深蓝学院
shenlanxueyuan.com

基于图优化(Graph-based)激光SLAM方法

主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人
电子科技大学硕士

课程内容

Graph-based SLAM

1. Pose Graph的构建
2. 回环检测方法
3. 非线性最小二乘原理
4. 非线性最小二乘在SLAM中的应用

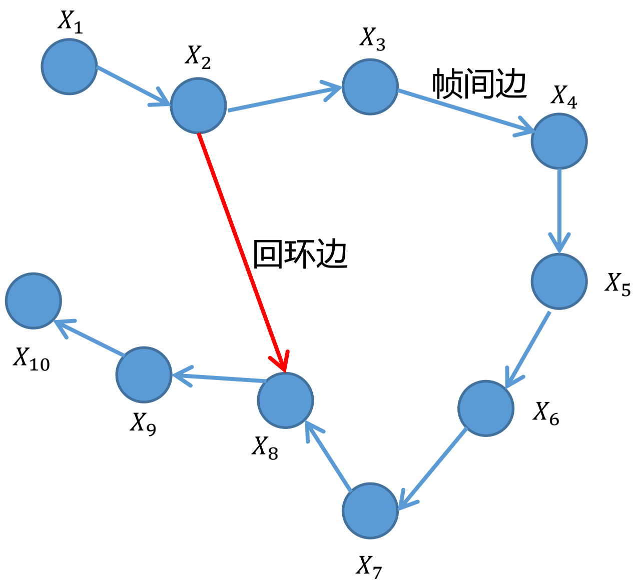
课程内容

Graph-based SLAM

1. Pose Graph的构建
2. 回环检测方法
3. 非线性最小二乘原理
4. 非线性最小二乘在SLAM中的应用

Pose Graph的构建

Pose Graph的概念

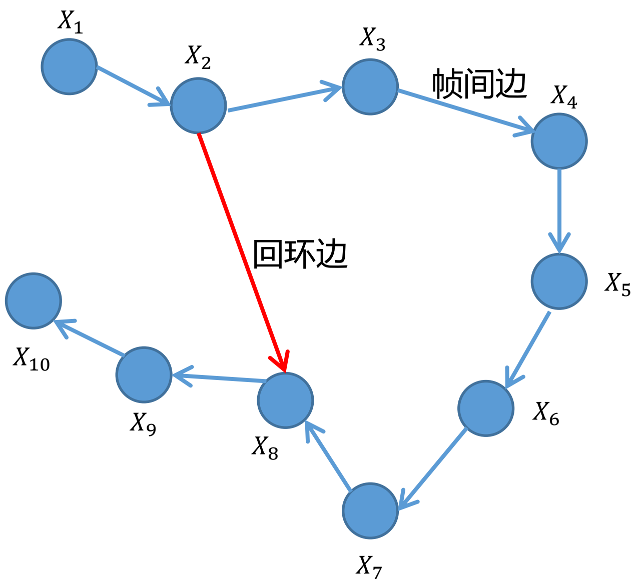


Pose Graph示意图

- 用一个图(Graph)来表示SLAM问题
- 图中的节点来表示机器人的位姿(x, y, yaw)
- 两个节点之间的边表示两个位姿的空间约束(相对位姿关系以及对应方差)
- Graph-based SLAM：构建图，并且找到一个最优的配置(各节点的位姿)，让预测与观测的误差最小

Pose Graph的构建

Pose Graph的概念



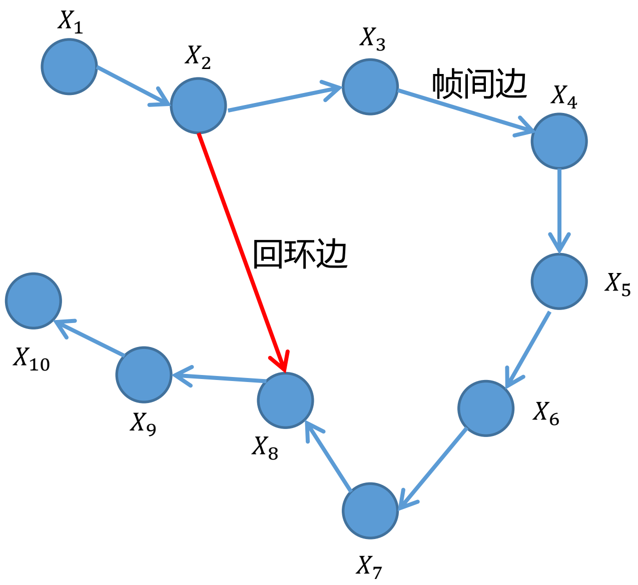
Pose Graph示意图

- 一旦形成回环即可进行优化消除误差
- 里程积分的相对位姿视为预测值
- 回环计算的相对位姿视为观测值
- Graph-based SLAM：构建图并调整各节点的位姿，让预测与观测的误差最小

非线性最小二乘优化

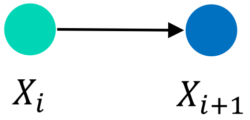
Pose Graph的构建

图的构建---帧间边



Pose Graph示意图

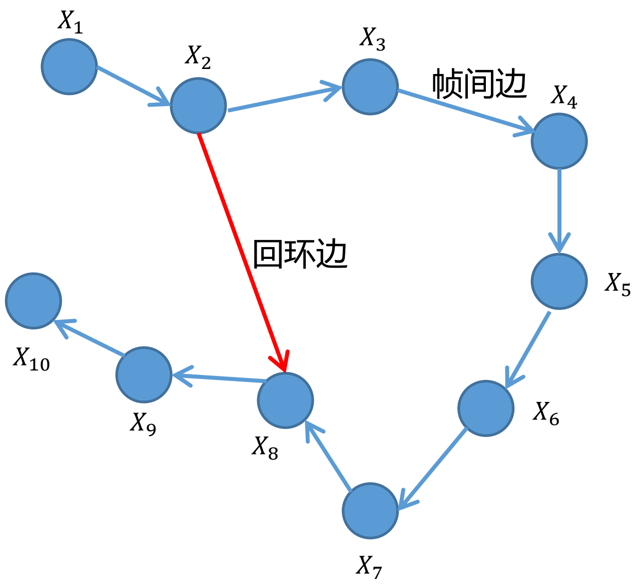
- 里程计测量：



- 相邻节点之间的相对位姿关系，可以由里程计、IMU、帧间匹配计算得到

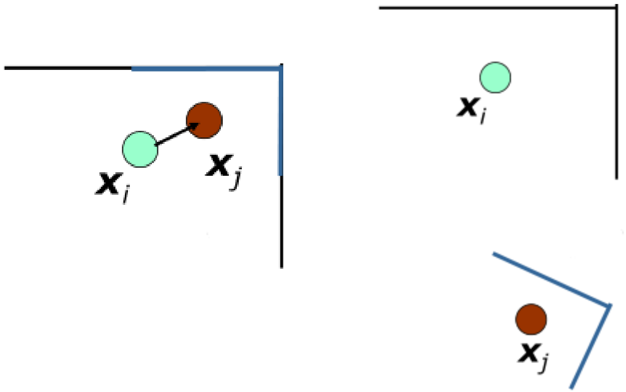
Pose Graph的构建

图的构建---回环边



Pose Graph示意图

- 通过回环检测得到：



- 节点 i 和节点 j 在空间上相邻(观测到同样的数据)，但是时间上不相邻
- 用帧间匹配算法计算一个相对位姿

课程内容

Graph-based SLAM

1. Pose Graph的构建

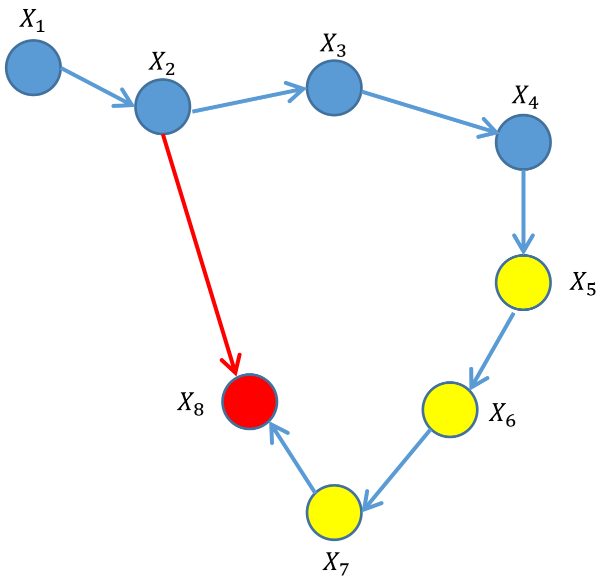
2. 回环检测方法

3. 非线性最小二乘原理

4. 非线性最小二乘在SLAM中的应用

回环检测

一个简单的回环检测方法

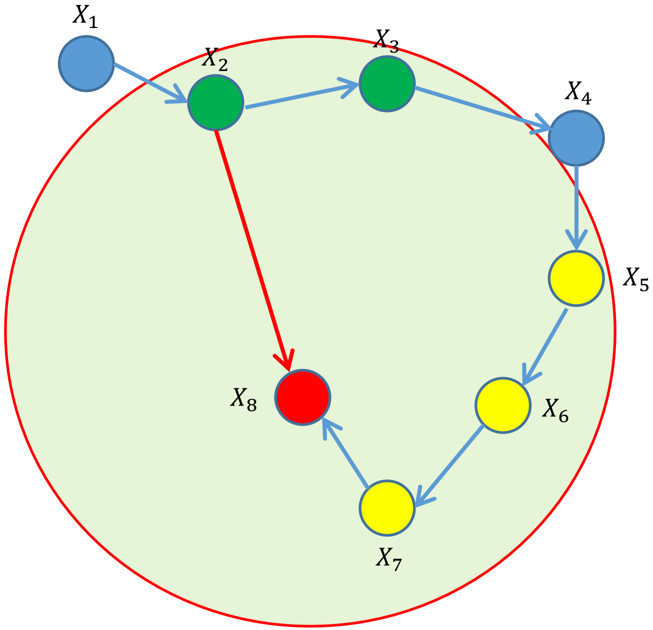


回环检测示意图

- 把节点分为active 和 inactive两部分
- 跟当前节点(红色节点)时间相近的节点称为active node(黄色节点)，其他的称为inactive node
- 找到当前节点周围一定范围内所有inactive节点，作为回环候选帧
- 当前节点和回环候选帧进行匹配，根据得分判断是否形成回环

回环检测

一个简单的回环检测方法



回环检测示意图

- 把节点分为active 和 inactive两部分
- 跟当前节点(红色节点)时间相近的节点称为active node(黄色节点)，其他的称为inactive node
- 找到当前节点周围一定范围内所有inactive节点，作为回环候选帧(绿色节点)
- 当前节点和回环候选帧进行匹配，根据得分判断是否形成回环

课程内容

Graph-based SLAM

1. Pose Graph的构建
2. 回环检测方法
3. 非线性最小二乘原理
4. 非线性最小二乘在SLAM中的应用

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

解决的问题

给定一个系统，其状态方程为： $f(x) = z$

x表示系统的状态向量—即需要估计的值；

z表示系统的观测值，可以通过传感器进行直接观测；

$f(x)$表示一个非线性的映射函数，状态向量x可以通过非线性函数$f(x)$映射得到z。

- 给定该系统的n个混有噪声的观测值$(z_1, \cdots, z_n)$，估计状态向量x，使得其经过$f(x)$映射之后的预测值和观测值的误差最小

- 和线性最小二乘基本相同，只是状态方程$f(x)$是一个非线性函数

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

示意图

$$
\begin{array}{ccc}
 & f_1(x) = z_1 & z_1' \\
 & f_2(x) = z_2 & z_2' \\
x & \vdots & \\
 & f_n(x) = z_n & z_n' \\
\text{状态向量} & \text{观测模型--预测值} & \text{测量值}
\end{array}
$$

- x表示机器人的位置
- $f(x)$为观测模型，节点之间相对位姿计算函数
- Z为帧间匹配或者回环检测计算出来的相对位姿
- 找到最优的x，让预测和观测的误差最小

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

误差函数

目标为最小化预测和观测的差，因此误差即为预测和观测的差：

$$e_i(x) = f_i(x) - z_i'$$

假设误差服从高斯分布，即$e_i(x) \sim N(\mathbf{0}, \Omega_i)$，$\Omega_i$为对应的信息矩阵。我们定义误差的联合概率分布为：

$$G(e_i(x)) = \prod_i \frac{1}{(2\pi)^{D/2}|\Omega_i|^{1/2}} \exp[-\frac{1}{2} e_i(x)^T \Omega_i e_i(x)]$$

最终目标是使得误差尽可能趋近于0(均值)，等价于每个高斯分布取得最大值，因此误差的联合概率分布$G(e_i(x))$取得最大值。

$$InG(e_i(x)) = \sum \frac{1}{(2\pi)^{D/2}|\Omega_i|^{1/2}} - \frac{1}{2} \sum e_i(x)^T \Omega_i e_i(x)$$

令非线性最小二乘的目标函数为：

$$\min F(x) = \min \sum e_i(x)^T \Omega_i e_i(x)$$

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

解决的问题

目标函数:

$$\min_{x} F(x)$$

直接想法：求$F(x)$关于变量x的导数，令其等于0，求解方程即可。

对于凸函数来说，上述想法是可行的，但对于非凸函数，通常采用基于梯度的优化方法。

- $F(x)$为关于x的非线性方程，能否把其化为关于x的线性方程。

线性化：泰勒展开

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

线性化

$$F(x) = \sum e_i(x)^T \Omega_i e_i(x)$$

误差函数$e_i(x)$是非线性函数，因此$F(x)$是关于x的非线性函数。对误差函数$e_i(x)$进行线性化得：

$$e_i(x + \Delta x) = e_i(x) + J_i(x)\Delta x$$

其中，J为映射函数$F(x)$对状态向量x的导数，称之为Jacobian矩阵。

$$J_i(x) = (\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n})$$

因此，函数$F(x)$的可化解为：

$$F(x + \Delta x) = \sum e_i^T (x + \Delta x)\, \Omega_i e_i(x + \Delta x)$$

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

线性化

$$
\begin{aligned}
F(x+\Delta x) &= \sum e_i^T(x+\Delta x)\Omega_i e_i(x+\Delta x) \\
&= \sum (e_i(x)+J_i\Delta x)^T\Omega_i(e_i(x)+J_i\Delta x) \\
&= \sum {e_i}^T\Omega_i e_i + e_i^T\Omega_i J_i\Delta x + \Delta x^T J_i^T\Omega_i e_i + \Delta x^T J_i^T\Omega_i J_i\Delta x \\
&= \sum {e_i}^T\Omega_i e_i + 2\underline{e_i^T\Omega_i}J_i\Delta x + \Delta x^T \underline{J_i^T\Omega_i}J_i\Delta x \\
&= \sum c_i + \sum (2b_i^T\Delta x + \Delta x^T H_i\Delta x)
\end{aligned}
$$

其中， $b_i^T = e_i^T\Omega_i J_i$

$H_i = J_i^T\Omega_i J_i$

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

线性化

$$
\begin{aligned}
F(x+\Delta x) &= \sum c_i + \sum (2b_i^T \Delta x + \Delta x^T H_i \Delta x) \\
&= \sum c_i + \sum 2b_i^T \Delta x + \Delta x^T \sum H_i \, \Delta x \\
&= \sum c_i + 2b^T \Delta x + \Delta x^T H \Delta x
\end{aligned}
$$

$F(x+\Delta x)$为关于变量Δx的二次函数，令其关于Δx的导数等于0，可求解得到$F(x+\Delta x)$的极值，即

$$\frac{\partial F(x+\Delta x)}{\partial \Delta x} = 2b + 2H\Delta x = 0$$

$$H\Delta x = -b$$

$$\Delta x^* = -H^{-1} b$$

- 令$x = x + \Delta x^*$，然后不断迭代，直至收敛即可。

非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)

流程

- 1.线性化误差函数：

$$e_i(x + \Delta x) = e_i(x) + J_i \Delta x$$

- 2.构建线性系统：

$$b^T = \sum e_i^T \Omega_i J_i \qquad H = \sum J_i^T \Omega_i J_i \qquad H\Delta x = b$$

- 3.求解线性系统：

$$\Delta x^* = -H^{-1} b$$

- 4.更新解，并不断迭代直至收敛：

$$x = x + \Delta x^*$$

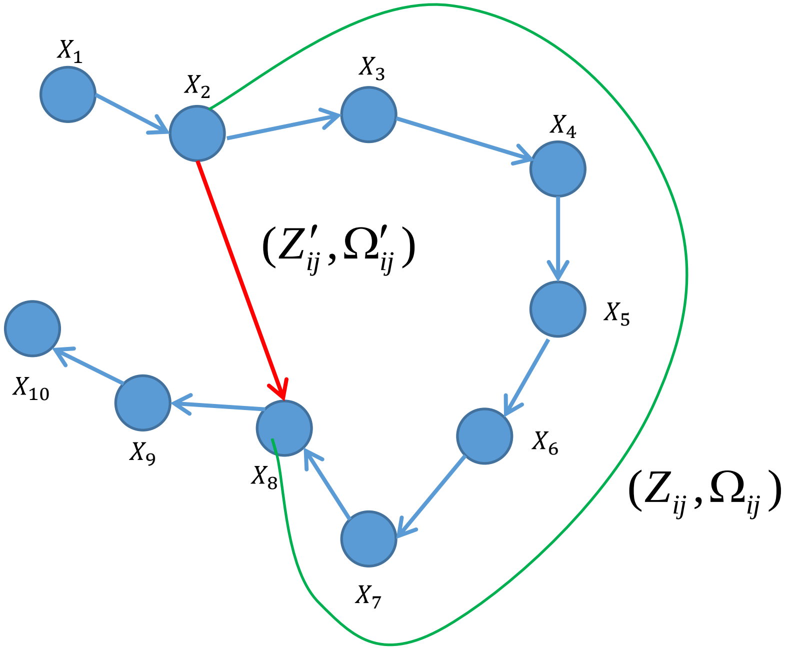
课程内容

Graph-based SLAM

1. Pose Graph的构建
2. 回环检测方法
3. 非线性最小二乘原理
4. **非线性最小二乘在SLAM中的应用**

NL Least Square在SLAM中的应用

误差函数



- 观测值为匹配计算得到的节点i和节点j的相对位姿：

$$z'_{ij} = (t_{ij}, \theta_{ij})$$
$$Z'_{ij} = V2T(z'_{ij})$$

- 预测值为里程积分得到的当前节点i和节点j的相对位姿：

$$Z_{ij} = f(x_i, x_j) = X_i^{-1} X_j$$
$$X_i = V2T(x_i)$$
$$X_j = V2T(x_j)$$

- 误差函数的定义：

$$e_{ij}(x) = T2V(Z'^{-1}_{ij} Z_{ij})$$

NL Least Square在SLAM中的应用

误差函数--预测值

- 已知：

$$X_i = \begin{bmatrix} R_i & t_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_i^{-1} = \begin{bmatrix} {R_i}^T & -{R_i}^T t_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_j = \begin{bmatrix} R_j & t_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

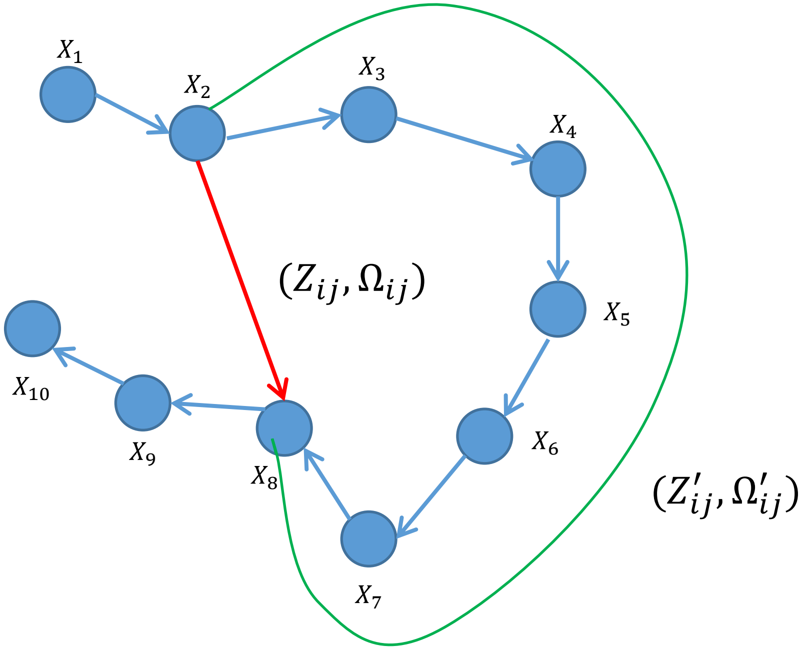
- 预测值：

$$Z_{ij} = X_i^{-1} X_j = \begin{bmatrix} {R_i}^T & -R_i^T t_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_j & t_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {R_i}^T R_j & R_i^T (t_j - t_i) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z_{ij} = T2V(Z_{ij}) = \begin{pmatrix} {R_i}^T (t_j - t_i) \\ \theta_j - \theta_i \end{pmatrix}$$

NL Least Square在SLAM中的应用

误差函数



- 误差函数的矩阵形式：

$$e_{ij}(x) = \begin{Bmatrix} R_{ij}^T(R_i^T(t_j - t_i) - t_{ij}) \\ \theta_j - \theta_i - \theta_{ij} \end{Bmatrix}$$

- 对应的Jacobian矩阵：

$$\frac{\partial e_{ij}(x)}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} -R_{ij}^T R_i^T & R_{ij}^T \frac{\partial R_i^T}{\partial \theta}(t_j - t_i) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial e_{ij}(x)}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} R_{ij}^T R_i^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NL Least Square在SLAM中的应用

误差函数的线性化

- 误差函数：

$$e_{ij}(x+\Delta x) = e_{ij}(x) + J_{ij}\Delta x$$

$$J_{ij} = \frac{\partial e_{ij}(x)}{\partial x}$$

- 因为误差函数只跟x_i和x_j有关，因此具有下列的性质：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= \left(\mathbf{0} \cdots \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \cdots \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_j)}{\partial \mathbf{x}_j} \cdots \mathbf{0} \right) \\
\mathbf{J}_{ij} &= \left(\mathbf{0} \cdots \mathbf{A}_{ij} \cdots \mathbf{B}_{ij} \cdots \mathbf{0} \right)
\end{aligned}$$

NL Least Square在SLAM中的应用

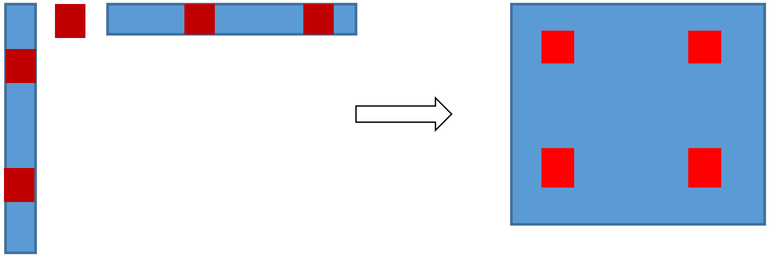
误差函数的线性化

- Jacobian矩阵的形式：

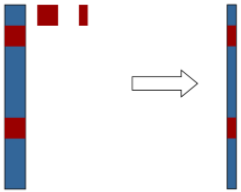
$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}\cdots\mathbf{0} & \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i}}_{\mathbf{A}_{ij}} & \mathbf{0}\cdots\mathbf{0} & \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x}_j)}{\partial \mathbf{x}_j}}_{\mathbf{B}_{ij}} & \mathbf{0}\cdots\mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- Jacobian是一个稀疏的向量，因此其会导致H矩阵的稀疏性：

$H_{ij} = J_{ij}^T \Omega_{ij} J_{ij}$



$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{J}_{ij}^T \mathbf{\Omega}_{ij} \mathbf{e}_{ij}$

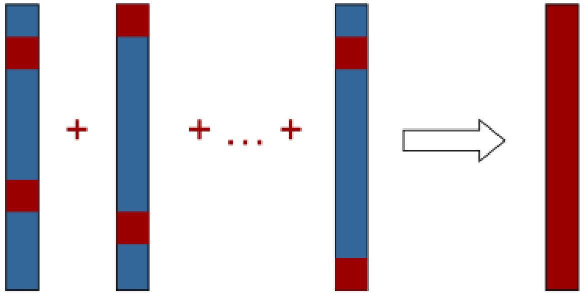


NL Least Square在SLAM中的应用

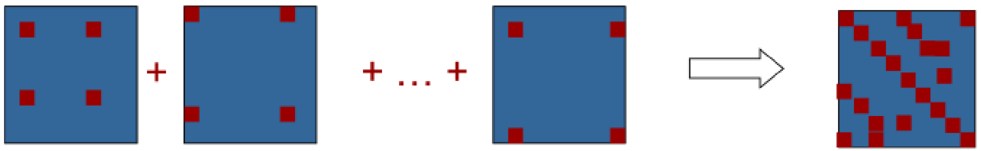
误差函数的线性化

- H和b的最终形式：

$$\mathbf{b} = \sum_{ij} \mathbf{b}_{ij}$$



$$\mathbf{H} = \sum_{ij} \mathbf{H}_{ij}$$



- H 矩阵为稀疏矩阵，可以利用此特征进行快速求解。

NL Least Square在SLAM中的应用

固定坐标系

- 观测值观测到的两个位姿之间的相对位姿

- 满足相对位姿约束的解有无穷多组

- 为了让解唯一，必须加入一个约束条件让某一个位姿固定，一般选择第一个位姿，即：

$$\Delta x_1 = 0$$

等价于：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

NL Least Square在SLAM中的应用

固定坐标系

- 加入的约束为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 求解的线性系统为：

$$H \Delta x = -b$$

- 因此等价于：

$$H_{11} += \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NL Least Square在SLAM中的应用

构建线性系统

- 已知误差项和Jacobian矩阵A_{ij}和B_{ij}

- 向量b的更新为：

$$b_i^T \mathrel{+}= e_{ij}^T \Omega_{ij} A_{ij} \qquad b_j^T \mathrel{+}= e_{ij}^T \Omega_{ij} B_{ij}$$

- 矩阵H的更新为：

$$H_{ii} \mathrel{+}= A_{ij}^T \Omega_{ij} A_{ij} \qquad H_{ij} \mathrel{+}= A_{ij}^T \Omega_{ij} B_{ij}$$

$$H_{ji} \mathrel{+}= B_{ij}^T \Omega_{ij} A_{ij} \qquad H_{jj} \mathrel{+}= B_{ij}^T \Omega_{ij} B_{ij}$$

NL Least Square在SLAM中的应用

求解

- 已知矩阵H和向量b
- 求解线性方程组：

$$\Delta x = -H^{-1}b$$

- 不断进行迭代，直至收敛：

$$x = x + \Delta x$$

optimize(x):

$$
\begin{array}{l}
\text{while } (!\mathit{converged}) \\
\quad (\mathbf{H}, \mathbf{b}) = \text{buildLinearSystem}(\mathbf{x}) \\
\quad \mathbf{\Delta x} = \text{solveSparse}(\mathbf{H\Delta x} = -\mathbf{b}) \\
\quad \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{\Delta x} \\
\text{end} \\
\mathit{return}\ \mathbf{x}
\end{array}
$$

Cartographer代码讲解

参考资料

[1]G2O:A General Framework for Graph Optimization

[2]A tutorial graph-based slam

[3]Efficient Sparse pose adjustment for 2D mapping

[4] Real-Time Loop Closure in 2D LIDAR SLAM

作业

- 详细见作业说明

结语

感谢聆听！

Thanks for Listening