第二章-三维空间的刚体运动-作业分享

主讲人 王其超

2021/2/3

纲要

- 第一部分：熟悉Eigen矩阵运算
- 第二部分：几何运算练习
- 第三部分：旋转的表达
- 第四部分：罗德里格斯公式的证明
- 第五部分：四元数运算性质的验证
- 第六部分：*熟悉C++11

一、熟悉Eigen矩阵运算

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- **什么条件下，x有解且唯一**

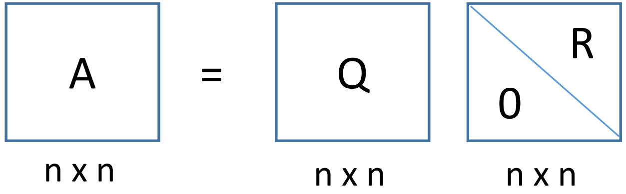
  系数方阵A的秩 = 增广矩阵[A b]的秩 = 方程组未知数x的个数n，线性方程组有唯一解。

- **高斯消元法的原理**

  增广矩阵(A | b) $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 上三角矩阵(U | c) $\xrightarrow{\text{回代}}$ $Ux = c$ 的解 $\xleftrightarrow{\text{等价于}}$ $Ax = b$ 的解

- **QR分解的原理**

  分解为**正交矩阵Q**和一个**上三角矩阵R**的乘积



- **Cholesky分解的原理**

  分解为**下三角矩阵L**与其**转置矩阵L^T**的乘积

A=LL

$$A=LL^T \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{pmatrix}$$

一、熟悉Eigen矩阵运算

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- 编程实现A为100x100随机矩阵时，用QR分解和Cholesky分解求x的程序？

根据eigen官网中矩阵分解的函数 http://eigen.tuxfamily.org/dox/group__TutorialLinearAlgebra.html

Decomposition	Method	Requirements on the matrix	Speed (small-to-medium)	Speed (large)	Accuracy
PartialPivLU	partialPivLu()	Invertible	++	++	+
FullPivLU	fullPivLu()	None	-	- -	+++
HouseholderQR	householderQr()	None	++	++	+
ColPivHouseholderQR	colPivHouseholderQr()	None	+	-	+++
FullPivHouseholderQR	fullPivHouseholderQr()	None	-	- -	+++
CompleteOrthogonalDecomposition	completeOrthogonalDecomposition()	None	+	-	+++
LLT	llt()	Positive definite	+++	+++	+
LDLT	ldlt()	Positive or negative semidefinite	+++	+	++
BDCSVD	bdcSvd()	None	-	-	+++
JacobiSVD	jacobiSvd()	None	-	- - -	+++

一、熟悉Eigen矩阵运算

- 编程实现A为100x100随机矩阵时，用QR分解和Cholesky分解求x的程序？

```
#define MATRIX_SIZE 100     //A为100x100的随机矩阵
Matrix<double, Dynamic, Dynamic> A = MatrixXd::Random(MATRIX_SIZE, MATRIX_SIZE);
Matrix<double, Dynamic, 1> B = MatrixXd::Random(MATRIX_SIZE, 1);      //B为动态列向量
Matrix<double, Dynamic, 1> X;       //X为需要求的解向量

A_positiveDefinite = A * A.transpose();  //保证矩阵A是正定矩阵，Cholesky分解需要正定矩阵

X = A_positiveDefinite.householderQr().solve(B);              //标准QR，最快
X = A_positiveDefinite.colPivHouseholderQr().solve(B);        //带有列旋转的QR，次快次准
X = A_positiveDefinite.fullPivHouseholderQr().solve(B);       //带有全旋转的QR，最准

X = A_positiveDefinite.llt().solve(B);     //LLT是eigen中的标准Cholesky分解函数
X = A_positiveDefinite.ldlt().solve(B);   //LDLT是Cholesky分解法的改进版本
```

纲要

- 第一部分：熟悉Eigen矩阵运算
- **第二部分：几何运算练习**
- 第三部分：旋转的表达
- 第四部分：罗德里格斯公式的证明
- 第五部分：四元数运算性质的验证
- 第六部分：*熟悉C++11

二、几何运算练习

点在小萝卜1号坐标系下的坐标 $p_{R_1} = T_{R_1,W} \cdot p_W$

世界坐标系到小萝卜1号坐标系的变换

点在世界坐标系下的坐标 $p_W = T_{W,R_1} \cdot p_{R_1}$

小萝卜1号坐标系到世界坐标系的变换

点在小萝卜2号坐标系下的坐标 $p_{R_2} = T_{R_2,W} \cdot p_W = T_{R_2,W} \cdot T_{W,R_1} \cdot p_{R_1}$

世界坐标系到小萝卜2号坐标系的变换

二、几何运算练习

```
Quaternion q1(0.55, 0.3, 0.2, 0.2);                 //小萝卜1号的旋转四元数
Vector3d t1(0.7, 1.1, 0.2);                         //小萝卜1号的平移
Quaternion q2(-0.1, 0.3, -0.7, 0.2);                //小萝卜2号的旋转四元数
Vector3d t2(-0.1, 0.4, 0.8);                        //小萝卜2号的平移
q1.normalize();    q2.normalize();                  // 题目提示1. 四元数使用前归一化
Vector3d p1(0.5, -0.1, 0.2);                        //空间中某个点在小萝卜1号的相机坐标系中的坐标
Isometry3d T1w(q1), T2w(q2);                        //欧式变换矩阵
T1w.pretranslate(t1);  T2w.pretranslate(t2);        //平移
//小萝卜2号中相机坐标系下该点的坐标为:
Vector3d p2 = T2w * T1w.inverse() * p1;
```

$T_{R_1,W}$ $T_{R_2,W}$

$$\boxed{p_{R_2} = T_{R_2,W} T_{W,R_1} p_{R_1}}$$

纲要

- 第一部分：熟悉Eigen矩阵运算
- 第二部分：几何运算练习
- **第三部分：旋转的表达**
- 第四部分：罗德里格斯公式的证明
- 第五部分：四元数运算性质的验证
- 第六部分：*熟悉C++11

三、旋转的表达

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

1. 设有旋转矩阵R，证明$R^T R = I$ 且 $\det R = +1$

证明：（参考《视觉 SLAM 十四讲》第二版第 44 页）

设单位正交基(e_1,e_2,e_3)经过一次旋转后变为(e_1',e_2',e_3')，那么空间中的一个坐标为$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$的点，此时该点在旋转后的坐标系中的坐标则为$\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\end{bmatrix}$，

由于这个空间点没有发生移动，因此就有：

$$(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=(e_1',e_2',e_3')\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\end{bmatrix}$$

式左乘一个$\begin{bmatrix}e_1^T\\e_2^T\\e_3^T\end{bmatrix}$，可知

$$\because \begin{bmatrix}e_1^T\\e_2^T\\e_3^T\end{bmatrix}(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1^Te_1 & e_1^Te_2 & e_1^Te_3\\e_2^Te_1 & e_2^Te_2 & e_2^Te_3\\e_3^Te_1 & e_3^Te_2 & e_3^Te_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1^T\\e_2^T\\e_3^T\end{bmatrix}(e_1',e_2',e_3')\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\end{bmatrix}$$

$$=\boxed{\begin{bmatrix}e_1^Te_1' & e_1^Te_2' & e_1^Te_3'\\e_2^Te_1' & e_2^Te_2' & e_2^Te_3'\\e_3^Te_1' & e_3^Te_2' & e_3^Te_3'\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\end{bmatrix}=Ra'$$

三、旋转的表达

1. 设有旋转矩阵R，证明 $R^T R = I$ 且 $\det R = +1$

$$\therefore 令\ R = \begin{bmatrix} e_1^T e_1' & e_1^T e_2' & e_1^T e_3' \\ e_2^T e_1' & e_2^T e_2' & e_2^T e_3' \\ e_3^T e_1' & e_3^T e_2' & e_3^T e_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{bmatrix} (e_1', e_2', e_3')$$

$$\therefore R^T \cdot R = \left[\begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{bmatrix} (e_1', e_2', e_3')\right]^T \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{bmatrix} (e_1', e_2', e_3')$$

$$= \begin{bmatrix} e_1'^T \\ e_2'^T \\ e_3'^T \end{bmatrix} (e_1, e_2, e_3) \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{bmatrix} (e_1', e_2', e_3')$$

$$= \begin{bmatrix} e_1'^T \\ e_2'^T \\ e_3'^T \end{bmatrix} \cdot I \cdot (e_1', e_2', e_3') = \begin{bmatrix} e_1'^T \\ e_2'^T \\ e_3'^T \end{bmatrix} (e_1', e_2', e_3') = I$$

$$\because \det(R^T R) = \det(R)^2 = \det(I) = 1$$

$$\therefore \det(R) = \pm 1$$

三、旋转的表达

2. 设有四元数 q，我们把虚部记为ε，实部记为μ，那么 q = (ε,μ)。请说明ε和μ的维度。

答：　由《视觉 SLAM 十四讲》第 56 页中间四元数的定义可知：

$$\varepsilon = \varepsilon_1 i + \varepsilon_2 j + \varepsilon_3 k + \varepsilon_0$$

前三个 ε_1，ε_2，ε_3 是虚部，ε_0 是实部，因此 $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]^T \in \mathbb{R}^3$，$\mu = \varepsilon_0$

因此虚部ε维度为三，实部μ维度为一。

三、旋转的表达

3. 定义运算+和⊕为：

$$q^+ = \begin{bmatrix} \mu 1 + \varepsilon^\times & \varepsilon \\ -\varepsilon^T & \mu \end{bmatrix} \text{和} \ q^\oplus = \begin{bmatrix} \mu 1 - \varepsilon^\times & \varepsilon \\ -\varepsilon^T & \mu \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}1)$$

其中运算×含义与∧相同，即取ε的反对称矩阵（它们都成叉积的矩阵运算形式），1 为单位矩阵。

请证明对任意单位四元数 q_1 和 q_2，四元数乘法可写成矩阵乘法：

$$q_1 q_2 = q_1^+ q_2 \ \text{或} \ q_1 q_2 = q_2^\oplus q_1 \qquad (3\text{-}2)$$

答：假设现令:

$q_1 = \varepsilon_{11}i + \varepsilon_{12}j + \varepsilon_{13}k + \mu_1$，向量形式为$[\boldsymbol{\varepsilon_1}, \mu_1]^T$

$q_2 = \varepsilon_{21}i + \varepsilon_{22}j + \varepsilon_{23}k + \mu_2$，向量形式为$[\boldsymbol{\varepsilon_2}, \mu_2]^T$

那么由于根据虚部之间的关系：

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k, ji = -k \\ jk = i, kj = -i \\ ki = j, ik = -j \end{cases} \qquad (3\text{-}3)$$

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= (\varepsilon_{11}i + \varepsilon_{12}j + \varepsilon_{13}k + \mu_1) \cdot (\varepsilon_{21}i + \varepsilon_{22}j + \varepsilon_{23}k + \mu_2) \\ &= \varepsilon_{11}\varepsilon_{21}i^2 + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}ij + \varepsilon_{11}\varepsilon_{23}ik + \mu_2\varepsilon_{11}i \\ &+ \varepsilon_{21}\varepsilon_{12}ji + \varepsilon_{22}\varepsilon_{12}j^2 + \varepsilon_{23}\varepsilon_{12}jk + \mu_2\varepsilon_{12}j \\ &+ \varepsilon_{21}\varepsilon_{13}ki + \varepsilon_{22}\varepsilon_{13}kj + \varepsilon_{23}\varepsilon_{13}k^2 + \mu_2\varepsilon_{13}k \\ &+ \mu_1\varepsilon_{21}i + \mu_1\varepsilon_{22}j + \mu_1\varepsilon_{23}k + \mu_1\mu_2 \\ &= (\mu_1\varepsilon_{21} + \mu_2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{13}\varepsilon_{22})i \\ &+ (\mu_1\varepsilon_{22} + \mu_2\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{21} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{23})j \\ &+ (\mu_1\varepsilon_{23} + \mu_2\varepsilon_{13} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21})k \\ &+ \mu_1\mu_2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{21} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{13}\varepsilon_{23} \\ &= \left[\mu_1\begin{bmatrix}\varepsilon_{21}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{23}\end{bmatrix} + \mu_2\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{13}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} i \\ j \\ k\end{bmatrix} \\ &+ \mu_1\mu_2 - \begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{21}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{23}\end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式通过内外积运算后的向量形式为：

$$q_1 \cdot q_2 = [\mu_1\boldsymbol{\varepsilon_2} + \mu_2\boldsymbol{\varepsilon_1} + \boldsymbol{\varepsilon_1} \times \boldsymbol{\varepsilon_2}, \ \mu_1\mu_2 - \boldsymbol{\varepsilon_1}^T\boldsymbol{\varepsilon_2}]^T$$

三、旋转的表达

根据反对称矩阵的定义可知：

$$\varepsilon_1^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_{13} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} & 0 & -\varepsilon_{11} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

并且

$$-\varepsilon_1^{\mathrm{T}} = [-\varepsilon_{11} \quad -\varepsilon_{12} \quad -\varepsilon_{13}]$$

因此：

$$q_1^{+}q_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 I + \varepsilon_1^{\times} & \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1^{\mathrm{T}} & \mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{\times}\varepsilon_2 + \varepsilon_1\mu_2 \\ -\varepsilon_1^{\mathrm{T}}\varepsilon_2 + \mu_1\mu_2 \end{bmatrix}$$

$$= [\mu_1\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \mu_2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \mu_1\mu_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_2]^T = q_1 \cdot q_2$$

$$q_2^{\oplus}q_1 = \begin{bmatrix} \mu_2 I - \varepsilon_2^{\times} & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_2^{\mathrm{T}} & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_2\varepsilon_1 - \varepsilon_2^{\times}\varepsilon_1 + \varepsilon_2\mu_1 \\ -\varepsilon_2^{\mathrm{T}}\varepsilon_1 + \mu_2\mu_1 \end{bmatrix} \tag{3-9}$$

很容易可以证明两个向量的叉积与内积：

$$\varepsilon_1^{\times}\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_{13} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} & 0 & -\varepsilon_{11} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_{13}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13}\varepsilon_{21} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{12}\varepsilon_{21} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} -\varepsilon_{12}\varepsilon_{23} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{11}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{13}\varepsilon_{21} \\ -\varepsilon_{11}\varepsilon_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} & 0 & -\varepsilon_{21} \\ -\varepsilon_{22} & \varepsilon_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} = -\varepsilon_2^{\times}\varepsilon_1 \tag{3-10}$$

$$\varepsilon_1^{\mathrm{T}}\varepsilon_2 = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{13}] \begin{bmatrix} \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \varepsilon_{11}\varepsilon_{21} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{23} =$$

$$[\varepsilon_{21} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{23}] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \varepsilon_2^{\mathrm{T}}\varepsilon_1 \tag{3-11}$$

因此由上式**(3-10)**、**(3-11)**可知：

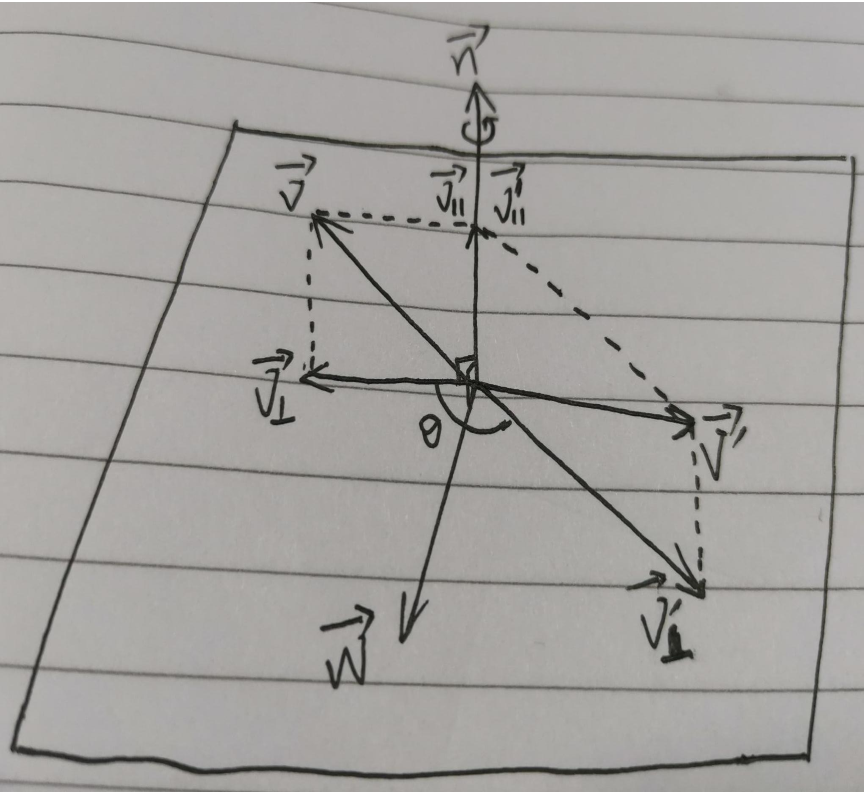
$$\mathbf{q}_1^{+}\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\times}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\mu}_2 \\ -\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\mu}_1\boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_2\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2^{\times}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\mu}_1 \\ -\boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\mu}_2\boldsymbol{\mu}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{q}_2^{\oplus}\mathbf{q}_1$$

至此，完成证明。

纲要

- 第一部分：熟悉Eigen矩阵运算
- 第二部分：几何运算练习
- 第三部分：旋转的表达
- 第四部分：罗德里格斯公式的证明
- 第五部分：四元数运算性质的验证
- 第六部分：*熟悉C++11

四、罗德里格斯公式的证明



假设向量$\vec{v}$是空间中的任一向量，单位向量$\vec{n}=\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$为旋转轴，$\theta$为绕轴$\vec{n}$旋转的角度，$\vec{v}'$为旋转后的向量。

我们可以将空间向量$\vec{v}$分解为平行于旋转轴$\vec{n}$的分量$\vec{v}_{\parallel}$以及垂直于旋转轴$\vec{n}$的分量$\vec{v}_{\perp}$，也就是$\vec{v}=\vec{v}_{\parallel}+\vec{v}_{\perp}$。

$$\vec{v}'=\vec{v}'_{\parallel}+\vec{v}'_{\perp} \tag{4-1}$$

平行分量$\vec{v}_{\parallel}$就是向量$\vec{v}$在旋转轴上的投影向量：

$$\vec{v}_{\parallel}=|\vec{v}|\cos\alpha\vec{n}=|\vec{v}|\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}\vec{n}=(\vec{v}\cdot\vec{n})\vec{n} \tag{4-2}$$

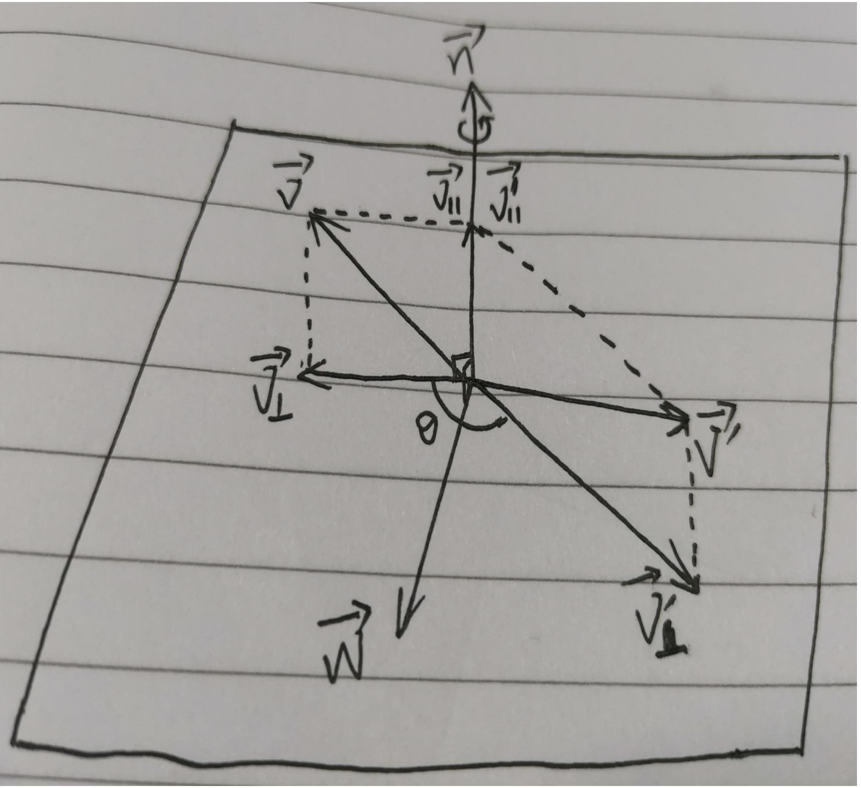
其中$\vec{v}\cdot\vec{n}$为点积，是一个标量。

根据公式(4-1)以及(4-2)可知

$$\vec{v}'_{\perp}=\vec{v}'-\vec{v}_{\parallel}'=\vec{v}'-(\vec{v}\cdot\vec{n})\vec{n} \tag{4-3}$$

向量$\vec{v}$绕轴$\vec{n}$旋转角度θ相当于分别旋转平行分量$\vec{v}_{\parallel}$与垂直分量$\vec{v}_{\perp}$，分别旋转后的结果相加就是最终的旋转后的向量$\vec{v}'$。

四、罗德里格斯公式的证明



很明显，我们可以发现平行分量$\vec{v}_{\parallel}$绕轴$\vec{n}$旋转，没有发生变化，仍然保持不变，因此

$$\vec{v}'_{\parallel}=\vec{v}_{\parallel} \tag{4-4}$$

垂直分量$\vec{v}_{\perp}$绕轴$\vec{n}$旋转θ角度，根据向量叉乘的性质以及右手定理，可以构造出同时正交于旋转轴$\vec{n}$和垂直分量$\vec{v}_{\perp}$的另一向量$\vec{w}$。

$$\vec{w}=\vec{n}\times\vec{v}_{\perp} \tag{4-5}$$

$$\|\vec{w}\|=\|\vec{n}\times\vec{v}_{\perp}\|=\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{v}_{\perp}\|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\|\vec{v}_{\perp}\| \tag{4-6}$$

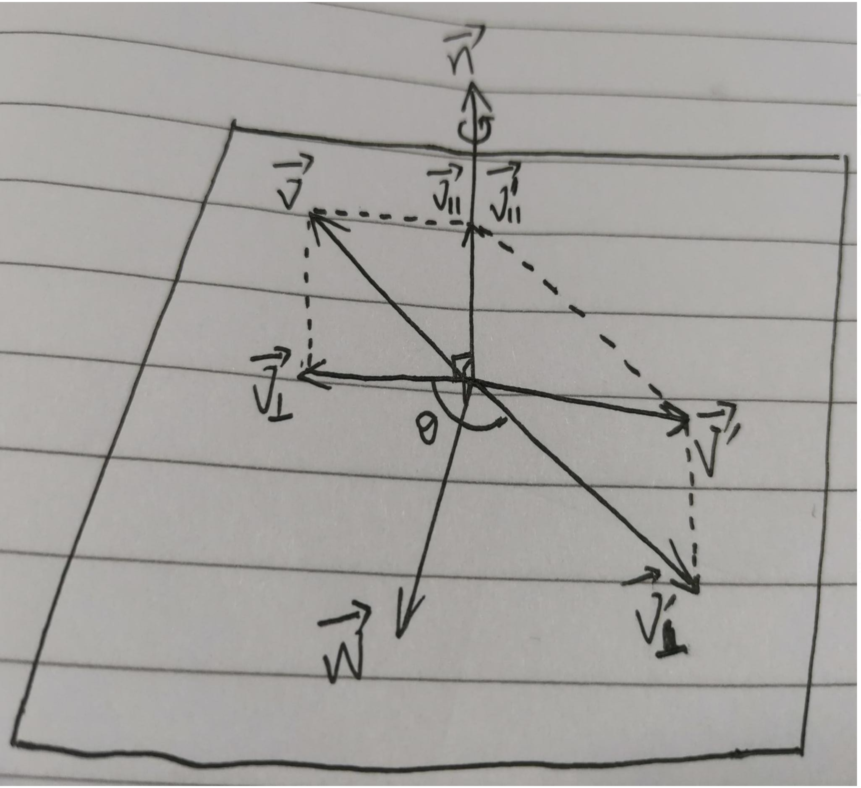
两个长度相等，因此旋转后的垂直分量$\vec{v}'_{\perp}$可以用$\vec{w}$和$\vec{v}_{\perp}$来表示：

$$\vec{v}'_{\perp}=\cos(\theta)\vec{v}_{\perp}+\sin(\theta)\vec{w}=\cos(\theta)\vec{v}_{\perp}+\sin(\theta)(\vec{n}\times\vec{v}_{\perp}) \tag{4-7}$$

由公式(4-4)和(4-7)可知

$$\vec{v}'=\vec{v}'_{\parallel}+\vec{v}'_{\perp}=\vec{v}_{\parallel}+\cos(\theta)\vec{v}_{\perp}+\sin(\theta)(\vec{n}\times\vec{v}_{\perp}) \tag{4-8}$$

四、罗德里格斯公式的证明



由公式(4-3)以及平行向量叉乘为零的特性可知

$$\vec{n}\times\vec{v}_{\perp}=\vec{n}\times(\vec{v}-\vec{v}_{\parallel})=\vec{n}\times\vec{v}-\vec{n}\times\vec{v}_{\parallel}=\vec{n}\times\vec{v} \tag{4-9}$$

由公式(4-2)、(4-3)和(4-7)代入公式(4-8)可知旋转后的向量为：

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \vec{v}_{\parallel}+\cos(\theta)\vec{v}_{\perp}+\sin(\theta)(\vec{n}\times\vec{v}_{\perp})\\ &=(\vec{v}\cdot\vec{n})\vec{n}+\cos(\theta)(\vec{v}-(\vec{n}\cdot\vec{v})\vec{n})+\sin(\theta)(\vec{n}\times\vec{v})\\ &=\cos(\theta)\vec{v}-(1-\cos(\theta))(\vec{n}\cdot\vec{v})\vec{n})+\sin(\theta)(\vec{n}\times\vec{v})\\ &=\left[\cos(\theta)-(1-\cos(\theta))\cdot\vec{n}\cdot\vec{n})+\sin(\theta)\vec{n}^\wedge\right]\cdot\vec{v}\\ &=R\cdot\vec{v}\end{aligned} \tag{4-10}$$

综上，就得到了向量 $\vec{v}$ 绕轴 $\vec{n}$ 旋转角度 θ 后得到 $\vec{v}'$ 的转换关系 R。

证毕。

纲要

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 第一部分：熟悉Eigen矩阵运算
- 第二部分：几何运算练习
- 第三部分：旋转的表达
- 第四部分：罗德里格斯公式的证明
- **第五部分：四元数运算性质的验证**
- 第六部分：*熟悉C++11

五、四元数运算性质的验证

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

（1）由于 q 为单元四元数

$$q = xi + yj + zk + s，向量形式为[\boldsymbol{\varepsilon},s]^T$$

空间点 $p = [a,b,c,0]^T = [v,0]^T$

那么根据《视觉 SLAM 十四讲》第 58 页可知，单位四元数 q 的共轭和逆是同一个量

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2} = \frac{[-\boldsymbol{\varepsilon},s]^T}{\|q\|^2} \tag{5-4}$$

$$p' = qpq^{-1} = [\boldsymbol{\varepsilon},s]^T[v,0]^T\frac{[-\boldsymbol{\varepsilon},s]^T}{\|q\|^2}$$

$$= [\boldsymbol{\varepsilon}v,0]^T\frac{[-\boldsymbol{\varepsilon},s]^T}{\|q\|^2}$$

$$= [-\frac{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}v}{\|q\|^2},0]^T \tag{5-5}$$

由于此时旋转后的点 p'的四元数表示的实部为 0，因此是**虚四元数**。

五、四元数运算性质的验证

（2）根据推导，给出矩阵 Q

由提示可知：$p' = qpq^{-1} = q^{+}p^{+}q^{-1} = q^{+}q^{-1^{\oplus}}p$ 以及 $p' = Qp$

则 $$Q = q^{+}q^{-1^{\oplus}}$$

令四元数 $q = xi + yj + zk + s$，向量形式为$[\boldsymbol{\varepsilon}, s]^T$，s 为实部，x、y、z 是虚部

$$q^{+} = \begin{bmatrix} sI + \varepsilon^{\times} & \varepsilon \\ -\varepsilon^{T} & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -z & y & x \\ z & s & -x & y \\ -y & x & s & z \\ -x & -y & -z & s \end{bmatrix}$$

由（5-4）$q^{-1} = \dfrac{[-\boldsymbol{\varepsilon}, s]^T}{\|q\|^2}$

$$q^{-1^{\oplus}} = \frac{\begin{bmatrix} sI - (-\varepsilon)^{\times} & -\varepsilon \\ -(-\varepsilon)^{T} & s \end{bmatrix}}{\|q\|^2} = \frac{1}{\|q\|^2}\begin{bmatrix} sI + \varepsilon^{\times} & -\varepsilon \\ \varepsilon^{T} & s \end{bmatrix} = \frac{1}{\|q\|^2}\begin{bmatrix} s & -z & y & -x \\ z & s & -x & -y \\ -y & x & s & -z \\ x & y & z & s \end{bmatrix}$$

五、四元数运算性质的验证

$$q^{-1\oplus} = \frac{\begin{bmatrix} sI-(-\varepsilon)^{\times} & -\varepsilon \\ -(-\varepsilon)^{T} & s \end{bmatrix}}{\|q\|^2} = \frac{1}{\|q\|^2}\begin{bmatrix} sI+\varepsilon^{\times} & -\varepsilon \\ \varepsilon^{T} & s \end{bmatrix} = \frac{1}{\|q\|^2}\begin{bmatrix} s & -z & y & -x \\ z & s & -x & -y \\ -y & x & s & -z \\ x & y & z & s \end{bmatrix}$$

$$Q = q^{+}q^{-1\oplus} = \begin{bmatrix} s & -z & y & x \\ z & s & -x & y \\ -y & x & s & z \\ -x & -y & -z & s \end{bmatrix} \frac{1}{\|q\|^2} \begin{bmatrix} s & -z & y & -x \\ z & s & -x & -y \\ -y & x & s & -z \\ x & y & z & s \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\|q\|^2}\begin{bmatrix} s^2+x^2-y^2+z^2 & 2xy-2zs & 2sy+2xz & 0 \\ 2xy+2zs & s^2-x^2+y^2-z^2 & 2yz-2xs & 0 \\ 2xz-2ys & 2yz+2xs & s^2-x^2-y^2+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^2+x^2+y^2+z^2 \end{bmatrix}$$

纲要

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 第一部分：熟悉Eigen矩阵运算
- 第二部分：几何运算练习
- 第三部分：旋转的表达
- 第四部分：罗德里格斯公式的证明
- 第五部分：四元数运算性质的验证
- 第六部分：*熟悉C++11

六、*熟悉C++


```
A a1(3), a2(5), a3(9);
vector<A> avec{a1, a2, a3};
std::sort( avec.begin(),  avec.end(),
        [](const A&a1, const A&a2){return a1.index<a2.index;});//[1]lambda表达式
for (auto& a: avec)   //[2]序列for循环遍历数组；[3]auto关键字自动类型推导
        cout<<a.index<<" ";
cout<<endl;
```

六、*熟悉C++

Lambda表达式

[函数对象参数](操作符重载函数参数)->返回值类型{函数体}

序列for循环

类似于Java中简化的for循环，用于遍历数组、容器、string以及有begin和end函数定义的序列

auto关键字

自动类型推导，用于从初始化表达式中推断出变量数据类型，简化编程工作，编译时进行类型推导，不影响程序运行效率与编译速度。

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening