaţiu generat de un vector $f = aX^2 + bX + c$ astfel încât $U \cup \{f\}$ să fie bază în $\mathbb{R}_2[X]$.

1.2.13. Fie

$$U = \{(x, y, z) | x - y + 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

i) Să se arate că U este subspaţiu vectorial

ii) Să se determine două baze în U şi matricile de trecere definite de acestea.

iii) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ ştiind că $v = (1, \alpha, -2) \in U$.

Răspuns. i) $U = \{y(1,1,0) + z(-2,0,1) | y, z \in \mathbb{R}\}$, este subspaţiu vectorial fiind generat de sistemul de vectori $\{(1,1,0), (-2,0,1)\}$.

ii) Două baze ale lui U sunt $B = \{(1,1,0), (-2,0,1)\}$ şi $B' = \{(-2,0,1), (1,1,0)\}$. Matricea de trecere de la baza B la baza B' este $T_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, iar $T_{B'B} = T_{BB'}^{-1}$.

iii) Punând condiţia ca $v \in U$ rezultă $\alpha = -3$.

Capitolul 2

Aplicaţii liniare pe spaţii vectoriale

2.1 Aplicaţii liniare. Nucleu şi imagine.

~~2.1.1~~ Probleme rezolvate

2.1.1. Să se arate că următoarele aplicaţii sunt liniare:

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x_1 + x_3, 3x_2)$, oricare ar fi $x = (x_1, x_2, x_3)$;

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1, 3x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2)$, oricare ar fi $x = (x_1, x_2)$.

Soluţie. i) Pentru a arăta că f este o aplicaţie liniară trebuie să verificăm

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, oricare ar fi $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Avem

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= (2(\alpha x_1 + \beta y_1) + \alpha x_3 + \beta y_3, 3(\alpha x_2 + \beta y_2)) \\ &= (\alpha(2x_1 + x_3) + \beta(2y_1 + y_3), 3\alpha x_2 + 3\beta y_2) \\ &= \alpha(2x_1 + x_3, 3x_2) + \beta(2y_1 + y_3, 3y_2) = \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

ii) Fie $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ şi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Avem

$$\begin{aligned}
f(\alpha x+\beta y) &= (\alpha x_1+\beta y_1, 3(\alpha x_1+\beta y_1)-2(\alpha x_2+\beta y_2), 2(\alpha x_1+\beta y_1)-(\alpha x_2+\beta y_2))\\
&= (\alpha x_1, 3\alpha x_1-2\alpha x_2, 2\alpha x_1-\alpha x_2)+(\beta y_1, 3\beta y_1-2\beta y_2, 2\beta y_1-\beta y_2)\\
&= \alpha(x_1,3x_1-2x_2,2x_1-x_2)+\beta(y_1,3y_1-2y_2,2y_1-y_2)=\alpha f(x)+\beta f(y),
\end{aligned}$$

deci f este o aplicaţie liniară.

2.1.2. Să se determine aplicaţia liniară $f:\mathbb{R}^3\to M_{3,1}[\mathbb{R}]$, ştiind că

$$f(1,0,0)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad f(0,2,0)=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix},\quad f(0,0,3)=\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}.$$

Care e matricea lui f într-o pereche de baze canonice?

Soluţie. Deoarece aplicaţia f este liniară avem

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1f(1,0,0)+x_2f(0,1,0)+x_3f(0,0,1).$$

Cum $f(0,2,0)=2f(0,1,0)$ şi $f(0,0,3)=3f(0,0,1)$, rezultă $f(0,1,0)=\frac{1}{2}f(0,2,0)$, respectiv $f(0,0,1)=\frac{1}{3}f(0,0,3)$. Astfel, se obţine

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= x_1f(1,0,0)+\frac{x_2}{2}f(0,2,0)+\frac{x_3}{3}f(0,0,3)\\
&= x_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\frac{x_2}{2}\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}+\frac{x_3}{3}\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_3\\2x_1+2x_2\\x_1+2x_2-2x_3\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pentru a construi matricea lui f într-o pereche de baze canonice avem la îndemână două metode.

Metoda 1) Din expresia analitică a funcţiei f rezultă

$$f(1,0,0)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$f(0,1,0)=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$f(0,0,1)=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

deci matricea aplicaţie f într-o pereche de baze canonice este

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\1&1&-2\end{pmatrix}.$$

Metoda 2. Putem determina matricea aplicaţiei liniare f fără a folosi expresia analitică a lui f, anume

$$f(0,2,0)=2f(0,1,0)\Rightarrow f(0,1,0)=\frac{1}{2}f(0,2,0)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$f(0,0,3)=3f(0,0,1)\Rightarrow f(0,0,1)=\frac{1}{3}f(0,0,3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

2.1.3 Să se determine aplicaţia liniară f ştiind că

i) $f:\mathbb{R}_2[X]\to M_{2,1}[\mathbb{R}]$,

$$f(X^2-5X)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad f(-X^2-X+1)=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix},\quad f(X+1)=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}.$$

ii) $f:M_{3,1}[\mathbb{R}]\to\mathbb{R}_2[X]$,

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=X^2+2X+1;\ f\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=-X^2-X;\ f\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=X^2+3X-1.$$

Soluţie. i) *Metoda 1)* Deoarece f este aplicaţie liniară avem:

$$\begin{aligned} f(X^2-5X) &= f(X^2)-5f(X) \\ f(-X^2-X+1) &= -f(X^2)-f(X)+f(1) \\ f(X+1) &= f(X)+f(1) \end{aligned}$$

de unde rezultă sistemul algebric cu necunoscutele $f(X^2), f(X), f(1)$:

$$\begin{cases} f(X^2)-5f(X)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ -f(X^2)-f(X)+f(1)=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ f(X)+f(1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obţinem

$$f(X^2)=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{34}{7} \end{pmatrix},\ f(X)=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}\ f(1)=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{7} \end{pmatrix}.$$

Prin urmare expresia analitică a funcţiei f este

$$f(aX^2+bX+c)=af(X^2)+bf(X)+cf(1)=$$
$$=a\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{34}{7} \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{7} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{7}(34a+4b+17c) \end{pmatrix}.$$

Metoda 2). Determinăm $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$aX^2+bX+c=\alpha(X^2-5X)+\beta(-X^2-X+1)+\gamma(X+1).$$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} \alpha-\beta=a \\ -5\alpha-\beta+\gamma=b \\ \beta+\gamma=c \end{cases}$$

cu soluţia $\alpha=\frac{2a-b+c}{7}$, $\beta=\frac{-5a-b+c}{7}$, $\gamma=\frac{5a+b+6c}{7}$. Folosind acum faptul că f este o aplicaţie liniară avem

$$\begin{aligned} & f(aX^2+bX+c)= \\ &=f\left(\frac{2a-b+c}{7}(X^2-5X)+\frac{-5a-b+c}{7}(-X^2-X+1)\right. \\ &\left.+\frac{5a+b+6c}{7}(X+1)\right)= \\ &=\frac{2a-b+c}{7}f(X^2-5X)+\frac{-5a-b+c}{7}f(-X^2-X+1)+ \\ &+\frac{5a+b+6c}{7}f(X+1)= \\ &=\frac{2a-b+c}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\frac{-5a-b+c}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}+ \\ &+\frac{5a+b+6c}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{7}(34a+4b+17c) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ii) *Metoda 1)* Din sistemul

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=X^2+2X+1 \\ f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=-X^2-X \\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=X^2+3X-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=X^2+2X+1 \\ f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+2f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=-X^2-X \\ -f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=X^2+3X-1 \end{cases}$$

rezultă

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=2X^2+5X,\ f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=-2X^2-\frac{9X}{2}+\frac{1}{2},\ f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-X^2-3X+1.$$

Astfel se obţine

$$f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=af\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+bf\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+cf\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=$$

$$=a(2X^2+5)+b\left(-2X^2-\frac{9X}{2}+\frac{1}{2}\right)+c(-X^2-3X+1)=$$

$$=X^2(2a-2b-c)+X\left(5a-\frac{9b}{2}-3c\right)+\frac{b}{2}+c.$$

Metoda 2) Din $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ rezultă sistemul algebric $\begin{cases}\alpha+\beta=a\\ 2\beta=b\\ \alpha-\beta-\gamma=c\end{cases}$, care are soluţia $\alpha=a-\frac{b}{2}$, $\beta=\frac{b}{2}$, $\gamma=a-b-c$. Avem

$$f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\left(a-\frac{b}{2}\right)(X^2+2X+1)+\frac{b}{2}(-X^2-X)+(a-b-c)(X^2+3X-1)=$$

$$=X^2(2a-2b-c)+X\left(5a-\frac{9b}{2}-3c\right)+\frac{b}{2}+c.$$

2.1.4 Să se determine matricea aplicaţiei liniare

$$f:\mathbb{R}^3\to M_{3,1}[\mathbb{R}],\quad f(a,b,c)=\begin{pmatrix}a-b+c\\-a-2c\\3c-b\end{pmatrix}$$

relativ la bazele

$$B_1=\{(1,0,1),(-1,1,2),(0,-1,1)\}\subset\mathbb{R}^3,$$

$$B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}\subset M_{3,1}[\mathbb{R}].$$

Soluţie. Calculăm valorile lui f în vectorii bazei B_1 :

$$f(1,0,1)=\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix},\ f(-1,1,2)=\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix},\ f(0,-1,1)=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}.$$

Exprimând vectorii din baza B_2 în baza B_1 obţinem

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},$$

echivalent cu sistemul

$$\begin{cases}a_1+a_2=2\\ 3a_1-2a_3=-3\\ 2a_1-a_2+a_3=3\end{cases}$$

care are soluţia $a_1=\frac{7}{9}$, $a_2=\frac{11}{9}$, $a_3=\frac{8}{3}$. Analog avem sistemul

$$\begin{cases}b_1+b_2=0\\ 3b_1-2b_3=-1\\ 2b_1-b_2+b_3=5\end{cases}$$

cu soluţia $b_1=1$, $b_2=-1$, $b_3=2$ şi sistemul

$$\begin{cases}c_1+c_2=2\\ 3c_1-2c_3=-2\\ 2c_1-c_2+c_3=4\end{cases}$$

care are soluţia $c_1 = \frac{10}{9}$, $c_2 = \frac{8}{9}$, $c_3 = \frac{8}{3}$. Prin urmare matricea aplicaţiei liniare relativ la bazele B_1 şi B_2 este

$$F = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & 1 & \frac{10}{9} \\ \frac{11}{9} & -1 & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{3} & 2 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

2.1.5 Să se determine expresia analitică a operatorului liniar $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ ştiind că în baza B are matricea A:

i) $B = \{X, 1\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$;

ii) $B = \{2X - 1, X + 3\}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluţie. i) Din $f(X) = X - 3$, $f(1) = -2X + 4$ rezultă imediat că

$$f(aX + b) = af(X) + bf(1) = a(X - 3) + b(-2X + 4) = X(a - 2b) - 3a + 4b.$$

ii) Din condiţiile $f(2X - 1) = 4X - 2$, $f(x + 3) = -5X - 1$ şi din faptul că f este un operator liniar obţinem sistemul

$$\begin{cases} 2f(X) - f(1) = 4X - 2 \\ f(X) + 3f(1) = -5X - 1 \end{cases},$$

de unde rezultă $f(X) = X - 1$, $f(1) = -2X$. Aşadar expresia analitică a lui f este

$$f(aX + b) = af(X) + bf(1) = a(X - 1) - 2bX = X(a - 2b) - a.$$

2.1.6. Fie aplicaţia liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definită prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7}{5}x_2, 2x_3 - \frac{1}{2}x_1\right).$$

Să se determine

i) matricea aplicaţiei liniare relativ la bazele canonice ale lui $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$;

ii) nucleul şi imaginea aplicaţiei liniare.

Soluţie. i) Avem

$$f(1,0,0) = \left(0, -\frac{1}{2}\right), \; f(0,1,0) = \left(\frac{7}{5}, 0\right), \; f(0,0,1) = (0,2).$$

Prin urmare matricea aplicaţiei liniare relativ la bazele canonice ale lui $\mathbb{R}^3$, şi $\mathbb{R}^2$ este $T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{5} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ii) Din definiţia nucleului unei aplicaţii liniare avem

$$Ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | f(x_1, x_2, x_3) = (0,0)\}.$$

Prin urmare se obţine sistemul $\begin{cases} \frac{7}{5}x_2 = 0 \\ 2x_3 - \frac{1}{2}x_1 = 0 \end{cases}$, care admite soluţia $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_1 = 4\alpha$, $x_2 = 0$. Astfel, nucleul aplicaţiei liniare f este

$$Ker f = \{\alpha(4,0,1) | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Imaginea unei aplicaţii liniare este dată de

$$Im f = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 | \exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = (\alpha, \beta)\}.$$

Atunci $\left(\frac{7}{5}x_2, 2x_3 - \frac{1}{2}x_1\right) = (\alpha, \beta)$, adică $\begin{cases} \frac{7}{5}x_2 = \alpha \\ 2x_3 - \frac{1}{2}x_1 = \beta \end{cases}$. Matricile asociate acestui sistem fiind $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{5} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{5} & 0 & \alpha \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 & \beta \end{pmatrix}$, sistemul are soluţii pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, deoarece $rangA = rang\overline{A} = 2$. Deci, $Im f = \mathbb{R}^2$.

2.1.7. Fie aplicaţia liniară $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$,

$$f(aX^2 + bX + c) = (-a + b + 2c)X^2 + (3a + 3b + 4c)X + 2a + b + c.$$

i) Să se determine matricea lui f relativ la baza

$$B = \{-X^2 + X + 1, X^2 - X, X + 1\}.$$

ii) Să se determine nucleul operatorului liniar f.

Soluţie. i) Fie $[f]_B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ matricea lui f relativ la baza B.
Calculăm valorile lui f în vectorii bazei B :

$$f(-X^2+X+1) = 4X^2+4X,\ f(X^2-X) = -2X^2+1,\ f(X+1) = 3X^2+7X+2.$$

a_i, b_i, c_i, $i = \overline{1,3}$ sunt soluţiile următoarelor sisteme algebrice:

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 = 4 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 4 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} -b_1 + b_2 = -2 \\ b_1 - b_2 + b_3 = 0 \\ b_1 + b_3 = 1 \end{cases},\quad \begin{cases} -c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 7 \\ c_1 + c_3 = 2 \end{cases},$$

adică $a_1 = -8$, $a_2 = -4$, $a_3 = 8$, $b_1 = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = -2$, $c_1 = -8$, $c_2 = -5$, $c_3 = 10$. Astfel, se obţine $[f]_B = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -8 \\ -4 & 1 & -5 \\ 8 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

ii) Nucleul aplicaţiei liniare f este

$$Ker f = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] | f(aX^2 + bX + c) = 0\}.$$

Se obţine sistemul $\begin{cases} -a + b + 2c = 0 \\ 3a + 3b + 4c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases}$. Matricea asociată sistemului este

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, iar $det A = 0$. Prin urmare sistemul admite şi alte soluţii în afară de soluţia banală, anume $a = 8\alpha$, $b = -10\alpha$, $c = 9\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Deci, nucleul lui f este

$$Ker f = \{\alpha(8X^2 - 10X + 9) | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

2.1.8. i) Fie operatorul liniar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3, mx_1 + 3x_2 - x_3, x_2 - 3x_3).$$

Să se determine valoarea lui m astfel încât aplicaţia dată să fie injectivă.

ii) Pentru $m = 1$ să se determine imaginea operatorului liniar f.

iii) Pentru $m = -\dfrac{8}{3}$ să se determine dimensiunea subspaţiului $Im f$.

Soluţie. i) Punem condiţia $Ker f = \{(0, 0, 0)\}$, echivalentă cu $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ m & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, adică $m \neq -\dfrac{8}{3}$. Atunci pentru $m \neq -\dfrac{8}{3}$, sistemul $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ mx_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$, admite doar soluţia banală, deci $Ker f = \{(0, 0, 0)\}$ adică f este injectivă.

ii) Deoarece imaginea unui operator liniar este dată de

$$Im f = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 | \exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f((x_1, x_2, x_3)) = (\alpha, \beta, \gamma)\},$$

rezultă sistemul $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = \alpha \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = \beta \\ x_2 - 3x_3 = \gamma \end{cases}$, care admite soluţia

$x_1 = \dfrac{8}{11}\alpha + \dfrac{3}{11}\beta + \dfrac{7}{11}\gamma$, $x_2 = -\dfrac{3}{11}\alpha + \dfrac{3}{11}\beta - \dfrac{4}{11}\gamma$, $x_3 = -\dfrac{1}{11}\alpha + \dfrac{1}{11}\beta - \dfrac{5}{11}\gamma$.
Obţinem $Im f = \mathbb{R}^3$.

iii) Pentru $m = -\frac{8}{3}$, matricea asociată sistemului $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = \alpha \\ \frac{-8}{3}x_1 + 3x_2 - x_3 = \beta \\ x_2 - 3x_3 = \gamma \end{cases}$ are rangul 2. Pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca şi rangul matricei extinse să fie tot 2, adică $\begin{vmatrix} 1 & -2 & \alpha \\ -\frac{8}{3} & 3 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0$, deci $\beta = -\frac{7}{3}\gamma - \frac{8}{3}\alpha$. Atunci

$$\begin{aligned} Imf &= \left\{\left(\alpha, -\frac{7}{3}\gamma - \frac{8}{3}\alpha, \gamma\right) | \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\alpha\left(1, -\frac{8}{3}, 0\right) + \gamma\left(0, -\frac{7}{3}, 1\right) | \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\right\}, \end{aligned}$$

deci o bază a sa este

$$B = \left\{\left(1, -\frac{8}{3}, 0\right), \left(0, -\frac{7}{3}, 1\right)\right\}.$$

Prin urmare $dim\ Imf = 2$.

~~2.1.9.~~ Se consideră aplicaţia liniară $f : M_{2,1}[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}^2$, definită prin

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1, 1), \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 1).$$

Este această aplicaţie un izomorfism?

Soluţie. Metoda 1) Construim expresia analitică a lui f. Din

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1) \end{cases},$$

se obţine $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 2)$, deci

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = af\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + bf\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (b, 2a + b).$$

Din $Kerf = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M_{2,1}[\mathbb{R}] | f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (0,0)\right\}$, rezultă sistemul $\begin{cases} b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ care admite doar soluţia banală $a = b = 0$. Prin urmare $Kerf = \{(0,0)\}$, deci f este injectivă. De asemenea, din

$$Imf = \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 | \exists \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M_{2,1}[\mathbb{R}] : f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\alpha, \beta)\right\}$$

rezultă sistemul $\begin{cases} b = \alpha \\ 2a + b = \beta \end{cases}$, cu soluţia $a = \frac{\beta - \alpha}{2}$, $b = \alpha$ deci $Imf = \mathbb{R}^2$ şi prin urmare f este surjecţie. Am obţinut astfel că f este izomorfism.

Metoda 2. Construim o matrice a aplicaţiei liniare f, de exemplu pe cea relativă la bazele

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \text{ şi } B_2 = \{(1,0), (0,1)\}.$$

Atunci matricea aplicaţiei liniare f are matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Deoarece $detA \neq 0$, rezultă că f e bijectivă, deci izomorfism.

~~2.1.10.~~ Fie f_m operatorul liniar pe $\mathbb{R}^3$ ce are în baza canonică matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & 3 & m \\ m & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât f_m să fie un automorfism al lui $\mathbb{R}^3$.

Soluţie. Din condiţia $detA \neq 0$ rezultă $-4m^2 - m \neq 0$, deci f_m este automorfism al lui $\mathbb{R}^3$, pentru $m \in \mathbb{R}\setminus\{0, -\frac{1}{4}\}$.

2.1.2 Probleme propuse

2.1.11. Să se precizeze care din următoarele aplicaţii este o aplicaţie liniară:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2, 2x_2)$, $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (4x_1 - 3x_2, 2x_1 + x_2 - 3x_3)$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1 - x_2^2, x_3^2, 2x_1 - x_3 + x_2)$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Răspuns. i) da, ii) da, iii) nu.

2.1.12. Fie aplicaţia liniară $f : M_{3,1}[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}_2[X]$,

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a + 2b - c)X^2 + (a + b + c)X + a - c$$

şi bazele

$$B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \subset M_{3,1}[\mathbb{R}],$$

$$B' = \{X^2 - 2X + 1, X^2, 1 - X\} \subset \mathbb{R}_2[X].$$

Să se determine matricea aplicaţiei liniare f în perechea de baze B, B'. Să se calculeze apoi $\left[f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{B'}$.

Răspuns. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\left[f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.1.13 Să se determine aplicaţia liniară f ştiind că:

i) $f : \mathbb{R}_1[X] \to M_{3,1}[\mathbb{R}]$, $f(3X - 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(-X + 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(1, 1, -1) = X^2 + 3X + 3$, $f(-1, 1, 0) = -X + 1$, $f(0, 1, -1) = 2X^2$.

iii) $f : M_{2,1}[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}_1[X]$, iar în perechea de baze $B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \subset M_{2,1}[\mathbb{R}]$, $B_2 = \{X - 1, 2\} \subset \mathbb{R}_1[X]$ are matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

iv) $f : \mathbb{R}_1[X] \to M_{2,1}[\mathbb{R}]$, ce are matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ relativ la bazele $B_1 = \{1 + X, -X\} \subset \mathbb{R}_1[X]$ şi $B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subset M_{2,1}[\mathbb{R}]$.

Răspuns. i) $f(aX + b) = \begin{pmatrix} \frac{2a + b}{5} \\ b \\ \frac{a + 3b}{5} \end{pmatrix}$;

ii) $f(a, b, c) = (-a - b - 3c)X^2 + (3a + 2b + 2c)X + 3a + 4b + 4c$.

iii) $f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a + b)X + a - b$;

iv) $f(aX + b) = \begin{pmatrix} -2a + 3b \\ -a + 2b \end{pmatrix}$.

2.1.14. i) Să se arate că $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x_1 + x_2 + 3x_3, -2x_1 + x_3)$, oricare ar fi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ este aplicaţie liniară.

ii) Determinaţi matricea aplicaţiei f într-o pereche de baze canonice.

iii) Determinaţi matricea aplicaţiei f relativ la bazele

$$B_1 = \{(1, 2, 0), (-3, 1, 1), (0, -2, -1)\}, \quad B_2 = \{(1, -1), (2, 0)\}.$$

iv) Să se determine nucleul şi imaginea aplicaţiei f precum şi dimensiunile acestor subspaţii.

Răspuns. i) Se verifică $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, oricare ar fi $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, şi oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) $B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ \frac{1}{2} & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

iv) $Kerf = \{\alpha(1, -7, 2) | \alpha \in \mathbb{R}\}$; $dimKerf = 1$;

$Imf = \mathbb{R}^2$, $dimImf = 2$.

2.1.15. Să se verifice că funcţia $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X]$, $f(P)(X) = 3P'(X)$ este o aplicaţie liniară şi apoi să i se determine matricea relativ la bazele

$$B_1 = \{X^2 + 1, X, X^2 + X\} \subset \mathbb{R}_2[X],$$

$$B_2 = \{X + 1, X - 1\} \subset \mathbb{R}_1[X].$$

Răspuns. $A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$.

2.1.16. Să se determine $Kerf$, Imf şi câte o bază în fiecare din aceste subspaţii pentru aplicaţiile liniare:

i) $f : M_{3,1}[\mathbb{R}] \to M_{2,1}[\mathbb{R}]$,

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ b - c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ce are relativ la bazele canonice matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

iii) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(X^2) = X^2 - 2X + 3$, $f(X) = 3X - 1$, $f(1) = -2X^2 + 3X$.

Răspuns. i) $Kerf = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \right\}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$Imf = M_{2,1}[\mathbb{R}]$, $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

ii) $Kerf = \{\alpha(1, -1, 1) | \alpha \in \mathbb{R}, \}$ $B = \{(1, -1, 1)\}$;

$Imf = \mathbb{R}^2$, $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

iii) $Kerf = \{(0, 0, 0)\}$, $Imf = \mathbb{R}_2[X]$.

2.1.17. Să se determine parametrul real a astfel încât funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (ax_1 - 2x_2, x_1 - 2ax_2)$ să fie un automorfism al lui $\mathbb{R}^2$.

Răspuns. $a \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$.

2.1.18. Este funcţia $f : M_{2,1}[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a - b, 2a + 3b, -4b)$$

un automorfism?

Răspuns. Nu, pentru că $dimM_{2,1}[\mathbb{R}] \neq dim\mathbb{R}^3$.

2.2 Diagonalizarea transformărilor liniare

2.2.1 Probleme rezolvate

2.2.1. Să se determine valorile proprii şi subspaţiile proprii corespunzătoare ale transformării liniare f ale căror matrici sunt:

i) $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$,

iii) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{pmatrix}$, iv) $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 0\\ -4 & 16 & 4\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$,

v) $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$, vi) $A\doteq\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

Soluţie. În fiecare caz, valorile proprii sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice $det(A-\lambda I)=0$. Avem:

i) $\begin{vmatrix}9-\lambda & -3\\ -3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-10)=0$, deci valorile proprii sunt $\lambda_1=0$, $\lambda_2=10$. Subspaţiul vectorilor proprii corespunzători valorilor proprii găsite este

$$S_{\lambda_i}=\{v=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2|(A-\lambda_i I_2)[v]_{B_c}=\overline{0}, i=\overline{1,2}\}$$

Pentru $\lambda_1=0$ obţinem $\begin{pmatrix}9 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, de unde rezultă $9\alpha=3\beta$ deci $S_{\lambda_1}=[\{(1,3)\}]$.

De asemenea, pentru $\lambda_2=10$ avem $\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -3 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, de unde rezultă $-\alpha=3\beta$ deci $S_{\lambda_2}=[\{(-3,1)\}]$.

ii) $\begin{vmatrix}3-\lambda & -5\\ -5 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2-6\lambda-16=0$, deci valorile proprii sunt $\lambda_1=8$, $\lambda_2=-2$. Procedând ca la i) rezultă că pentru $\lambda_1=8$, din condiţia $\begin{pmatrix}-5 & -5\\ -5 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, rezultă $-5\alpha=5\beta$ deci $S_{\lambda_1}=[\{(-1,1)\}]$.

Analog, pentru $\lambda_2=-2$ avem $\begin{pmatrix}5 & -5\\ -5 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, de unde rezultă $5\alpha=5\beta$ deci $S_{\lambda_2}=[\{(1,1)\}]$.

iii) Valorile proprii sunt soluţiile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 2 & -5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2=0,$$

adică $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

Subspaţiul vectorilor proprii corespunzători valorilor proprii găsite este

$$S_{\lambda_i}=\{v=(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3|(A-\lambda_i I_3)[v]_{B_c}=\overline{0}, i=\overline{1,3}\}$$

Pentru $\lambda_1=2$ obţinem

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 2 & -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

de unde rezultă sistemul nedeterminat

$$\begin{cases}-2\alpha+\beta=0\\ -2\beta=-\gamma\end{cases}, \text{ cu soluţia } \beta=\frac{\gamma}{2}, \alpha=\frac{\gamma}{2}, \gamma\in\mathbb{R}.$$

Astfel, subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_1 este $S_{\lambda_1}=[\{(1,2,4)\}]$.

Pentru $\lambda_2=\lambda_3=1$ obţinem

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

de unde rezultă sistemul nedeterminat

$$\begin{cases}-\alpha+\beta=0\\ -\beta=-\gamma\end{cases}, \text{ cu soluţia } \alpha=\beta=\gamma, \gamma\in\mathbb{R}.$$

Astfel, subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_2 este $S_{\lambda_2} = [\{(1,1,1)\}]$.

iv) Determinantul caracteristic

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & 16-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

conduce la ecuaţia caracteristică $-\lambda^3 + 20\lambda^2 - 36\lambda = 0$, cu soluţia $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 18$, $\lambda_3 = 2$.

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 0$ se obţine din

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 16 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

adică este soluţia sistemului nedeterminat

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta = 0 \\ -4\alpha + 16\beta = -4\gamma \end{cases}, \text{ cu } \beta = -\frac{\gamma}{2}, \alpha = -\gamma, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Astfel, subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_1 este $S_{\lambda_1} = [\{(-2,-1,2)\}]$.

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 18$ se obţine din

$$\begin{pmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

adică este soluţia sistemului nedeterminat

$$\begin{cases} -16\alpha - 4\beta = 0 \\ -4\alpha - 2\beta = -4\gamma \end{cases}, \text{ cu } \beta = -4\alpha, \alpha = -\gamma, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Astfel, subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_1 este $S_{\lambda_2} = [\{(-1,4,1)\}]$.

Pentru valorea proprie $\lambda_3 = 2$ se obţine

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 14 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă sistemul nedeterminat

$$\begin{cases} -4\beta = 0 \\ -4\alpha + 14\beta = -4\gamma \end{cases}, \text{ cu soluţia } \alpha = \gamma, \beta = 0\gamma \in \mathbb{R}.$$

Astfel, subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_1 este $S_{\lambda_3} = [\{(1,0,1)\}]$.

v) Determinantul caracteristic

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

conduce la ecuaţia caracteristică $(3-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$, cu soluţia $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Pentru $\lambda_1 = 3$ obţinem

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă sistemul nedeterminat

$$\begin{cases} -\beta = -\gamma \\ -2\alpha + \beta = 2\gamma \end{cases}, \text{ cu soluţia } \beta = \gamma, \alpha = -\frac{\gamma}{2}, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Astfel, subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_1 este $S_{\lambda_1} = [\{(-1,2,2)\}]$.

Pentru $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ obţinem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă ecuaţia $\alpha = \beta - \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Astfel, subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_1 este $S_{\lambda_2} = [\{(1,1,0), (-1,0,1)\}]$.

vi) Din determinantul caracteristic

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

se ob ctine ecuaţia $-(\lambda - 1)^3 = 0$, care are soluţia $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ avem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă sistemul nedeterminat

$$\begin{cases} -2\alpha = -\gamma \\ 3\alpha - \beta = 2\gamma \end{cases}, \text{ cu soluţia } \alpha = \frac{\gamma}{2}, \beta = -\frac{\gamma}{2}, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Astfel, subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_1 este $S_{\lambda_3} = [\{(1,-1,2)\}]$.

2.2.2 Să se studieze existenţa unei baze în care matricile următoarelor transformări liniare să aibă forma diagonală:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ ii) } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{iii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ iv) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

În caz afirmativ, să se scrie forma matricei diagonale.

Soluţie. i) Valorile proprii sunt soluţiile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0,$$

adică $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, cu ordinul de multiplicitate $\mu = 3$.

Pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ avem

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă ecuaţia $2\alpha = -\beta$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Astfel, subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_1 este $S_{\lambda_1} = \{\beta(\frac{1}{2}, 1, 0) + \gamma(0,0,1) | \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. O bază a subspaţiului S_{λ_1} este $B = \{(\frac{1}{2}, 1, 0), (0,0,1)\}$ deci $dim S_{\lambda_1} = 2$. Deoarece $S_{\lambda_1} \neq \mu$ rezultă că nu există o bază în care matricea transformării să aibă forma diagonală.

ii) Din determinantul caracteristic

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -3 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

se obţine ecuaţia $-\lambda^3 + 12\lambda - 16 = 0$, care are soluţia $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Aşadar, ordinul de multiplicitate a lui λ_1 este $\mu_1 = 1$, iar al vaalorii proprii λ_2 este $\mu_2 = 2$.

Pentru $\lambda_1 = -4$ avem

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă sistemul nedeterminat

$$\begin{cases} 3\alpha = 3\gamma \\ 3\alpha + 6\beta = -3\gamma \end{cases}, \text{ cu soluţia } \alpha = \gamma, \beta = -\gamma, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Astfel, subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{\gamma(1, -1, 1) | \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

O bază acestui subspaţiu este $B_1 = \{(1, -1, 1)\}$, deci $dim S_{\lambda_1} = \mu_1 = 1$.

Analog, pentru $\lambda_2 = 2$ rezultă

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

echivalent cu $-3\alpha = 3\gamma$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Atunci subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_2 este

$$\begin{aligned} S_{\lambda_2} &= \{(-\gamma, \beta, \gamma) | \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\beta(0, 1, 0) + \gamma(-1, 0, 1) | \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

O bază a subspaţiului S_{λ_2} este $B_2 = \{(0, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$, deci $dim S_{\lambda_2} = \mu_2 = 2$. Prin urmare există o bază $B = B_1 \cup B_2$ în care matricea transformării are o formă diagonală. În această bază matricea diagonală este

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

iii) Valorile proprii sunt soluţiile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0,$$

adică $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$, fiecare având ordinul de multiplicitate $\mu = 1$. Procedând ca la exerciţiul anterior obţinem

$$S_{\lambda_1} = \{\gamma(0, -3, 1) | \gamma \in \mathbb{R}\}, \; dim S_{\lambda_1} = 1 = \mu,$$

$$S_{\lambda_2} = \{\alpha(2, 1, 1) | \alpha \in \mathbb{R}\}, \; dim S_{\lambda_2} = 1 = \mu,$$

$$S_{\lambda_3} = \{\gamma(2, -1, -1) | \gamma \in \mathbb{R}\}, \; dim S_{\lambda_3} = 1 = \mu.$$

Rezultă că în baza

$$B = \{(0, -3, 1), (2, 1, 1), (2, -1, -1)\}$$

matricea diagonală a transformării liniare este

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

iv) Din ecuaţia caracteristică $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, echivalentă cu $-\lambda^3 + 6\lambda + 9 = 0$ are rădăcinile $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Deoarece $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ rezultă că nu există o bază în care matricea transformării să fie diagonală.

2.2.3. Fie $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^3)$ ce are în baza $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Să se arate că matricea lui f este diagonalizabilă. Să se construiască apoi două baze în care f să aibă aceeaşi matrice diagonală.

Soluţie. Valorile proprii, sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice $det(A-\lambda I_3) = 0$. Obţinem

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -a^3 + 12a^2 - 45a + 54 = 0.$$

Rădăcinile ecuaţiei $-a^3 + 12a^2 - 45a + 54 = 0$ sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, cu ordinul de multiplicitate $\mu_1 = 2$, respectiv $\lambda_3 = 6$, cu ordinul de multiplicitate $\mu_2 = 1$.

Pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ rezultă

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

echivalent cu $\alpha = -\beta - \gamma$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Atunci subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_1 este

$$\begin{aligned} S_{\lambda_1} &= \{(-\beta-\gamma, \beta, \gamma) | \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\beta(-1,1,0) + \gamma(-1,0,1) | \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

O bază a subspaţiului S_{λ_2} este $B_1 = \{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$, deci $dimS_{\lambda_1} = \mu_1 = 2$.

Pentru $\lambda_3 = 6$ avem

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă sistemul nedeterminat

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta = -\gamma \\ \alpha - 2\beta = -3\gamma \end{cases}, \text{ cu soluţia } \alpha = \gamma, \beta = \gamma, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Astfel, subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_3 este $S_{\lambda_3} = \{\gamma(1,1,1) | \gamma \in \mathbb{R}\}$. O bază acestui subspaţiu este $B_2 = \{(1,1,1)\}$, deci $dimS_{\lambda_1} = \mu_2 = 1$.

Prin urmare există baza

$$B = \{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\}$$

în care matricea transformării are o formă diagonală. În această bază matricea diagonală este

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

O altă bază în care f să aibă aceeaşi matrice diagonală este de exemplu

$$B' = \{(-1,0,1),(-1,1,0),(1,1,1)\}.$$

2.2.2 Probleme propuse

2.2.4. Să se determine valorile proprii şi subspaţiile proprii corespunzătoare ale transformării liniare f ale căror matrici sunt:

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, iv) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Răspuns. i) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ $S_{\lambda_1} = [\{(-1,1)\}]$, $S_{\lambda_2} = [\{(1,1)\}]$;

ii) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ $S_{\lambda_1} = [\{(4,1)\}]$, $S_{\lambda_2} = [\{(1,0)\}]$;

iii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $S_{\lambda_1} = [\{(-1,-1,1)\}]$;

iv) $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ $S_{\lambda_1} = [\{(1,0,0)\}]$, $S_{\lambda_2} = [\{(0,1,1)\}]$.

2.2.5. Aduceţi la forma canonică diagonală, următoarele matrici ce reprezintă matricile aplicaţiilor liniare în baza canonică din $\mathbb{R}^3$, scriind şi baza corespunzătoare:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ \text{iii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Răspuns. i) $B = \{(-1,-2,3),(-1,-2,1),(4,1,2)$; $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

ii) A nu poate fi adusă la forma canonică diagonală.

iii) $B = \{(1,1,1),(-1,1,0),(-1,0,1)\}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.2.6. Fie $f : M_{3,1}[\mathbb{R}] \to M_{3,1}[\mathbb{R}]$ un operator liniar dat prin

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Să se studieze dacă f este diagonalizabilă. În caz afirmativ, să se determine o bază în care matricea lui f are forma diagonală şi scrieţi matricea diagonală corespunzătoare.

Răspuns. $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.2.7. Să se determine $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, ştiind că

$$Ker f = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - x_2 + x_3 = 0, 2x_2 + x_3 = 0, x_3 = 0\}.$$

Există o bază în care matricea lui f să aibă forma diagonală?

Răspuns. $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_2 + x_3, x_3)$, nu există o bază în care matricea lui f să aibă forma diagonală.

2.2.8. Să se studieze existenţa unei baze în care matricile următoarelor transformări liniare să aibă forma diagonală.

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Răspuns. i) Ecuaţia caracteristică

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 26\lambda + 32 = 0$$

are o rădăcină reallă şi două rădăcini complexe. Prin urmare nu există o bază în care matricea transformării să fie diagonală.

ii) Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt $\lambda_1 = 3$, cu ordinul de multiplicitate $\mu_1 = 1$ şi $\lambda_2 = -1$ cu ordinul de multiplicitate $\mu_2 = 2$. Deoarece $dim S_{\lambda_2} = 1 \neq \mu_2$ rezultă că nu există o bază în care matricea transformării să fie diagonală.

2.2.9. Fie transformarea liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită într-o bază B prin matricea

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că există o bază în $\mathbb{R}^3$ faţă de care matricea transformării are forma diagonală.

Capitolul 3

Forme biliniare. Forme pătratice

3.1 Forme biliniare

~~3.1.1~~ Probleme rezolvate

3.1.1. Se dă aplicaţia $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_1 - 3x_2y_2, \quad \forall x = (x_1, x_2), \; y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Să se verifice că φ este o formă biliniară pe $\mathbb{R}^2$.

ii) Să se scrie matricea formei φ în baza canonică din $\mathbb{R}^2$.

iii) Este φ o formă biliniară simetrică?

Soluţie. i) Forma φ este biliniară dacă ea este liniară în ambele argumente.

Fie $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha x + \beta y, z) &= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_1 + \beta y_1)z_2 - 2(\alpha x_2 + \beta y_2)z_1 - 3(\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 \\
&= \alpha(x_1 z_1 + x_1 z_2 - 2x_2 z_1 - 3x_2 z_2) + \beta(y_1 z_1 + y_1 z_2 - 2y_2 z_1 - 3y_2 z_2) \\
&= \alpha\varphi(x, z) + \beta\varphi(y, z);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \alpha y + \beta z) &= x_1(\alpha y_1 + \beta z_1) + x_1(\alpha y_2 + \beta z_2) - 2x_2(\alpha y_1 + \beta z_1) - 3x_2(\alpha y_2 + \beta z_2) \\
&= \alpha(x_1 y_1 + x_1 y_2 - 2x_2 y_1 - 3x_2 y_2) + \beta(x_1 z_1 + x_1 z_2 - 2x_2 z_1 - 3x_2 z_2) \\
&= \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x, z).
\end{aligned}$$

ii) Elementele matricei A asociate formei biliniare φ, în baza canonică sunt:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \varphi((1,0),(1,0)) = 1, \\
a_{12} &= \varphi((1,0),(0,1)) = 1, \\
a_{21} &= \varphi((0,1),(1,0)) = -2, \\
a_{22} &= \varphi((0,1),(0,1)) = -3,
\end{aligned}$$

deci matricea este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

iii) Deoarece A nu este o matrice simetrică rezultă că forma biliniară φ nu este simetrică.

~~3.1.2.~~ Se dă forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, a cărei matrice în baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Să se scrie expresia analitică a formei φ în baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

ii) Să se arate că φ este simetrică.

iii) Să se determine matricea formei φ în baza

$$B_1 = \{(1,1,1), (1,2,1), (0,0,1)\}.$$

Soluţie. i) Expresia analitică a formei φ în baza canonică din $\mathbb{R}^3$ se construieşte astfel:

$$\begin{aligned}
\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & -x_2 + 2x_3 & -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= x_1 y_1 - x_3 y_1 - x_2 y_2 + 2x_3 y_2 - x_1 y_3 + 2x_2 y_3.
\end{aligned}$$

ii) *Metoda 1).* Deoarece $A^t = A$ rezultă că matricea A este una simetrică, deci φ este o formă biliniară simetrică.

Metoda 2). Se arată că oricare ar fi $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ avem

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

iii) Matricea formei φ în baza $B_1 = \{(1,1,1), (1,2,1), (0,0,1)\}$, este dată de formula $A' = C^t A C$, unde $C = T_{B_c B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Avem

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

~~3.1.3.~~ Se dă forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}$, ce are în baza

i) canonică din $\mathbb{R}_1[X]$, matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ii) $B = \{2X+1, -X+2\} \subset \mathbb{R}_1[X]$, matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Să se determine expresia analitică a lui φ în fiecare caz.

Soluţie. i) Fie $a_1X + a_2, b_1X + b_2 \in \mathbb{R}_1[X]$. Construim expresia analitică a lui φ astfel:

$$\begin{aligned} \varphi((a_1X+a_2),(b_1X+b_2)) &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3a_1 & -2a_1 + a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= 3a_1b_1 - 2a_1b_2 + a_2b_2. \end{aligned}$$

ii) Căutăm matricea lui φ în baza canonică a lui $\mathbb{R}_1[X]$:

$$A_{B_c} = (T^{-1}_{B_cB})^t \cdot A_B \cdot T^{-1}_{B_cB}.$$

Deoarece $T_{B_cB} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, rezultă $T^{-1}_{B_cB} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, deci

$$A_{B_c} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{1}{25} \\ -\frac{4}{25} & \frac{3}{25} \end{pmatrix}.$$

Prin urmare expresia analitică a lui φ este

$$\begin{aligned} \varphi((a_1X+a_2),(b_1X+b_2)) &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{1}{25} \\ -\frac{4}{25} & \frac{3}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{7a_1+2a_2}{25} & \frac{a_1+3a_2}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25}(7a_1b_1 - 4a_2b_1 + a_1b_2 + 3a_2b_2). \end{aligned}$$

~~3.1.4~~. Fie $\varphi : \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}$ ce are în baza $B = \{X-2, -1\}$ matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine expresia analitică a lui φ. Calculaţi apoi $\varphi(3X-5, -2X+1)$.

Soluţie. Metoda 1). Cum matricea A este relativă la baza B, vom determina pentru cele două argumente ale lui φ coordonatele în baza B:

$$a_1X + b_1 = \alpha_1(X-2) + \beta_1 \cdot (-1), \quad a_2X + b_2 = \alpha_2(X-2) + \beta_2 \cdot (-1).$$

Se obţin: $\alpha_1 = a_1$, $\beta_1 = -2a_1 - b_1$, $\alpha_2 = a_2$, $\beta_2 = -2a_2 - b_2$. Avem

$$\begin{aligned} \varphi(a_1X+b_1, a_2X+b_2) &= \begin{pmatrix} a_1 & -2a_1 - b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ -2a_2 - b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3a_1 - 2b_1 & -3a_1 - b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ -2a_2 - b_2 \end{pmatrix} \\ &= 3a_1a_2 + 3a_1b_2 + b_1b_2. \end{aligned}$$

Metoda 2). Căutăm matricea lui φ în baza canonică a lui $\mathbb{R}_1[X]$:

$$A_{B_c} = (T^{-1}_{B_cB})^t A_B T^{-1}_{B_cB},$$

unde $T_{B_cB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Deoarece $T^{-1}_{B_cB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, înlocuind în formula de mai sus se obţine

$$A_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deci expresia analitică a formei biliniare φ este dată de

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1X+b_1,a_2X+b_2) &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3a_1 & 3a_1+b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
&= 3a_1a_2+3a_1b_2+b_1b_2.
\end{aligned}$$

Din expresia analitică a lui φ se deduce că $\varphi(3X-5,-2X+1)=-14$.

3.1.5. Fie funcţia $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x,y)=x_1y_1+2x_2y_1-x_2y_2, \quad \forall x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2.$$

i) Să se arate că φ este formă biliniară;

ii) Să se determine matricea lui φ în baza canonică din $\mathbb{R}^2$;

iii) Să se determine matricea lui φ în baza $B=\{(2,1),(-1,1)\}$ prin două metode.

Soluţie. i) Fie $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2), z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$ şi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha x+\beta y,z) &= (\alpha x_1+\beta y_1)z_1+2(\alpha x_2+\beta y_2)z_1-(\alpha x_2+\beta y_2)z_2 \\
&= \alpha(x_1z_1+2x_2z_1-2x_2z_1-x_2z_2)+\beta(y_1z_1+2y_2z_1-y_2z_2) \\
&= \alpha\varphi(x,z)+\beta\varphi(y,z);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x,\alpha y+\beta z) &= x_1(\alpha y_1+\beta z_1)+2x_2(\alpha y_1+\beta z_1)-x_2(\alpha y_2+\beta z_2) \\
&= \alpha(x_1y_1+2x_2y_1-x_2y_2)+\beta(x_1z_1+2x_2z_1-x_2z_2) \\
&= \alpha\varphi(x,y)+\beta\varphi(x,z).
\end{aligned}$$

Din cele de mai sus rezultă că φ este liniară în ambele argumente, deci e o formă biliniară pe $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$.

ii) Deoarece $\varphi((1,0),(1,0))=1$, $\varphi((1,0),(0,1))=0$, $\varphi((0,1),(1,0))=2$, $\varphi((0,1),(0,1))=-1$ rezultă că în baza canonică din $\mathbb{R}^2$ matricea lui φ este $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

iii) *Metoda 1).* Deoarece $\varphi((2,1),(2,1))=7$, $\varphi((2,1),(-1,1))=-5$, $\varphi((-1,1),(2,1))=1$, $\varphi((-1,1),(-1,1))=-2$ rezultă că în baza $B=\{(2,1),(-1,1)\}$ matricea lui φ este $A'=\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Metoda 2). Dacă A' este matricea formei φ în baza B şi T_{B_cB} este matricea de trecere de la baza canonică B_c la baza B, atunci A' poate fi calcultaă cu formula

$$A'=T^t_{B_cB}AT_{B_cB}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Probleme propuse

3.1.6. Să se verifice că aplicaţia $\varphi : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x,y)=2x_1y_1-x_2y_1+3x_1y_2+x_2y_2, \quad \forall x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2,$$

este o formă biliniară şi să i se determine matricea în baza canonică din $\mathbb{R}^2$.

Răspuns. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1.7. Să se verifice că aplicaţia $\varphi : \mathbb{R}_1[X]\times\mathbb{R}_1[X]\to\mathbb{R}$ definită prin formula

$$\varphi(aX+b,cX+d)=ad+bc$$

este o formă biliniară simetrică.

Să se scrie matricea lui φ în baza $B=\{X-1,3X-2\}$.

Răspuns. $A=\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$.

3.1.8. Fie $\varphi : \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}$ ce are în baza $B = \{2X-1, 3X\}$ matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine expresia analitică a lui φ. Calculaţi apoi $\varphi(X-2, -2X+6)$.

Răspuns. $\varphi(a_1X+b_1, a_2X+b_2) = 3b_1b_2 + \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{3}$,

$\varphi(X-2, -2X+6) = -\dfrac{106}{3}$.

3.1.9. Se consideră în $\mathbb{R}_2[X]$ baza $B = \{X^2+2, X+1, 1\}$.

i) Determinaţi matricea de trecere de la baza B la baza canonică din $\mathbb{R}_2[X]$;

ii) Să se determine coordonatele vectorului $v = (x+2)^2$ în baza B;

iii) Să se determine forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ care are în baza $B_1 = \{(1,0,2), (0,1,1), (0,0,1)\}$, matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Răspuns. i) $T_{BB_c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$;

ii) $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$;

iii)

$$\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 5x_1y_1 + 6x_1y_2 -$$
$$-4x_1y_3 + 6x_2y_1 + 6x_2y_2 - 4x_2y_3 - 4x_3y_1 - 4x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

3.1.10. Se consideră $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o formă biliniară ce are în baza canonică matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Se cere:

i) Să se determine expresia analitică a lui φ;

ii) Să se calculeze $\varphi((1,0,1),(2,1,1))$;

iii) Să se studieze dacă φ este o formă biliniară simetrică.

Răspuns. i) $\varphi(x,y) = x_2y_1 - x_3y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 - x_1y_3 + 3x_3y_3$, oricare ar fi $x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$.

ii) $\varphi((1,0,1),(2,1,1)) = 1$; iii) da.

3.2 Forme pătratice

3.2.1 Probleme rezolvate

3.2.1. Fiind dată forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ce are în baza $B = \{(1,0),(1,-2)\}$ matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine expresia analitică a formei pătratice asociate.

Soluţie. Calculăm coordonatele în baza B ale unui vector oarecare $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. Atunci din $(x_1,x_2) = \alpha(1,0) = \beta(1,-2)$, rezultă $\alpha = \dfrac{2x_1+x_2}{2}$, $\beta = -\dfrac{x_2}{2}$. Prin urmare, forma pătratică f asociată formei biliniare φ este

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= \varphi((x_1,x_2),(x_1,x_2)) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{2x_1+x_2}{2} & -\dfrac{x_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2x_1+x_2}{2} \\ -\dfrac{x_2}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2x_2 & 4x_1+2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2x_1+x_2}{2} \\ -\dfrac{x_2}{2} \end{pmatrix} = -2x_2^2 - 4x_1x_2. \end{aligned}$$

3.2.2. Să se determine expresia analitică a polarei formei pătratice $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + 3x_1x_2$, oricare ar fi $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Polara $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este dată de

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x+y) - f(x) - f(y)}{2}, \ \forall x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Deoarece $f(x+y) = (x_1+x_2)^2 + 3(x_1+y_1)(x_2+y_2)$, $f(x) = x_1^2 + 3x_1x_2$, $f(y) = y_1^2 + 3y_1y_2$ rezultă expresia

$$\varphi(x,y) = \frac{2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1}{2}.$$

~~3.2.3.~~ Să se determine expresia analitică a polarei formei pătratice $f : M_{2,1}[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$, ce are în baza $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluţie. Polara $\varphi : M_{2,1}[\mathbb{R}] \times M_{2,1}[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$ a formei pătratice $f : M_{2,1}[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$, are în baza B aceeaşi matrice A. Exprimăm coordonatele unui vector oarecare din $M_{2,1}[\mathbb{R}]$ în baza B : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, deci se obţine sistemul $\begin{cases} \alpha = a \\ \alpha + \beta = b \end{cases}$. Prin urmare vectorul $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M_{2,1}[\mathbb{R}]$ poate fi scris în baza B sub forma

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b-a) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

deci

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 - a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2b_1 - a_1 & 2a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \\ &= -3a_1a_2 + 2b_1a_2 + 2a_1b_2. \end{aligned}$$

~~3.2.4.~~ Utilizând metoda lui Gauss, să se determine expresiile canonice ale următoarelor forme pătratice şi bazele corespunzătoare:

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f((x_1,x_2,x_3)) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$;

ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f((x_1,x_2,x_3)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$;

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f((x_1,x_2,x_3)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2$;

iv) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f((x_1,x_2,x_3,x_4)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4$.

Soluţie. i) Aplicând metode lui Gauss, se formează în fiecare etapă câte un pătrat perfect. Astfel,

$$\begin{aligned} f((x_1,x_2,x_3)) &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2(x_3 - \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{7}{2}x_2^2 \\ &= y_1^2 + 2y_2^2 - \frac{7}{2}y_3^2, \end{aligned}$$

unde $y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$, $y_2 = x_3 - \frac{1}{2}x_2$, $y_3 = x_2$, deci

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - \frac{5}{2}y_3 \\ x_2 = y_3 \\ x_3 = y_2 + \frac{1}{2}y_3 \end{cases}.$$

Baza cerută este

$$B = \{(1,0,0), (-1,0,1), (-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2})\}.$$

ii) Folosind metoda lui Gauss, avem

$$f((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2x_3.$$

În continuare, facem schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_2 - y_3 \end{cases}$$

şi obţinem

$$f((x_1,x_2,x_3)) = (x_1+x_2+2x_3)^2 + 2(y_2^2 - y_3^2) = y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2,$$

unde $y_1 = (x_1+x_2+2x_3)^2$. Din sistemul

$$\begin{cases} y_1 = (x_1+x_2+2x_3)^2 \\ y_2 + y_3 = x_2 \\ y_2 - y_3 = x_3 \end{cases}$$

obţinem

$$x_1 = y_1 - 3y_2 + y_3, \; x_2 = y_2 + y_3, \; x_3 = y_2 - y_3,$$

deci baza în care f are forma canonică este:

$$B = \{(1,0,0), (-3,1,1), (1,1,-1)\}.$$

iii) Formăm pătrate perfecte folosind metoda lui Gauss:

$$\begin{aligned} f((x_1,x_2,x_3)) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+2x_3)^2 + 8x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_2x_3 \\ &= (x_1+x_2+2x_3)^2 + 8\left(x_2^2 - \frac{1}{2}x_2x_3\right) + 15x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+2x_3)^2 + 8\left(x_2 - \frac{1}{4}x_3\right)^2 + \frac{29}{2}x_3^2 \\ &= y_1^2 + 8y_2^2 + \frac{29}{2}y_3^2. \end{aligned}$$

În expresia de mai sus am făcut schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1 \\ x_2 - \frac{1}{4}x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$

de unde rezultă

$$x_1 = y_1 - y_2 - \frac{9}{4}y_3, \; x_2 = y_2 + \frac{1}{4}y_3, \; x_3 = y_3,$$

deci baza în care f are forma canonică este:

$$B = \left\{(1,0,0), (-1,1,0), \left(-\frac{9}{4}, \frac{1}{4}, 1\right)\right\}.$$

iv) Utilizând metoda lui Gauss avem:

$$\begin{aligned} f((x_1,x_2,x_3,x_4)) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4 \\ &= (x_1+x_2)^2 - x_2^2 + 2x_3x_4 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2(y_3^2 - y_4^2) \end{aligned}$$

unde

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 - y_4 \\ x_4 = y_3 + y_4 \end{cases}$$

Astfel rezultă că baza B în care f ia forma canonică este

$$B = \{(1,0,0,0), (-1,1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,-1,1)\}.$$

3.2.5. Utilizând metoda lui Gauss, să se determine expresia canonică a următoarei forme pătratice date prin matricea sa A în baza canonică din $\mathbb{R}^3$, unde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluţie. Fie $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Avem

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_1+x_2+x_3 & x_1-x_2+x_3 & x_1+x_2-x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= -x_1^2-x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3. \end{aligned}$$

Utilizând metoda lui Gauss se obţine

$$\begin{aligned} f(x) &= -[(x_1-x_2-x_3)^2-4x_2x_3] \\ &= -[y_1^2-4(y_2^2-y_3^2)] = -y_1^2+4y_2^2-4y_3^2, \end{aligned}$$

unde am făcut schimbarea de coordonate

$$y_1=x_1-x_2-x_3,\ y_2-y_3=x_2,\ y_2+y_3=x_3.$$

De aici, rezultă

$$x_1=y_1+2y_2,\ x_2=y_2-y_3,\ x_3=y_2+y_3,$$

deci baza în care f ia forma canonică este

$$B=\{(1,0,0),(2,1,1),(0,-1,1)\}.$$

3.2.6. Să se reducă la o formă canonică, precizând şi baza în care are această formă, forma pătratică $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, ce are în baza

$$B=\{(1,1,1),(0,1,0),(1,0,0)\},$$

matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluţie. Determinăm mai întâi coordonatele unui vector $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ în baza B:

$$(x_1,x_2,x_3)=\alpha(1,1,1)+\beta(0,1,0)+\gamma(1,0,0),$$

deci din sistemul $\begin{cases} \alpha+\gamma=x_1 \\ \alpha+\beta=x_2 \\ \alpha=x_3 \end{cases}$ obţinem $\alpha=x_3,\ \beta=x_2-x_3,\ \gamma=x_1-x_3$.

Prin urmare expresia formei pătratice f este

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{pmatrix} x_3 & x_2-x_3 & x_1-x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2-x_3 \\ x_1-x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1+x_2-2x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2-x_3 \\ x_1-x_3 \end{pmatrix} \\ &= -2x_3^2+2x_1x_2. \end{aligned}$$

Aplicând metoda lui Gauss avem:

$$f(x)=-2x_3^2+2x_1x_2=-2y_1^2+2(y_2^2-y_3^2)$$

unde $x_3=y_1,\ x_1=y_2-y_3,\ x_2=y_2+y_3$. Rezultă că baza în care f ia forma canonică de mai sus este

$$B=\{(0,0,1),(1,1,0),(-1,1,0)\}.$$

3.2.2 Probleme propuse

3.2.7. Se consideră forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2, \quad x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2).$$

i) Să se scrie forma pătratică f asociată lui φ.

ii) Să se reducă f la o formă canonică şi să se determine baza B în care are această formă.

Răspuns. i) $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$;

ii) $f(x) = y_1^2 - 2y_2^2$, în baza $B = \{(1,0),(-1,1)\}$.

3.2.8. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, forma pătratică definită prin

$$f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3 - 2x_2^2 + x_3^2, \quad \forall x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

i) Să se determine matricea în baza canonică a polarei lui f.

ii) Să se determine o bază în care f are o formă canonică.

Răspuns. i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) $f(x) = y_1^2 + y_2^2 - 70y_3^2$, $[x]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

$B = \{(1,0,0),(2,0,1),(4,1,-8)\}$.

3.2.9. Forma pătratică $f : M_{2,1}[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$ este dată de

$$f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2, \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M_{2,1}[\mathbb{R}].$$

Să se determine expresia analitică a polarei sale.

Răspuns. $\varphi(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2x_2y_2$.

3.2.10. Se consideră forma pătratică $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2, \quad \forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Să se determine polara φ asociată formei pătratice f şi matricea acesteia în baza $B = \{(0,2),(-1,1)\}$.

Răspuns. $\varphi(x,y) = 3x_1y_1 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2, \forall x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$; $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

3.2.11. Să se determine expresia analitică a formei pătratice $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, asociate formei biliniare $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ce are în baza

$$B = \{(1,0,1),(1,-1,1),(-1,0,0)\}$$

matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Răspuns. $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$, unde $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.

3.2.12. Să se reducă la forma canonică, folosind metoda Gauss, următoarele forme pătratice:

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 - 12x_1x_3 + x_2x_3$;

ii) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x) = 9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$.

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_3$.

Răspuns. i) $f(x) = 3y_1^2 + y_2^2 - \dfrac{37}{4}y_3^2$, $[x]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

$B = \left\{(1,0,0),(2,0,1),(-6,1,-\dfrac{5}{2})\right\}$.

ii) $f(x) = 9y_1^2 + 8y_2^2 + \frac{9}{2}y_3^2$, $[x]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$,

$B = \left\{(1,0,0,0), (0,0,0,1), (0,1,0,\frac{1}{4}), (0,-1,1,0)\right\}$.

iii) $f(x) = y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{137}{8}y_3^2$, $[x]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

$B = \left\{(0,0,1), (1,0,-2), (-\frac{15}{4}, 1, \frac{9}{2})\right\}$.

3.2.13. Utilizând metoda lui Gauss să se determine expresiile canonice ale următoarelor forme pătratice, date prin matricile lor în baza canonică din $\mathbb{R}^3$:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Răspuns. i) $f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$;

$f(x) = y_1^2 - y_2^2 - 3y_3^2$, $[x]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $B = \{(1,0,0), (2,0,1), (0,1,1)\}$.

ii) $f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;

$f(x) = -y_1^2 + 4y_2^2 + \frac{63}{4}y_3^2$, $[x]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $B = \left\{(0,0,1), (1,0,-1), (\frac{3}{4}, 1, -\frac{13}{4})\right\}$

3.2.14. Fie forma biliniară $\varphi : M_{3,1}[\mathbb{R}] \times M_{3,1}[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$, care are în baza canonică din $M_{3,1}[\mathbb{R}]$ matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine forma pătratică f asociată formei φ şi să se reducă f la o formă canonică.

Capitolul 4

Spaţii vectoriale euclidiene

4.1 Spaţii euclidiene. Produs scalar, normă, distanţă, unghi

4.1.1 Probleme rezolvate

4.1.1. Să se arate că în orice spaţiu vectorial n-dimensional V, aplicaţia $h(x;y) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in V$ este un produs scalar.

Soluţie. Aplicaţia h este o formă biliniară simetrică a cărei formă pătratică asociată este pozitiv defnită. Într-adevăr, h este simetrică, deoarece

$$h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \sum_{i=1}^{n} y_ix_i = h(y,x)$$

şi pozitiv definită pentru că

$$h(x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0,\ \forall x \in V,$$

şi evident $h(x,x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$.

Liniaritatea în raport cu cele două argumente se verifică imediat.

4.1.2. Fie $\mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f - \text{continuă pe } [a,b]\}$ spaţiul liniar al funcţiilor reale continue pe $[a,b]$ şi aplicaţia $\langle\, , \rangle : \mathcal{C}[a,b] \times \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$, definită prin egalitatea

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad \forall x \in [a,b].$$

Să se demonstreze că aplicaţia $\langle\, , \rangle$ este un produs scalar.

Soluţie. Se verifică axiomele produsului scalar. Pentru $f \in \mathcal{C}[a,b]$ este evident că putem scrie

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)dx \geq 0, \quad \forall f \neq 0.$$

Să arătăm că dacă $\langle f, f\rangle = 0$, atunci $f = 0$. Admitem prin absurd că $f \neq 0$, deci există $x_0 \in (a,b)$ încât $f(x_0) \neq 0$ (de exemplu presupunem $f(x_0) > 0$). Atunci, deoarece f este continuă pe $[a,b]$ (conform principiului inerţiei), va exista o vecinătate $V = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \in \mathcal{V}(x_0), \varepsilon > 0$ astfel ca $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in V$. În acest sens rezultă că

$$0 = \int_a^b f^2(x)dx = \int_a^{x_0-\varepsilon} f^2(x)dx + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f^2(x)dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f^2(x)dx =$$
$$= \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f^2(x)dx > 0$$

ceea ce este absurd. Prin urmare $f(x) = 0$ pentru orice $x \in (a,b)$. Dacă $x_0 = a$ sau $x_0 = b$, la fel rezultă că $f = 0$, deci $f(x) = 0$, pentru orice $x \in [a,b]$.

Reciproc, dacă $f = 0$, atunci $\langle 0, 0\rangle = \int_a^b 0^2 dx = 0$, deci prima axiomă a produsului scalar este verificată. Axioma a doua a produsului scalar se verifică fără dificultate. Pentru a demonstra axioma a treia vom considera $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ arbitrare. Atunci se constată fără dificultate că

$$\langle \alpha f, g\rangle = \int_a^b [(\alpha f)(x)]\, g(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)g(x)dx = \alpha \langle f, g\rangle.$$

Ultima axiomă se obţine considerând $f, g, h \in \mathcal{C}[a,b]$; avem

$$\langle f + g, h\rangle = \int_a^b [(f+g)(x)]\, h(x)dx = \int_a^b [f(x) + g(x)]\, h(x)dx =$$
$$= \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle.$$

4.1.3. Se consideră $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ aplicaţia definită prin:

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_3 + x_3y_2.$$

Să se arate că $< \cdot, \cdot >$ determină pe $\mathbb{R}^3$ o structură de spaţiu euclidian. Să se determine valorile pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $u = (3, 1, \alpha)$, $v = (-6, 5, \alpha)$ să fie ortogonali.

Soluţie. Arătăm că aplicaţia $< \cdot, \cdot >$ este un produs scalar. Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Avem:

$$\begin{aligned} < x, y > &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_3 + x_3y_2 \\ &= y_1x_1 + y_2x_2 + y_2x_3 + 2y_3x_3 + y_3x_2 =< y, x >. \end{aligned}$$

Pentru biliniaritatea aplicaţiei va fi suficient să demonstrăm liniaritatea în raport cu una din componente, adică pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi orice $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ avem:

$$\begin{aligned} <\alpha x + \beta y, z> &= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_3 \\ &+ 2(\alpha x_3 + \beta y_3)z_3 + (\alpha x_3 + \beta y_3)z_2 \\ &= \alpha(x_1z_1 + x_2z_2 + x_2z_3 + 2x_3z_3 + x_3z_2) \\ &+ \beta(y_1z_1 + y_2z_2 + y_2z_3 + 2y_3z_3 + y_3z_2) \\ &= \alpha < x, z > + \beta < y, z > . \end{aligned}$$

Forma pătratică va fi definită prin

$$\begin{aligned} < x, x > &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 > 0,\ \forall x = (x_1, x_2, x_3) \neq 0. \end{aligned}$$

De asemenea avem $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$. Astfel rezultă că forma pătratică este pozitiv definită. Prin urmare am obţinut că $< \cdot, \cdot >$ determină pe $\mathbb{R}^3$ o structură de spaţiu euclidian.

Vectorii $u = (3, 1, \alpha)$ şi $v = (-6, 5, \alpha)$ sunt ortogonali dacă $< u, v >= 0$. Punând această condiţie rezultă $2\alpha^2 + 6\alpha - 13 = 0$, deci $\alpha_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \pm\sqrt{35}}{2}$.

4.1.4. Este forma biliniară $< \cdot, \cdot >$ definită pe $\mathbb{R}_1[X]$, având în baza canonică matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, un produs scalar pe $\mathbb{R}_1[X]$?

Soluţie. Deoarece $A = A^t$ rezultă că matricea A este simetrică, deci forma biliniară este simetrică. Forma pătratică asociate formei biliniare are expresia:

$$\begin{aligned} < aX + b, aX + b > &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= a^2 + 4ab + 5b^2 = (a + 2b)^2 + b^2 \end{aligned}$$

deci e pozitiv definită. Prin urmare forma biliniară $< \cdot, \cdot >$ este un produs scalar pe $\mathbb{R}_1[X]$.

4.1.5. Fie forma biliniară $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, a cărei matrice în raport cu baza canonică $B_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$ este $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$.

i) Să se arate că această formă biliniară induce pe $\mathbb{R}^2$ o structură de spaţiu euclidian;

ii) Să se precizeze subspaţiul vectorial ortogonal pe vectorul $v = (-2, 1)$ în raport cu structura euclidiană precizată.

Soluţie. i) Deoarece $A = A^t$ rezultă că A este o matrice simetrică, deci $< \cdot, \cdot >$ este o formă biliniară simetrică. Construim expresia analitică a formei biliniare date:

$$\begin{aligned} < (x_1, x_2), (y_1, y_2) > &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 + 11x_2y_2. \end{aligned}$$

Forma pătratică are expresia analitică

$$f(x) =< (x_1, x_2), (x_1, x_2) >= x_1^2 + 6x_1x_2 + 11x_2^2 = (x_1 + 3x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0.$$

De asemenea cum $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$, rezultă că f este pozitiv definită, deci aplicaţia $< \cdot, \cdot >$ este un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$.

ii) Subspaţiul vectorial ortogonal pe vectorul $v = (-2, 1)$ în raport cu structura euclidiană de mai sus este:

$$\begin{aligned} S &= \{a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 | < a, v >= 0\} = \{a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 | a_1 + 5a_2 = 0\} \\ &= \{\alpha(-5, 1) | \alpha \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

4.1.6. Fie $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ mulţimea numerelor complexe înzestrată cu o structură de spaţiu vectorial real faţă de operaţiile de adunare a două numere complexe şi de înmulţire a unui număr complex cu un număr real. Arătaţi că aplicaţia $\|\cdot\| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

este o normă pe spaţiul liniar $(\mathbb{C}/\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Soluţie. Se verifică prin calcul direct axiomele normei.

N_1. $\|z\| = 0 \Longleftrightarrow |z| = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 0$

$\Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0 \Longleftrightarrow z = 0.$

N_2. $\|\alpha z\| = |\alpha z| = |\alpha|\,|z| = |\alpha|\,\|z\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}.$

N_3. $\|z_1 + z_2\| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = \|z_1\| + \|z_2\|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

4.1.7. Vectorii $x, y \in \mathbb{R}^p$ se numesc ortogonali şi notăm $x \perp y$ dacă $< x, y >= 0$. Să se arate că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) $x \perp y$

ii) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

iii) $\|x - y\| = \|x + y\|$

iv) $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluţie. i) $\Longrightarrow$ ii). Presupunem că $x \perp y$, deci $< x, y >= 0$. Atunci din $\|x - y\|^2 =< x - y, x - y >=< x, x > -2 < x, y > + < y, y >= \|x\|^2 + \|y\|^2$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Presupunem că $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Din identitatea paralelogramului deducem că

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x - y\|^2$$

de unde rezultă $\|x - y\| = \|x + y\|$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Presupunem că $\|x - y\| = \|x + y\|$. Ridicând la pătrat avem $\|x\|^2 - 2 < x, y > + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2$, adică $< x, y >= 0$, deci $x \perp y$.

În continuare demonstrăm i) $\Longleftrightarrow$ iv).

i) $\Longrightarrow$ iv) Presupunem $x \perp y$, deci $< x, y >= 0$. Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ avem :

$$\|x + \alpha y\|^2 =< x + \alpha y, x + \alpha y >= \|x\|^2 + 2\alpha < x, y > + \alpha^2 \|y\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 + \alpha^2 \|y\|^2 \geq \|x\|^2.$$

iv) $\Longrightarrow$ i) Fie $x, y \in \mathbb{R}^p$ cu proprietatea $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Atunci $\|x + \alpha y\|^2 \geq \|x\|^2$ şi deci $\alpha^2 \|y\|^2 + 2\alpha < x, y > \geq 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

De aici rezultă $y = 0$ sau $(< x, y >)^2 \leq 0$ ceea ce implică $x \perp y$.

4.1.8. Fie $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ spaţiul vectorial real al aplicaţiilor liniare (continue) $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Să se demonstreze că dacă $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ atunci există $\lambda > 0$ astfel ca

$$\|Tx\| \leq \lambda \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p.$$

Soluţie. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, $T = (T_1, T_2, ..., T_q)$ unde $T_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ oricare ar fi $i = \overline{1, q}$. Dacă T este aplicaţia liniară identic nulă, atunci

$$0 = \|Tx\| \leq \lambda \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p, \quad \forall \lambda > 0.$$

Presupunem că T nu este aplicaţia identic nulă. Atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, conform definiţiei normei, avem

$$\|T(x)\| = \|(T_1(x), T_2(x), ..., T_q(x))\| = \sqrt{T_1^2(x) + T_2^2(x) + ... + T_q^2(x)}.$$

Conform teoremei de reprezentare a aplicaţiilor liniare, pentru fiecare T_i, $i = \overline{1, q}$ există $u_i \in \mathbb{R}^p$ astfel ca $T_i(x) = \langle x, u_i \rangle$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^p$. Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz putem scrie

$$\|T(x)\| = \sqrt{\langle x,u_1\rangle^2 + \langle x,u_2\rangle^2 + ... + \langle x,u_q\rangle^2} \le$$

$$\le \sqrt{\|x\|^2\|u_1\|^2 + \|x\|^2\|u_2\|^2 + ... + \|x\|^2\|u_q\|^2} =$$

$$= \|x\| \sqrt{\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + ... + \|u_q\|^2}.$$

Dacă notăm $\lambda = \sqrt{\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + ... + \|u_q\|^2} > 0$, cum T nu este identic nulă, rezultă că cel puţin o componentă nu este identic nulă, deci cel puţin unul din vectorii $u_1, u_2, ..., u_q$ este nenul şi atunci $\lambda > 0$. Rezultă astfel că pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, are loc relaţia din enunţ.

4.1.9. Fie $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ liniară. Să se arate că

i) $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|F(x)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|F(x)\| = \sup\limits_{x\ne 0} \dfrac{\|F(x)\|}{\|x\|}$;

ii) În cazul particular $p = q = 2$, $F(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ să se arate că $\|F\| = 1$.

Soluţie. Deoarece pentru o aplicaţie liniară $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ avem

$$\|F\| = \inf\{M > 0 : \|F(x)\| \le M\|x\|, \forall\, x \in \mathbb{R}^p\}$$

rezultă că

$$\|F(x)\| \le \|F\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p.$$

i) Din inegalitatea de mai sus avem:

$$\sup_{\|x\|=1} \|F(x)\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|F(x)\| \le \|F\|.$$

Fie $m = \sup\limits_{\|x\|=1} \|F(x)\|$. Atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ avem că

$$\left\| F\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \le m \iff \frac{\|F(x)\|}{\|x\|} < m \ (*) \tag{4.1}$$

de unde rezultă $\|F(x)\| \le m\|x\|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^p$.

Din definiţia lui $\|F\|$ rezultă că $\|F\| \le m$ şi prin urmare se obţine că

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} \|F(x)\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|F(x)\|.$$

Trecând la supremum în $(*)$ avem

$$\sup_{x\ne 0} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|} \le \sup_{\|x\|=1} \|F(x)\|.$$

Deoarece avem în mod evident şi inegalitatea inversă rezultă că

$$\|F\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|F(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|F(x)\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|}.$$

ii) Pentru $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ avem $\|F(x)\| = \|x\|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$. Utilizând **i)** se obţine

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} \|F(x)\| = 1.$$

4.1.10. Fie X un spaţiu vectorial real, $\|\cdot\|$ o normă pe X şi $x, y \in X$ cu proprietatea $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Să se demomstreze că

$$\|ax + by\| = a\|x\| + b\|y\|.$$

Soluţie. Presupunem $0 \le a \le b$. Atunci folosind proprietăţile normei avem: $\|ax + by\| \le \|ax\| + \|by\| = a\|x\| + b\|y\|$, $\forall\, x, y \in X$.

Prin urmare are loc inegalitatea

$$\|ax + by\| \le a\|x\| + b\|y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Pe de altă parte ştim că are loc

$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Atunci, conform relaţiei de mai sus avem

$$\begin{aligned} \|ax+by\| &= \|b(x+y)-(b-a)x\| \geq \big|\|b(x+y)\| - \|(b-a)x\|\big| \\ &= |b\|x+y\| - (b-a)\|x\|| = |b\|x\| + b\|y\| - b\|x\| + a\|x\|| \\ &= a\|x\| + b\|y\| \end{aligned}$$

şi prin urmare are loc ingalitatea

$$\|ax+by\| \geq a\|x\| + b\|y\|, \quad \forall x,y \in X.$$

4.1.11. Se dau vectorii $\overline{v}_1 = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}, \overline{v}_2 = -2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$. Să se calculeze:

i) Lungimile vectorilor $\overline{v}_1, \overline{v}_2$;

ii) Unghiul dintre vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2$;

iii) Proiecţia vectorului $\overline{v}_1$ pe direcţia lui $\overline{v}_2$;

iv) Aria paralelogramului construit pe suportul vectorilor $\overline{v}_1, \overline{v}_2$.

Soluţie. i) Lungimea (sau modulul, sau norma) unui vector $\overline{v} = x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, se calculează cu formula

$$\|\overline{v}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{4.2}$$

Aşadar, utilizând (4.2) se obţin lungimile vectorilor

$\|\overline{v}_1\| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$, respectiv $\|\overline{v}_2\| = \sqrt{(-2)^2+1^2+2^2} = 3$.

ii) Fie θ unghiul format de cei doi vectori. Folosind formula pentru calculul unghiului dintre doi vectori $\overline{v}_1, \overline{v}_2$:

$$\cos\theta = \frac{<\overline{v}_1, \overline{v}_2>}{\|\overline{v}_1\|\|\overline{v}_2\|}, \tag{4.3}$$

se obţine $\cos\theta = \dfrac{<\overline{v}_1, \overline{v}_2>}{\|\overline{v}_1\|\|\overline{v}_2\|} = \dfrac{1\cdot(-2)+2\cdot1+1\cdot2}{\sqrt{6}\cdot3} = \dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

Prin urmare, $\theta = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

iii) Aplicând formula proiecţiei vectorului $\overline{v}_1$ pe direcţia lui $\overline{v}_2$

$$pr_{\overline{v}_2}\overline{v}_1 = \frac{\langle\overline{v}_1, \overline{v}_2\rangle}{\|\overline{v}_2\|}, \tag{4.4}$$

se obţine $pr_{\overline{v}_2}\overline{v}_1 = \dfrac{\langle\overline{v}_1, \overline{v}_2\rangle}{\|\overline{v}_2\|} = \dfrac{1\cdot(-2)+2\cdot1+1\cdot2}{3} = \dfrac{2}{3}$.

iv) Pentru calculul ariei unui paralelogram construit cu doi vectori $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ se utilizează formula

$$Aria = \|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\| = \|\overline{v}_1\| \cdot \|\overline{v}_2\| \sin(\widehat{\overline{v}_1, \overline{v}_2}). \tag{4.5}$$

Se calculează produsul vectorial $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 5\overline{k}$ şi se obţine aria paralelogramului conform formulei (4.5),

$$Aria = \sqrt{3^2+(-4)^2+5^2} = 5\sqrt{2}.$$

4.1.12. Se dau vectorii $u = (1,-2,3)$, $v = (0,3,2) \in \mathbb{R}^3$. Să se calculeze:

i) Unghiul dintre vectorii u şi v;

ii) Înălţimea paralelogramului construit pe suporturile vectorilor u şi v corespunzătoare bazei de vector u.

Soluţie. i) Folosind formulele pentru calculul unghiului, (4.3), se obţine:

$$\cos\theta = \frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|} = 0, \text{ deci } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

ii) Se calculează produsul vectorial al vectorilor $\overline{u}$ şi v, $\overline{v}\times\overline{u} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 13\overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$ şi exprimând aria paralelogramului în două moduri

$$Aria = \|\overline{v} \times \overline{u}\| = h_{\overline{u}} \cdot \|\overline{u}\|,$$

se obţine înălţimea paralelogramului $h_{\overline{u}} = \dfrac{\|\overline{v}\times\overline{u}\|}{\|\overline{u}\|} = \dfrac{\sqrt{182}}{\sqrt{14}} = \sqrt{13}$.

4.1.13. Se dau punctele $A(2,2,1)$ şi $B(4,1,3)$. Se cere:

i) Lungimea vectorului $\overline{AB}$;

ii) Să se determine un vector $\overline{v}$ conţinut în planul xOy astfel încât

$$\|\overline{v}\| = \left\|\overline{AB}\right\| \text{ şi } \overline{v}\perp\overline{AB}.$$

Soluţie. i) Se determină componentele vectorului

$$\overline{AB} = (x_B - x_A)\overline{i} + (y_B - y_A)\overline{j} + (z_B - z_A)\overline{k} = 2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$$

şi utilizând formula (4.2) se determină lungimea vectorului

$$\left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3.$$

ii) Fie $\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} \subset xOy$. Din $\|\overline{v}\| = \left\|\overline{AB}\right\|$ rezultă $x^2 + y^2 = 9$ iar din $\overline{v}\perp\overline{AB}$ se obţine $2x - y = 0$. Aşdar, coordonatele vectorului $\overline{v}$ sunt soluţia sistemului $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$. Prin urmare, se obţine $\overline{v} = \pm\dfrac{3\sqrt{5}}{5}(\overline{i} + 2\overline{j})$.

4.1.14. Să se descompună vectorul $\overline{v} = \overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$ după direcţiile vectorilor: $\overline{v}_1 = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{v}_2 = -2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{v}_3 = \overline{j} - \overline{k}$.

Soluţie. Din $\overline{v} = \alpha\overline{v}_1 + \beta\overline{v}_2 + \gamma\overline{v}_3$, rezultă

$$\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k} = \alpha\left(\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}\right) + \beta\left(-2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}\right) + \gamma\left(\overline{j} - \overline{k}\right),$$

echivalentă cu $\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k} = (\alpha - 2\beta)\overline{i} + (2\alpha + \beta + \gamma)\overline{j} + (\alpha - 2\beta - \gamma)\overline{j}$.

Prin identificare se obţine sistemul $\begin{cases} \alpha - 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \alpha - 2\beta - \gamma = -4 \end{cases}$, cu soluţia $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $\gamma = 5$.

Aşadar, $\overline{v}$ se descompune astfel $\overline{v} = -\overline{v}_1 + -\overline{v}_2 + 5\overline{v}_3$.

4.1.15. Să se determine unghiul format de vectorii $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ ştiind că vectorul $\overline{u}+2\overline{v}$ este perpendicular pe vectorul $\overline{u}-2\overline{v}$ şi vectorul $2\overline{u}-\overline{v}$ este perpendicular pe vectorul $\overline{u}+\overline{v}$.

Soluţie. Utilizând condiţiile de perpendicularitate $\langle\overline{u} + 2\overline{v}, \overline{u} - 2\overline{v}\rangle = 0$, $\langle 2\overline{u} - \overline{v}, \overline{u} + \overline{v}\rangle = 0$ şi proprietăţile produsului scalar, rezultă

$$\begin{cases} 2\|\overline{u}\|^2 + \langle\overline{u},\overline{v}\rangle - \|\overline{v}\|^2 = 0 \\ \|\overline{u}\|^2 - 4\|\overline{v}\|^2 = 0 \end{cases}, \text{ echivalent cu } \begin{cases} \langle\overline{u},\overline{v}\rangle = \|\overline{v}\|^2 - 2\|\overline{u}\|^2 \\ \|\overline{u}\| = 2\|\overline{v}\| \end{cases}.$$

Din relaţiile de mai sus şi folosind formula pentru calculul unghiului dintre doi vectori (4.3), se obţine $\cos\theta = \dfrac{<\overline{u},\overline{v}>}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} = \dfrac{\|\overline{v}\|^2 - 2\|\overline{u}\|^2}{2\|\overline{v}\|^2} = -\dfrac{7}{2}$.

4.1.16. Se dau vectorii $\overline{v}_1 = \overline{a} + 3\overline{b}, \overline{v}_2 = \overline{a} - 2\overline{b}$, cu $\|\overline{a}\| = 6, \left\|\overline{b}\right\| = 4$, şi $\theta = \widehat{(\overline{a},\overline{b})} = \dfrac{\pi}{6}$. Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\overline{v}_1, \overline{v}_2$, precum şi aria paralelogramului construit pe vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2$.

Soluţie. Se calculează produsul scalar

$$\langle\overline{v}_1,\overline{v}_2\rangle = \left\langle\overline{a} + 3\overline{b}, \overline{a} - 2\overline{b}\right\rangle = \langle\overline{a},\overline{a}\rangle - 2\left\langle\overline{a},\overline{b}\right\rangle + 3\left\langle\overline{b},\overline{a}\right\rangle - 6\left\langle\overline{b},\overline{b}\right\rangle = \|\overline{a}\|^2 + \left\langle\overline{a},\overline{b}\right\rangle - 6\left\|\overline{b}\right\|^2.$$

Folosind formula (4.3), pentru calculul unghiului dintre doi vectori, se calculează produsul scalar

$$\left\langle\overline{a},\overline{b}\right\rangle = \|\overline{a}\|\cdot\left\|\overline{b}\right\|\cos\widehat{(\overline{a},\overline{b})} = 24\cos\frac{\pi}{6} = 12\sqrt{3}.$$

Aşadar, $\langle\overline{v}_1,\overline{v}_2\rangle = 36 + 12\sqrt{3} - 96 = 12\sqrt{3} - 60 = 12(\sqrt{3} - 5)$.

Utilizând proprietăţile produsului vectorial, se calculează

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \left(\overline{a} + 3\overline{b}\right) \times \left(\overline{a} - 2\overline{b}\right) = \overline{a}\times\overline{a} - 2\overline{a}\times\overline{b} + 3\overline{b}\times\overline{a} - 6\overline{b}\times\overline{b}.$$

Deoarece $\overline{a}\times\overline{a} = \overline{b}\times\overline{b} = 0$ şi $-\overline{a}\times\overline{b} = \overline{b}\times\overline{a}$, se obţine $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = 5\overline{b}\times\overline{a}$.

Folosind formula (4.5) pentru calcul ariei, se obţine

$$Aria = \|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\| = 5\left\|\overline{b} \times \overline{a}\right\| = 5\left\|\overline{b}\right\| \cdot \|\overline{a}\| \sin\theta = 120 \sin\frac{\pi}{6} = 60, \text{ unităţi de arie.}$$

4.1.17. Să se determine volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{v}_1 = \overline{a} + 3\overline{b} + \overline{c}, \overline{v}_2 = \overline{a} - 2\overline{b} - \overline{c}, \overline{v}_3 = -\overline{b} + \overline{c}$ cu $\|\overline{a}\| = 2, \left\|\overline{b}\right\| = 3, \|\overline{c}\| = 2$, $\theta = \widehat{(\overline{a}, \overline{b})} = \frac{\pi}{6}$ şi $\varphi = \widehat{(\overline{b} \times \overline{a}, \overline{c})} = \frac{\pi}{3}$.

Soluţie. Volumul paralelipipedului având drept muchii vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$, este egal cu modulul produsului scalar a celor trei vectori şi se calculează cu formula

$$V_{paralelipiped} = \left|\langle \overline{v}_1 \times \overline{v}_2, \overline{v}_3 \rangle\right|. \tag{4.6}$$

Utilizând proprietăţile produsului scalar, produsului vectorial şi a produsului mixt, se calculează produsul vectorial

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \left(\overline{a} + 3\overline{b} + \overline{c}\right) \times \left(\overline{a} - 2\overline{b} - \overline{c}\right) = 5\overline{b} \times \overline{a} + 2\overline{c} \times \overline{a},$$

respectiv produsul mixt

$$\begin{aligned}
\langle \overline{v}_1 \times \overline{v}_2, \overline{v}_3 \rangle &= \left\langle 5\overline{b} \times \overline{a} + 2\overline{c} \times \overline{a}, -\overline{b} + \overline{c} \right\rangle \\
&= -5\left\langle \overline{b} \times \overline{a}, \overline{b} \right\rangle + 5\left\langle \overline{b} \times \overline{a}, \overline{c} \right\rangle - 2\left\langle \overline{c} \times \overline{a}, \overline{b} \right\rangle + 2\left\langle \overline{c} \times \overline{a}, \overline{c} \right\rangle \\
&= 7\left\langle \overline{b} \times \overline{a}, \overline{c} \right\rangle = 7\left\|\overline{b} \times \overline{a}\right\| \cdot \|\overline{c}\| \cos\varphi = \\
&= 7\left\|\overline{b}\right\| \cdot \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{c}\| \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi = 21.
\end{aligned}$$

Aşadar, volumul paralelipipedului având drept muchii vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$, este

$$V_{paralelipiped} = 21.$$

4.1.18. Se dau punctele $A(4, -2, 2)$, $B(3, 1, 1)$, $C(4, 2, 0)$ şi $D(0, 0, 9)$. Să se determine lungimea înălţimii din D.

Soluţie. Pentru determinarea înălţimii h_D se foloseşte formula

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} h_D \cdot Aria_{ABC}. \tag{4.7}$$

Volumul tetraedrului este egal cu $\frac{1}{6}$ din volumul paralelipipedului având drept muchii vectorii $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$

$$V_{paralelipiped} = \left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right|.$$

Aşadar, volumul tetraedrului este egal cu $\frac{1}{6}$ din modulul produsului mixt $\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right|. \tag{4.8}$$

Cum $\overline{AB} = -\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{AC} = 4\overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{AD} = -4\overline{i} + 2\overline{j} + 7\overline{k}$, rezultă produsul mixt $\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -24$, şi prin urmare volumul tetraedrului este $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$.

Pentru calcul ariei triunghiului ABC se utilizează formula

$$Aria_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB} \times \overline{AC}\right\|. \tag{4.9}$$

Se calculează norma produsului vectorial $\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2\overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k}$, $\left\|\overline{AB} \times \overline{AC}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{6}$, şi prin urmare aria triunghiului ABC este $Aria_{ABC} = \sqrt{6}$.

Folosind formula (4.7), lungimea înălţimii h_D este

$$h_D = \frac{3V_{ABCD}}{Aria_{ABC}} = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$

4.1.19. Fie punctele $A(1,2,-1)$, $B(1,0,3)$, $C(2,1,2)$ şi $D(2,3,4)$. Să se calculeze :

i) Aria triunghiului ΔABC şi lungimea înălţimii h_a din A.

ii) Lungimea medianei din A a triunghiului ΔABC

iii) Volumul tetraedrului $ABCD$ şi lungimea înălţimii din D.

Soluţie. i) Pentru calculul ariei se foloseşte formula (4.9).

Se calculează vectorii $\overline{AB} = -2\overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{AC} = \overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{BC} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$,

produsul vectorial $\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$,

normele $\left\|\overline{BC}\right\| = \sqrt{3}$, $\left\|\overline{AB} \times \overline{AC}\right\| = 3$ şi se obţine $Aria_{ABC} = \frac{3}{2}$.

Din $Aria_{ABC} = \frac{\left\|\overline{BC}\right\| \cdot h_a}{2} = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB} \times \overline{AC}\right\|$ rezultă

$$h_a = \frac{\left\|\overline{AB} \times \overline{AC}\right\|}{\left\|\overline{BC}\right\|} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

ii) Fie AM mediana din A şi M mijlocul segmentului BC, atunci $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3}{2}$, $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1}{2}$, $z_M = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{5}{2}$ şi lungimea medianei este $\left\|\overline{AM}\right\| = \frac{\sqrt{59}}{2}$.

iii) Pentru calculul volumului se foloseşte formula, (4.8)

$$V_{ABCD} = \frac{\left|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})\right|}{6} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}.$$

Din $V_{ABCD} = \frac{1}{3}h_D \cdot Aria_{ABC}$ rezultă $h_D = \frac{3V_{ABCD}}{Aria_{ABC}} = \frac{4}{3}$.

4.1.2 Probleme propuse

4.1.20. Fie $\mathbb{R}-$ spaţiul liniar $\mathbb{R}^2$ şi funcţiile:

i) $<\cdot,\cdot>: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $<x,y>= 5x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 6x_2y_2$;

ii) $<\cdot,\cdot>: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $<x,y>= 2x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$;

unde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

iii) $<\cdot,\cdot>: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $<x,y>= x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2$.

iv) $<\cdot,\cdot>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $<x,y>= 5x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3$.

Precizaţi care dintre aceste funcţii sunt produse scalare.

Răspuns. i)da; ii) nu; iii) nu; iv) da.

4.1.21. Pe $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se consideră următoarelele aplicaţie:

$$<x,y>= 2x_1y_1 + x_2y_3 + 3x_3y_3 + x_3y_2, \forall x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

i) Să se arate că această aplicaţie determină pe $\mathbb{R}^3$ o structură de spaţiu euclidian.

ii) Să se detrmine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât, vectorii $v = (1,1,-2)$, $u = (\alpha, -2\alpha, 0)$ să fie ortogonali.

Răspuns. i) Se verifică axiomele produsului scalar.

ii) Din condiţia $<v,u>= 0$ se obţine $\alpha = 0$.

4.1.22. Fie aplicaţia $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Demonstraţi că aplicaţia $\|\cdot\|$ este o normă pe $\mathbb{R}^n$.

4.1.23. Demonstraţi că aplicaţia $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ definită prin $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$, $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ nu este o normă generată de un produs scalar.

Indicaţie. Se arată că norma astfel definită nu verifică identitatea paralelogramului.

4.1.24. Fie $\mathcal{C}^1[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f,\ f' \text{ continue pe } [a,b]\}$. Să se arate că funcţia $\|\cdot\| : \mathcal{C}^1[a,b] \to \mathbb{R}$ definită de egalitatea $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} \{|f(x)|, |f'(x)|\}$, este o normă pe spaţiul liniar al funcţiilor continue cu derivata continuă.

4.1.25. Se consideră forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}$ dată prin matricea sa A în baza canonică din $\mathbb{R}_1[X]$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

i) Să se arate că φ este un produs scalar pe $\mathbb{R}_1[X]$;

ii) Să se determine unghiul dintre $f = X+1$, $g = X-1$.

Răspuns. ii) $\theta = \pi - \arccos \dfrac{2\sqrt{15}}{15}$.

4.1.26. Fie subspaţiul vectorial

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Să se determine complementul său ortogonal $U^\perp$ în spaţiul vectorial euclidian E_3.

Răspuns. $U^\perp = \{\alpha(-2,1,5) | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

4.1.27. Să se descompună vectorul $\overline{v} = -2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ după direcţiile vectorilor: $\overline{v}_1 = 3\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{v}_2 = -2\overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{v}_3 = -\overline{i} - 2\overline{k}$.

4.1.28. Fie vectorii $\overline{u} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{v} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $\overline{w} = -3\overline{i} - \overline{j}$.

Să se calculeze:

i) Produsul scalar a vectorilor $\overline{u}$ şi $\overline{v}$.

ii) Produsul vectorial al vectorilor $\overline{u}$ şi $\overline{v}$.

iii) Produsul mixt al vectorilor $\overline{u}$, $\overline{v}$ şi $\overline{w}$.

4.1.29. Să se calculeze

i) lungimea vectorului $\overline{u} = 9\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{k}$;

ii) unghiul α dintre vectorii $\overline{u} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$ şi $\overline{v} = \overline{i} + 5\overline{j}$.

Răspuns. i) $\|\overline{u}\| = 11$, ii) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

4.1.30. Să se arate că vectorii $\overline{u} = 2\overline{i} - 6\overline{j}$, $\overline{v} = \overline{i} + 7\overline{j}$, $\overline{w} = -3\overline{i} - \overline{j}$ formează laturile unui triunghi şi să se determine unghiurile acestui triunghi.

Răspuns. $\overline{u} + \overline{v} + \overline{w} = 0$, $A = \dfrac{\pi}{2}$, $B = \arccos \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $C = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

4.1.31. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\overline{v}_1 = 2\overline{a} + \overline{b}$ şi $\overline{v}_2 = \overline{a} - 3\overline{b}$, ştiind că $\|\overline{a}\| = 2$, $\|\overline{b}\| = 3$ şi $\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right) = 45°$.

4.1.32. Să se determine lungimea înălţimilor triunghiului ABC şi aria acestuia, dacă se dau:

i) Vârfurile sale $A(1,1,2)$, $B(2,2,1)$, $C(1,2,1)$;

ii) $\overline{AB} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$ şi $\overline{AC} = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$.

4.1.33. Să se determine volumul tetraedrului de vârfuri $A(1,1,0)$, $B(0,2,-1)$, $C(1,-1,2)$ şi $D(1,2,1)$ precum şi înălţimea acestuia coborâtă din vârful D.

4.1.34. Fie punctele $A(1,2,0)$, $B(1,0,3)$, $C(0,0,2)$ şi$D(1,3,2)$. Să se calculeze :

i) Aria triunghiului $\triangle ABC$ şi lungimea înălţimii h_a din A.

ii) Lungimea medianei din A a triunghiului $\triangle ABC$.

iii) Volumul tetraedrului $ABCD$ şi lungimea înălţimi din D.

4.1.33. Se dau vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ cu $\|\overline{a}\| = 1$, $\|\overline{b}\| = 2$, $\|\overline{c}\| = 1$ iar $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \dfrac{\pi}{4}$, $(\widehat{\overline{b},\overline{c}}) = \dfrac{\pi}{2}$, $(\widehat{\overline{c},\overline{a}}) = \dfrac{\pi}{4}$. Să se calculeze ariile paralelogramelor construite pe câte doi vectori.

4.2 Baze ortonormate

4.2.1 Probleme rezolvate

4.2.1. Fie

$$B=\left\{v_1=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),v_2=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),v_3=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}\subset\mathbb{R}^3.$$

i) Să se studieze dacă B este o bază ortonormată a spaţiului euclidian E_3.

ii) Să se scrie matricea de trecere de la baza canonică la baza B şi să se verifice $T^tT=I_3$.

iii) Să se determine coordonatele vectorului $v=(-1,1,0)$ relativ la baza B prin două metode.

Soluţie. i) Vectorii bazei $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ verifică condiţiile:

$$<v_1,v_2>=0,\quad\left(<\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)>=\sqrt{\frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{4}{9}}=0\right)$$
$$<v_1,v_3>=0,\quad\left(<\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)>=\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}}=0\right)$$
$$<v_2,v_3>=0,\quad\left(<\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)>=\sqrt{\frac{2}{9}-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=0\right)$$

şi $\|v_1\|=\|v_1\|=\|v_3\|=1$, deci B este o bază ortonormată.

ii) Matricea de trecere de la baza canonică la baza B este

$$T_{B_cB}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&-2\\-2&2&1\end{pmatrix}.$$

Avem

$$T_{B_cB}T^t_{B_cB}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&-2\\-2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&2\\2&-2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=I_3.$$

iii) *Metoda 1)* Fie (α,β,γ) coordonatele lui v în baza B. Avem:

$$(-1,1,0)=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3,$$

adică

$$(-1,1,0)=\alpha\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)+\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right).$$

Se obţine sistemul

$$\begin{cases}2\alpha+\beta+2\gamma=-3\\ \alpha+2\beta-2\gamma=3\\ -2\alpha+2\beta+\gamma=0\end{cases},$$

cu soluţia $\alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$, $\gamma=-\frac{4}{3}$.

Metoda 2) Coordonatele lui v în baza B se pot obţine şi direct, folosind formula

$$[v]_B=T^{-1}_{B_cB}[v]_{B_c}.$$

Din ii) rezultă imediat că

$$T^{-1}_{B_cB}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&2\\2&-2&1\end{pmatrix}$$

deci

$$[v]_B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}.$$

4.2.2. Se consideră baza $B_1 = \{(1,1),(-1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ şi $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2. Să se ortonormeze în spaţiul euclidian E_2 baza B_2.

Soluţie. Fie v_1, v_2 vectorii bazei B_2. Din matricea de trecere A se obţin imediat

$$v_1 = 2(1,1) + 0 \cdot (-1,0) = (2,2),$$

respectiv

$$v_2 = 1 \cdot (1,1) + (-1)(-1,0) = (2,1).$$

Prin urmare $B_2 = \{v_1 = (2,2), v_2 = (2,1)\}$. Folosind procedeul de ornormare Gramm-Schmidt construim mai întâi o baza ortogonală $B' = \{e_1, e_2\}$, unde

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1 = (2,2) \\ e_2 &= v_2 + \lambda e_1 = (2,1) + \lambda(2,2) = (2+2\lambda, 1+2\lambda). \end{aligned}$$

Punând condiţia ca e_1 şi e_2 să fie ortogonali, adică $< e_1, e_2 >= 0$ rezultă $\lambda = -\frac{3}{4}$, deci

$$B' = \left\{ e_1 = (2,2), e_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Pentru a obţine baza ortonormată calculăm norma vectorilor e_1, respectiv e_2:

$$\|e_1\| = \sqrt{< e_1, e_1 >} = 2\sqrt{2}, \quad \|e_2\| = \sqrt{< e_2, e_2 >} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Astfel baza ortonormată căutată este

$$B'' = \left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|} \right\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

4.2.3. În spaţiul euclidian E_3 se consideră subspaţiul vectorial

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

i) Să se determine o bază B, ortonormată în P;

ii) Să se scrie complementul ortogonal $P^\perp$ al lui P şi să se găsească o bază B_1 ortonormată în $P^\perp$.

Soluţie. i) Deoarece $x_1 = x_2 - 2x_3$ rezultă

$$P = \{x_2(1,1,1) + x_3(-2,0,1) | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

O bază a lui P este, de exemplu,

$$B' = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (-2,0,1)\}.$$

Ortonormăm această bază în E_3. Folosind procedeul de ortonormare Gramm-Schmidt obţinem mai întâi o bază ortogonală formată din vectorii $\{u_1, u_2\}$ daţi de:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \lambda u_1 \end{aligned}$$

unde $\lambda = \dfrac{< u_1, v_2 >}{< u_1, u_1 >} = \dfrac{-2}{2} = -1$. Astfel, se obţine $u_2 = v_2 + u_1 = (-1,1,1)$. Calculăm normele celor doi vectori:

$$\|u_1\| = \sqrt{< u_1, u_1 >} = \sqrt{2}; \quad \|u_2\| = \sqrt{< u_2, u_2 >} = \sqrt{3}.$$

Prin urmare, o bază ortonormată a lui P este

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

ii)

$$\begin{aligned} P^\perp &= \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 | < x, y >= 0, \forall x \in P\} \\ &= \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 | < v_1, y >= 0, < v_2, y >= 0\}. \end{aligned}$$

Obţinem următorul sistem liniar nedeterminat $\begin{cases} y_1 + y_2 = 0 \\ -2y_1 + y_3 = 0 \end{cases}$, cu soluţia $y_2 = -y_1$, $y_3 = 2y_1$, $y_1 = \alpha \in \mathbb{R}$. Astfel complementul ortogonal al lui P este

$$P^\perp = \{\alpha(1, -1, 2) | \alpha \in \mathbb{R}\},$$

iar o bază a sa este $B'' = \{(1, -1, 2)\}$. Ortonormând această bază avem

$$B_1 = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}.$$

4.2.4. Utilizând procedeul lui Gramm-Schmidt, să se ortonormeze în E_3 baza

$$B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3,$$

unde

i) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$;

ii) $v_1 = (2, 1, 2)$, $v_2 = (3, 3, 0)$, $v_3 = (1, -1, -5)$;

iii) $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (-2, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, -1)$.

Soluţie. Fie u_1, u_2, u_3 vectorii bazei ortogonale obţinuţi prin procedeul Gramm-Schmidt:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \lambda_1 u_1 \\ u_3 &= v_3 - \lambda_2 u_1 - \lambda_3 u_2, \end{aligned}$$

cu

$$\lambda_1 = \frac{< v_2, u_1 >}{< u_1, u_1 >}, \; \lambda_2 = \frac{< v_3, u_1 >}{< u_1, u_1 >}, \; \lambda_3 = \frac{< v_3, u_2 >}{< u_2, u_2 >}.$$

Atunci baza ortonormată este

$$B' = \left\{\frac{u_1}{||u_1||}, \frac{u_2}{||u_2||}, \frac{u_3}{||u_3||}\right\}.$$

Astfel obţinem:

i)

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = (1, 0, 0) \\ u_2 &= v_2 - \lambda_1 u_1 = (0, 1, -1) \\ u_3 &= v_3 - \lambda_2 u_1 - \lambda_3 u_2 = (1, 1, 1) - (1, 0, 0) = (0, 1, 1), \end{aligned}$$

deoarece

$$\lambda_1 = \frac{< v_2, u_1 >}{< u_1, u_1 >} = 1, \; \lambda_2 = \frac{< v_3, u_1 >}{< u_1, u_1 >} = 1, \; \lambda_3 = \frac{< v_3, u_2 >}{< u_2, u_2 >} = 0.$$

Cum

$$||u_1|| = 1, \; ||u_2|| = \sqrt{2}, \; ||u_3|| = \sqrt{2},$$

se obţine baza ortonormată

$$B' = \left\{(1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

ii) Analog, avem:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = (2, 1, 2) \\ u_2 &= v_2 - \lambda_1 u_1 = (1, 2, -2) \\ u_3 &= v_3 - \lambda_2 u_1 - \lambda_3 u_2 = (1, -1, -5) + (2, 1, 2) - (1, 2, -2) = (2, -2, -1), \end{aligned}$$

deoarece

$$\lambda_1 = \frac{< v_2, u_1 >}{< u_1, u_1 >} = 1, \; \lambda_2 = \frac{< v_3, u_1 >}{< u_1, u_1 >} = -1, \; \lambda_3 = \frac{< v_3, u_2 >}{< u_2, u_2 >} = 1.$$

Cum

$$||u_1|| = 3, \; ||u_2|| = 3, \; ||u_3|| = 3,$$

rezultă baza ortonormată

$$B' = \left\{\frac{1}{3}(2, 1, 2), \frac{1}{3}(1, 2, -2), \frac{1}{3}(2, -2, -1)\right\}.$$

iii) Din procedeul Gramm-Schmidt rezultă

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = (1,0,1) \\ u_2 &= v_2 - \lambda_1 u_1 = (-1,1,1) \\ u_3 &= v_3 - \lambda_2 u_1 - \lambda_3 u_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

deoarece

$$\lambda_1 = \frac{< v_2, u_1 >}{< u_1, u_1 >} = -1,\ \lambda_2 = \frac{< v_3, u_1 >}{< u_1, u_1 >} = 0,\ \lambda_3 = \frac{< v_3, u_2 >}{< u_2, u_2 >} = -\frac{1}{3}.$$

Cum

$$\|u_1\| = \sqrt{2},\ \|u_2\| = \sqrt{3},\ \|u_3\| = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

se obţine baza ortonormată

$$B' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\}.$$

4.2.5. Se consideră forma biliniară $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$< a_1X + b_1, a_2X + b_2 >= a_1a_2 - a_1b_2 - a_2b_1 + 3b_1b_2.$$

Se cere:

i) Să se demonstreze că $< \cdot, \cdot >$ este un produs scalar definit pe $\mathbb{R}_1[X]$.

ii) Se consideră $p(X) = -X + 1$. Să se arate că mulţimea

$$P = \{q(X) \in \mathbb{R}_1[X] | < p(X), q(X) >= 0\}$$

este subspaţiu vectorial şi găsiţi o bază a sa.

iii) Pornind de la baza $B_1 = \{-X, X-1\}$ construiţi o bază ortonormată prin procedeul Gramm-Schmidt.

Soluţie. i) Forma biliniară $< \cdot, \cdot >$ este simetrică, deoarece matricea sa $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}_1[X]$ este simetrică. Forma pătratică ataşată formei biliniare este

$$f(aX+b) =< aX+b, aX+b >= a^2 - 2ab + 3b^2,$$

de unde rezultă că forma canonică a formei pătratice este

$$f(aX+b) = (a-b)^2 + 2b^2 \geq 0.$$

De asemenea, avem

$$f(aX+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă că $a = b = 0$ deci forma pătratică este pozitiv definită. Prin urmare $< \cdot, \cdot >$ este un produs scalar definit pe $\mathbb{R}_1[X]$.

ii) Fie $q = aX + b \in P$. Atunci avem $< -X+1, aX+b >= 0$ deci $-a + b - a + 3b = 0$, adică $a = 2b$. Prin urmare mulţimea P este

$$P = \{b(2X+1) | b \in \mathbb{R}\}.$$

De aici rezultă că P este subspaţiu vectorial, fiind generat de sistemul $B = \{2X+1\}$. În plus, B este sistem liniar independent, fiind format dintr-un singur vector nenul. Deci B este o bază a lui P.

iii) Folosind procedeul Gramm-Schmidt, determinăm o bază orogonală $B_1' = \{u_1, u_2\}$ pornind de la vectorii bazei B_1.

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \lambda_1 u_1, \end{aligned}$$

unde $\lambda_1 = \dfrac{< v_2, u_1 >}{< u_1, u_1 >} = -\dfrac{1}{3}$. Rezultă că baza ortogonală este

$$B_1' = \{u_1 = -X, u_2 = \frac{2}{3}X - 1\}.$$

Deoarece $\|u_1\| = 1$, $\|u_2\| = \dfrac{\sqrt{43}}{3}$ obţinem baza ortonormată

$$B_1'' = \left\{-X, \frac{2\sqrt{43}X - 3\sqrt{43}}{43}\right\}.$$

4.2.2 Probleme propuse

4.2.6. Să se arate că vectorii $v_1 = \frac{1}{2}(3,1,3)$, $v_2 = -\frac{1}{2}(1,-3,3)$ sunt ortogonali în E_3 şi apoi determinaţi baza ortonormată corespunzătoare celor doi vectori.

Răspuns. Se arată că $< v_1, v_2 >= 0$. Baza ortonormată corespunzătoare celor doi vectori este $B = \left\{\dfrac{v_1}{\|v_1\|}, \dfrac{v_2}{\|v_2\|}\right\}$, unde $\|v_1\| = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$, $\|v_2\| = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

4.2.7. Fie $B = \{(1,1,-1),(1,-1,0),(1,1,2)\}$ o bază a lui $\mathbb{R}^3$. Să se arate că B este o bază ortogonală a lui $\mathbb{R}^3$, iar apoi să se ortonormeze în E_3 această bază.

4.2.8. Folosind procedeul de ortonormare Gramm-Schmidt, să se ortonormeze în E_3, următoarele baze:

i) $B_1 = \{(1,-2,0),(0,-2,1),(2,1,2)\}$;

ii) $B_2 = \{(1,0,1),(0,-1,2),(1,0,0)\}$.

Răspuns. i) $B_1' = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0), \dfrac{1}{3\sqrt{5}}(5,-2,-4), \dfrac{1}{3}(2,1,2)\right\}$;

ii) $B_2' = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1), \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)\right\}$.

4.2.9. Se consideră baza $B_1 = \{(-1,1),(1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ şi matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2: $T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

i) Să se determine baza B_2.

ii) Să se ortonormeze în E_2 baza B_2.

Răspuns. i) $B_2 = \{v_1 = (0,1), v_2 = (-3,2)\}$.

ii) $B_2' = \{(0,1),(-1,0)\}$.

4.2.10. În spaţiul euclidian E_3 se consideră subspaţiul vectorial

$$P = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | 3x_1 + x_2 - x_3 = 0\}.$$

i) Să se determine o bază ortonormată în P.

ii) Să se scrie $P^\perp$ şi să se determine o bază B' ortonormată în $P^\perp$.

Răspuns. i) P pate fi scris sub forma

$$P = \{x_1(1,-3,0) + x_3(0,1,1) | x_1, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

deci o bază a lui P este $B = \{(1,-3,0),(0,1,1)\}$. Folosind procedeul Gramm-Schmidt obţinem baza ortonormată

$$B' = \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1,-3,0), \frac{1}{\sqrt{347}}(3,13,13)\right\}.$$

ii) $P^\perp = \{\alpha(3,1,-1) | \alpha \in \mathbb{R}\}$; iar o bază ortonormată în $P^\perp$ este

$$B'' = \left\{\frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,-1)\right\}.$$

4.2.11. Se consideră forma biliniară $< \cdot,\cdot >: M_{2,1}[\mathbb{R}] \times M_{2,1}[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$ definită prin $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2$, oricare ar fi $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in M_{2,1}[\mathbb{R}]$. Se cere:

i) Să se arate că aplicaţia biliniară definită mai sus este un produs scalar pe $M_{2,1}[\mathbb{R}]$ şi apoi determinaţi unghiul dintre vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ cu ajutorul produsului scalar definit mai sus.

ii) Construiţi baza ortonormată pornind de la baza $\{v_1, v_2\}$.

Răspuns. i) Fie θ unghiul dintre vectorii v_1 şi v_2. Atunci

$$\theta = \arccos\frac{<v_1, v_2>}{\|v_1\|\|v_2\|} = \frac{5}{26}.$$

ii) Baza ortonormată este

$$B' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

4.2.12. Se consideră forma biliniară $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ care are matricea de forma $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ în baza canonică.

i) Să se determine α astfel încât $(\mathbb{R}^3, g)$ să aibă o structură de spaţiu vectorial euclidian.

ii) Pentru $\alpha = 2$, $\overline{v} = (1, 2, 3)$, $\overline{w} = (1, -1, 1)$ să se determine $\|\overline{v}\|$, $\|\overline{w}\|$, $pr_{\overline{w}}\overline{v}$.

Răspuns. i)$\alpha \neq 1$; ii) $\|\overline{v}\| = \sqrt{14}$, $\|\overline{w}\| = \sqrt{6}$, $pr_{\overline{w}}\overline{v} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Capitolul 5

Dreapta şi planul în spaţiu

5.1 Dreapta şi planul în spaţiu

5.1.1 Probleme rezolvate

5.1.1. Se dau punctele $A(3, -1, 3)$, $B(2, 1, -1)$ şi dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad d_2 : \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{2}.$$

Să se scrie:

i) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei AB;

ii) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei d, ce trece prin A şi este paralelă cu dreapta d_1;

iii) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei d, ce trece prin B şi este paralelă cu dreapta d_2.

Soluţie. i) Din ecuaţia dreptei determinată de două puncte $A(x_A, y_A, z_A)$ şi $B(x_B, y_B, z_B)$

$$AB : \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \tag{5.1}$$

rezultă ecuaţiile carteziene ale dreptei AB

$$AB : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}$$

iar din egalarea acestor rapoarte cu t, rezultă ecuaţiile parametrice ale dreptei AB

$$AB : \begin{cases} x = -t+3 \\ y = 2t-1 \\ z = -4t+3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ii) Dreapta d_1 fiind determinată de intersecţia a două plane are direcţia dată de produsul vectorial al normalelor la cele două plane, adică

$$\overline{d}_1 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \overline{i} + 7\overline{j} - 5\overline{k}.$$

Dreapta d fiind paralelă cu dreapta d_1 are aceeaşi direcţie cu direcţia dreptei d_1, adică $\overline{d} = \overline{d}_1 = (1, 7, -5)$.

Din ecuaţia dreptei determinată de un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ şi o direcţie $\overline{v} = (l, m, n)$

$$\frac{x-x_A}{l} = \frac{y-y_A}{m} = \frac{z-z_A}{n} \tag{5.2}$$

rezultă ecuaţiile carteziene ale dreptei d

$$d : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-3}{-5}$$

şi ecuaţiile parametrice ale dreptei d

$$d : \begin{cases} x = t+3 \\ y = 7t-1 \\ z = -5t+3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

iii) Din ecuaţia dreptei determinată de un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ şi o direcţie $\overline{v} = (l, m, n)$, rezultă direcţia dreptei d_2, $\overline{d}_2 = (1, 0, 2)$. Dreapta d fiind paralelă cu dreapta d_2 are aceeaşi direcţie cu direcţia dreptei d_2, adică $\overline{d} = \overline{d}_2 = (1, 0, 2)$.

Aşadar, conform ecuaţiei dreptei determinată de un punct şi o direcţie, (5.2) rezultă ecuaţiile carteziene ale dreptei d

$$d : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-3}{2}$$

şi ecuaţiile parametrice ale dreptei d

$$d : \begin{cases} x = t+3 \\ y = -1 \\ z = 2t+3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.1.2. Se dau dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

i) Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei d.

ii) Să se scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei d_2.

iii) Să se studieze poziţia dreptei d_1 faţă de dreapta d_2.

Soluţie. i) Dreapta d_1 se află la intersecţia planelor $P_1 : x + 2y - z - 1 = 0$ şi $P_2 : 2x - z - 3 = 0$. Astfel, fiecare dintre cele două normale N_1, N_2 ale planelor P_1, respectiv P_2 este perpendiculară pe dreapta d_1. Deoarece d_1 este perpendiculară simultan pe N_1,respectiv N_2 rezultă că direcţia ei este produsul vectorial al direcţiilor $\overline{N}_1 = (1, 2, -1)$, $\overline{N}_2 = (2, 0, -1)$

$$\overline{d}_1 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\overline{i} - \overline{j} - 4\overline{k}.$$

Se consideră $M(0, -1, -3)$ un punct ce aparţine dreptei d_1 (se fixează una dintre coordonatele x, y, z şi se determină celelalte două din ecuaţiile dreptei).

Cunoscând un punct al dreptei şi direcţia dreptei, în conformitate cu (5.2), ecuaţiile carteziene ale dreptei d_1 sunt:

$$d_1 : \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-4}.$$

ii) În mod analog ca la i) se determină direcţia dreptei d_2

$$\overline{d}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$$

şi un punct $A(0,1,1)$ aparţinând dreptei.

Aşadar, ecuaţiile parametrice ale dreptei d_2 sunt: $\begin{cases} x = -t \\ y = t+1 \\ z = -3t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

iii) Deoarece $\frac{-2}{-1} \neq \frac{-1}{1}$, dreptele nu sunt paralele. Studiem dacă cele două drepte sunt concurente. Aşadar, rezolvăm sistemul format cu ecuaţiile celor două drepte $\begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ 2x-z-3=0 \\ x+y-1=0 \\ 2x-y-z+2=0 \end{cases}$

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ matricea, respectiv matricea extinsă a sistemului neomogen.

Deoarece $rang(A) = 3 \neq rang(\overline{A}) = 4$ rezultă că sistemul este incompatibil. În concluzie dreptele nu sunt concurente, deci ele nu sunt coplanare.

5.1.3. Să se scrie ecuaţia dreptei (d) ce trece prin punctul de intersecţie al dreptelor

$(d_1) : x = t,\ y = -t,\ z = 2t-2$

$(d_2) : x = s+1,\ y = -s-1,\ z = s$

şi este perpendiculară pe planul $2x + y - 3z - 3 = 0$.

Soluţie. Punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de intersecţie al dreptelor (d_1) şi (d_2) este dat de soluţia sistemului format din ecuaţiile celor două drepte:

$$\begin{cases} t = s+1 \\ -t = -s-1 \\ 2t-2 = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 0 \end{cases}$$

Deci M_0 are coordonatele $(1,-1,0)$. Cum dreapta (d) este perpendiculară pe planul $2x + y - 3z - 3 = 0$, rezultă că direcţia dreptei (d) este dată de vectorul $\overline{v} = 2\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$ şi prin urmare ecuaţia dreptei căutate este

$$(d) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}.$$

5.1.4. Să se studieze coliniaritatea punctelor M, N, P şi N, P, Q unde $M(1,2,-3)$, $N(4,-2,-1)$, $P(-2,6,-5)$, $Q(1,1,-6)$.

Soluţie. Ecuaţia dreptei determinată de punctele M şi N este

$$(MN) : \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+3}{2}.$$

Deoarece coordonatele punctului P verifică ecuaţia dreptei (MN) rezultă ca M, N, P sunt puncte coliniare.

Ecuaţia dreptei determinată de punctele N şi P este aceeaşi cu cea determinată de de M şi N, iar coordonatele punctului Q nu verifică ecuaţia dreptei (MN) rezultă ca N, P, Q nu sunt puncte coliniare.

5.1.5. Să se găsească ecuaţiile canonice ale dreptei de intersecţie a planelor $(P_1) : 2x - 3y - z + 1 = 0$ şi $(P_2) : x - y + 2z + 3 = 0$.

Soluţie. Se rezolvă sistemul format din ecuaţiile celor două plane:

$$\begin{cases} 2x-3y-z+1=0 \\ x-y+2z+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=t-1 \\ x-y=-2t-3 \end{cases}, z=t.$$

Astfel, se obţine reprezentarea parametrică $x=-7t-8$, $y=-5t-5$, $z=t$, $t\in\mathbb{R}$. Prin eliminarea parametrului t se obţin ecuaţiile canonice ale dreptei de intersecţie dintre cele două plane, anume

$$\frac{x+8}{-7}=\frac{y+5}{-5}=\frac{z}{1}.$$

5.1.6. Se dau punctele $A(3,-1,0)$, $B(-2,1,-1)$, $C(1,1,-1)$ şi dreapta $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$.
Să se scrie:

i) Ecuaţia carteziană a planului P ce conţine punctele A, B şi C;

ii) Ecuaţia carteziană a planului P ce conţine punctul A şi este perpendicular pe dreapta d;

iii) Ecuaţia carteziană a planului P care conţine dreaptele d şi AB.

Soluţie. i) Din ecuaţia carteziană a planului determinat de trei puncte $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$ şi $C(x_C,y_C,z_C)$

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0, \tag{5.3}$$

rezultă ecuaţia carteziană a planului P

$$P:\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ -5 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

echivalentă cu ecuaţia

$$P: y+2z+1=0.$$

ii) Planul P fiind perpendicular pe dreapta d rezultă că normala la plan este paralelă cu dreapta d, adică normala la plan şi dreapta d au aceeaşi direcţie, $\overline{N}_P=\overline{d}=\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$.

Din ecuaţia carteziană a planului determinat de un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi o normală $\overline{N}=A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k}$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{5.4}$$

rezultă ecuaţia carteziană a planului P

$$P:(x-3)-(y+1)+2z=0$$

echivalentă cu ecuaţia

$$P: x-y+2z-4=0.$$

iii) Utilizând formula ce stabileşte direcţia unei drepte determinată de două puncte $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$

$$\overline{AB}=(x_B-x_A)\overline{i}+(y_B-y_A)\overline{j}+(z_B-z_A)\overline{k} \tag{5.5}$$

se determină direcţia dreptei AB,

$$\overline{AB}=(-2-3)\overline{i}+(1-(-1))\overline{j}+(-1-0)\overline{k}=-5\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}.$$

Din ecuaţia carteziană a planului determinat de un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi două direcţii $\overline{v}_1=l_1\overline{i}+m_1\overline{j}+n_1\overline{k}, \overline{v}_2=l_2\overline{i}+m_2\overline{j}+n_2\overline{k}$,

$$P:\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \tag{5.6}$$

rezultă ecuaţia carteziană a planului P determinat de $A(3,-1,0)$, $\overline{d}=\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$ şi $\overline{AB}=-5\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$

$$P: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

echivalentă cu ecuaţia

$$P: x+3y+z=0.$$

5.1.7. Să se scrie:

i) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei ce trece prin punctul $M(-1,1,-2)$ şi este perpendiculară pe planul

$$P: x+2y-3z+4=0.$$

ii) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei d, care se sprijină pe dreptele $d_1: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ şi $d_2: \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ şi este paralelă cu planele P şi $Q: -x+y-2z+2=0$.

Soluţie. i) Dreapta d fiind perpendiculară pe planul P are aceeaşi direcţie cu direcţia normalei la plan, $\overline{d}=\overline{N}_P=(1,2,-3)$.

Aşadar, conform ecuaţiei dreptei determinată de un punct şi o direcţie, (5.2) rezultă ecuaţiile carteziene ale dreptei d

$$d: \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-3}$$

şi ecuaţiile parametrice ale dreptei d

$$d: \begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+1 \\ z=-3t-2 \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

ii) Fie $A(u-1,-u-1,3u+2)$, $u\in\mathbb{R}$ un punct arbitrar al dreptei d_1 şi $B(-v,2v-2,v+1)$, $v\in\mathbb{R}$ un punct arbitrar al dreptei d_2.

Fie d dreapta ce trece prin cele două puncte şi care se sprijină pe d_1 şi d_2,

$$d: \frac{x+v}{u+v-1}=\frac{y-2v+2}{-u-2v+1}=\frac{z-v-1}{3u-v+1}.$$

Deoarece dreapta d este paralelă cu planul P, înseamnă ca ea este perpendiculară pe normala la plan, $d\perp N_P$, adică direcţiile lor sunt ortogonale, iar din condiţia de ortogonalitate a doi vectori $(u+v-1,-u-2v+1,3u-v+1)\cdot(1,2,-3)=0$ rezultă $u=-\dfrac{1}{5}$.

În mod analog, deoarece $\overline{d}\perp\overline{N}_Q$ din condiţia de ortogonalitate $(u+v-1,-u-2v+1,3u-v+1)\cdot(-1,1,-2)=0$, rezultă $v=-8u=\dfrac{8}{5}$.

Aşadar, ecuaţiile carteziene ale dreptei d sunt

$$d: x+\frac{8}{5}=\frac{y-\frac{6}{5}}{-5}=\frac{z-\frac{13}{5}}{-3},$$

iar cele parametrice sunt

$$d: \begin{cases} x=t-\dfrac{8}{5} \\ y=-5t+\dfrac{6}{5} \\ z=-3t+\dfrac{13}{5} \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

5.1.8. i)Să se scrie ecuaţia planului Q ce trece prin intersecţia planelor $P_1: x-y+2z-1=0$ şi $P_2: 3x+y+2z-5=0$ şi conţine punctul $A(-1,0,2)$.

ii) Să se scrie ecuaţia planului R ce trece prin intersecţia planelor P_1 şi P_2 şi este perpendicular pe planul $P: x+2y-z-1=0$.

Soluţie. i) Intersecţia dintre cele două plane este dreapta de ecuaţii:

$$d: \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ 3x+y+2z-5=0 \end{cases}.$$

Planul Q este planul ce conţine dreapta d şi punctul $A(-1,0,2)$.

Ecuaţia fascicolului de plane ce trece prin dreapta $d = P_1 \cap P_2$ este:

$$x - y + 2z - 1 + \lambda(3x + y + 2z - 5) = 0$$

Din ecuaţia fascicolului de plane determinat de dreapta d se obţine planul variabil

$$Q_\lambda : (1+3\lambda)x + (-1+\lambda)y + (2+2\lambda)z - 1 - 5\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se determină $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $A(-1,0,2)$ să aparţină planului Q, adică A să verifice ecuaţia planului Q_λ. Înlocuind coordonatele lui A în ecuaţia planului Q_λ se obţine ecuaţia

$$(1+3\lambda)(-1) + (2+2\lambda)\cdot 2 - 1 - 5\lambda = 0,$$

cu soluţia $\lambda = \frac{1}{2}$.

Aşadar, planul căutat are ecuaţia carteziană $Q_{\frac{1}{2}} : 5x - y + 6z - 7 = 0$.

ii) Se determină $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât Q_λ să fie perpendicular pe planul P, adică vectorii lor normali $\overline{N}_{Q_\lambda} = (1+3\lambda, -1+\lambda, 2+2\lambda)$ şi $\overline{N}_P = (1,2,-1)$ să fie ortogonali. Din condiţia de ortogonalitate, adică produsul scalar al celor doi vectori egal cu zero, $\overline{(N_{Q_\lambda}}, \overline{N}_P) = 0$, rezultă

$$(1+3\lambda) + 2(-1+\lambda) - (2+2\lambda) = 0,$$

adică $\lambda = 1$.

Aşadar, planul căutat are ecuaţia carteziană $Q_1 : 2x + 2z - 3 = 0$.

5.1.9. i) Să se găsească coordonatele proiecţiei ortogonale ale punctului $M_1(-1,-1,2)$ pe planul $P : x + y + 3z + 7 = 0$.

ii) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $M_1(-1,-1,2)$ faţă de planul $P : x + y + 3z + 7 = 0$.

Soluţie. i) Proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe planul P este punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, care se găseşte la intersecţia planului P cu normala dusă prin M_1 la planul P. Aşadar, coordonatele punctului M_0 sunt soluţia sistemului determinat de ecuaţia normalei la planul P în punctul M_1 şi ecuaţia planului P. Din ecuaţia planului rezultă direcţia normalei la plan, $\overline{N}_P = (1,1,3)$. În conformitate cu (5.2) rezultă că ecuaţia normalei în punctul M_1 pe planul P este

$$N_P : \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}.$$

Deci, coordonatele punctului $M_0 = pr_P M_1$ sunt soluţia sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{3} \\ x + y + 3z + 7 = 0 \end{cases}.$$

Pentru rezolvarea sistemului se scriu ecuaţiile dreptei sub formă parametrică, $x = t-1, y = t-1, z = 3t+2$, se introduc în ecuaţia planului $x+y+3z+7=0$, se obţine ecuaţia $t - 1 + t - 1 + 3(3t+2) + 7 = 0$, cu soluţia $t = -1$. Soluţia sistemului este $t = -1, x = -2, y = -2, z = -1$.

Aşadar, proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe planul P este punctul $M_0(-2,-2,-1)$.

ii) Dacă $M_2(x_2, y_2, z_2)$ este simetricului punctului $M_1(x_1, y_1, z_1)$ faţă de planul P, atunci punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, care este proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe planul P, este mijlocul segmentului M_1M_2 şi, deci, au loc relaţiile

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1+z_2}{2}. \tag{5.7}$$

Deoarece proiecţia ortogonală a punctului $M_1(-1,-1,2)$ pe planul P este punctul $M_0(-2,-2,-1)$, atunci în conformitate cu relaţiile (5.7) se determină coordonatele punctului M_2 din relaţiile

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_0 - x_1 = 2(-2) - (-1) = -3, \\ y_2 &= 2y_0 - y_1 = 2(-2) - (-1) = -3, \\ z_2 &= 2z_0 - z_1 = 2(-1) - 2 = -4. \end{aligned}$$

Deci, simetricul punctului $M_1(-1,-1,2)$ faţă de planul P este $M_2(-3,-3,-4)$.

5.1.10. Se consideră punctele $A(-3,-2,5)$, $B(-1,0,3)$, dreapta $(d):\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$ şi planul $(P): 2x-3y+z-2=0$. Să se determine ecuaţia planului care trece prin mijlocul segmentului $[AB]$, este paralel cu dreapta (d) şi perpendicular pe planul (P).

Soluţie. Fie M mijlocul segmentului $[AB]$. Atunci $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2},\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$, adică $M(-2,-1,4)$. Ecuaţia planului care trece prin M, este paralel cu dreapta (d) şi perpendicular pe planul (P) este

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x-y+z-9=0.$$

5.1.11. i) Să se găsească coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului $M(-1,-1,2)$ pe dreapta

$$d: x=t+4, \quad y=2t-1, \quad z=-t+1, \quad t\in\mathbb{R}$$

ii) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $M_1(-1,-1,2)$ faţă de dreapta d.

Soluţie. i) Proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe dreapta d este punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ care se găseşte la intersecţia dreptei d cu planul P, plan ce conţine punctul M_1 şi are normală dreapta d. Din ecuaţiile parametrice ale dreptei d rezultă direcţia dreptei $\overline{d}=(1,2,-1)$, deci a normalei la plan $\overline{N}_P=(1,2,-1)$. În conformitate cu (5.4) rezultă ecuaţia planului P

$$(x+1)+2(y+1)-(z-2)=0$$

echivalentă cu

$$P: x+2y-z+5=0.$$

Aşadar, coordonatele punctului M_0 sunt soluţia sistemului determinat de ecuaţia planului P şi ecuaţiile dreptei d,

$$\{M_0\}=P\cap d: \begin{cases} x+2y-z+5=0 \\ x=t+4, \quad y=2t-1, \quad z=-t+1 \end{cases}.$$

Înlocuind în ecuaţia planului P ecuaţiile parametrice ale dreptei d, se obţine ecuaţia $t+4+2(2t-1)-(-t+1)+5=0$ şi soluţia sistemului $t=-1$, $x=3$, $y=-3$, $z=2$.

Deci, proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe dreapta d este punctul $M_0(3,-3,2)$.

ii) Dacă $M_2(x_2,y_2,z_2)$ este simetricului punctului $M_1(x_1,y_1,z_1)$ faţă de dreapta d, atunci punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$, care este proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe dreapta d, este mijlocul segmentului M_1M_2, deci au loc relaţiile (5.7).

Deoarece proiecţia ortogonală a punctului $M_1(-1,-1,2)$ pe dreapta d este punctul $M_0(3,-3,2)$, atunci în conformitate cu relaţiile (5.7) se determină coordonatele punctului M_2 din relaţiile

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_0 - x_1 = 2\cdot 3 - (-1) = 7, \\ y_2 &= 2y_0 - y_1 = 2(-3) - (-1) = -5, \\ z_2 &= 2z_0 - z_1 = 2\cdot 2 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Deci, simetricul punctului $M_1(-1,-1,2)$ faţă de dreapta d este punctul $M_2(7,-5,2)$.

5.1.12. i) Să se studieze poziţia relativă a dreptei

$$d: \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$$

faţă de planul $P: 3x+y-2z-3=0$.

ii) Să se găsească ecuaţiile proiecţiei ortogonale ale dreptei d pe planul P.

Soluţie. i) Pentru a determina poziţia relativă a dreptei d faţă de planul P se rezolvă sistemul format din ecuaţiile dreptei şi ecuaţia planului:

$$d \cap P: \begin{cases} \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{3} \\ 3x+y-2z-3=0 \end{cases}.$$

Pentru rezolvarea sistemului se scriu ecuaţiile dreptei sub formă parametrică, sistemul fiind echivalent cu

$$d \cap P: \begin{cases} x=t+4, \quad y=t-1, \quad z=3t+2, \quad t\in\mathbb{R} \\ 3x+y-2z-3=0 \end{cases},$$

se introduc ecuaţiile parametrice ale dreptei în ecuaţia planului şi se obţine ecuaţia

$$3(t+4)+t-1-2(3t+2)-3=0.$$

Deoarece ultima ecuaţie are o singură soluţie, $t=2$, înseamnă că dreapta d intersectează (înţeapă) planul P într-un singur punct, $M_1(6,1,8)$.

ii) Se consideră un punct M_0 aparţinând dreptei d, astfel: pentru un t fixat din ecuaţiile parametrice ale dreptei d se determină coordonatele punctului M_0.

Aşadar, pentru $t=-1$ se obţine $M_0(3,-2,-1)$ şi se determină proiecţia ortogonală M_2 a punctului M_0 pe planul P.

Deoarece dreapta d intersectează (înţeapă) planul P în punctul M_1 şi proiecţia ortogonală a punctului $M_0 \in d$ este M_2 rezultă că proiecţia ortogonală a dreptei d pe planul P este dreapta M_1M_2.

Proiecţia ortogonală $M_2 = pr_P M_0$ se găseşte la intersecţia planului P cu normala dusă prin M_0 pe planul P. Aşadar, coordonatele punctului M_2 sunt soluţia sistemul determinat de ecuaţia normalei pe planul P în punctul M_0 şi ecuaţia planului P. Din ecuaţia planului rezultă direcţia normalei la plan, $\overline{N}_P=(3,1,-2)$. În conformitate cu (5.2) rezultă că ecuaţia normalei în punctul M_0 pe planul P este

$$N_P: \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-2}.$$

Deci, coordonatele punctului $M_2 = pr_P M_0$ sunt soluţia sistemului

$$N_P \cap P: \begin{cases} \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{-2} \\ 3x+y-2z-3=0 \end{cases}.$$

Înlocuind în ecuaţia planului P ecuaţiile parametrice ale normalei N_P, se obţine ecuaţia

$$3(3t+3)+(t-2)-2(-2t-1)-3=0$$

şi soluţia sistemului $t=-\frac{3}{7}, x=\frac{12}{7}, y=-\frac{17}{7}, z=-\frac{1}{7}$.

Deci, proiecţia ortogonală a punctului M_0 pe planul P este punctul $M_2\left(\frac{12}{7},-\frac{17}{7},-\frac{1}{7}\right)$.

Prin urmare, în conformitate cu relaţiile (5.1) se determină proiecţia ortogonală a dreptei d pe planul P,

$$M_1M_2: \frac{x-6}{10} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-8}{19}.$$

5.1.13. i) Să se studieze poziţia relativă a dreptei

$$d: \begin{cases} 3x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases}$$

faţă de planul $P: 3x-2z+3=0$.

ii) Să se găsească ecuaţiile proiecţiei ortogonale a dreptei d pe planul P.

Soluţie. i) Pentru a determina poziţia relativă a dreptei d faţă de planul P se rezolvă sistemul format din ecuaţiile dreptei şi ecuaţia planului:

$$d \cap P: \begin{cases} 3x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \\ 3x - 2z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y = -5 \\ 3x - 2z = -3 \end{cases}.$$

Deoarece determinantul sistemului, liniar şi neomogen, este zero

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

şi există un determinant principal de ordinul doi nenul, $\Delta_{princ} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$, cu determinantul caracteristic de asemenea nenul,

$$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 51,$$

rezultă că sistemul format din ecuaţiile dreptei şi ecuaţia planului este incompatibil, adică nu are nici o soluţie. Prin urmare dreapta d nu intersectează (înţeapă) planul P, adică d este paralelă cu planul P, $d \| P$.

ii) Deoarece dreapta d este paralelă cu planul P rezultă că proiecţia ortogonală a ei pe plan este o dreaptă d_1 paralelă cu d, conţinută în planul P.

Pentru determinarea ecuaţiilor dreptei $d_1 \| d$ se procedează astfel:

- se consideră un punct M_1 aparţinând dreptei d şi se determină proiecţia ortogonală M_0 a punctului M_1 pe planul P.

- se scriu ecuaţiile dreptei determinată de M_0 şi direcţia dreptei d.

Dreapta d fiind dată ca intersecţie de două plane, pentru determinarea coordonatelor unui punct oarecare de pe dreaptă se fixează una dintre cordonatele x, y, z şi se determină celelalte două din ecuaţiile dreptei. Pentru determinarea coordonatelor lui $M_1 \in d$ se fixează $x = 0$, se determină din ecuaţiile dreptei $y = 5, z = 10$, şi se obţine $M_1(0, 5, 10)$.

Proiecţia ortogonală $M_0 = pr_P M_1$ se găseşte la intersecţia planului P cu normala dusă prin M_1 pe planul P. Aşadar, coordonatele punctului M_0 sunt soluţia sistemul determinat de ecuaţia normalei pe planul P în punctul M_1 şi ecuaţia planului P. Din ecuaţia planului rezultă direcţia normalei la plan, $\overline{N}_P = (3, 0, -2)$. În conformitate cu (5.2) rezultă că ecuaţia normalei în punctul M_1 pe planul P este

$$N_P : \frac{x}{3} = \frac{y-5}{0} = \frac{z-10}{-2}.$$

Deci, coordonatele punctului $M_0 = pr_P M_1$ sunt soluţia sistemului

$$N_P \cap P: \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-5}{0} = \dfrac{z-10}{-2} \\ 3x - 2z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t, y = 5, z = -2t + 10, \quad t \in \mathbb{R} \\ 3x - 2z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Înlocuind în ecuaţia planului P ecuaţiile parametrice ale normalei N_P, se obţine ecuaţia

$$3 \cdot 3t - 2(-2t + 10) + 3 = 0$$

şi soluţia sistemului $t = \frac{17}{13}, x = \frac{51}{13}, y = 5, z = \frac{96}{13}$.

Aşadar, proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe planul P este punctul $M_0\left(\frac{51}{13}, 5, \frac{96}{13}\right)$.

Proiecţia ortogonală d_1, a dreptei d pe planul P, este dreapta ce trece prin M_0 şi este paralelă cu d, adică are aceeaşi direcţie cu d, $\overline{d}_1 = \overline{d}$.

Dreapta d fiind dată ca intersecţie de două plane, direcţia ei este dată de produsul vectorial al normalelor la cele două plane

$$\overline{d}_1 = \overline{d} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}.$$

Prin urmare, în conformitate cu relaţiile (5.2) se determină proiecţia ortogonală a dreptei d pe planul P,

$$d_1 : \frac{13x - 51}{2} = \frac{13y - 65}{4} = \frac{13z - 96}{3}.$$

5.1.2 Probleme propuse

5.1.14. Se dau punctele $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, -1)$ şi dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases} \qquad d_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Să se scrie:

i) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei AB;

ii) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei d, ce trece prin A şi este paralelă cu dreapta d_1;

iii) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei d, ce trece prin B şi este paralelă cu dreapta d_2.

5.1.15. Se dau punctele $A(1, -1, 0)$, $B(-1, 0, -1)$, $C(-1, 1, -1)$ şi dreapta

$$d : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Să se scrie:

i) Ecuaţia carteziană a planului P ce conţine punctele A, B şi C;

ii) Ecuaţia carteziană a planului P ce conţine punctul A şi este perpendicular pe dreapta d;

iii) Ecuaţia carteziană a planului P conţine dreaptele d şi AB.

5.1.16. Să se găsească ecuaţia planului determinat de dreptele

$$d_1 : \begin{cases} 2x + 3y - z - 1 = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \text{ şi } d_2 : \begin{cases} x + 5y + 4z - 3 = 0 \\ x + 2y + 2z - 1 = 0 \end{cases}.$$

5.1.17. Să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta d şi punctul A, dacă:

i) $d : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ şi $A(-1, 1, -2)$.

ii) $d : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-5}{0} = \dfrac{z-1}{-2}$ şi $A(2, -1, 1)$.

5.1.18. Să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta d şi este perpendicular pe planul P, dacă:

i) $d : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ şi $P : x + 2y - z - 1 = 0$.

ii) $d : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$ şi $P : 2x - 2y - z - 4 = 0$.

5.1.19. i) Să se găsească coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului $M(-1, 2, -2)$ pe planul $P : -2x + 2y - 3z + 1 = 0$;

ii) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $M(-1, 2, -2)$ faţă de planul $P : -2x + 2y - 3z + 1 = 0$.

5.1.20. i) Să se găsească coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului $M(-1, 0, -2)$ pe dreapta $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$;

ii) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $M(-1, 0, -2)$ faţă de dreapta $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$.

5.1.21. Să se găsească ecuaţiile proiecţiei ortogonale a dreptei d pe planul P dacă:

$$d : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \text{ şi } \quad P : -2x + y - z + 1 = 0.$$

5.1.22. i) Să se studieze poziţia relativă a dreptei

$$d : \begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

faţă de planul $P : x - 2z + 2 = 0$.

ii) Să se găsească ecuaţiile proiecţiei ortogonale a dreptei d pe planul P.

5.1.23. Să se calculeze distanţa dintre dreptele

i) $(d_1) : \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$, $(d_2) : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$;

ii) $(d_1') : \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$, $(d_2') : \frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{-5}$.

Răspuns. i) 9; ii) 13.

5.1.24. Să se calculeze coordonatele punctului M de intersecţie al dreptei $(d) : \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ cu planul $(P) : 3x + 5y - z - 2 = 0$ şi să se scrie ecuaţia planuluice trece prin $A(2, -3, 4)$ este paralel cu dreapta (d) şi perpendicular pe planul (P).

Răspuns. $M(0, 0, -2)$, $-8x + 12y + 11z + 8 = 0$.

5.1.25. Să se arate că dreapta $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ este paralelă cu planul $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.

Răspuns. $\overline{N} \cdot \overline{v} = 0$.

5.2 Probleme de distanţe şi unghiuri

5.2.1 Probleme rezolvate

5.2.1. i) Să se determine distanţa dintre punctele $A(1, -1, 2)$ şi $B(5, 1, -2)$.

ii) Să se determine distanţa de la punctul $M_0(1, -2, 4)$ la planul $P : -x + 2y - 2z + 1 = 0$.

iii) Să se determine distanţa de la punctul M_0 la dreapta AB.

Soluţie. i) Din formula distanţei dintre două puncte $A(x_A, y_A, z_A)$ şi $B(x_B, y_B, z_B)$,

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \tag{5.8}$$

rezultă

$$d(A, B) = \sqrt{(1-5)^2 + (-1-1)^2 + (2+2)^2} = 6.$$

ii) Din formula distanţei de la un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la un plan $P : Ax + By + Cz + D = 0$,

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{5.9}$$

rezultă

$$d(A, P) = \frac{|-1 + 2(-2) - 2 \cdot 4 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{6} = 2.$$

iii) Din formula distanţei de la un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la un o dreaptă d

$$d(M_0, d) = \frac{||\overline{AM}_0 \times \overline{d}||}{||\overline{d}||} \tag{5.10}$$

unde A este un punct al dreptei d, rezultă

$$d(M_0, AB) = \frac{||\overline{AM}_0 \times \overline{AB}||}{||\overline{AB}||}.$$

În conformitate cu formula (5.5) se calculează vectorii :

$\overline{AM}_0 = (1-1)\overline{i} + (-2+1)\overline{j} + (4-2)\overline{k} = 0\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$

$\overline{AB} = (5-1)\overline{i} + (1-(-1))\overline{j} + (-2-2)\overline{k} = 4\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$,

apoi produsul vectorial $\overline{AM}_0 \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 8\overline{j} + 4\overline{k}$, şi normele

$||\overline{AM}_0 \times \overline{AB}|| = \sqrt{8^2+4^2} = 4\sqrt{5}$, $||\overline{AB}|| = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = 6$.

Aşadar, distanţa de la punctul M_0 la dreapta AB este

$$d(M_0, AB) = \frac{||\overline{AM}_0 \times \overline{AB}||}{||\overline{AB}||} = \frac{4\sqrt{5}}{6} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

5.2.2. i) Să se calculeze distanţa dintre planele $P: 3x - y - 2z + 1 = 0$ şi $Q: 6x - 2y - 4z - 3 = 0$.

ii) Să se calculeze distanţa dintre dreptele paralele

$d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-6}{3}$ şi $d_2: \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-1}{8} = \dfrac{z-3}{6}$.

iii) Să se calculeze distanţa dintre dreptele necoplanare

$d_1: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{3}$ şi $d_2: \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$.

Soluţie. i) Deoarece direcţiile normalelor la cele două plane $\overline{N}_P = (3,-1,-2)$, $\overline{N}_Q = (6,-2,-4)$ sunt paralele, $\overline{N}_Q || \overline{N}_P$, rezultă că cele două plane sunt paralele. Astfel, distanţa dintre cele două planele P, Q este egală cu distanţa de la un punct oarecare al planului P la planul Q şi se calculează cu formula (5.9). Pentru determinarea coordonatelor unui punct oarecare din planul P se fixează două dintre cordonatele x, y, z şi se determină cea de-a treia coordonată din ecuaţia planului P. Pentru determinarea coordonatelor lui $M_0 \in P$ se fixează $x = 0$, $z = 0$, se determină din ecuaţia planului $y = 1$ şi se obţine $M_0(0,1,0) \in P$. În conformitate cu formula (5.9) se calculează distanţa de la punctul M_0 la planul Q

$$d(P,Q,) = d(M_0, Q) = \frac{|6\cdot 0 - 2\cdot 1 - 4\cdot 0 - 3|}{\sqrt{6^2+(-2)^2+(-4)^2}} = \frac{5}{2\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{28}.$$

ii) Deoarece cele două drepte sunt paralele înseamnă că distanţa dintre ele este egală cu distanţa de la un punct oarecare al dreptei d_2 la dreapta d_1 (sau invers) şi se calculează cu formula (5.10). Din ecuaţiile carteziene ale dreptelor d_1, d_2 se observă că $M_1(1,0,6)$ aparţine dreptei d_1 şi $M_2(-5,1,3)$ aparţine dreptei d_2.

În conformitate cu formula (5.10) se calculează distanţa de la punctul M_2 la dreapta d_1

$$d(M_2, d_1) = \frac{||\overline{M_1M_2} \times \overline{d}_1||}{||\overline{d}_1||}$$

Utilizând formula (5.5) se calculează vectorul $\overline{M_1M_2} = -6\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$.

Din ecuaţia carteziană a dreptei d_1 se deduce direcţia dreptei

$\overline{d}_1 = 2\overline{i}+4\overline{j}+3\overline{k}$ şi se calculează produsul vectorial $\overline{M_1M_2}\times\overline{d}_1 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -6 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$ $15\overline{i}+12\overline{j}-26\overline{k}$ şi normele $||\overline{M_1M_2} \times \overline{d}_1|| = \sqrt{15^2+12^2+26^2} = \sqrt{1045}$, $||\overline{d}_1|| = \sqrt{2^2+4^2+3^2} = \sqrt{29}$.

Aşadar, distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2 este egală cu distanţa de la $M_2 \in d_2$ la dreapta d_1 adică

$$d(d_1, d_2) = d(M_2, d_1) = \frac{||\overline{M_1M_2} \times \overline{d}_1||}{||\overline{d}_1||} = \frac{\sqrt{1045}}{\sqrt{29}}.$$

iii) Pentru calculul distanţei dintre două drepte d_1 şi d_2 se utilizează formula

$$d(d_1, d_2) = \frac{|(\overline{M_1M_2}; \overline{d}_1; \overline{d}_2)|}{||\overline{d}_1 \times \overline{d}_2||} \quad (5.11)$$

unde $M_1 \in d_1$ şi $M_2 \in d_2$.

Deoarece dreapta d_2 este dată ca intersecţie de două plane, direcţia ei este daterminată de produsul vectorial al normalelor la cele două plane

$$\overline{d}_2 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k},$$

iar un punct M_2 aparţinând dreptei d_2, se determină din ecuaţiile dreptei. Fixând $x = 0$ se obţine $y = 3, z = 1$ şi $M_2(0, 3, 1)$.

Din ecuaţiile carteziene ale dreptei d_1 se observă că $M_1(-1, 0, 2)$ aparţine dreptei d_1 şi direcţia dreptei este $\overline{d}_1 = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$.

Cu ajutorul formulei (5.5) se calculează $\overline{M_1M_2} = \overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$.

Acum, se poate calcula produsul mixt

$$(\overline{M_1M_2}; \overline{d_1}; \overline{d_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

produsul vectorial

$$\overline{d}_1 \times \overline{d}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k},$$

norma $\left\|\overline{d}_1 \times \overline{d}_2\right\| = \sqrt{35}$ şi distanţa dintre dreptele d_1, d_2

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|(\overline{M_1M_2}; \overline{d_1}; \overline{d_2})\right|}{\left\|\overline{d}_1 \times \overline{d}_2\right\|} = \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

5.2.3. Să se determine

i) unghiul dintre dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad d_2 \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

ii) unghiul dintre planele $P_1 : x + 2y - 2z - 1 = 0$ şi $P_2 : x + y + 1 = 0$.

iii) unghiul dintre dreapta d_1 şi planul P_2.

Soluţie. i) Unghiul dintre cele două drepte este unghiul θ format de direcţiile celor două drepte, $\theta = \widehat{(d_1, d_2)} = \widehat{(\overline{d}_1, \overline{d}_2)}$. Deoarece cele două drepte sunt determinate de intersecţia a două plane, direcţiile lor sunt date de produsul vectorial al normalelor la cele două plane

$$\overline{d}_1 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\overline{i} - 4\overline{k},\ \left\|\overline{d}_1\right\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\overline{d}_2 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3\overline{i} + 3\overline{j},\ \left\|\overline{d}_2\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Utilizând formula cu care se poate calcula unghiul format de doi vectori $\overline{v}_1, \overline{v}_2$

$$\cos\theta = \frac{(\overline{v}_1, \overline{v}_2)}{\|\overline{v}_1\| \cdot \|\overline{v}_2\|} \tag{5.12}$$

se obţine

$$\cos\theta = \frac{(\overline{d}_1, \overline{d}_2)}{\|\overline{d}_1\| \cdot \|\overline{d}_2\|} = \frac{(4, 0, -4) \cdot (-3, 3.0)}{4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{12}{24} = -\frac{1}{2},$$

de unde rezultă că unghiul dintre cele două drepte este $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

ii) Unghiul dintre cele două plane este unghiul θ format de direcţiile normalelor la cele două plane, $\theta = \widehat{(P_1, P_2)} = \widehat{(\overline{N}_{P1}, \overline{N}_{P2})}$.

Deoarece $\overline{N}_{P_1} = (1, 2, -1)$ şi $\overline{N}_{P_2} = (1, 1, 0)$ rezultă în conformitate cu (5.12)

$$\cos\theta = \frac{(\overline{N}_{P1}, \overline{N}_{P2})}{\|\overline{N}_{P1}\| \cdot \|\overline{N}_{P2}\|} = \frac{(1, 2, -1) \cdot (1, 1, 0)}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

şi unghiul dintre cele două plane este $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

iii) Unghiul dintre drepta d_1 şi planul P_2 este unghiul θ format de dreapta d_1 cu proiecţia ei pe planul P_2. Deoarece $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{(\overline{d_1}, \overline{N_{P2}})}{\|\overline{d_1}\| \cdot \|\overline{N_{P2}}\|}$ avem $\sin\theta = \frac{(4,0,-4)\cdot(1,1,0)}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ şi unghiul $\theta = \frac{\pi}{6}$.

5.2.4. Fie dreapta

$$d: \begin{cases} 3x - y - 2z + 2 = 0 \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

şi planul $P: x + y - 2z + 3 = 0$.

Se cere:

i) Să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta d şi este perpendicular pe planul P;

ii) Să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta d şi face un unghi de 60^0 cu planul P;

iii) Să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta d şi formează un unghi de 30^0 cu dreapta $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$;

iv) Să se scrie ecuaţiile simetricei dreaptei d faţă de planul P.

Soluţie. i) Din ecuaţia fascicolului de plane determinat de dreapta d

$$3x - y - 2z + 2 + \lambda(2x - y + 2z - 1) = 0$$

se obţine planul variabil

$$P_\lambda: (3+2\lambda)x - (1+\lambda)y + (-2+2\lambda)z + 2 - \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se determină $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât P_λ să fie perpendicular pe planul P, adică vectorii lor normali $\overline{N}_{P_\lambda} = (3+2\lambda, -1-\lambda, -2+2\lambda)$ şi $\overline{N}_P = (1,1,-2)$ să fie ortogonali. Din condiţia de ortogonalitate, adică produsul scalar al celor doi vectori egal cu zero, $(\overline{N}_{P_\lambda}, \overline{N}_P) = 0$, rezultă

$$(3+2\lambda)\cdot 1 + (-1-\lambda)\cdot 1 + (-2+2\lambda)\cdot(-2) = 0,$$

adică $\lambda = 2$.

Aşadar, planul căutat are ecuaţia carteziană $7x - 3y + 2z = 0$.

ii) Din ecuaţia fascicolului de plane determinat de dreapta d

$$3x - y - 2z + 2 + \lambda(2x - y + 2z - 1) = 0$$

se obţine planul variabil

$$P_\lambda: (3+2\lambda)x - (1+\lambda)y + (-2+2\lambda)z + 2 - \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se determină $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât unghiul format de planele P_λ şi P de să fie un unghi $\theta = 60^0$.Unghiul dintre cele două plane este unghiul $\theta = \frac{\pi}{3}$ format de direcţiile normalelor la cele două plane, $\theta = \widehat{(P_\lambda, P)} = \widehat{(\overline{N}_\lambda, \overline{N_P})}$.

Deoarece $\overline{N}_{P_\lambda} = (3+2\lambda, -1-\lambda, -2+2\lambda)$ şi $\overline{N}_P = (1,1,-2)$, în conformitate cu (5.12) rezultă

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{(\overline{N_{P\lambda}}, \overline{N_P})}{\|\overline{N_{P\lambda}}\| \cdot \|\overline{N_P}\|}, \text{ adică } \frac{1}{2} = \frac{(3+2\lambda, -1-\lambda, -2+2\lambda)\cdot(1,1,-2)}{\sqrt{(3+2\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 + (-2+2\lambda)^2}\cdot\sqrt{6}}$$

echivalentă cu ecuaţia

$$\frac{1}{2} = \frac{-3\lambda + 6}{\sqrt{6}\sqrt{9\lambda^2 + 6\lambda + 14}}$$

care prin ridicare la pătrat devine

$$3\lambda^2 + 30\lambda - 10 = 0,$$

cu soluţiile $\lambda_1 = \frac{-15+\sqrt{255}}{3}$ şi $\lambda_2 = \frac{-15-\sqrt{255}}{3}$, care se înlocuiesc în ecuaţia fascicolului şi se obţin două plane.

iii) Se scrie acelaşi fascicol de plane ca la punctele i), ii) şi se determină $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât unghiul format de planul variabil P_λ şi dreapta d_1 să fie un unghi $\theta = 30^0$.Unghiul dintre dreapta d_1 şi planul P_λ este unghiul θ format de dreaptă cu proiecţia ei pe plan.

Din $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{(\overline{d}_1,\overline{N}_{P\lambda})}{\|\overline{d}_1\|\cdot\|\overline{N}_{P\lambda}\|}$ şi $\overline{d}_1=(1,1,-1),\overline{N}_{P_\lambda}=(3+2\lambda,-1-\lambda,-2+2\lambda)$ se obţine $\sin\theta=\frac{(1,1,-1)\cdot(3+2\lambda,-1-\lambda,-2+2\lambda)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{9\lambda^2+6\lambda+14}}$ echivalentă cu ecuaţia

$$\frac{1}{2}=\frac{-\lambda+4}{\sqrt{3}\sqrt{9\lambda^2+6\lambda+14}}$$

care prin ridicare la pătrat devine

$$23\lambda^2+50\lambda-22=0$$

cu soluţiile λ_1şi λ_2 care se înlocuiesc în ecuaţia fascicolului şi se obţin două plane.

iv) Fie $\{M_0\}=P\cap d:\begin{cases}x+y-2z+3=0\\3x-y-2z+2=0\\2x-y+2z-1=0\end{cases}$, adică $M_0\left(-\frac{2}{3},-\frac{7}{6},\frac{7}{12}\right)$.

Deoarece $P\cap d=\{M_0\}$ rezultă că simetrica dreptei d faţă de planul P este o dreaptă d_1 care conţine punctul M_0.

Se consideră un punct $M_1\left(0,\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\in d$, $M\neq M_1$ şi se determină simetricul M_2 a lui M_1 faţă de planul P.

Fie M_3 proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe planul P. M_3 se găseşte la intersecţia planului P cu normala dusă prin M_1 la planul P. Aşadar, coordonatele punctului M_3 sunt soluţia sistemul determinat de ecuaţia normalei pe planul P în punctul M_1 şi ecuaţia planului P. Din ecuaţia planului rezultă direcţia normalei la plan, $\overline{N}_P=(1,1,-2)$. În conformitate cu (5.2) rezultă că ecuaţia normalei pe planul P în punctul M_1 este

$$N_P:\frac{x}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{1}=\frac{z-\frac{3}{4}}{-2}.$$

Deci, coordonatele punctului $M_3=pr_PM_1$ sunt soluţia sistemului

$$\begin{cases}\frac{x}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{1}=\frac{z-\frac{3}{4}}{-2}\\x+y-2z+3=0\end{cases}$$

Pentru rezolvarea sistemului se scriu ecuaţiile dreptei sub formă parametrică, $x=t,\ y=t+\frac{1}{2},\ z=-2t+\frac{3}{4}$. Se introduc ecuaţiile parametrice ale normalei în ecuaţia planului şi se obţine ecuaţia $t+t+\frac{1}{2}-2(-2t+\frac{3}{4})+3=0$, şi soluţia sistemului $t=-\frac{1}{3},x=-\frac{1}{3},\ y=\frac{5}{3},z=\frac{17}{12}$.

Aşadar, proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe planul P este punctul $M_3\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{17}{12}\right)$.

Ţinând cont că proiecţia ortogonală M_3 este mijlocul segmentului M_1M_2, atunci în conformitate cu relaţiile (5.7) se determină coordonatele punctului M_2 din relaţiile

$$\begin{aligned}x_2&=2x_3-x_1=2\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3},\\y_2&=2y_3-y_1=2\cdot\frac{5}{3}-\frac{1}{2}=\frac{17}{6},\\z_2&=2z_3-z_1=2\cdot\frac{17}{12}-\frac{3}{4}=\frac{25}{12}\end{aligned}$$

Simetricul punctului $M_1\left(0,\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ faţă de planul P este $M_2\left(-\frac{2}{3},\frac{17}{6},\frac{25}{12}\right)$, iar simetrica dreptei d faţă de planul P este dreapta d_1 determinată de punctele M_0 şi M_2

$$d_1:\frac{x+\frac{2}{3}}{0}=\frac{y+\frac{7}{6}}{4}=\frac{z-\frac{7}{12}}{\frac{3}{2}}.$$

5.2.5. Se dau dreptele

$$d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{2}\ \text{şi}\ d_2:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{1}$$

şi punctul $M(1,1,-2)$. Se cere:

i) Să se scrie ecuaţiile perpendicularei comune dreptelor d_1 şi d_2.

ii) Să se calculeze distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2;

iii) Să se determine distanţa de la M la d_2.

Soluţie. i) Fie d perpendiculara comună a celor două drepte. Deoarece $d \perp d_1$ şi $d \perp d_2$ rezultă ca direcţia perpendicularei comune este

$$\overline{d} = \overline{d}_1 \times \overline{d}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}.$$

Perpendiculara comună se găseşte la intersecţia planului P_1, determinat de $M_1(1,-2,-1) \in d_1$, de dreapta d_1 şi direcţia perpendicularei comune $\overline{d}$ cu planul P_2, determinat de $M_2(-1,2,1) \in d_2$, de dreapta d_2 şi direcţia perpendicularei comune $\overline{d}$ şi are ecuaţiile

$$d: \begin{cases} P_1: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ P_2: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow d: \begin{cases} 7x + y - 4z - 9 = 0 \\ 3x + 2y + 3z - 4 = 0 \end{cases}.$$

ii) Pentru a calcula distanţa dintre cele două drepte se utilizează formuala (5.11). Astfel, se calculează $\overline{M_1M_2} = -2\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{k}$, $||\overline{M_1M_2}|| = 2\sqrt{6}$,

$||\overline{d}_1 \times \overline{d}_2|| = \sqrt{11}$, $(\overline{M_1M_2}; \overline{d_1}; \overline{d_2}) = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12$ şi se obţine distanţa

dintre cele două, $d(d_1, d_2) = \dfrac{|(\overline{M_1M_2}; \overline{d_1}; \overline{d_2})|}{||\overline{d}_1 \times \overline{d}_2||} = \dfrac{12\sqrt{11}}{11}$.

iii) În conformitate cu formula (5.10) se calculează distanţa de la punctul M la dreapta d_1

$$d(M, d_2) = \frac{||\overline{M_2M} \times \overline{d}_2||}{||\overline{d}_2||}.$$

Pentru aceasta, utilizând formula (5.5) se calculează $\overline{M_2M} = 2\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$,

$\overline{M_2M} \times \overline{d}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $||\overline{M_2M} \times \overline{d}_2|| = \sqrt{3}$, $||\overline{d}_2|| = \sqrt{2}$ şi

se obţine, $d(M, d_2) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

5.2.6. Se dau punctele $A(-1,1,0)$, $B(0,-2,1)$. Se cere:

i) Ecuaţia dreptei ce trece prin origine şi e paralelă cu dreapta (AB);

ii) Distanţa de la punctul B la dreapta (AC) unde $C(1,2,-3)$.

Soluţie. i) Ecuaţia dreptei determinată de punctele A şi B este

$$(AB): \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{1},$$

deci vectorul direcor al dreptei (AB) este $\overline{v} = \overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$. Atunci ecuaţia dreptei ce trece prin origine şi este paralelă cu dreapta (AB) este

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}.$$

ii) Ecuaţia dreptei determinată de punctele A şi C este

$$(AC): \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-3}.$$

Ecuaţia planului care conţine pe B şi este perpendiculară pe dreapta (AC) este $(P): 2(x-0) + 1(y+2) - 3(z-1) = 0$, adică $(P): 2x + y - 3z + 5 = 0$. Fie M punctul de intersecţie dintre dreapta (AC) şi planul (P). Atunci coordanetele lui M sunt soluţia sistemului $\begin{cases} 2x+y-3z+5=0 \\ x=2t-1 \\ y=t+1 \\ z=-3t \end{cases}$. Se obţine $t=\frac{2}{7}$, deci $M\left(-\frac{3}{7},\frac{9}{7},-\frac{6}{7}\right)$.

Distanţa de la B la dreapta (AC) este egală cu distanţa de la B la M, adică

$$d(B,(AC))=d(B,M)=\sqrt{\left(-\frac{3}{7}-0\right)^2+\left(\frac{9}{7}+2\right)^2+\left(-\frac{6}{7}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{707}{7}}.$$

5.2.7. Se consideră dreptele

$$(d_1): \frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2},\quad (d_2): \begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ -x-y+z-1=0 \end{cases}$$

şi punctul $A(1,0,-1)$. Se cere:

i) Ecuaţia dreptei ce trece prin A şi e paralelă cu dreapta (d_2).

ii) Distanţa de la A la dreapta (d_1).

iii) Unghiul dintre dreptele (d_1) şi (d_2).

Soluţie. i) Vectorul director al dreptei (d_2) este

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\bar{i}+\bar{j}.$$

Ecuaţia dreptei ce trece prin A şi e paralelăcu dreapta (d_2) este

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z+1}{0}.$$

ii) Fie punctul $M(1,1,1)$ care aparţine dreptei (d_1) şi $\overline{v_1}=-\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$ vectorul director al dreptei (d_1). Avem $\overline{AM}=\bar{j}+2\bar{k}$, deci

$$\overline{AM}\times\overline{v_1}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}.$$

Atunci $\|\overline{AM}\times\overline{v_1}\|=\sqrt{36+4+1}=\sqrt{41}$, $\|\overline{v_1}\|=\sqrt{3}$ deci distanţa de la punctul A la dreapta (d_1) este

$$d(A;d_1)=\frac{\|\overline{AM}\times\overline{v_1}\|}{\|\overline{v_1}\|}=\frac{\sqrt{41}}{3}.$$

iii) Fie θ unghiul dintre dreptele (d_1) şi (d_2). Avem

$$\cos\theta=\frac{(-1)(-1)+2\cdot 1+(-2)\cdot 0}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

deci $\theta=\frac{\pi}{4}$.

5.2.2 Probleme propuse

5.2.8. i) Să se determine distanţa dintre punctele $A(2,-1,1)$ şi $B(3,1,-2)$.

ii) Să se determine distanţa de la punctul $M_0(1,2,-1)$ la planul $P: -2x+y-2z+3=0$.

5.2.9. Să se calculeze distanţa dintre planele

i) $P: x-y+2z+1=0$ şi $Q: x-2y-3z-1=0$.

ii) $P: x-3y+2z-2=0$ şi $Q: 2x-6y+4z+3=0$.

5.2.10. Să se calculeze distanţa dintre dreptele paralele

i) $d_1: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ şi $d_2: \frac{x+1}{-3}=\frac{y}{6}=\frac{z-2}{3}$.

ii) $d_1: x=t+2,\ y=3t-1,\ z=-t+3$ şi

$d_2 : x = t - 4,\ y = 3t + 1,\ z = -t - 3,\quad t \in \mathbb{R}$

5.2.11. Să se calculeze distanţa dintre dreptele

i) $d_1 : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{3}$ şi $d_2 : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$.

ii) $d_1 : \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-6}{-3} = \dfrac{z-3}{2}$ şi $d_2 : \begin{cases} 3x + 8y - 4 = 0 \\ 3x - 8y - 68 = 0 \end{cases}$.

5.2.12. Să se determine distanţa de la punctul $M_0(3, -1, 2)$ la dreapta

$$d : \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

5.2.13. Să se calculeze unghiul dintre dreptele

i) $d_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{-1}$ şi $d_2 : \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z-2}{3}$.

ii) $d_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ şi $d_2 : \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$.

5.2.14. Să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta d de ecuaţie

$$d : \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$$

care face un unghi de 45° cu planul de ecuaţie $P : x - 4y - 8z + 12 = 0$.

Capitolul 6

Sfera. Cuadrice

6.1 Sfera şi cercul în spaţiu

6.1.1 Probleme rezolvate

6.1.1. Se dau punctele $A(1, -1, 2)$ şi $B(-1, -3, 3)$ şi $P : x - 2y + 2z + 1 = 0$ un plan:

i) Să se scrie ecuaţia sferei S_1 de diametru AB.

ii) Să se scrie ecuaţia sferei S_2 cu centrul în A şi care trece prin B.

iii) Să se scrie ecuaţia sferei S_3 cu centrul în A şi tangentă la planul P.

Soluţie. Deoarece AB este diametru sferei rezultă ca centrul sferei $C(a, b, c)$ este mijlocul segmentului $\overline{AB}$, iar raza sferei R est egală cu jumătate din lungimea segmentului $\overline{AB}$, adică $R = \dfrac{\|\overline{AB}\|}{2}$.

Din $\|\overline{AB}\| = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3+1)^2 + (3-2)^2} = 3$ rezultă $R = \dfrac{3}{2}$. Mijlocul segmentului $\|\overline{AB}\|$, care este centrul sferei, se calculează cu formulele (5.7) şi se obţine $C\left(0, -2, \dfrac{5}{2}\right)$.

Din ecuaţia sferei cu centrul în $C(a,b,c)$ şi de rază R

$$S:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \tag{6.1}$$

se obţine ecuaţia sferei

$$S_1: x^2+(y+2)^2+(z-\frac{5}{2})^2=\frac{9}{4}.$$

ii) Întrucât A este centrul sferei atunci conform (6.1) ecuaţia sferei este

$$S_2:(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=R^2.$$

Cum B aparţine sferei, coordonatele lui verifică ecuaţia aşa încât rezultă $R^2=(-1-1)^2+(-3+1)^2+(3-2)^2=9$, de unde $R=3$ şi ecuaţia sferei este

$$S_2:(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$$

iii) Deoarece sfera este tangentă la planul P, înseamnă că raza sferei R este egală cu distanţa de la centrul sferei $A(1,-1,2)$ la planul P. Aşadar, cu formula (5.9) se calculează distanţa de la centrul sferei A la planul P

$$R=d(A,P)=\frac{\lfloor 1-2(-1)+2\cdot 2+1\rfloor}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{8}{3}$$

şi în conformitate cu (6.1) ecuaţia sferei cu centrul în A şi tangentă la planul P este

$$S_2:(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=\frac{64}{9}..$$

6.1.2. Să se scrie ecuaţia sferei care conţine punctele $A(1,0,0), B(0,2,0), E(0,0,-1)$ şi $D(-1,2,1)$ şi să se determine centrul şi raza sa.

Soluţie. Se pune condiţia ca punctele A, B, D, E să verifice ecuaţia generală a sferei

$$S: x^2+y^2+z^2+mx+ny+pz+q=0. \tag{6.2}$$

Din ecuaţia generală a sferei (6.2) se deduce că centrul sferei C şi raza sferei R sunt

$$C\left(-\frac{m}{2},-\frac{n}{2},-\frac{p}{2}\right),\quad R=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2+p^2-4q} \tag{6.3}$$

Din $A\in S$ rezultă ecuaţia $1+m+q=0$, $B\in S$ implică $4+2n+q=0$, din $E\in S$ rezultă ecuaţia $1-p+q=0$, din $D\in S$ implică $6-m+2n+p+q=0$.

Aşadar se obţine sistemul $\begin{cases}1+m+q=0\\4+2n+q=0\\1-p+q=0\\6-m+2n+p+q=0\end{cases}$, a cărui soluţie este $q=-2, m=1, n=-1, p=-1$.

Deci ecuaţia sferei care conţine punctele A, B, E şi D este

$$S: x^2+y^2+z^2+x-y-z-2=0.$$

Coordonatele centrului şi raza sferei se calculează cu formulele (6.3) şi se obţine $C\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ şi $R=\frac{\sqrt{11}}{2}$.

6.1.3. Să se determine poziţia planului P faţă de sfera S, dacă:

i) $P_1: x-2y-2z+4=0,\quad S_1: x^2+y^2+z^2+6x-2y-4z+5=0.$

ii) $P_2: 2x-y-2z+7=0,\ S_2: x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-2=0.$

iii) $P_3: 2x+2y+z+9=0,\quad S_3: x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0.$

Soluţie. Pentru a determina poziţia planului P faţă de sfera S se determină distanţa de la centrul sferei la planul P şi se compară cu raza sferei, R.

i) Cu formulele (6.3) se determină coordonatele centrului $C_1(-3,1,2)$ şi raza sferei $R=3$. Se calculează distanţa de la centrul C_1 la planul P_1 cu formula (5.9) şi se obţine

$$d(C_1,P_1)=\frac{|-3-2-2\cdot 2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{5}{3}.$$

Deoarece $d(C_1, P_1) < R$ rezultă că planul şi sfera se intersectează după cercul $\begin{cases} x - 2y - 2z + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 4z + 5 = 0 \end{cases}$, numit "cerc în spaţiu".

ii) În mod analog, ca la i) se determină coordonatele centrului $C_2(1, 2, -1)$ şi raza sferei $R = \sqrt{3}$. Se calculează distanţa de la centrul C_2 la planul P_2 cu formula (5.9) şi se obţine

$$d(C_2, P_2) = \frac{|2 - 2 + 2 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 3.$$

Deoarece $d(C_2, P_2) > R$ rezultă că planul şi sfera nu se intersectează, adică planul este exterior sferei.

iii) În acest caz sfera are centrul $C_3(1, 0, -2)$ şi raza $R = 3$. Distanţa de la centrul sferei C_3 la planul P_3 este

$$d(C_3, P_3) = \frac{2 - 2 + 9}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3.$$

Deoarece $d(C_3, P_3) = R$ rezultă că planul este tangent sferei.

6.1.4. Să se afle coordonatele centrului şi raza cercului de intersecţie dintre sfera

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y + 8 = 0$$

şi planul $P : 2x - y + z = 0$.

Soluţie. Cu formulele (6.3) se obţine centrul sferei $C(1, -4, 0)$ şi raza sferei $R = 3$. Distanţa de la centrul sferei C la planul P conform formulei (5.9) este

$$d(C, P) = \frac{|2 - (-4)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Centrul cercului de intersecţie dintre sferă şi plan este punctul O, care se găseşte la intersecţia planului P cu dreapta CO ce trece prin centrul sferei şi este perpendiculară pe planul P.

Deoarece dreapta CO este perpendiculară pe planul P ea are direcţia normalei la plan, adică $\overline{CO} = (2, -1, 1)$ şi ecuaţia ei, conform (5.2), este

$$CO : \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z}{1}$$

Coordonatele centrului cercului O sunt soluţia sistemului

$$CO \cap P : \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z}{1} \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}.$$

Înlocuind în ecuaţia planului P ecuaţiile parametrice ale dreptei CO se obţine ecuaţia

$$2(2t + 1) - (-t - 4) + t = 0$$

şi soluţia sistemului $t = -1, x = -1, y = -3, z = -1$.

Aşadar, centrul cercului de intersecţie dintre sferă şi plan este punctul $O(-1, -3, -1)$.

Fixând un punct M aparţinând cercului (deci şi sferei), raza cercului de intersecţie se determină folosind teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic COM cu formula

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(C, P)} \tag{6.4}$$

şi este $r = \sqrt{3}$.

6.1.5. Să se demonstreze că planul $P : 2x - 6y + 3z - 49 = 0$ este tangent sferei $S : x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$ şi să se calculeze coordonatele punctului de tangenţă.

Soluţie. Sfera are centrul $C(0, 0, 0)$ şi raza $R = 7$. Distanţa de la centrul sferei C la planul P este

$$d(C, P) = \frac{49}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2}} = 7.$$

Deoarece $d(C,P) = R$ rezultă că planul este tangent sferei. Punctul de tangenţă M este situat la intersecţia planului P cu dreapta CM, care este perpendiculară pe planul P. Deoarece $CM \perp P$ rezultă $\overline{CM} = \overline{N}_P = (2,-6,3)$ şi conform (5.2)

$$CM : \frac{x}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{3}.$$

Coordonatele punctului de tangenţă M sunt soluţia sistemului

$$CM \cap P : \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z}{3} \\ 2x - 6y + 3z - 49 = 0 \end{cases}.$$

Înlocuind în ecuaţia planului P ecuaţiile parametrice ale dreptei CM se obţine ecuaţia

$$2 \cdot 2t - 6(-6t) + 3 \cdot 3t - 49 = 0$$

şi soluţia sistemului $t = 1, x = 2,\ y = -6, z = 3$.

Aşadar punctul de tangenţă este $M(2,-6,3)$.

6.1.6. Se consideră cercul în spaţiu:

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

i) Să se determine raza cercului C.

ii) Să se scrie ecuaţia sferei ce trece prin cercul C şi prin punctul $M(0,1,2)$.

Soluţie. i) Cercul este situat la intersecţia planului $P : x + y + z + 1 = 0$ cu sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Sfera are centrul $O(0,0,0)$ şi raza $R = 1$. Distanţa de la centrul sferei O la planul P este

$$d(O,P) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Fixând un punct M aparţinând cercului (deci şi sferei), raza cercului de intersecţie se determină folosind formula (6.4)

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(O,P)} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

deci $r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

ii) Din ecuaţia fascicolului de sfere determinat de cercul C, $S + \lambda P = 0$, se obţine sfera variabilă

$$S_\lambda : x^2 + y^2 + z^2 - 1 + \lambda(x + y + z + 1) = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se determină $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât S_λ să conţină punctul M.

Din $M(0,1,2) \in S_\lambda$ rezultă ecuaţia $4 + 4\lambda = 0$ şi $\lambda = -1$.

Se înlocuieşte $\lambda = -1$ în ecuaţia fascicolului şi se obţine ecuaţia sferei ce conţine cercul C şi punctul M

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 2 = 0.$$

6.1.7. Să se scrie ecuaţia planului tangent sferei

$$S : (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 - 24 = 0$$

în punctul $M(-1,0,3)$.

Soluţie. Se scrie ecuaţia generală a sferei

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z - 10 = 0.$$

Din ecuaţia planului tangent sferei obţinută prin dedublarea ecuaţiei generale a sferei (6.2) într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + m\frac{x + x_0}{2} + n\frac{y + y_0}{2} + p\frac{z + z_0}{2} + q = 0 \qquad (6.5)$$

se obţine ecuaţia planului tangent sferei în $M(-1,0,3)$

$$P: -x+3z-3(x-1)-y+2(z+3)-10=0$$

echivalentă cu

$$P: -4x-y+5z-1=0.$$

6.1.8. Se consideră sfera S şi dreapta d având respectiv, ecuaţiile:

$$S: x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0 \qquad d: \begin{cases} x+y-3=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$$

Să se determine ecuaţiile planelor tangente la sfera S care includ dreapta d.

Soluţie. Folosind formulele (6.3) se obţine centrul sferei $C(1,0,1)$ şi raza sferei $R=1$.

Fascicolul de plane ce conţin dreapta este definit de ecuaţia:

$$P_\lambda: x+y-3+\lambda(x-2z)=0, \lambda\in\mathbb{R}$$

echivalentă cu

$$P_\lambda: (1+\lambda)x+y-2\lambda z-3=0, \lambda\in\mathbb{R}$$

Se determină $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât planul variabil P_λ să fie tangent la sfera S. Planul P_λ este tangent la sfera S dacă şi numai dacă $d(C,P_\lambda)=R$. Distanţa de la centrul sferei C la planul P_λ conform formulei (5.9) este

$$d(C,P_\lambda)=\frac{|-2-\lambda|}{\sqrt{(1+\lambda)^2+1^2+4\lambda^2}}=\frac{|2+\lambda|}{\sqrt{5\lambda^2+2\lambda+2}}.$$

Din condiţia de tangenţă, $d(C,P_\lambda)=R$, rezultă ecuaţia $2\lambda^2-\lambda-1=0$ cu soluţiile $\lambda_1=1$ şi $\lambda_2=-\frac{1}{2}$.

În concluzie cele două plane tangente la sfera S care includ dreapta d sunt

$$P_1 : 2x+y-2z-3=0$$
$$P_2 : \frac{1}{2}x+y-z-3=0.$$

6.1.9. Se consideră dreapta d şi planele P_1, P_2 având respectiv, ecuaţiile:

$$d: \begin{cases} x+z-3=0 \\ x+y-2z+1=0 \end{cases},$$
$$P_1: 2x+y-2z-3=0, P_2: -x+2y+2z-14=0$$

Să se determine ecuaţia sferei S care are centrul pe dreapta d şi care este tangentă la cele două plane.

Soluţie. Dreapta d se află la intersecţia planelor $Q_1 : x+z-3=0$ şi $Q_2: x+y-2z+1=0$. Astfel, $\overline{N}_1=(1,0,1)$, $\overline{N}_2=(1,1,-2)$

$$\overline{d}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-i+3j+k.$$

Se consideră $M(0,5,3)$ un punct ce aparţine dreptei d (se fixează una dintre coordonatele x,y,z şi se determină celelalte două din ecuaţiile dreptei). Cunoscând un punct al dreptei şi direcţia dreptei ecuaţiile parametrice ale dreptei d sunt: $\begin{cases} x=-t \\ y=3t+5 \\ z=t+3 \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$. Fie C un punct arbitrar al dreptei d de coordonate $C(-t,3t+5,t+3)$. Pentru ca C să fie centrul sferei căutate este necesar să satisfacă condiţia $d(C,P_1)=d(C,P_2)$.

Cum $d(C,P_1)=\frac{|-2t+3t+5-2t-6-3|}{3}=\frac{|-t-4|}{3}$ şi $d(C,P_2)=\frac{|t+6t+10+2t+6-14|}{3}=\frac{|9t+2|}{3}$, rezultă ecuaţia $20t^2+7t-3=0$ cu soluţiile $t_1=\frac{1}{4}$ şi $t_2=-\frac{3}{5}$.

Se obţin două sfere de centre $C_1\left(-\frac{1}{4},\frac{23}{4},\frac{13}{4}\right)$, $C_2\left(\frac{3}{5},\frac{16}{5},\frac{12}{5}\right)$ şi raze $R_1=\frac{5}{4}$, respectiv $R_2=\frac{17}{15}$.

6.1.2 Probleme propuse

6.1.10. Se dau punctele $A(-1,1,2)$ şi $B(1,3,3)$ şi $P: x-2y+2z-3=0$ un plan:

i) Să se scrie ecuaţia sferei S_1 de diametru AB.

ii) Să se scrie ecuaţia sferei S_2 cu centrul în A şi care trece prin B.

iii) Să se scrie ecuaţia sferei S_3 cu centrul în A şi tangentă la planul P.

6.1.11. Să se scrie ecuaţia sferei care conţine punctele $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $E(0,0,-1)$ şi $D(-1,2,1)$ şi să se determine centrul şi raza sa.

6.1.12. Să se afle coordonatele centrului şi raza cercului de intersecţie dintre sfera

$$S: 4x^2+4y^2+4z^2-8x+16y-12z+13=0$$

şi planul $P: x+y+z+1=0$.

6.1.13. Să se scrie ecuaţia sferei S tangentă planului $P: x+y+z-9=0$ în punctul $M(2,3,4)$ şi având centrul în planul $Q: 7x-4y+5z-14=0$.

6.1.14. Se dau sfera S şi planul P de ecuaţii:

$S: x^2+y^2+z^2-6x-4y-4z+8=0$,

$P: 2x+2y+z-21=0$

Să se arate că planul este tangent sferei şi să se găsească punctul lor de tangenţă.

6.1.15. Se consideră cercul în spaţiu:

$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x-4y+6z-8=0 \\ x+2y-2z-4=0 \end{cases}.$$

i) Să se determine raza cercului C.

ii) Să se scrie ecuaţia sferei ce trece prin cercul C şi prin punctul $M(1,0,0)$.

6.1.16. Să se determine ecuaţia sferei de rază $R=2$ cu centrul pe dreapta

$$d: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{2}$$

şi care este tangentă la planul $P: 2x-2y+z-1=0$.

6.1.17. Să se determine ecuaţia sferei de rază $R=\sqrt{5}$ şi care trece prin punctul $A(0,2,-1)$ şi care are centrul pe dreapta

$$d: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}.$$

6.2 Cuadrice

6.2.1 Probleme rezolvate

6.2.1. Să se scrie ecuaţia planelor tangente la elipsoidul

$$E: \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$$

paralele cu planul $Q: 3x + 12y + 2z + 1 = 0$.

Soluţie. Ecuaţia planului tangent la elipsoid într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este

$P: \frac{xx_0}{4} + yy_0 + \frac{zz_0}{9} = 1 \Longleftrightarrow 9xx_0 + 36yy_0 + 4zz_0 - 36 = 0.$

Deoarece $P \| Q$,din condiţia de paralelism a două plane rezultă
$\frac{9x_0}{3} = \frac{36y_0}{12} = \frac{4z_0}{2}$ echivalent cu $3x_0 = 3y_0 = 2z_0 = k$.

Deoarece $M_0(x_0, y_0, z_0) \in E$, înlocuind coordonatele lui M_0, $x_0 = \frac{k}{3}$, $y_0 = \frac{k}{3}$, $z_0 = \frac{k}{2}$, în ecuaţia elipsoidului se obţine $k = \pm\sqrt{6}$ şi $x_0 = \frac{\pm\sqrt{6}}{3}$, $y_0 = \frac{\pm\sqrt{6}}{3}$, $z_0 = \frac{\pm\sqrt{6}}{2}$.

Aşadar, ecuaţile celor două plane tangente la elipsoidul E paralele cu planul Q sunt $P_{1,2}: 9x + 36y + 4z \pm 6\sqrt{6} = 0$.

6.2.2. Să se afle generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$P: 4x^2 - 9y^2 = z$$

care trec prin punctul $M(3, -2, 0)$.

Soluţie. Cele două familii de generatoare rectilinii ale paraboloidului hiperbolic au ecuaţiile:

$$D_\lambda: \begin{cases} 2x + 3y = \lambda z \\ 2x - 3y = \frac{1}{\lambda} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}, D_\mu: \begin{cases} 2x - 3y = \mu z \\ 2x + 3y = \frac{1}{\mu} \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Impunând condiţia $M \in D_\lambda$ se obţine $\lambda = \frac{1}{12}$ iar din $M \in D_\mu$ se obţine $\mu \in \varnothing$.

Deci ecuaţia familiei de generatoare rectilinii este $\begin{cases} 24x + 36y = z \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$.

6.2.3. Să se verifice că planul $P: z - 2 = 0$ intersectează hiperboloidul cu o pânză

$$H_1: x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9} = 1$$

după un cerc. Să se găsească raza şi centrul cercului.

Soluţie. Din ecuaţia planului se obţine $z = 2$, care se înlocuieşte în ecuaţia hiperboloidului H_1 şi se obţine ecuaţia $x^2 + y^2 = \frac{13}{9}$, care reprezintă ecuaţia cercului cu centru în origine $O(0,0)$ şi de rază $r = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

6.2.4. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care planul $Q: x - 2y - 2z + m = 0$ este tangent elipsoidului

$$E: \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Soluţie. Ecuaţia planului tangent la elipsoid într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este

$P: \frac{xx_0}{144} + \frac{yy_0}{36} + \frac{zz_0}{9} = 1 \Longleftrightarrow 9xx_0 + 36yy_0 + 4zz_0 - 36 = 0.$

Deoarece P este identic cu Q rezultă $\frac{x_0}{144} = \frac{y_0}{-2 \cdot 36} = \frac{z_0}{-2 \cdot 9} = \frac{-1}{m}$.

Deoarece $M_0(x_0, y_0, z_0) \in E$, înlocuind coordonatele lui M_0, $x_0 = \frac{-144}{m}$, $y_0 = \frac{72}{m}$, $z_0 = \frac{18}{m}$, în ecuaţia elipsoidului se obţine $m = \pm 18$.

6.2.5. Să se afle generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$P: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$$

care sunt paralele cu planul $Q : 3x + 2y - 4z + 6 = 0$.

Soluţie. Cele două familii de generatoare rectilinii ale paraboloidului hiperbolic au ecuaţiile:

$$D_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} = \lambda z \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{\lambda} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D_\lambda : \begin{cases} x + 2y = 4\lambda z \\ x - 2y = \dfrac{4}{\lambda} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$D_\mu : \begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} = \mu z \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{\mu} \end{cases}, \mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D_\mu : \begin{cases} x - 2y = 4\mu z \\ x + 2y = \dfrac{4}{\mu} \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Condiţia de paralelism $D_\lambda \| Q$ şi $D_\mu \| Q$ conduce la ortogonalitatea vectorilor directori ai dreptelor D_λ şi $D_\mu$cu normala la planul Q.

Din condiţia de ortogonalitate $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4\lambda \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$ şi $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4\mu \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

se obţine $\lambda = \dfrac{1}{2}$ şi $\mu = 1$.

Aşadar, familiile de generatoare rectilinii au ecuaţiile

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 8 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x - 2y - 4z = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}.$$

6.2.6. Să se scrie ecuaţia planului care conţine dreapta

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$$

şi este tangent la paraboloidul hiperbolic

$$P : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 2z.$$

Soluţie. Ecuaţia planului tangent la paraboloidul hiperbolic P într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este

$$Q : \frac{xx_0}{9} - \frac{yy_0}{4} - (z + z_0) = 0 \Longleftrightarrow 4xx_0 - 9yy_0 - 36(z + z_0) = 0.$$

Se scrie dreapta d ca intersecţie de două plane

$$d : \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$$

şi ecuaţia fascicolului de plane determinat de d

$$R_\lambda : x + 2y - 1 + \lambda(3y + z) = 0.$$

Se determină $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât planul variabil R_λ să coincidă cu planul tangent la paraboloid Q într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Din condiţia ca cele două plane să coincidă rezultă
$\dfrac{4x_0}{1} = \dfrac{-9y_0}{2+3\lambda} = \dfrac{-36}{\lambda} = \dfrac{36z_0}{1}$ echivalent cu $x_0 = -\dfrac{9}{\lambda}$, $y_0 = \dfrac{4(2+3\lambda)}{\lambda}$, $z_0 = -\dfrac{1}{\lambda}$.

Deoarece $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$, înlocuind coordonatele lui M_0 în ecuaţia paraboloidului se obţine ecuaţia $36\lambda^2 + 46\lambda + 7 = 0$ cu rădăcinile $\lambda_{1,2} = \dfrac{-23 \pm \sqrt{277}}{36}$.

Aşadar, se obţin două plane cu proprietatea cerută.

6.2.2 Probleme propuse

6.2.7. Să se scrie ecuaţia planelor tangente la elipsoidul

$$E : 4x^2 + 16y^2 + 8z^2 = 1$$

paralele cu planul $Q : x - 2y + 2z + 17 = 0$.

6.2.8. Să se afle generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$P : x^2 - y^2 = 4z$$

care trec prin punctul $M(2, -2, 0)$.

6.2.9. Să se verifice că planul $P: z-1=0$ intersectează hiperboloidul cu o pânză

$$H_1: \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$$

după o hiperbolă. Să se găsească semiaxele şi vârfurile hiperbolei.

6.2.10. Să se afle generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză

$$H_1: 9x^2 - 4y^2 + 36z^2 - 36 = 0$$

care trec prin punctul $M(2,3,1)$.

6.2.11. Se dă planul $P: 2x+3y-z+1=0$. Să se scrie ecuaţiile celor două plane tangente la hiperboloidul

$$H: 4x^2 - 9y^2 + z^2 - 1 = 0$$

paralele cu planul P.

6.3 Generarea suprafeţelor

6.3.1 Probleme rezolvate

6.3.1. Se consideră curba $C: \begin{cases} x^2 - y^2 = z \\ x+y+z=0 \end{cases}$. Să se scrie ecuaţia cilindrului având curba directoare C, iar generatoarele perpendiculare pe planul în care este inclusă curba C.

Soluţie. Familia de generatoare are ecuţiile $G_{\lambda,\mu}: \begin{cases} x-y=\lambda \\ x-z=\mu \end{cases}$. Condiţia ca generatoarele să se sprijine pe curba directoare se obţine din condiţia de compatibilitate în x,y,z a sistemului $\begin{cases} x-y=\lambda \\ x-z=\mu \\ x^2-y^2=z \\ x+y+z=0 \end{cases}$. Se ob ctine $x = \frac{\lambda+\mu}{3}$, $y = \frac{\mu-2\lambda}{3}$, $z = \frac{\lambda-2\mu}{3}$. Înlocuind x,y,z de mai sus în $x^2-y^2=z$ avem $\frac{\lambda+\mu}{9} - \frac{-2\lambda+\mu}{9} = \frac{\lambda-2\mu}{3}$ sau $-\lambda^2+2\lambda\mu = \lambda-2\mu$, care reprezintă relaţia de legătură între parametri. Înlocuind relaţiile din $G_{\lambda,\mu}$ în relaţia de legătură se obţine ecuaţia suprafeţei cilindrice

$$(x-y)^2 - 2(x-y)(x-z) + x - y - 2(x-z) = 0.$$

6.3.2. i) Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice ce are directoarea cercul $C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$ şi generatoarele perpendiculare pe planul cercului.

Soluţie. O generatoare înseamnă $(g): \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-0}{2}$, sau $\begin{cases} x+y=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$. Familia de generatoare are ecuaţiile $G_{\lambda,\mu}: \begin{cases} x+y=\lambda \\ 2y+z=\mu \end{cases}$.

Din sistemul $\begin{cases} x+y=\lambda \\ 2y+z=\mu \\ x^2+y^2+z^2=4 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$ se obţine $x = \frac{5\lambda-2\mu}{6}$, $y = \frac{2\mu+\lambda}{6}$, $z = \frac{-2\lambda+2\mu}{6}$. Înlocuind x,y,z de mai sus în $x^2+y^2+z^2=4$, avem

$$(5\lambda-2\mu)^2 + (2\mu+\lambda)^2 + (2\mu-2\lambda)^2 = 144$$

care reprezintă relaţia de legătură între parametri. Înlocuind relaţiile din $G_{\lambda,\mu}$ în relaţia de legătură se obţine ecuaţia suprafeţei cilindrice

$$(5x+5y-4y-2z)^2 + (4y+2z+x+y)^2 + (4y+2z-2x-2y)^2 = 144,$$

sau

$$(5x+y-2z)^2 + (x+5y+2z)^2 + (-2x+2y+2z)^2 = 144.$$

6.3.3. Să se scrie ecuaţia conului ce are vârful în punctul $V(0,0,1)$ şi ca directoare curba $C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=1 \end{cases}$.

Soluţie. Familia de generatoare este

$$G_{\lambda,\mu}: \frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{\lambda}=\frac{z-1}{\mu}.$$

Din condiţia de compatibiliate a sistemului

$$\begin{cases} x=\dfrac{y}{\lambda} \\ x=\dfrac{z-1}{\mu} \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ y=1 \end{cases},$$

obţinem $x=\frac{1}{\lambda}$, $y=1$, $z=\frac{\mu}{\lambda}+1$, deci relaţia de legătură dintre parametri este $1+\lambda^2+(\lambda+\mu)^2=9\lambda^2$ şi cum $\lambda=\frac{y}{x}$, $\mu=\frac{z-1}{x}$ rezultă suprafaţa conică

$$x^2-7y^2+(z-1)^2+2y(z-1)=0.$$

6.3.4. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice ce are vârful $V(0,0,3)$ şi directoarea $C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0. \end{cases}$.

Soluţie. Procedând ca mai sus, obţinem sistemul $\begin{cases} x=\dfrac{y}{\lambda} \\ x=\dfrac{z-3}{\mu} \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0 \end{cases}$, de unde rezultă $9(1+\lambda^2)=\mu^2$, deci suprafaţa conică căutată este

$$x^2+y^2=\frac{1}{9}(z-3)^2.$$

6.3.5. Arătaţi că suprafaţa de ecuaţie

$$4x^2+16y^2+z^2-4xz-16yz+16z-16=0$$

este o suprafaţă conică, determinând şi vârful conicei.

Soluţie. Determinăm mai înâi invarian ctii cuadricei $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ -2 & -8 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & -16 \end{vmatrix} = 0$. Prin urmare suprafaţa este un con.

Fie $G_{\lambda,\mu}$ generatoarele de ecuaţii $\frac{x-x_1}{\lambda}=\frac{y-x_2}{\mu}=\frac{z-x_3}{1}$. Acestea trec prin punctul fix $V(x_1,x_2,x_3)$ care se sprijină, de exemplu, pe curba C de ecuaţii

$$C: \begin{cases} 4x^2+16y^2+z^2-4xz-16yz+16z-16=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Se obţine relaţia de compatibilitate

$$4(x_1-\lambda x_3)^2+16(x_2-\mu x_3)^2-16=0$$

şi ecuaţia suprafeţei conice

$$x_3^2x^2+4x_3^2y^2+(x_1^2+4x_2^2-4)z^2-2x_1x_3xz-8x_2x_3yz+8x_3z-4=0,$$

de unde prin identificare cu ecuaţia dată a suprafeţei se obţine $x_1=x_2=1$, $x_3=2$, deci suprafaţa este o suprafaţă conică cu vârful $V(1,1,2)$.

6.3.6. Determinaţi ecuaţia unei suprafeţe conice cu vârful în V dat de intersecţia planelor $P_1: x+3z-10=0$, $P_2: y-2=0$, $P_3: y-z+2=0$ şi care are drept curbă directoare $C: \begin{cases} x^2+z^2-2x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Soluţie. Soluţia sistemului $\begin{cases} x+3z-10=0 \\ y-2=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$, este (-2,2,4). Familia de generatoare este $G_{\lambda,\mu}: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{\lambda} = \frac{z-4}{\mu}$.

Din sistemul $\begin{cases} \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{\lambda} = \frac{z-4}{\mu} \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0 \end{cases}$, obţinem relaţia de legătură între parametri

$$6\lambda^2+\mu^2-4\lambda\mu+3\lambda+1=0.$$

Dar cum $\lambda = \frac{y-2}{x+2}$, $\mu = \frac{z-4}{x+2}$ avem ecuaţia suprafeţei conice

$$(x+2)^2+6(y-2)^2+(z-4)^2-4(y-2)(z-4)+3(y-2)(x+2)=0.$$

6.3.7. Să se scrie ecuaţia suprafeţei generată prin rotirea dreptei $(d): x=2t+1,\ y=t,\ z=-t,\ t\in\mathbb{R}$ în jurul axei Ox.

Soluţie. Ecuaţiile axei Ox fiind $y=z=0$, fie $M(1,0,0)$ un punct care aparţine lui Ox. Familia de generatoare este $G_{\lambda,\mu}: \begin{cases} (x-1)^2+y^2+z^2=\lambda \\ x=\mu \end{cases}$, iar ecuaţiile canonice ale dreptei d sunt $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$. Din sistemul

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+z^2=\lambda \\ x=\mu \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \end{cases}$$

rezultă $(\mu-1)^2+\frac{(\mu-1)^2}{4}+\frac{(\mu-1)^2}{4}=\lambda$, sau $3(\mu-1)^2=2\lambda$. Înlocuind μ cu x şi λ cu $(x-1)^2+y^2+z^2$ obţinem suprafaţa de rotaţie căutată

$$x^2-2x+1-2y^2-2z^2=0.$$

6.3.8. Să se scrie ecuaţia suprafeţei obţinute prin rotirea dreptei $d: \begin{cases} x-1=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ în jurul axei Oz.

Soluţie. Analog cu problema precedentă se obţine sistemul

$$\begin{cases} G_{\lambda,\mu}: \begin{cases} (x-0)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=\lambda \\ z=\mu \end{cases} \\ d: \begin{cases} x-1=0 \\ 2y-z=0 \end{cases} \end{cases}$$

de unde avem $x=1$, $z=2y$, $y=\frac{\mu}{2}$. Astfel, relaţia între parametri este $1+\frac{\mu^2}{4}+9\mu-1)^2=\lambda$, sau $5\mu^2-8\mu+8=4\lambda$. Prin urmare, suprafaţa de rotaţie căutată este

$$4x^2+4y^2-z^2-4=0.$$

6.3.9. Să se scrie ecuaţia suprafeţei generată de dreapta $d: x=3t+2,\ y=2t,\ z=t$ prin rotire în jurul axei Ox.

Soluţie. Suprafaţa căutată este un con cu vârful în $V(2,0,0)$. Din sistemul

$$\begin{cases} G_{\lambda,\mu}: \begin{cases} (x-2)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=\lambda \\ x=\mu \end{cases} \\ d: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \end{cases},$$

rezultă $y=\frac{2(\mu-2)}{3}$, $z=\frac{\mu-2}{3}$, deci relaţia de lagătură între parametri este $14(\mu-2)^2=9\lambda$. Aşadar, ecuaţia suprafeţei generată de dreapta $d: x=3t+2$, $y=2t$, $z=t$ prin rotire în jurul axei Ox este

$$5(x-2)^2-9y^2-9z^2=0.$$

6.3.2 Probleme propuse

6.3.10. Să se determine suprafaţa cilindrică ce are drept curbă directoare $C : \begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ şi generatoarele perpendiculare pe planul curbei directoare.

Răspuns. $4(2x + z)^2 + 25y^2 - 5(2x + z) = 0$.

6.3.11. Să se scrie ecuaţia cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta $d : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ şi care are drept curbă directoare curba $C : \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$

Răspuns. $y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz + 1 = 0$.

6.3.12. Să se găsească ecuaţia suprafeţei cilindrului cu generatoarele paralele cu bisectoarea unghiului $Oxyz$, tangentă paraboloidului eliptic $x^2 + y^2 = 2z$.

Răspuns. $(x + y - 1)^2 - 2(x^2 + y^2 - 2z) = 0$.

6.3.13. Determinaţi ecuaţia suprafeţei cilindrice cu generatoarele paralele cu dreapta $d : x = y = z$ şi tangentă sferei $S : (x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Răspuns. $2(x-y)^2+2(x-z)^2+6(x-y)+6(x-z)-2(x-y)(x-z)+15 = 0$.

6.3.14. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în origine şi tangentă sferei $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4$.

Răspuns. $3z^2 - x^2 - 4yz = 0$.

6.3.15. Să se scrie ecuaţia conului circular drept de axă de rotaţie $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ al cărui vârf este situat în planul yOz, ştiind că punctul $A(1, 1, 0)$ aparţine suprafeţei.

Răspuns. $3z^2 + 8xy - 4xz - 4yz + 4z = 0$.

6.3.16. Să se scrie ecuaţia suprafeţei obţinute prin rotirea dreptei $d : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{1}$ în jurul dreptei $d_1 : x = y = z$.

Răspuns. $5(x^2 + y^2 + z^2) - 6(xy + xz + yz) - 4(x + y + z) - 16 = 0$.

Capitolul 7

Elemente de geometria diferenţială a curbelor

7.1 Curbe plane

7.1.1 Probleme rezolvate

7.1.1. Să se scrie ecuaţiile tangentelor la curba $(\mathcal{C}) : x = t^3,\ y = t^2$ care trec prin pnctul $M(4, 0)$.

Soluţie. Curba $(\mathcal{C})$ vectorial este dată prin

$$\overline{r}(t) = t^3\overline{i} + t^2\overline{j}.$$

Deoarece $\overline{r}'(t) = 3t^2\overline{i} + 2t\overline{j}$, iar punctul M nu aparţine curbei $(\mathcal{C})$ rezultă că ecuaţia dreptei ce trece prin M şi are direcţia $\overline{r}'$ este

$$(D) : \qquad \frac{x-4}{3t^2} = \frac{y}{2t}, \quad t \neq 0.$$

Punctul $M_0(t^3, t^2) \in D$, dacă $\frac{t^3 - 4}{3t^2} = \frac{t^2}{2t}$, adică $t^3 + 8 = 0$, ecuaţie care are o singură rădăcină reală, anume $t = -2$. Prin urmare ecuaţia tangentei este $x + 3y - 4 = 0$.

7.1.2. Să se scrie ecuaţia tangentei la curba $(\mathcal{C}) : \overline{r}(t) = (t^3 - 1)\overline{i} + (t^2 + 1)\overline{j}$, $t \in \mathbb{R}$, paralele cu dreapta $(D) : x - 6y - 12 = 0$.

Soluţie. Ecuaţia tangentei în punctul $M(t_0) \in \mathcal{C}$ este

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

sau

$$y = mx + n, \quad \text{unde } m = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}, n = y(t_0) - \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}x(t_0).$$

Deoarece tangentele la curbă sunt paralele cu dreapta (D) de ecuaţie $y = \frac{1}{6}x - 2$, rezultă că $m = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{1}{6}$. Cum

$$\overline{r}'(t) = 3t^2\overline{i} + 2t\overline{j}$$

avem $x'(t_0) = 3t_0^2$, respectiv $y'(t_0) = 2t_0$, deci $\frac{2t_0}{3t_0^2} = \frac{1}{6}$. Se obţin astfel punctele $t_0 = 0$, respectiv $t_0 = 4$. Pentru $t_0 = 0$ rezultă $\overline{r}'(0) = \overline{0}$, deci punctul $M_1(-1, 1)$ este punct singular. Pentru $t_0 = 4$ avem $M_2(63, 17)$ deci ecuaţia tangentei la curbă în acest punct este

$$\frac{x - 63}{48} = \frac{y - 17}{8},$$

adică $x - 6y + 39 = 0$.

Observaţie. La acelaşi rezultat se ajunge şi dacă se înlocuieşte $t_0 = 4$ în expresia lui $n = y(t_0) - \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}x(t_0)$. Obţinem $n = \frac{39}{6}$ şi cum $m = \frac{1}{6}$ rezultă ecuaţia tangentei $y = \frac{1}{6}x + \frac{39}{6}$.

7.1.3. Să se determine ecuaţiile tangentei şi normalei la curbele următoare în punctele indicate:

i) $x = t^3 - 4t$, $y = t^2 + 3t - 2$, $M_0(t = 1)$.

ii) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (astroida) în punctul $M\left(t = \frac{\pi}{4}\right)$.

iii) $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (**foliul lui Descartes**) în $M\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$.

iv) $F(x, y) = x^3 + 3x^2y - 2xy^2 + 3x - 4 = 0$ în punctul $M(1, 0)$.

Soluţie. Ecuaţiile tangentei şi normalei într-un punct $M_0(t_0)$ al curbei $x = x(t)$, $y = y(t)$ sunt

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)},$$

respectiv

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0.$$

i) Avem $x'(t) = 3t^2 - 4$, $y'(t) = 2t + 3$, deci $x'(1) = -1$, $y'(1) = 5$. De asemenea avem $x(1) = -3$, $y(1) = 2$. Înlocuind aceste rezultate mai sus se obţin ecuaţia tangentei

$$\frac{x + 3}{-1} = \frac{y - 2}{5},$$

respectiv ecuaţia normalei $-x + 5y - 13 = 0$.

ii) Analog, avem $x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t$, $y'(t) = 3a\sin^2 t \cos t$, deci $x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3a\sqrt{2}}{4}$, respectiv $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. De asemenea avem $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Rezultă că ecuaţia tangentei, respectiv a normalei la astroidă în punctul $M\left(t = \frac{\pi}{4}\right)$ este $x + y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, respectiv $x - y = 0$.

iii) Ecuaţiile tangentei şi normalei într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ al curbei definite implicit de ecuaţia $F(x, y) = 0$ sunt

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

respectiv

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Deoarece $F\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right) = 0$ rezultă că punctul $M_0\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ aparţine curbei. Avem

$$F'_x(x,y) = 3x^2 - 3ay, \quad F'_y(x,y) = 3y^2 - 3ax$$

deci $F'_x\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right) = F'_y\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right) = \frac{9a^2}{4}$. Prin urmare ecuaţia tangentei la curbă în punctul $M_0\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ este

$$\frac{9a^2}{4}\left(x - \frac{3a}{2}\right) + \frac{9a^2}{4}\left(y - \frac{3a}{2}\right) = 0,$$

echivalentă cu $x + y - 3a = 0$, iar ecuaţia normalei este $x - y = 0$.

iv) Punctul $M_0(1,0)$ aparţine curbei. Cum

$$F'_x(x,y) = 3x^2 + 6xy - 2y^2 + 3, \quad F'_y(x,y) = 3x^2 - 6xy,$$

rezultă $F'_x(1,0) = 6$, $F'_y(1,0) = 3$. Prin urmare ecuaţia tangentei la curbă în punctul $M_0(1,0)$ este $2x + y - 2 = 0$, iar cea a normalei este $3x - 6y - 3 = 0$.

7.1.4. Să se scrie ecuaţia tangentei şi a normalei la curbele:

i) $y = x^2 + 2x - 15$, în punctul de abscisă $x_0 = 3$;

ii) $y = \tan x$, în punctul de abscisă $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Soluţie. Tangenta şi normala la curba $y = f(x)$ în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ care aparţine curbei, au ecuaţiile:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

$$x - x_0 + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0.$$

i) Deoarece $f(3) = 0$, $f'(x) = 2x+2$, $f'(3) = 8$ rezultă că ecuaţia tangentei la curbă în punctul de abscisă $x_0 = 3$, este $y = 8(x-3)$, iar ecuaţia normalei în punctul de abscisă $x_0 = 3$ este $x - 3 + 8y = 0$.

ii) Avem $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, deci $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$. Se obţin ecuaţiile tangentei, respectiv normalei la curbă în punctul de abscisă $\frac{\pi}{3}$ ca fiind

$$y - \sqrt{3} = 4\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \text{ respectiv } x - \frac{\pi}{3} + 4(y - \sqrt{3}) = 0.$$

7.1.5. Să se calculeze lungimea arcului de curbă

i) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $x \in [1,3]$;

ii) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Soluţie. i) Dacă $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ atunci lungimea arcului de curbă este

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

În cazul nostru, $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$, deci

$$l = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2}}dx = \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right)^2}dx$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right)dx = \left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln x\right)\Big|_1^3 = 2 + \ln 3.$$

ii) În cazul în care curba este dată parametric $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$, lungimea arcului de curbă este dată de formula

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

În cazul nostru avem $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$ deci

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

7.1.6. Să se calculeze curbura următoarelor curbe, precum şi ecuaţiile evolutei:

i) $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$; ii) $x = t^2 + 2t$, $y = 3t - 5$.

Soluţie. Pentru o curbă dată prin reprezentarea parametrică $x = x(t)$, $y = y(t)$, curbura are expresia

$$K(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}},$$

iar ecuaţiile evolutei sunt date de

$$\begin{aligned} X &= x(t) - y'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \\ Y &= y(t) + x'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}. \end{aligned}$$

i) Avem: $x'(t) = -3\sin t$, $y'(t) = 2\cos t$, $x''(t) = -3\cos t$, $y''(t) = -2\sin t$, deci curbura este $K(t) = \dfrac{6}{(4 + 5\sin^2 t)^{3/2}}$, iar ecuaţiile evolutei sunt

$$\begin{aligned} X &= 3\cos t - \frac{1}{3}\cos t(4 + 5\sin^2 t) \\ Y &= 2\sin t - \frac{1}{2}\sin t(4 + 5\sin^2 t). \end{aligned}$$

ii) Cum $x'(t) = 2t + 2$, $y'(t) = 3$, $x''(t) = 2$, $y''(t) = 0$ rezultă expresia curburii $K(t) = \dfrac{6}{(4t^2 + 8t + 13)^{3/2}}$ şi ecuaţiile parametrice ale evolutei

$$\begin{aligned} X &= t^2 + 2t - \frac{1}{2}(4t^2 + 8t + 13) \\ Y &= 3t - 5 + \frac{1}{3}(t + 1)(4t^2 + 8t + 13). \end{aligned}$$

7.1.7. Să se găsească curbura unei curbe dată prin ecuaţia explicită $y = \cos 3x$.

Soluţie. Pentru o curbă dată explicit $y = f(x)$, curbura se calculează cu formula

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}.$$

În cazul nostru $f'(x) = -3\sin 3x$, $f''(x) = -9\cos 3x$, deci curbura este

$$K(x) = \frac{|-9\cos 3x|}{(1 + 9\sin^2 3x)^{3/2}}.$$

7.1.8. Să se găsească înfăşurătoarea familiei de curbe plane

$$(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y - 1 = 0.$$

Soluţie. Fie $f(x, y, \lambda) = (1 - \lambda^2)x + 2\lambda y - 1$. Eliminăm parametrul λ din sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda^2)x + 2\lambda y - 1 = 0 \\ -2\lambda x + 2y = 0 \end{cases}$$

Din ultima ecuaţie a sistemului rezultă $\lambda = \dfrac{y}{x}$. Înlocuind în prima ecuaţie a sistemului pe λ cu $\dfrac{y}{x}$ obţinem înfăşurătoarea familiei de curbe plane

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

care reprezintă un cerc cu centrul în $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ şi rază $\dfrac{1}{2}$.

7.1.2 Probleme propuse

7.1.9. Să se scrie ecuaţiile tangentelor la curba $(\mathcal{C}) : x = t^2 - 1$, $y = t^3 - 1$, $t \in \mathbb{R}$, paralele cu dreapta (D): $2x - y + 3 = 0$.

Răspuns. $54x - 27y + 49 = 0$.

7.1.10. Să se scrie ecuaţiile tangentelor la curba $(\mathcal{C}) : x = t^3,\ y = t^2$, care trec prin punctul $M_0(-7;-1)$.

Răspuns. $x - 3y + 4 = 0$.

7.1.11. Să se determine ecuaţiile tangentei şi normalei la curbele următoare în punctele indicate:

i) $x = t^3 - 4t^2 + 1,\ y = 2t^2 - t - 1,\ M_0(t = -1)$;

ii) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, **(cicloida)** în punctul $M_0(t)$;

iii) $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ **(lemniscata lui Bernoulli)** în $M(x_0, y_0)$;

iv) $F(x, y) = 2x^2 - y^3 + 5xy^2 + 2x - 3y + 9 = 0$ în punctul $M(-1, 1)$.

Răspuns. i) Ecuaţia tangentei: $\dfrac{x+4}{11} = \dfrac{y-2}{-5}$, ecuaţia normalei: $11x - 5y + 34 = 0$.

ii) Ecuaţia tangentei: $x\sin t - y(1-\cos t) - a(t - \sin t)\sin t + a(1-\cos t)^2 = 0$, ecuaţia normalei: $(1 - \cos t)x + y\sin t - at(1 - \cos t) = 0$.

iii) Ecuaţia tangentei: $4x_0(x_0^2+y_0^2-a^2)(x-x_0)+4y_0(x_0^2+y_0^2+a^2)(y-y_0) = 0$, ecuaţia normalei: $\dfrac{x - x_0}{4x_0(x_0^2 + y_0^2 - a^2)} = \dfrac{y - y_0}{4y_0(x_0^2 + y_0^2 + a^2)}$.

iv) Ecuaţia tangentei: $3x - 16y + 19 = 0$, ecuaţia normalei $16x + 3y + 13 = 0$.

7.1.12. Să se scrie ecuaţia tangentei şi a normalei la curbele:

i) $y = 2x^2 - 3x - 4$, în punctul de abscisă $x_0 = 2$;

ii) $y = \cos x$, în punctul de abscisă $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Răspuns. i) Ecuaţia tangentei: $y + 2 = 5(x - 2)$, ecuaţia normalei $x - 2 + 5(y + 2) = 0$.

ii) Ecuaţia tangentei: $x + y = \dfrac{\pi}{2}$, ecuaţia normalei $x - y = \dfrac{\pi}{2}$.

7.1.13. Să se calculeze curbura următoarelor curbe, precum şi ecuaţiile evolutei:

i) $x = a\cosh t,\ y = b\sinh t$; ii) $y = \ln x$.

Răspuns. i) $K(t) = \dfrac{ab}{(a^2\sinh^2 t + b^2\cosh^2 t)^{3/2}}$; ii) $K(x) = \dfrac{|x|}{(x^2+1)^{3/2}}$.

7.1.14. Să se determine înfăşurătoarea familiei de curbe de ecuaţie

$$(\lambda^2 - 4)x - 4\lambda y + 4 = 0.$$

Răspuns. $(x - 2)^2 - (y - 1)^2 = 3$.

7.1.15. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

i) $x = 8at^3,\ y = 3a(2t^2 - t^4),\ t \in [0, \sqrt{2}]$;

ii) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Răspuns. i) $l = 24a$, ii) $l = \dfrac{3}{2}a$.

7.2 Curbe în spaţiu

7.2.1 Probleme rezolvate

7.2.1. Să se scrie ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal în punctul M_0 la curba $\mathcal{C}$, pentru:

i) $\mathcal{C} : x = t^3 - 2t,\ y = 4t + 2,\ z = -t^2 + t,\ M_0(t = 1)$;

ii) $\mathcal{C}$: $x = a\cos^2 t,\ y = a\sin t\cos t,\ z = a\sin t,\ M_0(t = \dfrac{\pi}{4})$;

iii) $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ x + z = 5,\ M_0(2, 2\sqrt{3}, 3)$;

iv) $\mathcal{C} : z = x^2 + y^2,\ x + y + z = 2,\ M_0(1, -1, 2)$.

Soluţie. i) Curba $\mathcal{C}$ este dată sub forma parametrică $\overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}$, adică în cazul nostru

$$\overline{r}(t) = (t^3 - 2t)\overline{i} + (4t + 2)\overline{j} + (-t^2 + t)\overline{k},$$

deci $\overline{r}(1) = -\overline{i} + 6\overline{j}$. Cum

$$\overline{r'}(t) = (3t^2 - 2)\overline{i} + 4\overline{j} + (-2t + 1)\overline{k},$$

rezultă $\overline{r'}(1) = \overline{i}+4\overline{j}-\overline{k}$, deci ecuaţia tangentei la curba $\mathcal{C}$ în punctul $M_0(t=0)$ este

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-6}{4} = \frac{z}{-1},$$

iar ecuaţia planului normal este $x+4y-z-23=0$.

ii) Avem $\overline{r}(t) = x(t)\overline{i}+y(t)\overline{j}+z(t)\overline{k} = a\cos^2 t\overline{i} + a\sin t\cos t\overline{j} + a\sin t\overline{k}$, deci $\overline{r}(\frac{\pi}{4}) = \frac{a}{2}\overline{i} + \frac{a}{2}\overline{j} + \frac{a\sqrt{2}}{2}\overline{k}$. De asemenea, avem

$$\overline{r'}(t) = -2a\sin t\cos t\overline{i} + a\cos 2t\overline{j} + a\cos t\overline{k},$$

deci $\overline{r'}(\frac{\pi}{4}) = -2a\sin(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4})\overline{i} + a\cos(\frac{\pi}{2})\overline{j} + a\cos(\frac{\pi}{4})\overline{k} = -\frac{2a}{2}\overline{i} + \frac{a\sqrt{2}}{2}\overline{k}$. Atunci ecuaţia tangentelor la curba $\mathcal{C}$ în M_0 este

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{-2a}{2}} = \frac{y-\frac{a}{2}}{0} = \frac{z-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \frac{2x-a}{-2} = \frac{2y-a}{0} = \frac{2z-a\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

iar ecuaţia planului normal este $-2x+\sqrt{2}z=0$.

iii) Curba $\mathcal{C}$ fiind dată sub forma implicită $F(x,y,z)=0$, $G(x,y,z)=0$, ecuaţiile tangentelor în $M_0(x_0,y_0,z_0)$ la $\mathcal{C}$ sunt date de

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C},$$

unde

$$A = \left.\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\right|_{M_0} = \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{array}\right|\Bigg|_{M_0}, \quad B = \left.\frac{D(F,G)}{D(z,x)}\right|_{M_0} = \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{array}\right|\Bigg|_{M_0},$$

$$C = \left.\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_{M_0} = \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{array}\right|\Bigg|_{M_0}.$$

În cazul nostru avem $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-25$, $G(x,y,z) = x+z-5$, deci

$$A = \left|\begin{array}{cc} 2y & 2z \\ 0 & 1\end{array}\right|\Bigg|_{M_0} = 2y|_{M_0} = 4\sqrt{3}, \quad B = \left|\begin{array}{cc} 2z & 2x \\ 1 & 1\end{array}\right|\Bigg|_{M_0} = (2z-2x)|_{M_0} = 2,$$

$$C = \left|\begin{array}{cc} 2x & 2y \\ 1 & 0\end{array}\right|\Bigg|_{M_0} = -2y|_{M_0} = -4\sqrt{3}.$$

Ecuaţiile tangentelor sunt:

$$\frac{x-2}{2\sqrt{3}} = \frac{y-2\sqrt{3}}{1} = \frac{z-3}{-2\sqrt{3}},$$

iar ecuaţia planului normal este $2\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}z=0$.

iv) Ca la iii), considerând $F(x,y,z) = x^2+y^2-z$, $G(x,y,z) = x+y+z-2$ se obţin $A=1$, $B=-2$, $C=-2$, deci ecuaţiile tangentelor la curba $\mathcal{C}$ în punctul $M_0(1,-1,2)$ sunt

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-2},$$

iar ecuaţia planului normal este $x-2y-2z+1=0$.

7.2.2. Să se determine versorii triedrului lui Frénet în punctul M al curbei $\mathcal{C}$ dacă:

i) $\mathcal{C}: x = 1-\cos t,\ y = \sin t,\ z = t,\ M(t=\frac{\pi}{2})$;

ii) $\mathcal{C}: y = x^2,\ z = 3x,\ M(2,4,6)$;

iii) $\mathcal{C}: x^2-y^2-z=0,\ x^2-y=0,\ M(-2,4,-12)$.

Soluţie. Versorii bazei lui Frénet sunt daţi de formulele:

$$\overline{t}_M = \left.\frac{\overline{r'}}{\|\overline{r'}\|}\right|_M \quad \text{(versorul tangentei)},$$

$$\overline{b}_M = \left.\frac{\overline{r'}\times\overline{r''}}{\|\overline{r'}\times\overline{r''}\|}\right|_M \quad \text{(versorul binormalei)},$$

$$\overline{n}_M = \overline{b}_M \times \overline{t}_M \quad \text{(versorul normalei principale)}.$$

i) Cum $\overline{r}(t) = (1-\cos t)\overline{i} + \sin t\overline{j} + t\overline{k}$ rezultă

$$\overline{r'}(t) = \sin t\overline{i} + \cos t\overline{j} + \overline{k},$$

$$\overline{r''}(t) = \cos t\overline{i} - \sin t\overline{j}.$$

De asemenea, se obţine $\|\overline{r'}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$, de unde rezultă că versorul tangentei este

$$\overline{t}_M = \left.\frac{\sin t\overline{i} + \cos t\overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{2}}\right|_{M(t=\frac{\pi}{2})} = \frac{\overline{i} + \overline{k}}{\sqrt{2}}.$$

Calculăm produsul vectorial al lui $\overline{r'}(t)$ cu $\overline{r''}(t)$:

$$\overline{r'}(t) \times \overline{r''}(t) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \sin t & \cos t & 1 \\ \cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \sin t\overline{i} + \cos t\overline{j} - \overline{k}.$$

De asemenea, obţinem $\|\overline{r'}(t) \times \overline{r''}(t)\| = \sqrt{2}$, deci versorul binormalei este

$$\overline{b}_M = \left.\frac{\sin t\overline{i} + \cos t\overline{j} - \overline{k}}{\sqrt{2}}\right|_{M(t=\frac{\pi}{2})} = \frac{\overline{i} - \overline{k}}{\sqrt{2}}.$$

În final calculând produsul vectorial dintre $\overline{b}_M$ şi $\overline{t}_M$ obţinem versorul normalei principale

$$\overline{n}_M = \overline{b}_M \times \overline{t}_M = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\overline{j}.$$

ii) Parametrizând curba $\mathcal{C}$: se obţine $x = t$, $y = t^2$, $z = 3t$, $M(t = 2)$. Procedând ca la i) avem

$$\begin{aligned} \overline{r}(t) &= t\overline{i} + t^2\overline{j} + 3t\overline{k}, \\ \overline{r'}(t) &= \overline{i} + 2t\overline{j} + 3\overline{k}, \\ \overline{r''}(t) &= 0 \cdot \overline{i} + 2\overline{j} + 0 \cdot \overline{k}. \end{aligned}$$

Cum $\|\overline{r'}(t)\||_M = \sqrt{26}$ rezultă că versorul tangentei este

$$\overline{t}_M = \left.\frac{\overline{r'}(t)}{\|\overline{r'}(t)\|}\right|_M = \frac{\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}}{\sqrt{26}}.$$

$$\overline{r'}(t) \times \overline{r''}(t)\big|_M = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6\overline{i} + 2\overline{k}, \quad \text{iar} \quad \|\overline{r'}(t) \times \overline{r''}(t)\|\big|_M = 2\sqrt{10}.$$

Prin urmare, versorul binormalei este

$$\overline{b}_M = \frac{3\overline{i} + \overline{k}}{\sqrt{10}}.$$

În final calculând produsul vectorial dintre $\overline{b}_M$ şi $\overline{t}_M$ obţinem versorul normalei principale

$$\overline{n}_M = \overline{b}_M \times \overline{t}_M = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{4}{\sqrt{26}} & \frac{3}{\sqrt{26}} \end{vmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{260}}\overline{i} - \frac{8}{\sqrt{260}}\overline{j} + \frac{12}{\sqrt{260}}\overline{k}.$$

iii) Considerăm pentru curba $\mathcal{C}$ următoarea reprezentare $x = t$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, unde funcţiile $y(t)$ şi $z(t)$ sunt definite implicit prin ecuaţiile $x^2 - y^2 - z = 0$, respectiv $x^2 - y = 0$. Derivând aceste relaţii de două ori în raport cu t obţinem $2x(t) - 2y(t)y'(t) - z'(t) = 0$, $2x(t) - y'(t) = 0$, $2 - 2y'^2(t) - 2y(t)y''(t) - z''(t) = 0$, $2 - y''(t) = 0$. În punctul M acest sistem devine

$$\begin{cases} -4 - 8y'(M) - z'(M) = 0 \\ -4 - y'(M) = 0 \\ 2 - 2y'^2(M) - 8y''(M) - z''(M) = 0 \\ 2 - y''(M) = 0 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obţinem $x'(M) = 1$, $y'(M) = -4$, $z'(M) = 28$, $x''(M) = 0$, $y''(M) = 2$, $z''(M) = -46$. Astfel avem

$$\overline{r'}(M) = \overline{i} - 4\overline{j} + 28\overline{k},$$

$$\overline{r''}(M) = 2\overline{j} - 46\overline{k},$$

$$\overline{r'}(M) \times \overline{r''}(M) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -4 & 28 \\ 0 & 2 & -46 \end{vmatrix} = 2(64\overline{i} + 23\overline{j} + \overline{k}),$$

$$\|\overline{r'}(M) \times \overline{r''}(M)\| = \sqrt{18504}.$$

Se obţine astfel versorul binormalei $\overline{b}_M = \dfrac{64\overline{i} + 23\overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{4626}}$, şi versorul normalei principale $\overline{n}_M = \overline{b}_M \times \overline{t}_M$.

7.2.3. Să se scrie ecuaţiile axelor şi ale planelor triedrului lui Frénet în punctul M la curba $\mathcal{C}$, pentru:

i) $\mathcal{C} : x = \dfrac{t^2}{2},\ y = \dfrac{2t^3}{3},\ z = \dfrac{t^4}{2},\ M(t = 1)$;

ii) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x^2 - y^2 = 3,\ M(2, 1, 2)$.

Soluţie. Avem reprezentarea parametrică vectorială a curbei $\mathcal{C}$

$$\overline{r}(t) = \frac{t^2}{2}\overline{i} + \frac{2t^3}{3}\overline{j} + \frac{t^4}{2}\overline{k},$$

de unde deducem

$$\overline{r'}(t) = t\overline{i} + 2t^2\overline{j} + 2t^3\overline{k},\quad \overline{r''}(t) = \overline{i} + 4t\overline{j} + 6t^2\overline{k},$$

deci

$$\overline{r'}(1) = \overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k},\ \overline{r''}(1) = \overline{i} + 4\overline{j} + 6\overline{k}.$$

Vectorul ce defineşte direcţia tangentei în punctul M este $\overline{v}_1 = \overline{r'}(1) = \overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k}$. Deci ecuaţiile tangentei în punctul M la curbă sunt

$$(T):\quad \frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - \frac{2}{3}}{2} = \frac{z - \frac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{2} = \frac{3y - 2}{6} = \frac{2z - 1}{4}.$$

Planul normal este planul determinat de punctul M şi de direcţia tangentei în M (care este direcţia normalei la plan), adică ecuaţia acestuia este

$$(P_N):\quad 2x + 9y + 4z - 9 = 0.$$

Vectorul ce defineşte direcţia binormalei în M este

$$\overline{v}_2 = (\overline{r'} \times \overline{r''})|_M = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 4\overline{i} - 4\overline{j} + 2\overline{k}.$$

Ecuaţia binormalei este ecuaţia ce trece prin M şi are direcţia dată de $\overline{v}_2$:

$$(B):\quad \frac{x - \frac{1}{2}}{4} = \frac{y - \frac{2}{3}}{-4} = \frac{z - \frac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{4} = \frac{3y - 2}{-6} = \frac{2z - 1}{2}.$$

Planul osculator este planul determinat de punctul M şi de direcţia binormalei în M (care este direcţia normalei la plan), adică ecuaţia acestuia este

$$(P_O):\quad 4x - 9y + 2z + 5 = 0.$$

Ecuaţia normalei principale, este determinată de punctul M şi de direcţia

$$\overline{v}_3 = (\overline{r'} \times \overline{r''}) \times \overline{r'}|_M = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -12\overline{i} - 6\overline{j} + 12\overline{k},$$

adică

$$(N):\quad \frac{x - \frac{1}{2}}{-12} = \frac{y - \frac{2}{3}}{-6} = \frac{z - \frac{1}{2}}{12} \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{-4} = \frac{3y - 2}{-3} = \frac{2z - 1}{4}.$$

Planul rectificator este planul determinat de punctul M şi de direcţia normalei principale în M (care este direcţia normalei la plan), adică ecuaţia acestuia este

$$(P_R):\quad 8x + 9y - 8z - 6 = 0.$$

ii) Notăm $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-9$, $G(x,y,z) = x^2-y^2-3$. Deoarece $\left.\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\right|_M = 8 \neq 0$ rezultă că există o vecinătate V a punctului M în care curba poate fi reprezentată parametric prin

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases},$$

adică $\overline{r}(x) = x\overline{i} + y(x)\overline{j} + z(x)\overline{k}$. Derivând în raport cu x ecuaţiile ce definesc curba obţinem sistemul $\begin{cases} 2x + 2yy' + 2zz' = 0 \\ 2x - 2yy' = 0 \end{cases}$, de unde rezultă $y' = \frac{x}{y}$, $z' = -\frac{2x}{z}$, adică $y'(2) = 2$, $z'(2) = -2$. Derivând încă o dată ecuaţiile $y' = \frac{x}{y}$, $z' = -\frac{2x}{z}$, obţinem $y'' = \frac{y - xy'}{y^2}$, respectiv $z'' = \frac{-2z + 2xz'}{z^2}$, deci $y''(2) = -3$, $z''(2) = -3$. Prin urmare avem

$$\overline{r'}(2) = \overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}, \quad \overline{r''}(2) = -3\overline{j} - 3\overline{k}.$$

Deci ecuaţiile tangentei în punctul M la curbă sunt

$$(T): \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-2}.$$

Planul normal este planul determinat de punctul M şi de direcţia tangentei în M (care este direcţia normalei la plan), adică ecuaţia acestuia este

$$(P_N): \quad x + 2y - 2z = 0.$$

Vectorul ce defineşte direcţia binormalei în M este

$$\overline{v}_1 = (\overline{r'} \times \overline{r''})|_M = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -12\overline{i} + 3\overline{j} - 3\overline{k}.$$

Ecuaţia binormalei este ecuaţia ce trece prin M şi are direcţia dată de $\overline{v}_1$:

$$(B): \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

Planul osculator este planul determinat de punctul M şi de direcţia binormalei în M (care este direcţia normalei la plan), adică ecuaţia acestuia este

$$(P_O): \quad 4x - 9y + 2z + 5 = 0.$$

Ecuaţia normalei principale, este determinată de punctul M şi de direcţia

$$\overline{v}_2 = (\overline{r'} \times \overline{r''}) \times \overline{r'}|_M = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 9\overline{j} + 9\overline{k},$$

adică

$$(N): \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-2}{9} \Leftrightarrow x - 2 = 0, \quad y - z + 1 = 0.$$

Planul rectificator este planul determinat de punctul M şi de direcţia normalei principale în M (care este direcţia normalei la plan), adică ecuaţia acestuia este

$$(P_R): \quad y + z - 3 = 0.$$

7.2.4. Să se determine punctele de pe curba $\mathcal{C}$ ce admite reprezentarea parametrică

$$\overline{r}(t) = \frac{2}{t}\overline{i} - 2t\overline{j} + (3t^2 - 3)\overline{k}$$

în care tangenta la curbă este paralelă cu planul $(P): \ -7x + y - 2z + 5 = 0$.

Soluţie. Direcţia tangentei la curbă este dată de vectorul

$$\overline{v} = \overline{r'}(t) = -\frac{2}{t^2}\overline{i} - 2\overline{j} + 6t\overline{k},$$

iar direcţia normalei la planul (P) este $\overline{N} = -7\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$. Tangenta la curbă este paralelă cu planul (P) dacă direcţia tangentei $\overline{v}$ este perpendiculară pe direcţia normalei planului (P), adică $\overline{v} \cdot \overline{N} = 0$. Din această condiţie rezultă ecuaţia $\frac{14}{t^2} - 2 - 12t = 0$, care admite o singură rădăcină reală anume $t = 1$. Prin urmare am obţinut un singur punct $M(2, -2, 0)$.

7.2.5. Să se determine punctele de pe curba $\mathcal{C}$, ce admite reprezentarea implicită

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases},$$

în care tangenta la curbă este perpendiculară pe planul

$$(P): \quad 12x - 16y + 3z + 24 = 0.$$

Soluţie. Notăm $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 10$, $G(x, y, z) = y^2 + z^2 - 25$. Direcţia tangentei la curbă este dată de vectorul

$$\overline{v} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k},$$

unde

$$A = \frac{D(F,G)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} 2y & 0 \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 4yz, \quad B = \frac{D(F,G)}{D(z,x)} = \begin{vmatrix} 0 & 2x \\ 2z & 0 \end{vmatrix} - 4xz,$$

$$C = \frac{D(F,G)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 2y \end{vmatrix} = 4xy,$$

iar direcţia normalei la planul (P) este $\overline{N} = 12\overline{i} - 4\overline{j} + 3\overline{k}$. Tangenta la curbă este perpendiculară pe planul (P) dacă direcţia tangentei $\overline{v}$ este paralelă cu direcţia normalei planului (P), adică $\overline{v} \times \overline{N} = \overline{0}$. Din această condiţie rezultă

$\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4yz & -4xz & 4xy \\ 12 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \overline{0}$, echivalent cu sistemul $\begin{cases} -3z + 4y = 0 \\ z - 4x = 0 \\ -y + 3x = 0 \end{cases}$. Prin urmare punctele de pe curba $\mathcal{C}$ în care tangenta la curbă este perpendiculară pe planul (P) sunt soluţiile sistemului $\begin{cases} -3z + 4y = 0 \\ z - 4x = 0 \\ -y + 3x = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$, adică punctele $M_1(1, 3, 4)$ şi $M_2(-1, -3, -4)$.

7.2.6. Să se găsească punctele curbei $\overline{r}(t) = (2t-1)\overline{i} + t^3\overline{j} + (1-t^2)\overline{k}$ în care planul osculator la curbă este perpendicular pe planul $(P): \ 7x - 12y + 5z = 0$.

Soluţie. Direcţia normalei la planul osculator este dată de

$$\overline{v} = \overline{r'}(t) \times \overline{r''}(t) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3t^2 & -2t \\ 0 & 6t & -2 \end{vmatrix} = 6t^2\overline{i} + 4\overline{j} + 12t\overline{k}.$$

Direcţia normalei la planul (P) este $\overline{N} = 7\overline{i} - 12\overline{j} + 5\overline{k}$. Din condiţia $\overline{v} \cdot \overline{N} = 0$, rezultă ecuaţia $42t^2 + 60t - 48 = 0$, care admite rădăcinile $t_1 = -2$, $t_2 = \frac{4}{7}$. Prin urmare avem două puncte în care planul osculator la curbă este perpendicular pe planul (P), anume $M_1(-5, -8, -3)$, $M_2\left(\frac{1}{7}, \frac{64}{343}, \frac{33}{49}\right)$.

7.2.7. Să se calculeze curbura şi torsiunea curbei $\mathcal{C}$, ce admite reprezentarea parametrică $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$.

Soluţie. Curbura şi torsiunea unei curbe sunt date de formulele

$$\rho(t) = \frac{\|\overline{r'}(t) \times \overline{r''}(t)\|}{\|\overline{r'}(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{(\overline{r'}(t), \overline{r''}(t), \overline{r'''}(t))}{\|\overline{r'}(t) \times \overline{r''}(t)\|^2}.$$

Avem

$$\overline{r}(t) = e^t\overline{i} + e^{-t}\overline{j} + t\sqrt{2}\overline{k}, \quad \overline{r'}(t) = e^t\overline{i} - e^{-t}\overline{j} + \sqrt{2}\overline{k},$$

$$\overline{r''}(t) = e^t\overline{i} + e^{-t}\overline{j}, \quad \overline{r'''}(t) = e^t\overline{i} - e^{-t}\overline{j}.$$

$$\overline{r'}(t) \times \overline{r''}(t) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = -e^{-t}\sqrt{2}\overline{i} + e^t\sqrt{2}\overline{j} + 2\overline{k},$$

$$\|\overline{r'}(t) \times \overline{r''}(t)\| = \sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4} = \sqrt{2}(e^t + e^{-t}), \quad \|\overline{r'}(t)\| = e^t + e^{-t}.$$

Prin urmare curbura curbei este

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^3} = \sqrt{2}(e^t + e^{-t})^{-2}.$$

Deoarece

$$(\overline{r'}(t), \overline{r''}(t), \overline{r'''}(t)) = \begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & -e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = -2\sqrt{2},$$

rezultă că torsiunea este $\tau(t) = \dfrac{-2\sqrt{2}}{2(e^t + e^{-t})^2} = -\sqrt{2}(e^t + e^{-t})^{-2} = -\rho(t).$

7.2.8. Fie curba $\mathcal{C} : x = 3\sin^2 t,\ y = 3\sin 2t,\ z = 3\cos^2 t$. Să se arate că $\mathcal{C}$ este o curbă plană.

Soluţie. Fie $\overline{r}(t) = 3\sin^2 t\overline{i} + 3\sin 2t\overline{j} + 3\cos^2 t\overline{k}$, reprezentarea vectorială parametrică a curbei $\mathcal{C}$. Atunci

$$\begin{aligned} \overline{r'}(t) &= 3\sin 2t\overline{i} + 6\cos 2t\overline{j} - 3\sin 2t\overline{k} \\ \overline{r''}(t) &= 6\cos 2t\overline{i} - 12\sin 2t\overline{j} - 6\cos 2t\overline{k} \\ \overline{r'''}(t) &= -12\sin 2t\overline{i} - 24\cos 2t\overline{j} + 12\sin 2t\overline{k}, \end{aligned}$$

deci produsul mixt al vectorilor $\overline{r'}(t), \overline{r''}(t), \overline{r'''}(t)$ este

$$(\overline{r'}(t), \overline{r''}(t), \overline{r'''}(t)) = \begin{vmatrix} 3\sin 2t & 6\cos 2t & -3\sin 2t \\ 6\cos 2t & -12\sin 2t & -6\cos 2t \\ -12\sin 2t & -24\cos 2t & 12\sin 2t \end{vmatrix} = 0,$$

rezultă că torsiunea este 0, deci curba este una plană.

7.2.2 Probleme propuse

7.2.9. Să se scrie ecuaţiile tangentelor şi ecuaţia planului normal în punctul M_0 la curba $\mathcal{C}$, pentru:

i) $\mathcal{C}$: $x = e^{-t}$, $y = e^{2t}$, $z = t^2$, $M_0(t = 1)$;

ii) $\mathcal{C} : x = e^t\cos 3t$, $y = e^t \sin 3t$, $z = e^{-2t}$, $M_0(t = 0)$;

iii) $\mathcal{C} : z = x^2 + y^2$, $x = y$, $M_0(1, 1, 2)$.

iv) $\mathcal{C} : x^3 - y^2 + z + 6 = 0$, $x - y^2 + z^3 + 6 = 0$, $M_0(-1, -2, -1)$.

Răspuns. i) $\dfrac{xe - 1}{-1} = \dfrac{y - e^2}{2e^2} = \dfrac{z - 1}{2}$; $-xe + 2ye^2 + 2z - 2e^4 - 1 = 0$.

ii) $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z - 1}{-2}$; $x + 3y - 2z + 1 = 0$.

iii) $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 1}{1} = \dfrac{z - 2}{4}$; $x + y + 4z - 10 = 0$.

iv) $\dfrac{x + 1}{8} = \dfrac{y + 2}{-8} = \dfrac{z + 1}{8}$; $x - y + z = 0$.

7.2.10. Să se determine versorii, axele şi planele triedrului lui Frénet în punctul M al curbei $\mathcal{C}$ dacă:

i) $\mathcal{C} : x = t$, $y = -t$, $z = \dfrac{t^2}{2}$, $M(t = 2)$;

ii) $\mathcal{C} : x^2 = 3y$, $x^3 = 27z$, $M(3, 3, 1)$;

iii) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $3x - 2y - 2z = 1$, $M(1, -2, 3)$.

Indicaţie. ii) Se va folosi parametrizarea $r(t) = t\overline{i} + \dfrac{t^2}{3}\overline{j} + \dfrac{t^3}{27}\overline{k}$.

7.2.11. Să se găsească vectorii de poziţie ai curbei

$$\mathcal{C} : \ x = \ln t, \ y = t, \ z = -\frac{1}{t},$$

unde binormala este paralelă cu planul $(P) : x + 3y - z = 0$.

7.2.12. Să se determine punctele curbei

$$\mathcal{C} : \ x = \frac{1}{t}, \ y = \ln t, \ z = t, \ t > 0,$$

în care normala principală este paralelă cu planul $(P) : 5x + 2y - 5z + 2 = 0$.

7.2.13. Să se determine punctele curbei

$$\mathcal{C}: \ x = t + \ln t, \ y = t^2, \ z = 1 - t, \ t > 0,$$

în care tangenta este paralelă cu planul $(P): 12x - y + 14z + 5 = 0$.

7.2.14. Să se determine punctele curbei

$$\mathcal{C}: \ x = \frac{1}{t}, \ y = t, \ z = 2t^2 - 1,$$

în care binormala este perpendiculară pe dreapta $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 4x \end{cases}$.

Răspuns. $M_1(-1,-1,1)$, $M_2(\frac{1}{2}, 2, 7)$.

7.2.15. Să se calculeze curbura şi torsiunea curbei $\mathcal{C}$, ce admite reprezentarea parametrică $x = t$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{6}t^3$.

7.2.16. Fie elicea circulară $\mathcal{C}: x = 2\cos t, \ y = 2\sin t, \ z = t$.
Să se determine :

i) Ecuaţiile muchiilor şi feţelor triedului Frenet;

ii) Unghiurile dintre axa Ox şi versorii triedrului;

iii) Curbura şi torsiunea.

7.2.17. Să se determine ecuaţiile binormalelor la curba

$$\mathcal{C}: x^2 - y^2 = z, 2x = 3y^2$$

în punctele aparţinând curbei, unde acestea sunt paralele cu planul yOz.

7.2.18. Să se determine punctele de pe curba

$$\mathcal{C}: x = \frac{2}{t}, \ y = \ln t, \ z = -t^2$$

ale căror binormale să fie paralele cu planul $(P): x - y + 8z - 1 = 0$.

7.2.19. Să se calculeze curbura şi torsiunea curbelor

i) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$ în $M(1,1,0)$;

ii) $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 + z^2 = 8$ în $M(1,1,1)$.

Capitolul 8

Elemente de geometria diferenţială a suprafeţelor

8.1 Suprafeţe. Reprezentări. Plan tangent. Normală.

8.1.1 Probleme rezolvate

8.1.1. Se consideră suprafaţa $(\Sigma): x = 2u + v, \ y = u - 2v, \ z = 2uv$.

i) Să se afle coordonatele carteziene ale punctelor $M_1(u = 1, v = 2)$, $M_2(u = 2, v = -1)$ şi să se verifice dacă punctele $M_3(1,-2,0)$, $M_4(2,3,7)$ aparţin suprafeţei (Σ).

ii) Să se determine reprezentarea implicită a suprafeţei.

Soluţie. i) Înlocuind coordonatele curbilinii $u = 1, v = 2$ în ecuaţia suprafeţei obţinem $M_1(4,-3,4)$. Analog, pentru $u = 2, v = -1$ obţinem $M_2(3,0,-4)$.

Punctul M_3 aparţine suprafeţei (Σ) dacă sistemul $\begin{cases} 2u+v=1 \\ u-2v=-2 \\ 2uv=0 \end{cases}$ este compatibil. Într-adevăr, sistemul e compatibil determinat cu soluţia $u=0$, $v=1$. Prin urmare $M_3 \in \Sigma$. Procedând similar se constată că M_4 nu aparţie suprafeţei Σ.

ii) Eliminând u şi v între ecuaţiile parametrice ale suprafeţei obţinem ecuaţia implicită a acesteia $2x^2+7xy+3y^2-25z=0$.

8.1.2. Să se găsească ecuaţia planelui tangent şi ecuaţiile normalelor la suprafeţa (Σ) în punctul M:

i) $(\Sigma): x=2u-v,\ y=u^2+v^2,\ z=3u+v,\ M(3,2,2)$;

ii) $(\Sigma): x=uv,\ y=u+v,\ z=u-v,\ M(u=2,v=1)$;

iii) $(\Sigma): z=2x^2+5y-3,\ M(2,0,5)$;

iv) (Σ): $x^2+y^2+z^2-129=0,\ M(2,5,10)$.

Soluţie. Suprafaţa (Σ) este dată sub forma parametrică

$$\overline{r}(u,v)=(2u-v)\overline{i}+(u^2+v^2)\overline{j}+(3u+v)\overline{k}.$$

Vectorul normal la suprafaţă este $\overline{N}=\overline{r'}_u\times\overline{r'}_v$. Avem

$$\begin{aligned}\overline{r'}_u(u,v) &= 2\overline{i}+2u\overline{j}+3\overline{k},\\ \overline{r'}_v(u,v) &= -\overline{i}+2v\overline{j}+\overline{k}.\end{aligned}$$

Din sistemul $\begin{cases} 2u-v=3 \\ u^2+v^2=2 \\ 3u+v=2 \end{cases}$ se deduc coordonatele curbilinii ale punctului M adică $M(u=1,v=-1)$. Astfel avem

$$\begin{aligned}\overline{r'}_u(1,-1) &= 2\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k},\\ \overline{r'}_v(1,-1) &= -\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k},\end{aligned}$$

deci în punctul M normala la suprafaţă este

$$\overline{N}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=8\overline{i}-5\overline{j}-2\overline{k}.$$

Prin urmare ecuaţiile normalei la suprafaţa (Σ) în punctul M sunt: $\dfrac{x-3}{8}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z-2}{-2}$, iar ecuaţia planului tangent este $8x-5y-2z-10=0$.

ii) Suprafaţa (Σ) este dată sub forma parametrică

$$\overline{r}(u,v)=uv\overline{i}+(u+v)\overline{j}+(u-v)\overline{k}.$$

Deoarece

$$\begin{aligned}\overline{r'}_u(u,v) &= v\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}, \Rightarrow \overline{r'}_u(2,1)=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}\\ \overline{r'}_v(u,v) &= u\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}, \Rightarrow \overline{r'}_u(2,1)=2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k},\end{aligned}$$

rezultă că direcţia normalei la suprafaţă este dată de

$$\overline{N}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}.$$

Prin urmare ecuaţiile normalei la suprafaţa (Σ) în punctul $M(2,3,1)$ sunt: $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$, iar ecuaţia planului tangent este $-2x+3y-z-4=0$.

iii) Ecuaţia suprafeţei (Σ) este dată sub forma explicită $z=z(x,y)$. În acest caz direcţia normalei la suprafaţă este dată de vectorul $\overline{N}=-p\overline{i}-q\overline{j}+\overline{k}$, unde $p=z'_x(x,y)$, $q=z'_y(x,y)$. În cazul nostru $p=4x$, $q=5$, deci în punctul $M(2,0,5)$ avem $p=8$, $q=5$ deci ecuaţia normalei în M la (Σ) este $\dfrac{x-2}{-8}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z-3}{1}$, iar ecuaţia planului tangent este $-8x-5y+z+11=0$.

iv) Ecuaţia suprafeţei este dată sub forma implicită $F(x,y,z)=0$, unde în cazul nostru $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-129$. În cazul în care suprafaţa este dată implicit, direcţia normalei la suprafaţă într-un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ este dată de

$$\overline{N}=\nabla_{M_0}F=\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)\overline{i}+\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)\overline{j}+\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)\overline{k}.$$

Avem $\overline{N}=4\overline{i}+10\overline{j}+20\overline{k}$, deci ecuaţia normalei la suprafaţa (Σ) în punctul $M(2,5,10)$ este $\frac{x-2}{4}=\frac{y-5}{10}=\frac{z-10}{20}$, iar ecuaţia planului tangent este $2x+5y+10z-129=0$.

8.1.3. Fie suprafaţa $(\Sigma): x=u^2+v+1,\ y=u^2-v+1,\ z=uv+2$. Să se arate că curbele coordonate Γ_v sunt drepte, iar curbele coordonate Γ_u sunt curbe plane.

Soluţie. Ecuaţiile parametrice ale curbei Γ_v sunt: $\begin{cases} x=u_0^2+v+1\\ y=u_0^2-v+1\\ z=u_0v+2\end{cases}$,

sau

$$\frac{x-u_0^2-1}{1}=\frac{y-u_0^2-1}{-1}=\frac{z-2}{u_0}$$

care reprezintă ecuaţiile canonice ale unei drepte.

Ecuaţiile parametrice ale curbei coordonate Γ_u sunt: $\begin{cases} x=u^2+v_0+1\\ y=u^2-v_0+1\\ z=uv_0+2\end{cases}$.

Eliminând parametrul u între aceste ecuaţii obţinem $x-y=2v_0$, $x=\frac{(z-2)^2}{v_0^2}+v_0+1$. Aceasta arată că Γ_u se află în planul $x-y-2v_0=0$, deci este o curbă plană.

8.1.4. Se consideră suprafaţa (Σ) care admite următoarea reprezentare parametrică

$$r(u,v)=(u^2+v)\overline{i}+(u^2-2v)\overline{j}+uv^2\overline{k}.$$

Să se determine punctele curbei $\mathcal{C}: u=v$ definite pe suprafaţa (Σ) în care planul osculator al curbei $(\mathcal{C})$ să fie paralel cu dreapta $(D): \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$.

Soluţie. Dacă în ecuaţia suprafeţei (Σ) facem $u=v$ rezultă reprezentarea parametrică a curbei $\mathcal{C}$ anume

$$\overline{\alpha}(u)=\overline{r}(u,u)=(u^2+u)\overline{i}+(u^2-2u)\overline{j}+u^3\overline{k}.$$

De asemenea, avem

$$\overline{\alpha'}(u)=(2u+1)\overline{i}+(2u-2)\overline{j}+3u^2\overline{k},\quad \overline{\alpha''}(u)=2\overline{i}+2\overline{j}+6u\overline{k}.$$

Direcţia normalei planului osculator (care este direcţia binormalei la curba $(\mathcal{C})$) este dată de vectorul

$$\overline{v}=\overline{\alpha'}(u)\times\overline{\alpha''}(u)=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2u+1 & 2u-2 & 3u^2\\ 2 & 2 & 6u\end{vmatrix}=6(u^2-2)\overline{i}-6(u^2+u)\overline{j}+6\overline{k}.$$

Din faptul că planul osculator este paralel cu dreapta (D), care are direcţia $\overline{v}_D=2\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$, rezultă $\overline{v}\cdot\overline{v}_D=0$, adică $2(u^2-2)-2(u^2+u)-1=0$, de unde se obţine $t=-\frac{1}{6}$. Deci coordonatele carteziene ale punctului M de pe curba $(\mathcal{C})$ care verifică condiţia dată sunt $M\left(\frac{7}{36},-\frac{35}{36},-\frac{1}{216}\right)$.

8.1.5. Fie suprafaţa (Σ) care admite următoarea reprezentare parametrică:

$$r(u,v)=ue^v\overline{i}+ue^{-v}\overline{j}+u^2\overline{k}.$$

Să se determine punctele de pe suprafaţa (Σ) în care normala la suprafaţă este paralelă cu dreapta $(D): \begin{cases} x+y-z=2\\ x+3y-2z=4\end{cases}$.

Soluţie. Avem

$$\overline{r'}_u(u,v) = e^v\overline{i} + e^{-v}\overline{j} + 2u\overline{k},\quad \overline{r'}_v(u,v) = ue^v\overline{i} - ue^{-v}\overline{j}.$$

Direcţia normalei la suprafaţă este dată de vectorul

$$\overline{N} = \overline{r'}_u(u,v) \times \overline{r'}_v(u,v) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ e^v & e^{-v} & 2u \\ ue^v & -ue^{-v} & 0 \end{vmatrix} = 2u^2e^{-v}\overline{i} + 2u^2e^v\overline{j} - 2u\overline{k}.$$

Direcţia dreptei (D) este dată de vectorul

$$\overline{v}_D = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -5\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}.$$

Normala la suprafaţa (Σ) este paralelă cu dreapta (D), dacă $\overline{N} = \lambda\overline{v}_D$ (adică $\overline{N},\overline{v}_D$ sunt coliniari). Din această condiţie rezultă $\frac{2u^2e^{-v}}{-5} = \frac{2u^2e^v}{1} = \frac{-2u}{2}$ de unde se obţine sistemul $\begin{cases} 2u^2e^{-v} = -10u^2e^v \\ -2u = -42u^2e^v \end{cases}$, care nu are soluţii. Astfel nu există nici un punct în care normala la suprafaţă să fie paralelă cu dreapta (D).

8.1.6. Să se arate că suprafeţele $(\Sigma_1) : xyz = 8$ şi $(\Sigma_2) : 3x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ sunt ortogonale.

Soluţie. Suprefeţele (Σ_1) şi (Σ_2) sunt date sub forma implicită $F(x,y,z) = xyz - 8 = 0$, respectiv $G(x,y,z) = 3x^2 + y^2 - 4z^2 - 1 = 0$. Cele două suprafeţe sunt ortogonale, dacă planele tangente sunt ortogonale, adică dacă este îndeplinită condiţia $\nabla F \cdot \nabla G = 0$. Avem $\nabla F = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}$, $\nabla G = 6x\overline{i} + 2y\overline{j} - 8z\overline{k}$, deci $\nabla F \cdot \nabla G = 0$ şi prin urmare cele două suprafeţe sunt ortogonale.

8.1.2 Probleme propuse

8.1.7. Se consideră suprafaţa $(\Sigma) : x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^2$.

i) Să se afle coordonatele carteziene ale punctelor $M_1(u = 1, v = \pi)$, $M_2(u = 2, v = \frac{\pi}{4})$.

ii) Să se determine reprezentarea implicită a suprafeţei.

Răspuns. i) $M_1(-1, 0, 1)$, $M_2(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$. ii) $x^2 + y^2 - z = 0$.

8.1.8. Să se găsească ecuaţiile planului tangent şi ecuaţiile normalelor la suprafeţa (Σ) în punctul M:

i) $(\Sigma) : x = 2u - 3v,\ y = u^2 - v^2,\ z = 3u + v^2,\ M(-5, 0, 4)$;

ii) $(\Sigma) : x = u^2v,\ y = u - 2v,\ z = u + v^2,\ M(u = 1, v = 1)$;

iii) $(\Sigma) : z = \sqrt{x^2 + y^2},\ M(3, 4, 5)$;

iv) $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4xz + 6yz - 16 = 0,\ M(1, -3, 0)$.

Răspuns. i) Ecuacţia normalei este $\frac{x+5}{-8} = \frac{y}{7} = \frac{z-4}{-5}$, ecuaţia planului tangent este: $-8x + 7y - 5z - 20 = 0$.

ii) Ecuacţia normalei este $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-5}$, ecuaţia planului tangent este: $4x - 3y - 5z + 3 = 0$.

iii) Direcţia normalei la suprafaţă este $\overline{N} = -\frac{3}{5}\overline{i} - \frac{4}{5}\overline{j} + \overline{k}$.

iv) Direcţia normalei la suprafaţă este $\overline{N} = \nabla_M F = 8\overline{i} - 8\overline{j} - 14\overline{k}$.

8.1.9. Fie suprafaţa $(\Sigma) : x = u^4 + v,\ y = u^4 - v,\ z = u^2v$. Să se arate că curbele coordonate Γ_v sunt drepte, iar curbele coordonate Γ_u sunt curbe plane.

8.1.10. Se consideră suprafaţa (Σ) care admite următoarea reprezentare parametrică

$$r(u,v) = (u^2 - v)\overline{i} + (u^2 - v^2)\overline{j} + uv\overline{k}.$$

Să se determine curbura curbei $\mathcal{C} : u = v$ definite pe suprafaţa (Σ).

8.1.11. Fie suprafaţa (Σ) care admite următoarea reprezentare parametrică:

$$r(u,v) = ue^{v}\bar{i} + ue^{-v}\bar{j} + u^2\bar{k}.$$

Să se determine punctele de pe suprafaţa (Σ) în care normala la suprafaţă este paralelă cu dreapta $(D): \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Răspuns. $M(1,1,1)$.

8.1.12. Să se scrie ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei la suprafaţa

$$(\Sigma)\quad \bar{r}(u,v) = (u+v)\bar{i} + uv\bar{j} + (u^3+v^3)\bar{k}$$

într-un punct curent al său.

8.2 Prima şi a doua formă fundamentală a unei suprafeţe

8.2.1 Probleme rezolvate

8.2.1. Să se găsească prima formă fundamentală a următoarelor suprafeţe de rotaţie:

i) $x = R\cos u\cos v$, $y = R\cos u\sin v$, $z = R\sin u$ (sfera);

ii) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$; (paraboloidul de rotaţie);

iii) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = au$; (conul circular).

Soluţie. Pentru o suprafaţă dată sub forma vectorială parametrică

$$\bar{r}(u,v) = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\bar{k}$$

coeficienţii primei forme fundamentale ai suprafeţei sunt daţi de

$$E = \overline{r'}^2_u(u,v),\quad F = \overline{r'}_u(u,v)\cdot\overline{r'}_v(u,v),\quad G = \overline{r'}^2_v(u,v).$$

i) Avem $\bar{r}(u,v) = R\cos u\cos v\bar{i} + R\cos u\sin v\bar{j} + R\sin u\bar{k}$, deci

$$\overline{r'}_u(u,v) = -R\sin u\cos v\bar{i} - R\sin u\sin v\bar{j} + R\cos u\bar{k},$$

$$\overline{r'}_v(u,v) = -R\cos u\sin v\bar{i} + R\cos u\cos v\bar{j}.$$

Se obţin $E = R^2$, $F = 0$, $G = R^2\cos^2 u$, deci prima formă fundamentală a suprafeţei este

$$\Phi(du,dv) = R^2(du^2 + \cos^2 u\,dv^2).$$

ii) Avem $\bar{r}(u,v) = u\cos v\bar{i} + u\sin v\bar{j} + u^2\bar{k}$, deci

$$\overline{r'}_u(u,v) = \cos v\bar{i} + \sin v\bar{j} + 2u\bar{k},$$

$$\overline{r'}_v(u,v) = -u\sin v\bar{i} + u\cos v\bar{j}.$$

Se obţin $E = 1 + 4u^2$, $F = 0$, $G = u^2$, deci prima formă fundamentală a suprafeţei este

$$\Phi(du,dv) = (1+4u^2)du^2 + u^2dv^2).$$

iii) Avem $\bar{r}(u,v) = u\cos v\bar{i} + u\sin v\bar{j} + au\bar{k}$, deci

$$\overline{r'}_u(u,v) = \cos v\bar{i} + \sin v\bar{j} + a\bar{k},$$

$$\overline{r'}_v(u,v) = -u\sin v\bar{i} + u\cos v\bar{j}.$$

Se obţin $E = 1 + a^2$, $F = 0$, $G = u^2$, deci prima formă fundamentală a suprafeţei este

$$\Phi(du,dv) = (1+a^2)du^2 + u^2dv^2).$$

8.2.2. Să se calculeze unghiul curbelor $(\mathcal{C}_1): u = v-1$, $(\mathcal{C}_2): u = 3-v$, pe suprafaţa $(\Sigma): \bar{r}(u,v) = u\cos v\bar{i} + u\sin v\bar{j} + u^2\bar{k}$.

Soluţie. Fie $\{M\} = (\mathcal{C}_1) \cap (\mathcal{C}_2)$. Rezultă $M(u = 1, v = 2)$. Cele două curbe au parametrizările

$$\overline{r}_1(v) = \overline{r}(v-1, v) = (v-1)\cos v\overline{i} + (v-1)\sin v\overline{j} + (v-1)^2\overline{k},$$

$$\overline{r}_2(v) = \overline{r}(u(v), v) = u(v)\cos v\overline{i} + u(v)\sin v\overline{j} + u(v)^2\overline{k}$$

cu $u = u(v)$ definit implicit de ecuaţia curbei $\mathcal{C}_2$ (deşi ea este rezolvabilă în raport cu u).

Unghiul celor două curbe în punctul M este unghiul tangentelor în acest punct. Aceste tangente au direcţiile definite de vectorii

$$\begin{aligned}\overline{r'}_1(v)|_M &= [(\cos v - (v-1)\sin v)\overline{i} + ((v-1)\cos v + \sin v)\overline{j} + 2(v-1)\overline{k}]|_M \\ &= (\cos 2 - \sin 2)\overline{i} + (\sin v + \cos v)\overline{j} + 2\overline{k},\end{aligned}$$

$$\overline{r'}_2(v)|_M = [(u'(v)\cos v - u(v)\sin v)\overline{i} + (u'(v))\sin v + u(v)\cos v)\overline{j} + 2u(v)u'(v)\overline{k}]_M.$$

Deoarece $u'(v) = -\dfrac{(u+v-3)'_v}{(u+v-3)'_u} = -1$, rezultă $u'(2) = -1$. Cum $u(1) = 2$, deducem $\overline{r'}_2(2) = (-\cos 2 - \sin 2)\overline{i} + (-\sin v + \cos v)\overline{j} - 2\overline{k}$. Atunci unghiul $\theta \in [0, \pi]$ este dat de formula

$$\cos\theta = \frac{\overline{r'}_1(2)\overline{r'}_2(2)}{||\overline{r'}_1(2)||\,||\overline{r'}_2(2)||} = -\frac{4}{6}$$

deci $\theta = \arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)$.

8.2.3. Se consideră suprafaţa elicoidală (Σ) : $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$. Se cere:

i) ecuaţiile planului tangent şi ecuaţiile normalei în punctul $M_0(u = 2, v = \dfrac{\pi}{2})$;

ii) coeficienţii primei forme fundamentale a suprafeţei;

iii) unghiul curbelor coordonate;

iv) elementul de arie al suprafeţei;

v) a doua formă fundamentală.

Soluţie. Avem

$$\overline{r}(u, v) = u\cos v\overline{i} + u\sin v\overline{j} + (u+v)\overline{k},$$

deci $\overline{r'}_u(u, v) = \cos v\overline{i} + \sin v\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{r'}_v(u, v) = -u\sin v\overline{i} + u\cos v\overline{j} + \overline{k}$. Direcţia normalei la suprafaţă este dată de

$$\begin{aligned}\overline{N} &= \overline{r'}_u(u, v) \times \overline{r'}_v(u, v) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\sin v - u\cos v)\overline{i} - (\cos v + u\sin v)\overline{j} + u\overline{k}.\end{aligned}$$

i) În punctul $M_0(0, 2, 2 + \dfrac{\pi}{2})$ avem $\overline{N} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$, astfel că ecuaţia planului tangent este $x - 2y + 2z + 4 - \pi = 0$, iar ecuaţiile normalei sunt

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z - \frac{\pi}{2}}{2}.$$

ii) $E = \overline{r'}^2_u(u, v) = 2$, $F = \overline{r'}_u(u, v)\overline{r'}_v(u, v) = 1$, $G = \overline{r'}^2_v(u, v) = 1 + u^2$.

iii) Unghiul curbelor coordonate este dat de

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{1}{\sqrt{2 + 2u^2}}.$$

iv) Elementul de arie pe suprafaţa (Σ) are expresia

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv = \sqrt{1 + 2u^2}dudv.$$

v) Avem

$$\overline{r''}^2_{u^2}(u, v) = 0,\ \overline{r''}^2_{uv}(u, v) = -\sin v\overline{i} + \cos v\overline{j},\ \overline{r''}^2_{v^2}(u, v) = -u\cos v\overline{i} - u\sin v\overline{j}$$

şi $\|\overline{N}\| = \sqrt{1+2u^2}$, unde $\overline{N}$ este vectorul normal la suprafaţa (Σ). Coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale sunt daţi de

$$L = \overline{n} \cdot \overline{r''}^2_{u^2} = 0;$$
$$M = \overline{n} \cdot \overline{r''}^2_{uv} = -\frac{1}{\sqrt{1+2u^2}};$$
$$N = \overline{n} \cdot \overline{r''}^2_{v^2} = \frac{u^2}{\sqrt{1+2u^2}}$$

unde $\overline{n} = \dfrac{\overline{N}}{\|\overline{N}\|}$ este versorul vectorului normal la suprafaţă. Prin urmare a doua formă fundamentală este

$$\overline{n}d^2\overline{r} = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2 = \frac{1}{\sqrt{1+2u^2}}dv(-2du + u^2dv).$$

8.2.4. Să se calculeze elementul de arie $d\sigma$ pe suprafaţa $\Sigma : z = xy^2$.

Soluţie. Se face parametrizarea $x = x$, $y = y$, $z = xy^2$ şi se calculează elementul de arie cu formula

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy,$$

unde $p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy$.

Prin urmare, $d\sigma = \sqrt{1+y^4+4x^2y^2}dxdy$.

8.2.5. Să se determine curbele de pe suprafaţa $(\Sigma) : x = u+v$, $y = u-v$, $z = uv$, care sunt ortogonale curbei $\mathcal{C} : u+v = 0$.

Soluţie. Fie curbele

$$\mathcal{C} : \begin{cases} u_1 = -v \\ v_1 = v \end{cases}, \quad \mathcal{C}' : \begin{cases} u_2 = u_2(v) \\ v_2(v) = v \end{cases}.$$

Coeficienţii primei forme fundamentale într-un punct de intersecţie $M(u,v)$ al celor două curbe sunt:

$$E = (2+v^2)|_{u=-v} = 2+v^2, \quad F = uv|_{u=-v} = -v^2, \quad G = (2+u^2)|_{u=-v} = 2+v^2,$$

iar $u_1' = -1$, $v_1' = v_2' = 1$, $u_2' = u_2'(v)$. Condiţia de ortogonalitate înseamnă $\cos\theta = 0$, adică

$$Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv_1'v_2' = 0.$$

În cazul nostru această ultimă condiţie devine

$$-(2+v^2)u_2'(v) - v^2(-1+u_2'(v)) + 2 + v^2 = 0,$$

de unde rezultă $u_2'(v) = 1$. Prin urmare $u_2(v) = \int dv = v + K$, deci curbele ortogonale curbei $\mathcal{C}$ sunt $\mathcal{C}' : u - v = K$.

8.2.2 Probleme propuse

8.2.6. Să se calculeze coeficienţii primei forme fundamentale ai suprafeţei (Σ) într-un punct curent:

i) $(\Sigma) : x = R\cos v$, $y = R\sin v$, $z = u$, (cilindrul circular);

ii) $(\Sigma) : x = (a + b\cos u)\cos v$, $y = (a+b\cos u)\sin v$, $z = b\sin u$, (torul);

iii) $(\Sigma) : x = a\cosh\dfrac{u}{a}\cos v$, $y = a\cosh\dfrac{u}{a}\sin v$, $z = u$, (catenoidul);

iv) $(\Sigma) : x + y = z^3$.

Răspuns. i) $E = 1$, $F = 0$, $G = R^2$; ii) $E = b^2$, $F = 0$, $G = (a+b\cos u)^2$; iii) $E = \cosh^2\dfrac{u}{a}$, $F = 0$, $G = a^2\cosh^2\dfrac{u}{a}$. iv) $E = 1 + \dfrac{1}{9z^4}$, $F = \dfrac{1}{9z^4}$, $G = 1 + \dfrac{1}{9z^4}$.

8.2.7. Să se determine unghiul curbelor $(\mathcal{C}_1) : u = 0$, $(\mathcal{C}_2) : u + v = 1$, de pe suprafaţa $(\Sigma) : x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$.

Răspuns. $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

8.2.8. Să se determine unghiurile triunghiului curbiliniu determinat de curbele $(\mathcal{C}_1) : u = 0$, $(\mathcal{C}_2) : v = 0$, $(\mathcal{C}_3) : u + v = 1$, de pe suprafaţa (Σ) : $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$.

Indicaţie. Vârfurile triunghiului sunt punctele $\{A\} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, $\{B\} = \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$, $\{C\} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3$, adică $A(u = 0, v - 0)$, $B(u = 1, v = 0)$, $C(u = 0, v = 1)$. Se obţin $\cos A = 0$, $\cos B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos C = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

8.2.9. Fie suprafaţa $\overline{r}(u, v) = u\overline{i} + v\overline{j} + \sin(u+v)\overline{k}$. Să se determine unghiul dintre curbele $(\mathcal{C}_1) : u + v = 0$ şi $(\mathcal{C}_2) : u - v = 0$ pe suprafaţă.

Răspuns. $\theta = \frac{\pi}{2}$.

8.2.10. Se consideră elicoidul normal $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$. Să se scrie a doua formă fundamentală a suprafeţei.

Răspuns. $\overline{n} \cdot d^2\overline{r} = -\frac{2a}{a^2 + u^2}dudv$.

8.2.11. Se consideră elicoidul normal $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât unghiul curbelor $u + v = 0$, $u - v = 0$ să fie i) $\frac{\pi}{2}$, ii) $\frac{\pi}{6}$.

Răspuns. i) $a = \pm 1$, ii) $a = \pm(2 + \sqrt{3})$.

Bibliografie

[1] Babescu Gh., Bundău O., Juratoni A., *Analiză Matematică*, Editura Mirton, Timişoara, 2011.

[2] Babescu Gh., Bundău O., Juratoni A., *Exerciţii şi Probleme de Analiză Matematică*, Editura Mirton, Timişoara, 2009.

[3] Babescu Gh., Juratoni A., Bundău O., Mureşan A., *Matematici Speciale*, Editura Mirton, Timişoara, 2009.

[4] Boja N., Rendi B., Hatvany Cs., Stanciu L., Petrişor E., Mihailov D., Popuţa V., Rendi D., Mihuţ I., Brăiloiu G., Rachin N., Neagu M., *Culegere de probleme de algebră, geometrie şi matematici speciale*, I.P. Traian Vuia, Timişoara, 1985.

[5] Boja N., Brăiescu L., Căruntu B., Cristea L.,, *Algebră lineară. Geometrie analitică şi diferenţială. Matematici speciale*, Ed. Politehnica, 2002.

[6] Bota C., Popescu D., *Algebră liniară. Culegere de probleme*, Ed. Orizonturi Universitare, Timişoara, 2006.

[7] Bota C., Popescu D., *Geometrie analitică şi diferenţială. Culegere de probleme*, Ed. Orizonturi Universitare, Timişoara, 2008.

[8] Chiriţă S., *Probleme de Matematici Superioare*, E.D.P., Bucureşti, 1989.

[9] Dumitraş D.E., *Probleme de Geometrie analitică şi diferenţială, Algebră liniară*, Ed. Digital Data Cluj, 2006.

[10] Flondor D., Donciu N., *Algebră şi Analiză Matematică, Culegere de Probleme*, Vol I,II,E.D.P., Bucureşti, 1978,1979.

[11] Mihuţ I., Jivulescu A., *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Culegere de probleme, Ed. Politehnica, 2006.

[12] Procopiuc G., *Probleme de algebră liniară, geometrie*, Ed. Gh. Asachi, Iaşi, 2005.

[13] Radu C., *Algebră liniară şi geometrie analitică şi diferenţială* Ed. All, Bucureşti, 1996.

[14] Rendi D., Mihuţ I., Căprău C., Popescu D., *Matematici superioare pentru ingineri*, Ed. Politehnica Timişoara, 2001.

[15] Udrişte C., Radu C., *Probleme de algebră liniară, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[16] Udrişte C., *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, E.D.P., Bucureşti, 1993.