深蓝学院
shenlanxueyuan.com

激光的前端配准算法-二

主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人
电子科技大学硕士

帧间匹配算法

帧间匹配算法

- 1、爬山法(拟梯度法)
- 2、高斯牛顿优化方法
- 3、NDT方法
- 4、相关匹配方法及分支定界加速

帧间匹配算法

1、爬山法(拟梯度法)

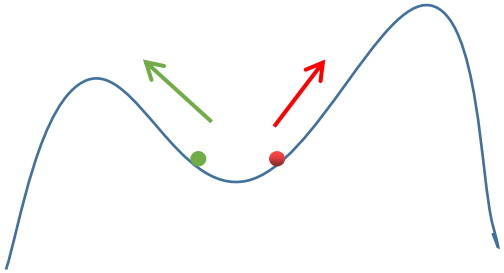
2、高斯牛顿优化方法

3、NDT方法

4、相关匹配方法及分支定界加速

爬山法(拟梯度法)

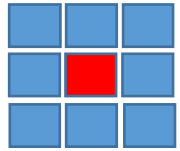
示意图



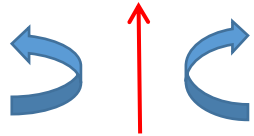
爬山法示意图

基本思想

- 搜索方向固定(只在有限的几个方向中选取，平移8个，旋转2个)



平移搜索



旋转搜索

- 搜索时，保持得分单调递增；不满足则把搜索步长减半
- 当搜索步长减半的次数大于一定的次数时，则认为收敛

爬山法(拟梯度法)

得分函数定义

T 机器人的位姿

$S_i(T)$ 激光点i位姿变换T后的坐标

$M(x)$ 似然场地图中坐标x处的值

n 当前帧激光点的数量

$$Score(T) = \sum_{i=1}^{n} M(S_i(T))$$

- $Score(T)$函数表示位姿T在似然场地图中的得分
- 似然场地图由前一帧或前几帧激光数据生成

算法流程

- 搜索从一个初始位姿开始T(0)
- 对于当前最优位姿搜索位姿T(i)，计算周围10个待搜索位姿的得分，并得到最高得分对应的位姿T(*)
- 如果最高得分比当前搜索位姿得分更高，则更新当前搜索位姿T(i+1)=T(*)
- 否则，搜索步长减半，继续从当前搜索位姿进行搜索T(i+1)=T(i)
- 如果搜索步长减半的次数超过阈值，则认为搜索结束，返回当前的最优位姿

爬山法(拟梯度法)

伪代码

```
ComputePose(pose, dir, searchStep):
    newPose = pose + dir * searchStep
    return newPose
```

```
bestPose = T_0
bestScore = Score(T_0)
while(iterations < iteration_thres)
  max Score = bestScore
  max Pose = bestPose
  for move in all-search-direction
      tmpPose = computePose(bestScore, move, searchStep)
      tmpScore = Score(tmpPose)
      if (tmpScore > max Score)
          max Score = tmpScore
          max Pose = tmpPose
      endif
  endfor
  if (max Score > bestScore)
      bestScore = max Score
      bestPose = max Pose
  else
      searchStep = searchStep / 2
      iterations++
  endif
endwhile
```

爬山法伪代码

帧间匹配算法

1、爬山法(拟梯度法)

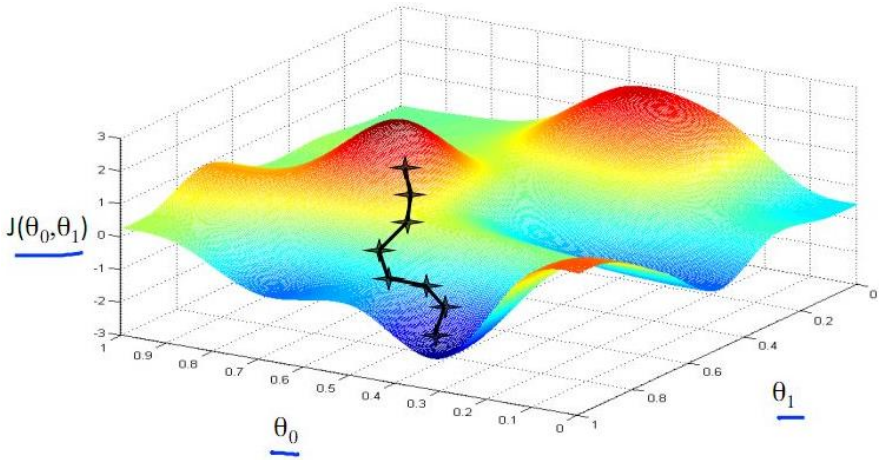
2、高斯牛顿优化方法

3、NDT方法

4、相关匹配方法及分支定界加速

基于优化的方法(Optimization-based Method)

示意图



梯度下降示意图

数学描述

- 给定一个目标函数，把激光的帧间匹配问题转换为求解目标函数的极值问题：

$$E(T) = arg\min_{T} \sum [1 - M(S_i(T))]^2$$

其中，

$T = (T_x, T_y, T_\theta)$表示机器人的位姿

$p_i = (p_{ix}, p_{iy})$表示第i个激光点的坐标

$S_i(T)$ 表示第i个激光点位姿变换T后的坐标

$$S_i(T) = \begin{bmatrix} \cos T_\theta & -\sin T_\theta & T_x \\ \sin T_\theta & \cos T_\theta & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$M(x)$ 表示似然场地图中坐标x处的值

基于优化的方法(Optimization-based Method)

优化方法的求解

$$E(T) = arg\min_{T} \sum [1 - M(S_i(T))]^2$$

$M(S_i(T))$为非线性函数，进行一阶泰勒展开，可得：

$$E(T + \Delta T) = arg\min_{T} \sum \left[1 - M\left(S_i(T)\right) - \nabla M\left(S_i(T)\right)\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\Delta T\right]^2$$

求$E(T + \Delta T)$对ΔT的导数，并令其等于0：

$$\sum \left[M\left(S_i(T)\right)\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T \left[1 - M\left(S_i(T)\right) - \nabla M\left(S_i(T)\right)\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\Delta T\right] = 0$$

求得ΔT

基于优化的方法(Optimization-based Method)

优化方法的求解

$$\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[1-M\left(S_i(T)\right)-\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\Delta T\right]=0$$

展开得:

$$\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[1-M\left(S_i(T)\right)\right]=\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\Delta T\right]$$

等式两边同时乘以H^{-1}:

$$\Delta T=H^{-1}\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[1-M\left(S_i(T)\right)\right]$$

$$H=\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]$$

基于优化的方法(Optimization-based Method)

优化方法的求解

$$\Delta T = H^{-1}\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[1 - M(S_i(T))\right] \qquad H = \sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]$$

ΔT表达式中似然场地图$M(S_i(T))$已知，未知量：$\nabla M(S_i(T))$、$\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}$

$\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}$

$$S_i(T) = \begin{bmatrix}\cos T_\theta & -\sin T_\theta & T_x\\ \sin T_\theta & \cos T_\theta & T_y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{ix}\\ p_{iy}\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos T_\theta * p_{ix} - \sin T_\theta * p_{iy} + T_x\\ \sin T_\theta * p_{ix} + \cos T_\theta * p_{iy} + T_y\\ 1\end{bmatrix}$$

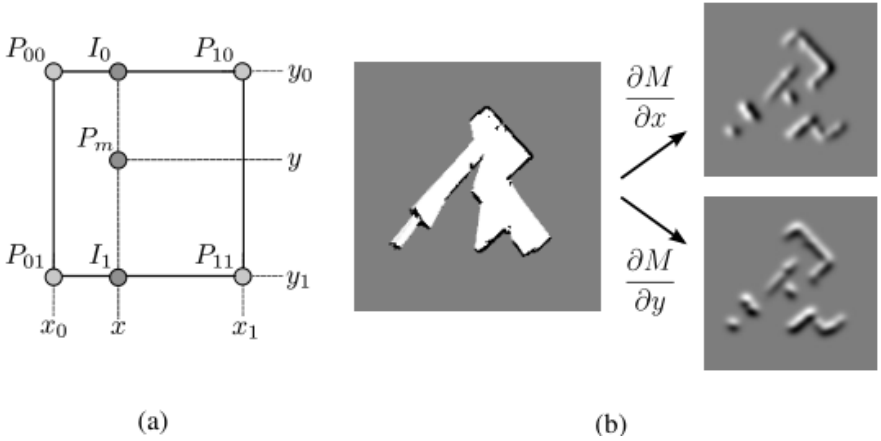
$$\Rightarrow \frac{\partial S_i(T)}{\partial T} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin T_\theta * p_{ix} - \cos T_\theta * p_{iy}\\ 0 & 1 & \cos T_\theta * p_{ix} - \sin T_\theta * p_{iy}\end{bmatrix}$$

$\nabla M(S_i(T))$

$M(S_i(T))$表示似然场地图中坐标$S_i(T)$处的值；$\nabla M(S_i(T))$表示似然场对坐标位置的导数，需要通过插值求解。

基于优化的方法(Optimization-based Method)

地图双线性插值



地图插值示意图

- 拉格朗日插值法
- X, Y两个方向进行插值
- 一维线性插值的推广

基于优化的方法(Optimization-based Method)

拉格朗日插值方法——一维线性插值

- 插值的定义

设函数$y = f(x)$在区间$[a, b]$上有定义，且存在已知点：

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

处的函数值$y_i = f(x_i)$，若存在n次多项式：

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

使得值$L_n(x_i) = y_i$成立，则称$L_n(x)$为$f(x)$的插值多项式。

可以证明：$L_n(x)$存在且唯一

- 拉格朗日插值方法

实现上述插值的一种方法

主要特点为把插值多项式表示成基函数的线性组合：

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i$$

基函数$l_i(x)$满足以下条件：

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

基于优化的方法(Optimization-based Method)

拉格朗日插值方法—基函数构造

基函数$l_i(x)$在除x_i以外的所有插值点都为0，即点$(x_0,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$都是$l_i(x)$的解，因此可以构造函数:

$$l_i(x) = c(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_n)$$

显然$l_i(x)$满足上述条件，同时$l_i(x_i)=1$，因此:

$$l_i(x_i) = c(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_n) = 1$$

因此:

$$c = \frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_n)}$$

$$l_i(x) = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x-x_k}{(x_i-x_k)}$$

基于优化的方法(Optimization-based Method)

拉格朗日插值方法—双线性插值

设平面中有四个点:

$$Z_1 = f(x_0, y_0), Z_2 = f(x_1, y_0)$$
$$Z_3 = f(x_1, y_1), Z_4 = f(x_0, y_1)$$

令:

$$\mathrm{u} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad \mathrm{v} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

则对应的四个点的坐标变为:

$$(x_0, y_0) = (0,0) \qquad (x_1, y_0) = (1,0)$$
$$(x_1, y_1) = (1,1) \qquad (x_0, y_1) = (0,1)$$

构造基函数:

$$l_1(u, v) = (1 - u)(1 - v)$$

$$l_2(u, v) = u(1 - v)$$

$$l_3(u, v) = uv$$

$$l_4(u, v) = (1 - u)v$$

插值函数为:

$$L_4(u, v) = Z_1 l_1(u, v) + Z_2 l_2(u, v) + Z_3 l_3(u, v) + Z_4 l_4(u, v)$$

基于优化的方法(Optimization-based Method)

地图插值

插值函数: $L_4(u,v) = Z_1 l_1(u,v) + Z_2 l_2(u,v) + Z_3 l_3(u,v) + Z_4 l_4(u,v)$

把(u,v)替换回(x,y)可得:

$$L(x,y) = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}Z_3 + \frac{x_1-x}{x_1-x_0}Z_4\right) + \frac{y_1-y}{y_1-y_0}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}Z_2 + \frac{x_1-x}{x_1-x_0}Z_1\right)$$

x的偏导数:

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}\left(\frac{Z_3-Z_4}{x_1-x_0}\right) + \frac{y_1-y}{y_1-y_0}\left(\frac{Z_2-Z_1}{x_1-x_0}\right)$$

y的偏导数:

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{y_1-y_0}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}Z_3 + \frac{x_1-x}{x_1-x_0}Z_4\right) - \frac{1}{y_1-y_0}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}Z_2 + \frac{x_1-x}{x_1-x_0}Z_1\right)$$

帧间匹配算法

1、爬山法(拟梯度法)

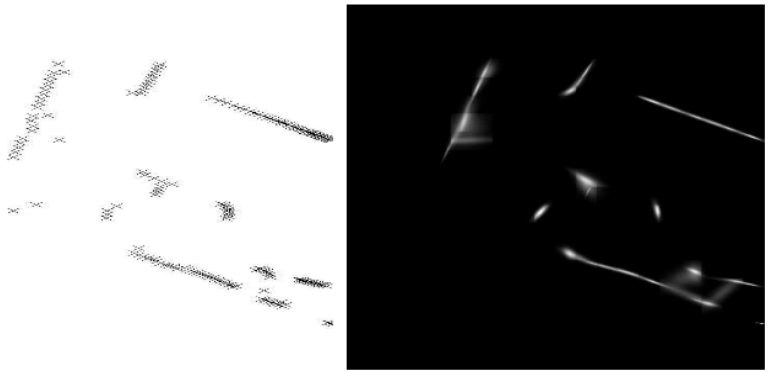
2、高斯牛顿优化方法

3、NDT方法

4、相关匹配方法及分支定界加速

NDT方法

示意图



NDT方法示意图

基本思想

- 把空间用cell进行划分；
- 用高斯分布去模拟似然场，形成一个天然分段连续的似然场；
- 在得到连续的似然场之后，直接用牛顿方法进行迭代即可；
- 似然场连续，不受离散化带来的影响。

NDT方法

数学描述

$T=(T_x,T_y,T_\theta)$ 表示需要求解的姿态变换

$X_i=\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}$ 表示第i个激光点的坐标

$X_i^{'}$ 表示第i个激光点经过姿态变换T后的坐标

$$X_i'=\begin{pmatrix}\cos T_\theta & -\sin T_\theta\\ \sin T_\theta & \cos T_\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}T_x\\T_y\end{pmatrix}$$

q_i,Σ_i 表示点X_i对应的高斯分布的均值和方差

- 当前帧激光点i的得分为：

$$score_i=\exp(-\frac{(X_i^{'}-q_i)^T\Sigma_i^{-1}(X_i^{'}-q_i)}{2})$$

- 因此匹配的目标函数：

$$\max\sum score_i \Longrightarrow \min\sum -score_i$$

令 $q=X_i^{'}-q_i$，则

$$score_i=\exp(-\frac{q^T\Sigma_i^{-1}q}{2})$$

- 目标函数并没有取误差的平方。
- 不对score()函数进行线性化。
- 本式中可以直接求解Hessian矩阵。

NDT方法

牛顿方法

- 假设目标函数为：

$$\min f(x)$$

- 等价于：

$$g(x) = f'(x) = 0$$

- 进行泰勒展开，取一阶进行：

$$g(x+\Delta x) = g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x}\Delta x = 0$$

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x}\Delta x = -g(x)$$

$$x = x + \Delta x$$

- 等价于：

$$H\Delta x = -J$$

因此，用牛顿法进行迭代求解时，关键是要计算目标函数$f(x)$的Hessian矩阵和Jacobian矩阵。

- 同时，如果：

$$f(x) = \sum f_i(x)$$

则：

$$J = \sum J_i$$

$$H = \sum H_i$$

NDT方法

NDT求解

显然：

$$f_i = -score_i = -\exp(-\frac{q^T \Sigma_i^{-1} q}{2})$$

因此，根据链式法则：

$$J_i = \frac{\partial f_i}{\partial T} = -\exp(-\frac{q^T \Sigma_i^{-1} q}{2})(-q^T \Sigma_i^{-1}) \frac{\partial q}{\partial T}$$

$$H_i = \frac{\partial J_i}{\partial T} = -\exp(-\frac{q^T \Sigma^{-1} q}{2})(-q^T \Sigma^{-1} \frac{\partial q}{\partial T})(-q^T \Sigma^{-1} \frac{\partial q}{\partial T}) - \exp(-\frac{q^T \Sigma^{-1} q}{2})(-\frac{\partial q^T}{\partial T} \Sigma^{-1} \frac{\partial q}{\partial T}) - \exp(-\frac{q^T \Sigma^{-1} q}{2})(-q^T \Sigma^{-1} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2})$$

其中，$q = X_i^{'} - q_i \qquad \frac{\partial q}{\partial T} = \frac{\partial X_i^{'}}{\partial T}$

$$X_i^{'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{\partial X_i^{'}}{\partial T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_i \sin\theta - y_i \cos\theta \\ 0 & 1 & x_i \cos\theta - y_i \sin\theta \end{pmatrix}$$

NDT方法

算法流程

1. 将空间环境进行cell分割（若是二维空间，则离散为栅格，若是三维空间则离散划分为立方体），这样就可以将点云划分到不同cell中；

2. 用高斯分布刻画每个cell点云的分布，其均值和方差根据下方公式计算；

$$\mu_i^s = \frac{1}{|\mathcal{V}_i|} \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{V}_i} \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{\Sigma}_i^s = \frac{1}{|\mathcal{V}_i|} \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{V}_i} (\mathbf{p}_i - \mu_i)^T (\mathbf{p}_i - \mu_i)$$

3. 根据初始解把当前帧的激光点转换到参考帧，并确定在哪一个cell中；

4. 计算当前帧每个激光点在所属cell中的$score_i$；

5. 计算目标函数$max \sum score_i$，通过牛顿方法进行迭代求解，得到姿态转换矩阵T。

帧间匹配算法

1、爬山法(拟梯度法)

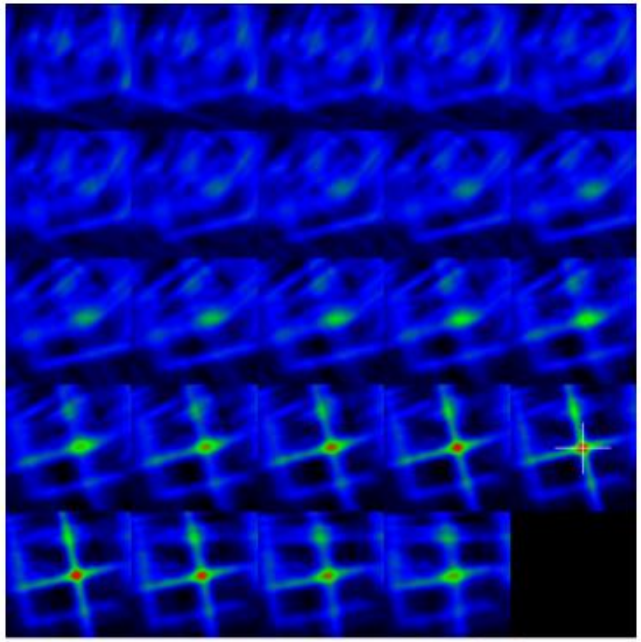
2、高斯牛顿优化方法

3、NDT方法

4、相关匹配方法及分支定界加速

相关方法(Correlation-based Method)

帧间匹配似然场



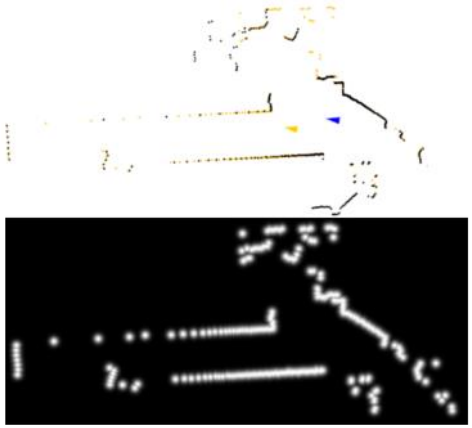
似然场示意图

- 高度非凸，存在很多的局部极值
- 对初值非常敏感
- 进行暴力匹配，排除初值影响
- 通过加速策略，降低计算量
- 计算位姿匹配方差

相关方法(Correlation-based Method)

算法流程

- 1. 构造似然场(方法见第3节课)；
- 2. 在指定的位姿搜索空间内进行搜索，计算每一个位姿的得分；
- 3. 根据步骤2中位姿的得分，得分最高的位姿即为要求解的位姿，同时计算本次位姿匹配的方差。



相关方法(Correlation-based Method)

位姿搜索

1. 暴力搜索

三层for循环(x, y, θ)枚举每一个位姿，
分别计算每一个位姿的得分，计算量巨大。
因为激光雷达数据在每一个位姿都要重新投影，
投影需要计算sin和cos函数。

- 计算量巨大，投影矩阵生成需要计算sin和cos，
  计算的次数为: $n_x n_y n_\theta$
- 点的投影涉及到矩阵乘法，需要计算的次数: $n_x n_y n_\theta \mathrm{n}$

$$
\begin{aligned}
&bestPose = (x_0, y_0, \theta_0)\\
&bestScore = Score(V2T(bestPose), Z_t)\\
&for \quad \mathrm{d}x \in (-\Delta x, \Delta x)\\
&\quad for \quad dy \in (-\Delta y, \Delta y)\\
&\quad\quad for \quad d\theta \in (-\Delta\theta, \Delta\theta)\\
&\quad\quad\quad T = V2T(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \theta_0 + \Delta\theta)\\
&\quad\quad\quad \text{if } (\mathrm{Score}(T, Z_t) > bestScore)\\
&\quad\quad\quad\quad bestScore = Score(T, Z_t)\\
&\quad\quad\quad\quad bestPose = (x_0 + dx, y_0 + dy, \theta_0 + d\theta)\\
&\quad\quad\quad\quad endif
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Score(T, Z):\\
&\quad tmpScore = 0\\
&\quad for \quad i = 1:n\\
&\quad\quad z_i' = Tz_i\\
&\quad\quad tmpScore += M(z_i')\\
&\quad endfor\\
&\quad return \quad tmpScore
\end{aligned}
$$

相关方法(Correlation-based Method)

位姿搜索

2. 预先投影搜索

交换暴力搜索中的循环顺序，
最外层对θ进行搜索，生成投影矩阵时，
sin 和cos的计算从$n_x n_y n_\theta$降低到n_θ

Score函数中的点投影运算乘法运算消除，
只剩下加法运算

$$
\begin{aligned}
&bestPose = (x_0, y_0, \theta_0)\\
&bestScore = Score(V2T(bestPose), Z_t)\\
&for \quad d\theta \in (-\Delta\theta, \Delta\theta)\\
&\quad R = R(\theta + d\theta)\\
&\quad Z_t' = RZ_t\\
&\quad for \quad dx \in (-\Delta x, \Delta x)\\
&\qquad for \quad dy \in (-\Delta y, \Delta y)\\
&\qquad\quad t = [x_0 + \Delta x \quad y_0 + \Delta y]^T\\
&\qquad\quad T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\\
&\qquad\quad \text{if } (Score(T, Z_t') > bestScore)\\
&\qquad\qquad bestScore = Score(T, Z_t')\\
&\qquad\qquad bestPose = (x_0 + dx, y_0 + dy, \theta_0 + d\theta)\\
&\qquad\qquad endif
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Score(T, Z):\\
&\quad tmpScore = 0\\
&\quad for \quad i = 1:n\\
&\qquad z_i' = z + t_i\\
&\qquad tmpScore += M(z_i')\\
&\quad endfor\\
&\quad return \quad tmpScore
\end{aligned}
$$

相关方法(Correlation-based Method)

位姿搜索

3. 多分辨率搜索

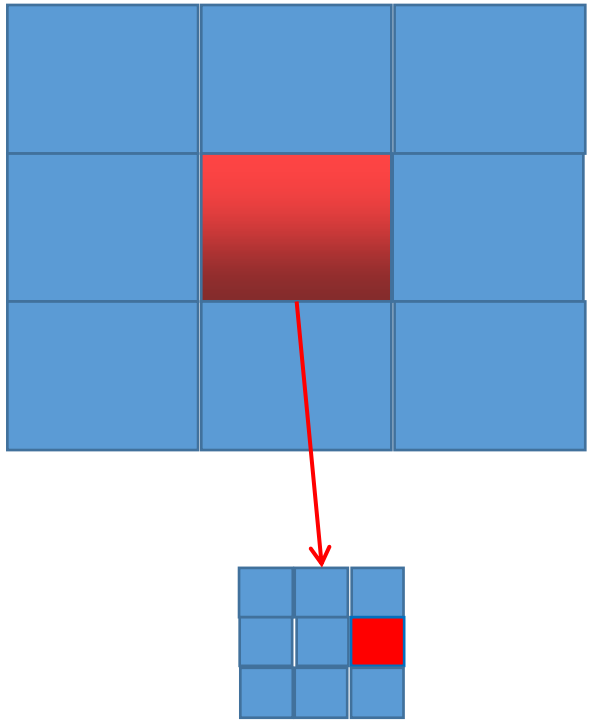
(1)构造粗分辨率$(25cm)$和
细分辨率$(2.5cm)$两个似然场

(2)首先在粗分辨率似然场上进行搜索，
获取最优位姿

(3)把粗分辨率最优位姿对应的栅格进行
细分辨率划分，然后再进行细分辨率
搜索，再次得到最优位姿。

(4)粗分辨率地图的栅格的似然值为对应
的细分辨率地图对应空间的所有栅格的
最大值

不能保证得到最优解!!!



相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界算法

- 常用的树形搜索剪枝算法
- 求解整数规划问题
- 解的数量为有限个
- 把最优解求解问题转换为树形搜索问题，根节点表示整个解空间，叶子节点表示最优解，中间的节点表示解空间的某一部分子空间。
- 分枝：即根节点(深度为n)表示整个解深度n-1子节点表示解空间的子空间，深度n-2的节点表示深度n-1节点的子空间，这样层层划分，直到划分到真实解，也就是叶子节点(深度为0)为止。
- 定界：对于搜索树中的每一个节点，确定以该节点为根节点的子树的界。对于最小值问题，确定下界；对于最大值问题，确定上界。(SLAM中为上界)
- SLAM中一个多棵树同时搜索，每棵树表示一个固定的角度

相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界算法

Algorithm 2 Generic branch and bound

$best\_score \leftarrow -\infty$
$\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}_0$
while $\mathcal{C} \neq \emptyset$ **do**
  Select a node $c \in \mathcal{C}$ and remove it from the set.
  if c is a leaf node **then**
    if $score(c) > best\_score$ **then**
      $solution \leftarrow n$
      $best\_score \leftarrow score(c)$
    end if
  else
    if $score(c) > best\_score$ **then**
      Branch: Split c into nodes $\mathcal{C}_c$.
      $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_c$
    else
      Bound.
    end if
  end if
end while
return $best\_score$ and $solution$ when set.

相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界在相关方法的加速作用

- 搜索树中的节点表示一个正方形的索索范围:$(c_x, c_y, c_\theta, c_h)$

$$\overline{\overline{W}}_c = \left(\left\{ (j_x, j_y) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{matrix} c_x \le j_x < c_x + 2^{c_h} \\ c_y \le j_y < c_y + 2^{c_h} \end{matrix} \right\} \times \{c_\theta\} \right)$$

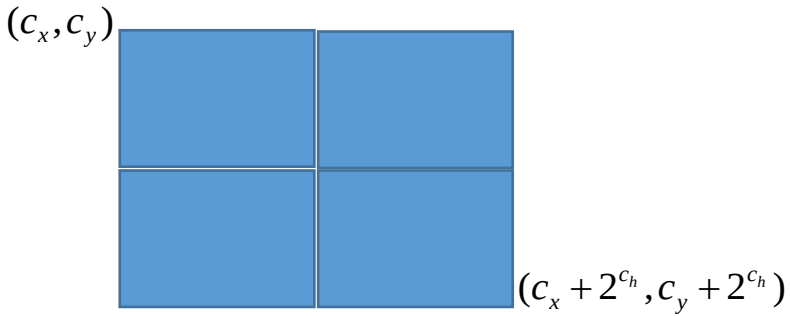
(c_x, c_y)表示搜索空间的起点

c_h表示树的深度

c_θ表示该节点对应的角度

- 分枝：对于节点$(c_x, c_y, c_\theta, c_h)$，分枝为4个子节点，四个子节点为：

$$\mathcal{C}_c = \left(\left(\{c_x, c_x + 2^{c_h - 1}\} \times \{c_y, c_y + 2^{c_h - 1}\} \times c_\theta \right) \cap \overline{W} \right) \times \{c_h - 1\}.$$



相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界在相关方法的加速作用

- 定界：构造得分函数，使得得分函数对于节点c的打分，是以节点c为根节点的子树的上界：

$$score(c) = \sum_{k=1}^{K} \max_{j \in \overline{\overline{W}}_c} M_{\text{nearest}}(T_{\xi_j} h_k)$$

对于每一个激光点，遍历该节点的每一个搜索位姿，选择得分最高的位姿的得分，作为该搜索空间的得分

$$\geq \sum_{k=1}^{K} \max_{j \in \overline{W}_c} M_{\text{nearest}}(T_{\xi_j} h_k)$$

$$\geq \max_{j \in \overline{W}_c} \sum_{k=1}^{K} M_{\text{nearest}}(T_{\xi_j} h_k).$$

以节点C为根节点的子树的最高得分

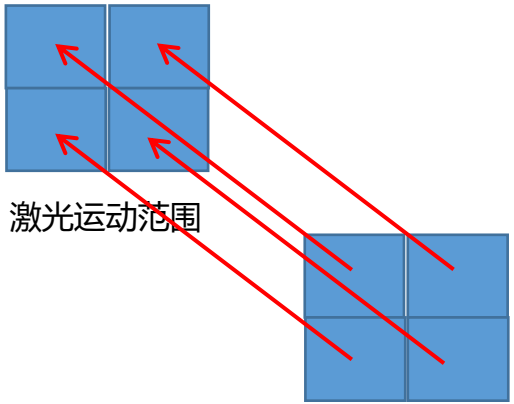
$$\overline{W}_c = \overline{\overline{W}}_c \cap \overline{W}$$

$\overline{W}$ 表示地图的可行区域

$M_{nearest}(X)$ 表示地图中点X的似然值

相关方法(Correlation-based Method)

多分辨率地图



遍历位姿等价于遍历激光点击中范围

得分函数可以通过多分辨率地图的方式解决

机器人位姿不变，不同层节点构造不同分辨率地图

相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界在相关方法的加速作用

Algorithm 2 Generic branch and bound

$best\_score \leftarrow -\infty$
$\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}_0$
while $\mathcal{C} \neq \emptyset$ **do**
  Select a node $c \in \mathcal{C}$ and remove it from the set.
  if c is a leaf node **then**
    if $score(c) > best\_score$ **then**
      $solution \leftarrow n$
      $best\_score \leftarrow score(c)$
    end if
  else
    if $score(c) > best\_score$ **then**
      Branch: Split c into nodes $\mathcal{C}_c$.
      $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_c$
    else
      Bound.
    end if
  end if
end while
return $best\_score$ and $solution$ when set.

Algorithm 3 DFS branch and bound scan matcher for (BBS)

$best\_score \leftarrow score\_threshold$
Compute and memorize a score for each element in $\mathcal{C}_0$.
Initialize a stack $\mathcal{C}$ with $\mathcal{C}_0$ sorted by score, the maximum score at the top.
while $\mathcal{C}$ is not empty **do**
  Pop c from the stack $\mathcal{C}$.
  if $score(c) > best\_score$ **then**
    if c is a leaf node **then**
      $match \leftarrow \xi_c$
      $best\_score \leftarrow score(c)$
    else
      Branch: Split c into nodes $\mathcal{C}_c$.
      Compute and memorize a score for each element in $\mathcal{C}_c$.
      Push $\mathcal{C}_c$ onto the stack $\mathcal{C}$, sorted by score, the maximum score last.
    end if
  end if
end while
return $best\_score$ and $match$ when set.

参考资料

[1]A Flexble and Scalable SLAM System with Full 3D Motion Estimation

[2] The Normal Distributions Transform：A New Approach to Laser Scan Matching

[3] Real-Time Correlative Scan Matching

[4] Real-Time Loop Closure in 2D LIDAR SLAM

作业

详细见作业说明

感谢聆听！

Thanks for Listening