第二次作业思路讲解

主讲人 姚辰武

熟悉Eigen矩阵运算

- QR分解

https://zhuanlan.zhihu.com/p/84415000

- Cholesky分解

https://blog.csdn.net/qq_41564404/article/details/88085073

具体编程形式：对于求解 $Ax = b$ 其中A，b已知。

对于A：`Matrix<double, Dynamic,Dynamic> A = Matrix<double,100,100>::Random()`

QR求解：`x = A.colPivHouseholderQr().solve(b)`

Cholesky求解 ：`x = A.ldlt().solve(b)`

几何运算练习

- 题目中给到的旋转形式是四元数（从世界到自身）

$$World * R_1 + t_1 = p_1$$

p1在世界中的坐标系

世界到相机1位姿的变换

相机1坐标系下的p1点

$$World * R_2 + t_2 = p_2$$

世界到相机2位姿的变换

世界到相机2位姿的变换

旋转的表达

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 旋转矩阵的表示

$$[e_1, e_2, e_3]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [e'_1, e'_2, e'_3]\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix}$$

坐标系1下和坐标系2下表示同一个向量

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T e'_1 & e_1^T e'_2 & e_1^T e'_3 \\ e_2^T e'_1 & e_2^T e'_2 & e_2^T e'_3 \\ e_3^T e'_1 & e_3^T e'_2 & e_2^T e'_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix}$$

R 结合正交基的性质

$$q_1 = [\varepsilon_1, \eta_1]^T \quad q_2 = [\varepsilon_2, \eta_2]^T$$

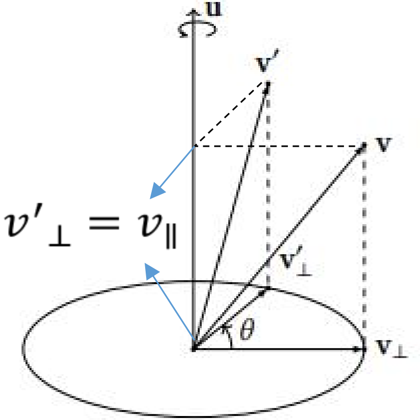
按照四元数的乘法运算规则，
将结果改写成向量形式

P57 3.23 3.24

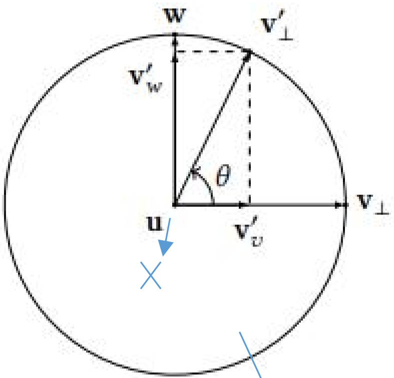
对比

$$q_1^+ q_2 = \begin{bmatrix} \eta_1 + \varepsilon_1^\wedge & \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1^T & \eta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

罗德里格斯公式的证明



$v'_\perp = v_\parallel$



俯视

$v \longrightarrow v'$

$R = \theta\vec{n}$

1、 $v' = v'_\perp + v'_\parallel$

2、 $v'_\parallel = (uv)u = v_\parallel$

模长

方向

3、 $\mathbf{v}'_\perp = \mathbf{v}'_v + \mathbf{v}'_w$

$= \cos(\theta)\mathbf{v}_\perp + \sin(\theta)\mathbf{w}$

$= \cos(\theta)\mathbf{v}_\perp + \sin(\theta)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp)$

4、 $\mathbf{v}' = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + \cos(\theta)(\mathbf{v} - \underline{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}}) + \sin(\theta)(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

$v_\perp = v - v_\parallel$

四元数运算性质的验证

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

$$p' = qpq^{-1} = q^{+}p^{+}q^{-1} = q^{+}q^{-1^{\oplus}}p.$$

$$q^{-1} = \frac{q^{*}}{\| q \|^{2}}$$

$q^{*} = [-\varepsilon, \eta]$

$$R = q^{+}q^{-1^{\oplus}}$$

$$q^{+}q^{-1^{\oplus}} = \begin{bmatrix} \eta + \varepsilon^{\wedge} & \varepsilon \\ \varepsilon^{T} & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta + \varepsilon^{\wedge} & -\varepsilon \\ \varepsilon^{T} & \eta \end{bmatrix} \frac{1}{\| q \|^{2}}$$

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{Im}(q^{+}q^{-1^{\oplus}}).$$

p' 实部为0

$$p' = qpq^{-1} = q^{+}q^{-1^{\oplus}}p = \begin{bmatrix} \eta + \varepsilon^{\wedge} & \varepsilon \\ \varepsilon^{T} & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta + \varepsilon^{\wedge} & -\varepsilon \\ \varepsilon^{T} & \eta \end{bmatrix} \frac{1}{\| q \|^{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_{p} \\ 0 \end{bmatrix}$$

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening