



# 传感器数据处理I： 轮式里程计运动模型 及标定

主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人  
电子科技大学硕士





## 课程内容

### 轮式里程计模型



两轮差分底盘的运动学模型



航迹推算(Dead Reckoning)

### 轮式里程计标定



线性最小二乘的基本原理



线性最小二乘的直线拟合



线性最小二乘在里程计标定中的应用



## 课程内容

### 轮式里程计模型



两轮差分底盘的运动学模型



航迹推算(Dead Reckoning)

### 轮式里程计标定



线性最小二乘的基本原理



线性最小二乘的直线拟合

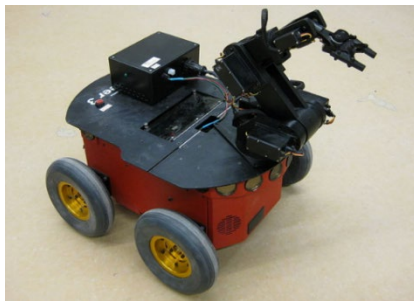


线性最小二乘在里程计标定中的应用



# 两轮差速底盘的运动学模型

## 应用实例



## 优点

- 结构简单
- 便宜(2个电机)
- 模型简单



# 两轮差速底盘的运动学模型



## 运动解算

已知

$\omega_R, \omega_L$  : 两轮自转的角速度

$v_R, v_L$  : 两轮的线速度

$d$  : 轮子离底盘中心的距离

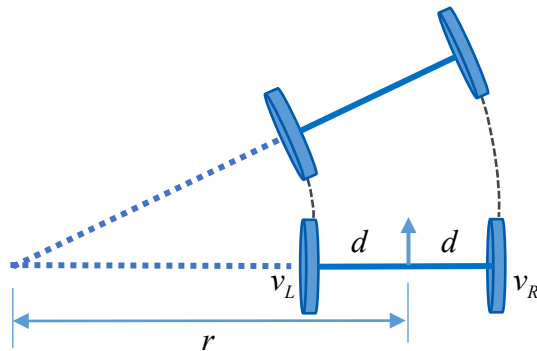
$b = 2d$  : 两轮之间的距离

未知

$v$  : 底盘中心的线速度

$w$  : 底盘中心的角速度

$r$  : 底盘中心圆弧运动的半径



注：

直线运动可以看作圆周运动的特殊情况，即  $r \rightarrow +\infty$ 。

直线运动时， $v_R = v_L$ 。



## 两轮差速底盘的运动学模型



### 运动解算

已知

$\omega_R, \omega_L$ : 两轮自转的角速度

$v_R, v_L$ : 两轮的线速度

$d$ : 轮子离底盘中心的距离

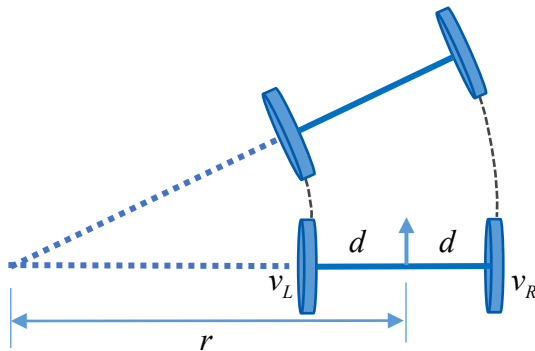
$b = 2d$ : 两轮之间的距离

$$\omega = \underbrace{\omega_l = \omega_r}_{\text{相对于车体旋转中心的角速度}} \Rightarrow \frac{v_L}{r-d} = \frac{v_R}{r+d}$$

相对于车体旋转中心的角速度  $\Rightarrow v_L(r+d) = v_R(r-d)$

$$\Rightarrow (v_R - v_L)r = (v_R + v_L)d$$

$$\Rightarrow r = \frac{(v_R + v_L)d}{(v_R - v_L)}$$





## 两轮差速底盘的运动学模型



### 运动解算

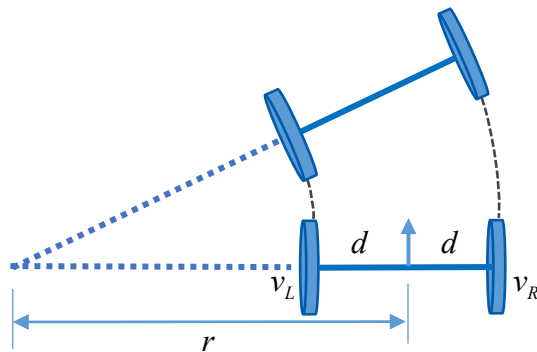
已知

$\omega_R, \omega_L$ : 两轮自转的角速度

$v_R, v_L$ : 两轮的线速度

$d$ : 轮子离底盘中心的距离

$b = 2d$ : 两轮之间的距离



$$\omega = \frac{v_R}{r + d}$$

$$r + d = \frac{(v_R + v_L)d}{(v_R - v_L)} + \frac{(v_R - v_L)d}{(v_R - v_L)} = \frac{2v_R d}{(v_R - v_L)}$$



$$\omega = \frac{v_R - v_L}{2d}$$



# 两轮差速底盘的运动学模型



## 运动解算

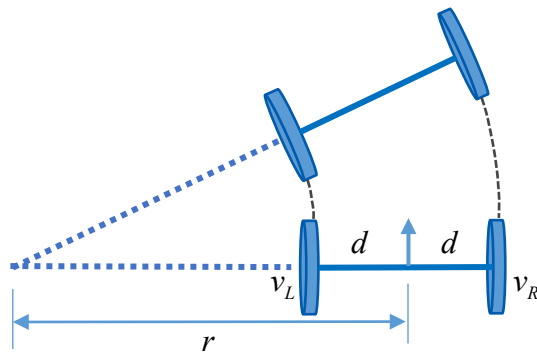
已知

$\omega_R, \omega_L$ : 两轮自转的角速度

$v_R, v_L$ : 两轮的线速度

$d$ : 轮子离底盘中心的距离

$b = 2d$ : 两轮之间的距离



$$\omega = \frac{v_R - v_L}{2d}$$

$$v = \omega * r = \frac{v_R - v_L}{2d} \frac{(v_R + v_L)d}{v_R - v_L} = \frac{v_R + v_L}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_R = \omega_R \cdot r_R \\ v_L = \omega_L \cdot r_L \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_L}{2} & \frac{r_R}{2} \\ -\frac{r_L}{b} & \frac{r_R}{b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix}$$





## 里程计模型

### 轮式里程计模型



两轮差分底盘的运动学模型



航迹推算(Dead Reckoning)

### 轮式里程计标定



线性最小二乘的基本原理



线性最小二乘的直线拟合



线性最小二乘在里程计标定中的应用



# 航迹推算



## 递推公式

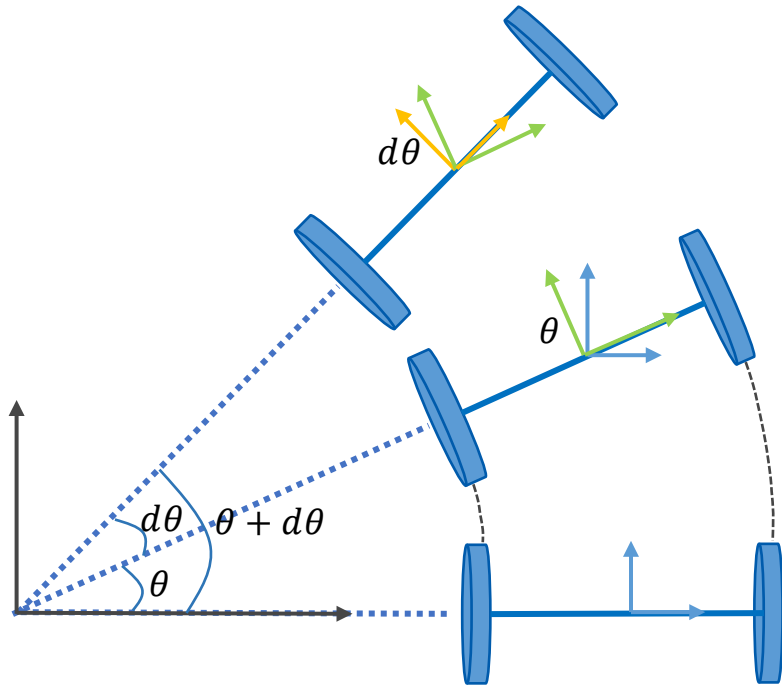
- $(x', y', \theta')$  为当前时刻位姿--世界坐标系
- $(x, y, \theta)$  为上一时刻位姿--世界坐标系
- $(dx, dy, d\theta)$  为运动增量--机器人坐标系

增量从机器人坐标系转换到世界坐标系:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{bmatrix}$$

加入噪声:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx + \varepsilon_x \\ dy + \varepsilon_y \\ d\theta + \varepsilon_\theta \end{bmatrix}$$



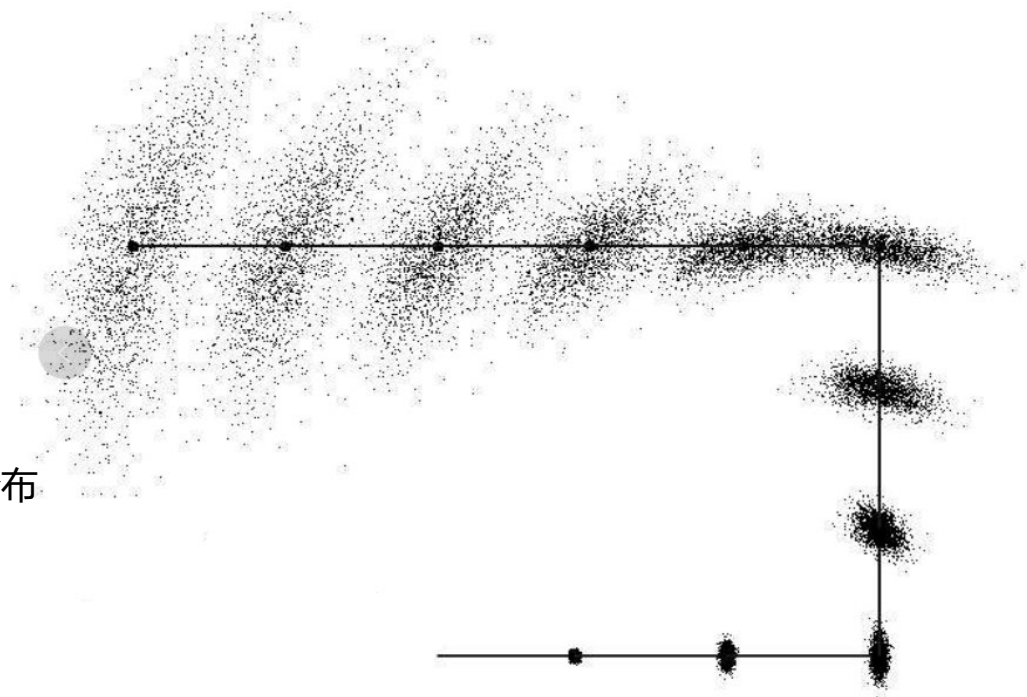


## 航迹推算



### 里程计数据递推

- 里程计积分的累计误差无法消除
- 误差随着积分增大
- 时间趋于无穷时，位姿分布趋于均匀分布





## 课程内容

### 轮式里程计模型



两轮差分底盘的运动学模型



航迹推算(Dead Reckoning)

### 轮式里程计标定



线性最小二乘的基本原理



线性最小二乘的直线拟合



线性最小二乘在里程计标定中的应用



## 线性最小二乘



### 线性方程组

$$Ax = b$$

其中,  $A$ 为 $m \times n$ 的矩阵,  $x$ 为 $n \times 1$ 的向量;  
 $m$ 表示约束个数,  $n$ 表示自变量个数。

- 当 $m = n$ 时, 适定方程组, 方程组有唯一解
- 当 $m < n$ 时, 欠定方程组, 方程组有无穷多解
- 当 $m > n$ 时, 超定方程组, 方程组有通常无解



### 最小二乘解

- ◆ 绝大多数情况为 $m > n$ , 超定方程组
- ◆ 多数约束自相矛盾, 无解!
- ◆ 无解但是有最小二乘解
- ◆ 通解:  $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$



## 线性最小二乘



### 最小二乘的求解—线性空间的角度

$S$  表示 $A$ 的列向量张成的线性空间

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \cdot x_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \cdot x_3$$

- 无解：表示 $Ax = b$ 对于任意的 $x$ 均不成立，即 $b$ 不在 $S$ 中。
- 最小二乘解：线性空间 $S$ 中，离 $b$ 最近的向量。

**向量 $b$ 在线性空间 $S$ 中的投影**



## 线性最小二乘



### 最小二乘的求解—线性空间的角度

设： $Ax^*$ 为向量 $b$ 在空间 $S$ 中的投影，显然 $(b - Ax^*)$ 垂直于空间 $S$ 。

则： $(b - Ax^*)$ 跟矩阵 $A$ 的每一个列向量都垂直。

令 $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ， $a_i$ 表示矩阵 $A$ 的第 $i$ 个列向量，

可得： $a_i^T (b - Ax^*) = 0$

$$\Rightarrow A^T (b - Ax^*) = 0$$

$$\Rightarrow A^T b = A^T A x^*$$

$$\Rightarrow x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$$



## 课程内容

### 轮式里程计模型



两轮差分底盘的运动学模型



航迹推算(Dead Reckoning)

### 轮式里程计标定



线性最小二乘的基本原理



线性最小二乘的直线拟合



线性最小二乘在里程计标定中的应用

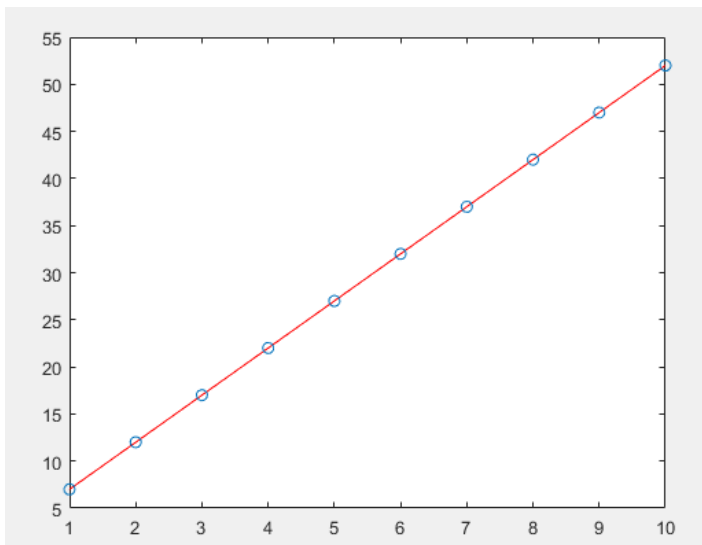




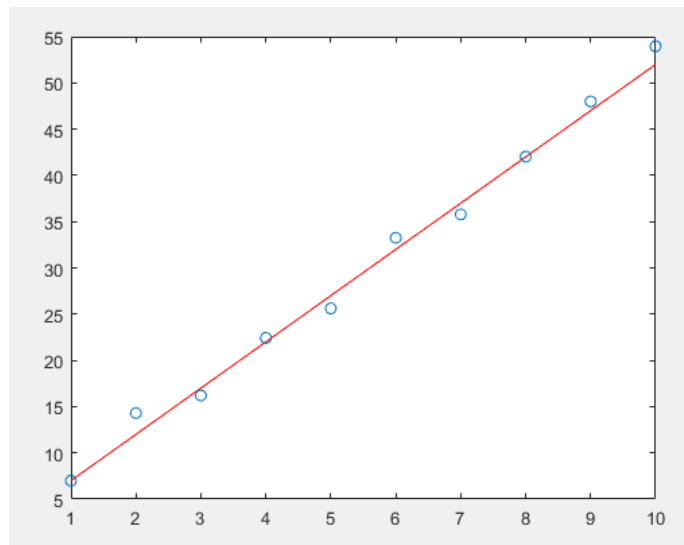
# 线性最小二乘



## 直线拟合



理想情况



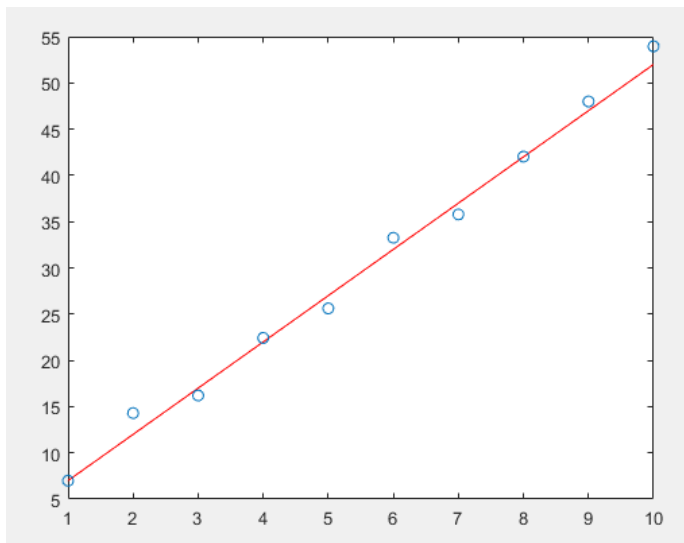
混入采样噪声



## 线性最小二乘



### 直线拟合— $y=5x+2$



混入采样噪声

- 采样数据:

$$x=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$$

$$y = (6.9918, 14.2987, 16.2019, 22.4263, 25.6191, 33.2563, 35.7755, 42.0298, 47.9954, 53.9545)$$

- 假设直线方程:  $y = ax + b$ , 带入数据可得

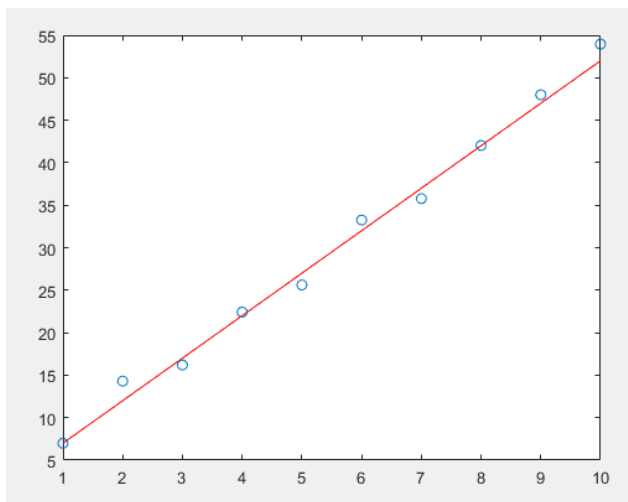
$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \\ &\vdots \\ ax_n + b &= y_n \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$
$$Ax = b$$



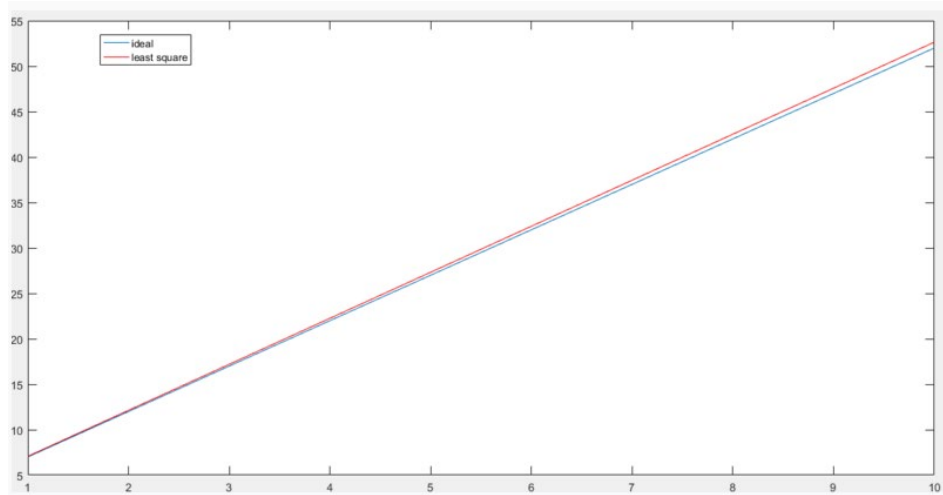
## 线性最小二乘



### 直线拟合— $y=5x+2$



混入采样噪声



拟合对比



## 课程内容

### 轮式里程计模型



两轮差分底盘的运动学模型



航迹推算(Dead Reckoning)

### 轮式里程计标定



线性最小二乘的基本原理



线性最小二乘的直线拟合



线性最小二乘在里程计标定中的应用



## 里程计标定



### 直接线性方法

- 通用性强
- 实现简单
- 精度不高



### 基于模型的方法

- 精度高
- 实现复杂
- 特异性高

根据不同的传感器模型，比如激光、相机、各种轮速计，实际过程中要根据各自的物理模型来进行标定。以两轮差分底盘为例，需要计算其运动模型。

在已知传感器物理模型时，采用基于模型的方法（白盒标定）；

在不知道传感器物理模型时，可尝试直接线性方法（黑盒标定）。



## 直接线性方法

$u_i^*$ : 激光雷达的scan-match数据作为真值

$u_i$ : 里程计测量得到的数据

假设成线性关系  $u_i^* = X * u_i$

其中:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

对于第  $i$  组数据, 可得:

$$u_{ix} * x_{11} + u_{iy} * x_{12} + u_{i\theta} * x_{13} = u_{ix}^*$$

$$u_{ix} * x_{21} + u_{iy} * x_{22} + u_{i\theta} * x_{23} = u_{iy}^*$$

$$u_{ix} * x_{31} + u_{iy} * x_{32} + u_{i\theta} * x_{33} = u_{i\theta}^*$$

$$\begin{matrix} & A_i & \Downarrow & \vec{X} & b_i \\ \begin{bmatrix} u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{33} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} u_{ix}^* \\ u_{iy}^* \\ u_{i\theta}^* \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{X} = (A^T A)^{-1} A^T b$$



## 基于模型的方法

- 运动学模型

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_L}{2} & \frac{r_R}{2} \\ -\frac{r_L}{b} & \frac{r_R}{b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix}$$

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt$$

$$x(t) = \int v(t) \cos(\theta(t)) dt$$

$$y(t) = \int v(t) \sin(\theta(t)) dt$$

标定的 $\Delta t$ 时间内，假设匀速运动，则

$$\omega(t) = \omega = J_{21} \omega_L + J_{22} \omega_R$$

$$v(t) = v = J_{11} \omega_L + J_{12} \omega_R$$

$$\text{因为 } J_{11} = -\frac{b}{2} \cdot J_{21} \quad J_{12} = \frac{b}{2} \cdot J_{22}$$

$$\text{所以 } v(t) = v = \frac{b}{2} (-J_{21} \omega_L + J_{22} \omega_R)$$

因此，已知两个轮子的角速度 $\omega_L$ 和 $\omega_R$ ，需要求解两个轮子的半径 $r_L$ 和 $r_R$ ，以及两轮之间的距离 $b$ 。



# 里程计标定



## 基于模型的方法

- 假设激光雷达位于车体的正中心
- 激光雷达的匹配值作为观测值
- 里程计的积分值作为预测值
- 通过最小化预测值和观测值的差，即可得到里程计的参数
- $r_x, r_y, r_\theta$  : 里程计的积分值
- $s_x, s_y, s_\theta$  : 激光雷达的匹配值

角度积分表达式

$$r_\theta(t) = \int \omega(t) dt = \int J_{21} \omega_L + J_{22} \omega_R dt$$

a

$$r_\theta(t) = (\omega_L \cdot \Delta T \quad \omega_R \cdot \Delta T) \begin{pmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{pmatrix}$$

由 $n$ 组数据，得到线性方程组：

$$\begin{bmatrix} \omega_{L0} \cdot \Delta T_0 & \omega_{R0} \cdot \Delta T_0 \\ \omega_{L1} \cdot \Delta T_1 & \omega_{R1} \cdot \Delta T_1 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{Ln} \cdot \Delta T_n & \omega_{Rn} \cdot \Delta T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\theta 0} \\ S_{\theta 1} \\ \vdots \\ S_{\theta n} \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$





## 基于模型的方法

利用线性最小二乘，求得：
$$\begin{bmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (\text{公式1})$$

在已知  $J_{21}$  和  $J_{22}$  的情况下，里程计的位置积分和参数  $b$  呈线性关系，推导过程如下：

$$r_x(t) = \int v(t) \cos(\theta(t)) dt = \frac{b}{2} (-J_{21} \omega_L + J_{22} \omega_R) \int \cos(\theta(t)) dt = c_x b$$

$$r_y(t) = \int v(t) \sin(\theta(t)) dt = \frac{b}{2} (-J_{21} \omega_L + J_{22} \omega_R) \int \sin(\theta(t)) dt = c_y b$$

由  $n$  组数据，得到线性方程组：

$$\begin{bmatrix} c_{x0} \\ c_{y0} \\ \vdots \\ c_{xn} \\ c_{yn} \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} s_{x0} \\ s_{y0} \\ \vdots \\ s_{xn} \\ s_{yn} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{求得 } b \quad (\text{公式2})$$



## 里程计标定



### 基于模型的方法

已知参数 $b$ ,  $J_{21}$  和  $J_{22}$ , 因此:

$$\begin{array}{l} J_{21} = -\frac{r_L}{b} \\ J_{22} = \frac{r_R}{b} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} r_L = -J_{21} \cdot b \\ r_R = J_{22} \cdot b \end{array} \quad (\text{公式3})$$

至此，两轮直径和轮间距都已知，求解完毕。



## 里程计标定



### 基于模型的方法总结

收集 $n$ 段数据，每段数据包含两个轮子的角速度 $\omega_L$ 和 $\omega_R$ ，该段数据持续的时间 $\Delta t$ 以及激光雷达的匹配值 $s_x, s_y, s_\theta$

按照公式1，计算中间变量 $J_{21}$ 和 $J_{22}$ ；

按照公式2，计算轮间距 $b$ ；

按照公式3，计算两个轮子的半径。



## 参考资料

[1] Simultaneous calibration of odometry and sensor parameters for mobile Robots



作业

详细见说明文档



结语

感谢聆听！

Thanks for Listening

