<논리와 증명>

$\wedge \rightarrow$ 둘 다 T여야 T

$\vee \rightarrow$ 하나만 T여도 T

진리값이 항상 참임

1. 다음 명제들이 항진 명제라는 것을 진리표를 이용해 보이시오.

① $\sim(\sim p \wedge q) \vee q$

p	q	$\sim p$	$(\sim p \wedge q)$	$\sim(\sim p \wedge q)$	$\sim(\sim p \wedge q) \vee q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	T	T

② $(\sim p \vee q) \vee (p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p \vee q)$	$(p \wedge \sim q)$	$(\sim p \vee q) \vee (p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T

진리값이 항상 거짓임

2. 다음 명제들이 모순 명제라는 것을 진리표를 이용해 보이시오.

① $(\sim p \vee q) \wedge (p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p \vee q)$	$(p \wedge \sim q)$	$(\sim p \vee q) \wedge (p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F

② $(p \wedge q) \wedge (p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim q$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge \sim q)$	$(p \wedge q) \wedge (p \wedge \sim q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F

3. 다음 명제의 쌍들에 대해서 두 명제가 동등한지 진리표를 이용해 확인하시오.

① $p \land (p \lor q)$와 p

p	q	$(p \lor q)$	$p \land (p \lor q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

② $\sim p \lor \sim q$와 $\sim(p \lor q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \lor \sim q$	$(p \lor q)$	$\sim(p \lor q)$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	F	T

4. 명제식의 변형을 통해 다음 명제를 간소화 하시오.

① $(p \land \sim q) \lor (p \land q)$

$= p \land (\sim q \lor q)$ $F \lor T = T$

$= p \land T$ $\land$에서 T가 하나이면 나머지 조건에 의해 T or F 결정

$= p$

② $(p \lor \sim q) \land (\sim p \lor \sim q)$

$= (p \lor \sim p) \lor \sim q$ $T \lor F = F$

$= F \lor \sim q$ $\lor$에서 하나가 F면 나머지 조건에 의해 T or F 결정

$= \sim q$

5. 다음 명제들이 참인지 확인하시오. R = 실수의 집합, Z = 정수의 집합

① $\forall x \in R,\ x^2 \geq x$

모든 실수 x에 의해 $x^2 \geq x$가 성립한다

$x^2 \geq x$

$x^2 - x \geq 0$

$x(x-1) \geq 0$

ex) $x = 0.3$ 일 때 성립 X

② $\forall x \in Z,\ x^2 \geq x$

모든 정수 x에 의해 $x^2 \geq x$가 성립한다

$x^2 \geq x$

$x^2 - x \geq 0$

$x(x-1) \geq 0$

$x = 0$ 일 때

$0 = 0$

$x = 1$ 일 때

$0 = 0$

$x > 1$ 정수 일 때

$(+) \times (+) \geq 0$

$x = -1$ 일 때

$(-) \times (-1) \geq 0$

$x < -1$ 정수일 때

$(-1) \times (-1) \geq 0$

③ $\exists x \in R,\ x^2 < x$

어떤 실수 x에 대해 $x^2 < x$가 성립한다

$x^2 < x$

$x^2 - x < 0$

$x(x-1) < 0$

$x = 0$ 일 때 성립 X

$x < -1$ 일 때 $(-) \times (-)$ 성립 X

$x > 1$ 일 때 $(+) \times (+)$ 성립 X

④ $\exists x \in Z,\ x^2 < x$

어떤 정수 x에 대해 $x^2 < x$가 성립한다

$x^2 < x$

$x^2 - x < 0$

$x(x-1) < 0$

$x = 0$ 일 때 성립 X

$x = 1$ 일 때 성립 X

$x > 1$ 일 때 $(+) \times (+)$ 성립 X

$x = -1$ 일 때 $(-) \times (-)$ 성립 X

$x < -1$ 일 때 $(-) \times (-)$ 성립 X

6. (직접 증명) n이 짝수이면 3n+5는 홀수임을 증명하라.

(힌트: n=2k로 두고 3n+5가 2(어떤 정수)+1 형태로 표현될 수 있는지)

$n=2k$

$$\begin{aligned} 3n+5 &= 3\times 2k+5 \\ &= 6k+5 \\ &= \underbrace{2(3k+2)}_{\text{항상 짝수}}+\underbrace{1}_{\text{항상 홀수}} \end{aligned}$$

7. n이 홀수이면 n^2+n은 짝수임을 증명하라

$n=2k+1$

$$\begin{aligned} n^2+n &= (2k+1)^2+(2k+1) \\ &= 4k^2+4k+1+2k+1 \\ &= 4k^2+6k+2 \\ &= \underbrace{2(2k^2+3k+1)}_{\text{항상 짝수}} \end{aligned}$$

8. m이 짝수이고 n이 홀수이면 2m+3n은 홀수임을 증명하라.

$m=2k$

$n=2k+1$

$$\begin{aligned} 2m+3n &= 2\times 2k+3(2k+1) \\ &= 4k+6k+3 \\ &= 10k+3 \\ &= \underbrace{2(5k+1)}_{\text{항상 짝수}}+\underbrace{1}_{\text{항상 홀수}} \end{aligned}$$

9. (대우를 증명) 자연수 n에 대하여 n^2+5가 홀수이면 n은 짝수임을 증명하라

(힌트: 명제 대신, n이 홀수면 n^2+5가 짝수임을 증명하라)

$n=2k+1$

$$\begin{aligned} n^2+5 &= (2k+1)^2+5 \\ &= 4k^2+4k+1+5 \\ &= 4k^2+4k+6 \\ &= \underbrace{2(2k^2+2k+3)}_{\text{항상 짝수}} \end{aligned}$$

10. n^2이 짝수이면 n은 짝수임을 증명하라.

$n=2k+1$

$n^2=(2k+1)^2$

$=4k^2+4k+1$

$=\underbrace{2(2k^2+2k)}_{\text{항상 짝수}}\underbrace{+1}_{\text{항상 홀수}}$

→ 대우가 성립하므로 증명 ok

11. (경우를 나누어 증명) 자연수 n에 대해 n^2+5n+3은 항상 홀수임을 증명하라.
(힌트: n이 짝수인 경우와 홀수인 경우를 따로 증명)

$n=2k$

$n^2+5n+3=(2k)^2+5(2k)+3$

$=4k^2+10k+3$

$=\underbrace{2(2k^2+5k+1)}_{\text{항상 짝수}}\underbrace{+1}_{\text{항상 홀수}}$

$n=2k+1$

$n^2+5n+3=(2k+1)^2+5(2k+1)+3$

$=4k^2+4k+1+10k+5+3$

$=4k^2+14k+9$

$=\underbrace{2(2k^2+7k+4)}_{\text{항상 짝수}}\underbrace{+1}_{\text{항상 홀수}}$

12. n^2이 3의 배수라면 n은 3의 배수임을 증명하라

→ n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다

$n=3k+1$

$n^2=(3k+1)^2$

$=9k^2+6k+1$

$=3(3k^2+2k)+1$ → 3의 배수에 1을 더한 값

$n=3k+2$

$n^2=(3k+2)^2$

$=9k^2+12k+4$

$=3(3k^2+4k+1)+1$ → 3의 배수에 1을 더한 값