



# 视觉SLAM：从理论到实践

## 第二次课 三维空间刚体运动



主讲人 高翔

清华大学 自动控制与工程 博士  
慕尼黑工业大学计算机视觉组 博士后  
Email: [gao.xiang.thu@gmail.com](mailto:gao.xiang.thu@gmail.com)



# 第二讲 三维空间的刚体运动

---

1. 点与坐标系
2. 旋转矩阵
3. 旋转向量和欧拉角
4. 四元数
5. 实践: Eigen

# 1. 点与坐标系

---

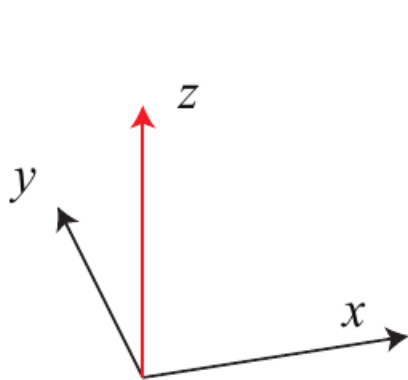
# 1. 点与坐标系

---

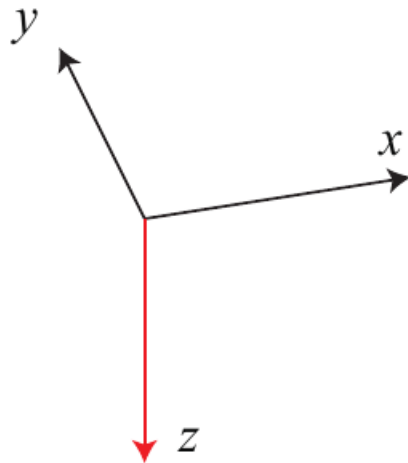
- 2D的情况：用两个坐标加旋转角表达
- 3D 的情况？

# 1. 点与坐标系

- 坐标系 (参考系)
- 点
- 向量
- 向量的坐标



右手系



左手系

# 1. 点与坐标系

- 向量的运算可由坐标运算表达
- 加法和减法
- 内积

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

- 外积

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{b} \triangleq \mathbf{a}^{\wedge} \mathbf{b}.$$

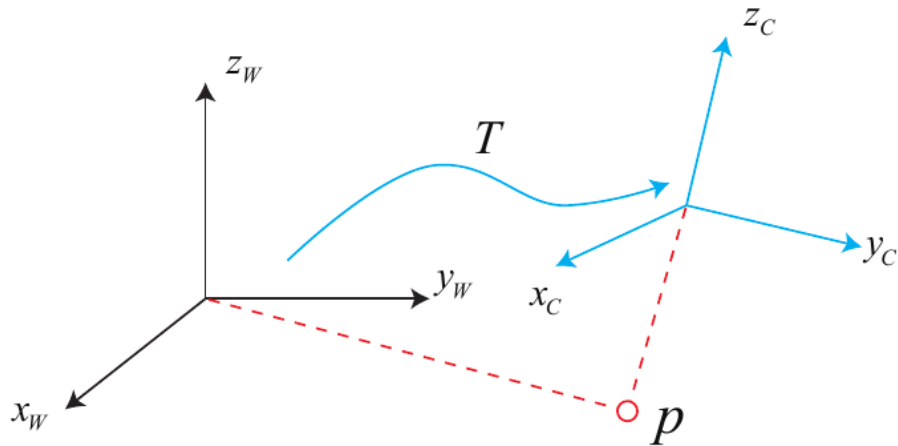
# 1. 点与坐标系

---

- 问题
  - 如何描述坐标系与坐标系之间的变化？
  - 如何计算同一个向量在不同坐标系里的坐标？
- SLAM中：
  - 固定的世界坐标系和移动的机器人坐标系
  - 不同的传感器坐标系

# 1. 点与坐标系

- 坐标系之间
- 直观地
  - 原点间的平移
  - 三个轴的旋转
- 平移是向量
- 旋转是什么？





## 2. 旋转矩阵

---

## 2. 旋转矩阵

- 考虑一次旋转
  - 坐标系  $(e_1, e_2, e_3)$  发生了旋转, 变成  $(e'_1, e'_2, e'_3)$
  - 向量  $a$  不动, 那么它的坐标如何变化?

$$[e_1, e_2, e_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [e'_1, e'_2, e'_3] \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T e'_1 & e_1^T e'_2 & e_1^T e'_3 \\ e_2^T e'_1 & e_2^T e'_2 & e_2^T e'_3 \\ e_3^T e'_1 & e_3^T e'_2 & e_3^T e'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} \triangleq Ra'.$$

## 2. 旋转矩阵

- $R$  称为旋转矩阵
- 可以验证：
  - $R$  是一个正交矩阵；
  - $R$  的行列式为+1。
- 满足这两个性质的矩阵称为旋转矩阵

$$SO(n) = \{R \in \mathbb{R}^{n \times n} | RR^T = I, \det(R) = 1\}.$$

- Special Orthogonal Group 特殊正交群

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T e'_1 & e_1^T e'_2 & e_1^T e'_3 \\ e_2^T e'_1 & e_2^T e'_2 & e_2^T e'_3 \\ e_3^T e'_1 & e_3^T e'_2 & e_3^T e'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} \triangleq Ra'.$$

于是，1到2的旋转可表达为：

$$a_1 = R_{12}a_2$$

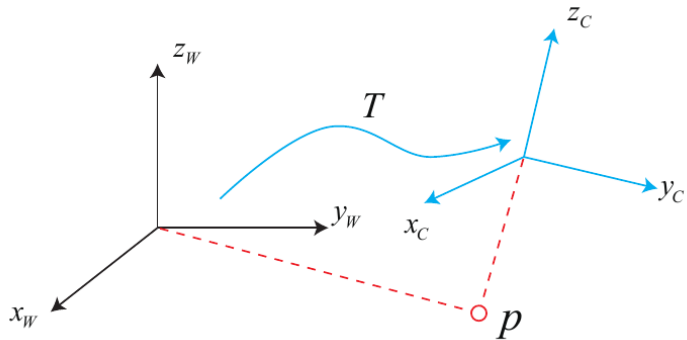
反之：
$$a_2 = R_{21}a_1$$

矩阵关系：
$$R_{21} = R_{12}^{-1} = R_{12}^T$$

## 2. 旋转矩阵

- 旋转加平移

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{t}.$$



- 两个坐标系间的运动可用 $\mathbf{R}, \mathbf{t}$ 完全描述
- 欧拉定理 ( Euler's rotation theorem ) : 刚体在三维空间里的一般运动, 可分解为刚体上方某一点的平移, 以及绕经过此点的旋转轴的转动。

## 2. 旋转矩阵

- 齐次坐标与变换矩阵
- 旋转加平移在表达复合情况下有不便之处：

$$a' = Ra + t.$$

$$b = R_1 a + t_1, \quad c = R_2 b + t_2. \quad \longrightarrow \quad c = R_2 (R_1 a + t_1) + t_2.$$

- 齐次形式 ( Homogeneous ) :

变换矩阵

$$\begin{bmatrix} a' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq T \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \tilde{b} = T_1 \tilde{a}, \quad \tilde{c} = T_2 \tilde{b} \quad \Rightarrow \quad \tilde{c} = T_2 T_1 \tilde{a}.$$

## 2. 旋转矩阵

- 齐次坐标

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{乘任意非零常数时仍表达同一坐标} \quad \tilde{a} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 变换矩阵的集合称为特殊欧氏群  $SE(3)$  ( Special Euclidean Group )

$$SE(3) = \left\{ T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid R \in SO(3), t \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

逆形式:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$

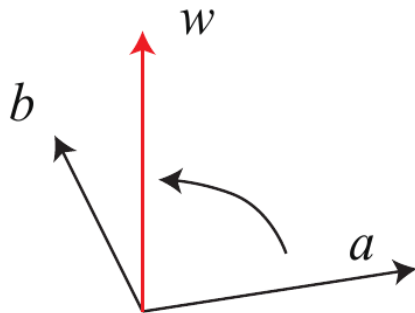
下一讲将深入介绍 $SO(3)$ 和 $SE(3)$

### 3. 旋转向量和欧拉角

---

### 3. 旋转向量与欧拉角

- 除了旋转矩阵/变换矩阵之外，还存在其他的表示方式
- 旋转矩阵  $R$  有九个元素，但仅有三个自由度
- 能否以更少的元素表达旋转？
- 旋转向量
  - 方向为旋转轴，长度为转过的角度
  - 称为角轴/轴角 (Angle Axis) 或旋转向量 (Rotation Vector)



旋转表示



### 3. 旋转向量与欧拉角

- 旋转向量与矩阵的不同：
  - 仅三个量
  - 无约束
  - 更直观
- 它们可以是同一个东西的不同表达方式
- 罗德里格斯公式 ( Rodrigues' s Formula ) :  $\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{n} \mathbf{n}^T + \sin \theta \mathbf{n}^\wedge$ .
- 旋转矩阵转向量：

角度：  $\theta = \arccos\left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2}\right).$

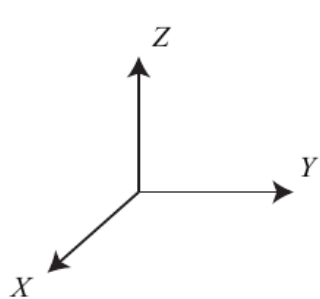
轴：  $\mathbf{R} \mathbf{n} = \mathbf{n}.$

### 3. 旋转向量与欧拉角

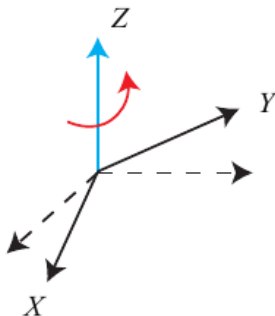
- 欧拉角 ( Euler Angles )

- 将旋转分解为三个方向上的转动
- 例，按Z-Y-X顺序转动
- 轴可以是定轴或动轴，顺序亦可不同
- 常见的有：yaw-pitch-roll，东北天
- 不同领域的习惯有所不同

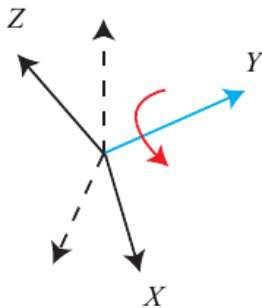
1. 绕物体的Z轴旋转，得到偏航角yaw；
2. 绕旋转之后的Y轴旋转，得到俯仰角pitch；
3. 绕旋转之后的X轴旋转，得到滚转角roll。



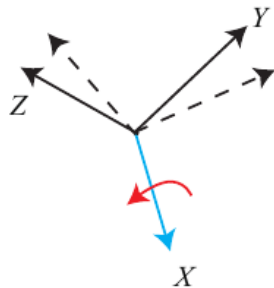
原始坐标系



第一次旋转



第二次旋转

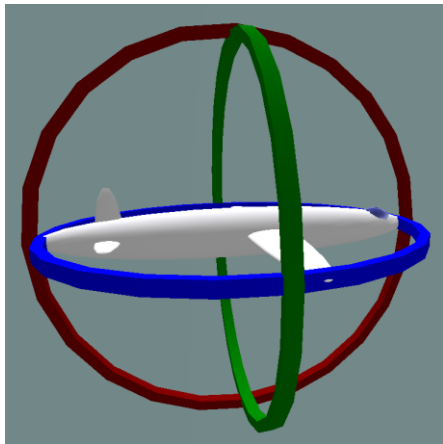


第三次旋转

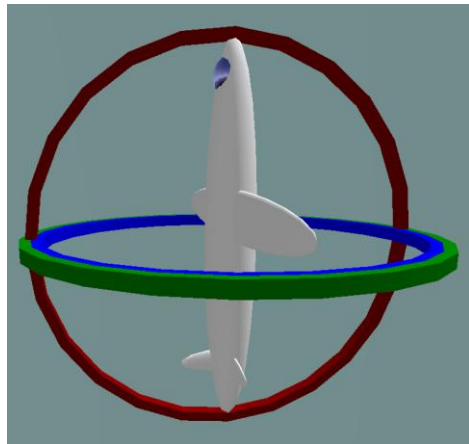
### 3. 旋转向量与欧拉角

- 万向锁 ( Gimbal Lock )
  - 欧拉角的奇异性问题
  - 在特定值时，旋转自由度减1；
  - Yaw-pitch-roll顺序下，当pitch为90度时，存在奇异性

正常情况



奇异情况



### 3. 旋转向量与欧拉角

---

- 由于万向锁的存在，欧拉角不适合插值或迭代
- 多用于人机交互中
- 可以证明：仅用三个实数表达旋转时，不可避免地存在奇异性问题
- SLAM中亦很少用欧拉角表达姿态

## 4. 四元数

---

## 4. 四元数

- 2D 情况下，可用单位复数表达旋转

$$z = x + iy = re^{iq}$$

乘  $i$  即转90度，乘  $-i$  转-90度

- 三维情况下，四元数可作为复数的扩充
- 四元数 (Quaternion)
  - 有三个虚部和一个实部
  - 虚部之间满足关系：

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k,$$

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k, ji = -k \\ jk = i, kj = -i \\ ki = j, ik = -j \end{cases}.$$

自己和自己的运算像复数  
自己和别人的运算像叉乘

## 4. 四元数

- 单位四元数可表达旋转

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k, \quad \mathbf{q} = [s, \mathbf{v}], \quad s = q_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{v} = [q_1, q_2, q_3]^T \in \mathbb{R}^3,$$

- 为理解旋转的计算方式，先看四元数间如何运算

## 4. 四元数

- 四元数的运算

$$\mathbf{q}_a \pm \mathbf{q}_b = [s_a \pm s_b, \mathbf{v}_a \pm \mathbf{v}_b].$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_a \mathbf{q}_b &= s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b \\ &\quad + (s_a x_b + x_a s_b + y_a z_b - z_a y_b) i \\ &\quad + (s_a y_b - x_a z_b + y_a s_b + z_a x_b) j \\ &\quad + (s_a z_b + x_a y_b - y_b x_a + z_a s_b) k.\end{aligned}$$

$$\mathbf{q}_a \mathbf{q}_b = [s_a s_b - \mathbf{v}_a^T \mathbf{v}_b, s_a \mathbf{v}_b + s_b \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b].$$

$$\mathbf{q}_a^* = s_a - x_a i - y_a j - z_a k = [s_a, -\mathbf{v}_a].$$

$$\|\mathbf{q}_a\| = \sqrt{s_a^2 + x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}.$$

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* / \|\mathbf{q}\|^2.$$

$$k\mathbf{q} = [ks, k\mathbf{v}].$$

$$\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{q}_b = s_a s_b + x_a x_b i + y_a y_b j + z_a z_b k.$$



## 4. 四元数

- 四元数到角轴：
$$\mathbf{q} = \left[ \cos \frac{\theta}{2}, n_x \sin \frac{\theta}{2}, n_y \sin \frac{\theta}{2}, n_z \sin \frac{\theta}{2} \right]^T.$$
- 角轴到四元数：
$$\begin{cases} \theta = 2 \arccos q_0 \\ [n_x, n_y, n_z]^T = [q_1, q_2, q_3]^T / \sin \frac{\theta}{2} \end{cases}.$$

## 4. 四元数

- 如何用四元数旋转一个空间点？
- 设点  $p$  经过一次以  $q$  表示的旋转后，得到了  $p'$ ，它们关系如何表示？
  - 将  $p$  的坐标用四元数表示（虚四元数）： $p = [0, x, y, z] = [0, v]$ .
  - 旋转之后的关系为：

$$p' = qpq^{-1}.$$

- 四元数相比于角轴、欧拉角的优势：紧凑、无奇异性

# 小结

- 本章介绍了：
  - 坐标系、点、向量的表达
  - 旋转矩阵/变换矩阵
  - 旋转向量、欧拉角
  - 四元数
- 下面进入实践环节