1. Матлогика(МЛ). Ее предмет и задачи.

Логика – это анализ методов рассуждений.

Задача – выявление корректного способа рассуждений.

Мат.Логика – анализ методов рассуждений, применимый к математике.

Предмет МЛ – формализация знаний и рассуждений.

Задачи:

1) Изменение и формализация языка науки.
2) Развитие основ математики.
3) Разработка принципов построения принципов и методов научных теорий.

2. Антиномии и их влияние на развитие МЛ.

Парадоксы:

1) Логические(Сформулированы на строении языка).

Парадокс Рассела: A: $X \notin x (x \in A \leftrightarrow x \notin X)$

$A \in A \to A \notin A$

$A \notin A \to A \in A$

2) Семантические(Бытовые).

Парадокс Лжеца «Я Лгун»

Влияние: Появление теории типов, конструктивного подхода(нет определения множества), 2 типа бесконечности(актуальный - ∞ как таковая; конструктивный - ∞ как некоторый алгебраический признак).$\subset\subseteq$

3. Семиотика(основные понятия и определения, разновидность форм).

Семиотика – наука, занимающаяся изучением языка.

Высказывание – некоторая фраза естественного языка, о которой разумно говорить истинно оно или ложно.

Буква – символ, воспринимающийся, как целое.

Алфавит – совокупность букв.

Мат.язык включает в себя буквы всех алфавитов всех языков и доп. Символы(+,-,=, и т.д).

Слово – совокупность букв данного алфавита, записанных одна за другой в строчку.

Выражение – любая совокупность букв алфавита, записанных в котетиом порядке.

Переменная – некоторый символ или буква, объявляемая с областью значений.

Форма – выражение, содержащее хотя бы одну переменную.

Формы:

1) Истинные

А) числа

Б) прочие

2) Высказывательные(произвольно ложные) (Предикаты)

Числовое высказывание – форма, которая после подстановки принимает некоторое значение.

2 формы равносильны, если для любого набора значений своих переменных они либо неопределенны, либо оба определенны и принимают одно и то же значение.

4. Конструктивное определение множества.

1) $\varnothing$ - пустое множество.

2) Пусть M – объект, тогда {M} – множество.

3) M1 и M2 – множества, тогда $M1 \cup M2$, $M1 \cap M2$, $M1 \setminus M2$, [$\overline{M1}$] – множества.

4) Совокупность *N,R,C,Z.*

5) Если M – множество, то $\exists$ множество всех его подмножеств.

6) Пусть M – некоторое множество, а A(x) - $x \in M \rightarrow M1=\{x \in M / A(x)\}$ – множество.

Других множеств не существует.

Теорема о 5 возможностях:

1) A=B

2) $A \subset B$

3) $B \subset A$

4) $A \cap B = \varnothing$

5) $A \propto B$

5. Кортеж(определение, прямое произведение, проекция).

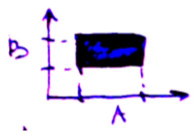
Кортеж – в классической теории неопределяемое понятие. Мы будем понимать некоторое выражение, начинающиеся с “<” и содержащее некоторые имена(набор) и заканчивающиеся “>”. <a1,a2…an>

Число компонентов кортежа – его длина.

Кортеж, у которого нет ни одной компоненты – пустой кортеж.

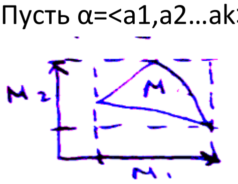
Кортежы равны, если их длинны и элементы равны и находятся на одинаковых местах.

А и В – множества, тогда $A \times B$ их прямое произведение – множество пар, 1 компонента которых есть элемент из А, а 2 из В.



Проекция – пр:α

Пусть α=<a1,a2…ak>, тогда пр:α=ai



пр1 M=M1; пр2 M=M2

6. График.

График – множество пар $G \subseteq A \times B$.

Пр1 G – множество определения графика.

Пр2 G – область значений.

Инверсия графика – множество инверсий его пар.(1/G)

Симметричный график – если вместе с любой парой он содержит ее инверсию.

Композиция графиков ($G^\circ F$) – $\{\langle a,y\rangle \mid \exists\ z\ \langle a,z\rangle \in G\ \&\ \langle z,y\rangle \in F\}$.

Инъективность – если нет пар с разными 1 и одинаковыми 2 компонентами.

Функциональность – если нет пар с одинаковыми 1 и разными 2 компонентами.

7. Соответствие.

Соответствие ($Г=\langle G,X,Y\rangle$) – тройка, где

$G \subseteq A \times B$(график)

X – область отправления пр1 $G \subseteq X$

Y – область прибытия пр2 $G \subseteq Y$

$1/Г = \langle 1/G,Y,X\rangle$

$Г=\langle G,X,Y\rangle$ $О=\langle H,Z,W\rangle$

$Г°О = \langle G°H,X,W\rangle$

Сужение: $Гa \subseteq \langle G \cap A \times$ пр2G, X,Y>

Образ: $Г(A) \subseteq \langle \{b \in$ пр2G| $\exists \langle a,b\rangle \in G$: $a \in A\}$

Прообраз множества $1/Г$ (A) $\subseteq$пр1G

Функциональное соответствие – если его график функционален.

Инъектированное соответствие – если его график инъектирован.

Всюду определенное соответствие – если пр1G=X

Сюрьективное соответствие – если пр2G=Y

Биективное соответствие – если пр1G=X; пр2G=Y

8. Функция.

Функция – Функциональное соответствие $f=\langle F,X,Y\rangle$

F – функциональный график.

X – область отправления пр1 $F \subseteq X$

Y – область прибытия пр2 $F \subseteq Y$

Частные случаи функций:

Нигде не определенная $F=\varnothing$

Всюду определенная пр1F=X

Тождественная функция $Im = \langle \nabla M,M,M\rangle$

Если есть сюрьекция – отображение X на Y

Инъективная функция.

g – обратная для f функция, если:

пр2G=пр2F

g – инъекция

$g°f=I$пр2F

9. Отношение.

Отношение – пара <Ф,М>, где $Ф \in M^2$

А) График

Б) Высказывательная форма

В) Ориентированный граф

Г) Таблица

Свойства:

1) Рефлективность $\nabla M \subseteq Ф$, $x\varphi x$

2) Антирефлективность $\nabla M \cap Ф$, $\neg x\phi x$, $x \bar{\varphi} x$

3) Симметричность Если $(x \neq y)\&(x\phi y) \to (y\phi x)$ $1/Ф \subseteq Ф$

4) Антисимметричность. $Ф \cap 1/Ф \subseteq \nabla M$ $(x\phi y)\&(y\phi x) \to (x=y)$

5) Транзитивность $Ф^\circ 1/Ф \subseteq \nabla M$ $(x\phi z)\&(z\phi y) \to (x\phi y)$

6) Связанность $\forall x,y \in M$ $x \neq y$ $x\phi y \vee y\phi x$

Операции:

1) Объединение $x(\phi \vee \psi)y = x\phi y \vee x\psi y$

2) Пересечение $x(\phi \cap \psi)y = x\phi y \ \&\ x\psi y$

3) $x(\phi \backslash \psi)y = x\phi y \ \& \neg x\psi y$

4) $x \bar{\phi} y = \neg x\phi y$

5) Инверсия $x(1/\phi)y = y\phi x$

6) $x(\phi^\circ\psi)y = \exists z\ (x\phi z \ \&\ z\psi y)$

7) $x(Ф_A)y = (x\phi y)\ \&\ (x,y \in A)$

Инверсия и сумма сохраняют свойства.

10. Разбиение, сопряженное с отношением($\mathfrak{M}$)

Разбиение – система множеств

1) $\forall A \in \mathfrak{M} \to A \subseteq M \ \&\ A \neq 0$

2) $\forall A,B \in \mathfrak{M} \to A \cap B \neq \varnothing$

3) $\forall A = M$ $A \in M$

Тривиальное разбиение М:

1) Полное $\mathfrak{M}=\{M\}$

2) Поэлементное $\forall a \in M \to \{a\} \in \mathfrak{M}$

Отношение, сохраняемое с разбиением: $\rfloor \phi = <Ф,M>$ $\mathfrak{M} = \vee A$

Теорема 1: $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ - разбиения одного множества М, если они сопряжены с одним и тем же отношением ф, тогда $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$

Д-во: $\rfloor \mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M} \to \exists\ a,b \in M$: $a,b \in K_1 \in \mathfrak{M}_1$; $a \in K_2 \in \mathfrak{M}$; $b \in K_3 \in \mathfrak{M}$; $K_2 \neq K_3$ => противоречие

Теорема 2: Если отношение ф на множестве М сопряжено с каким-то разбиением $\mathfrak{M}$ этого множества, то это отношение является отношением эквивалентности.

Д-во: $\forall a \in M$ $a \in K_2 \to a\phi a$ – рефлексивность.

$\rfloor a\phi в \to a,в \in K_e \to в,a \in K_e \to в\phi a$ – симметричность

$\rfloor a\phi в$ и $в\phi c \to a,в \in K_e$ $в,c \in K_e \to a,c \in K_e \to a\phi c$ - транзитивность

Теорема 3: Если ф – отношение эквивалентности, то $\exists$ сопряженное с ним разбиение.

Д-во: $a \in M$ $a \sim \phi в$ $K_a \subseteq M$, $M \mid K_a \neq \varnothing$ - d Kd

$\{Ka, Kd \ldots Ke\} = \mathfrak{M}$ – искомое разбиение.

11. Формальные(аксиоматические) теории. Их разрешимость.

Формальные теории состоят из:

1. Алфавит – счетное множество символов. Конечная последовательность этих символов – слова.
2. Формулы – подмножества выражений. Обычно существует эффективная процедура, определяющая является ли выражение формулой.
3. Аксиомы – подмножество формул.
4. Конечное множество отношений ф1…фn(правило вывода)

Выводом называется последовательность формул в1…вn, где вi – либо аксиома, либо выведена из предыдущей по 1 из правил вывода.

Правила вывода:

Modus ponendo ponens Если А влечет В и А, то В

Modus tollendo tollens Если А влечет В и не В, то не А

Modus tollendo ponens Если А либо В и не А, то В

Modus ponendo tollens Если неверно что А и В, и А, то не В

Если для ФТ существует общий метод определения, является ли произвольная формкла теоремой, то теория называется разрешимой.

12. Натуральное исчисление.

1. Алфавит: $(,),\&,\vee,\rightarrow,\neg,\leftrightarrow$,A1..Zi
2. NnФ: $x1\rightarrow(x2\rightarrow(x3\rightarrow\ldots\rightarrow xn\rightarrow y)\ldots)$ $A\leftrightarrow B\equiv(A\rightarrow B)\&(B\rightarrow A)$
3. $\varnothing$
4. MP $(X\rightarrow Y,X)/Y$;

УК (X&Y)/X, (X&Y)/Y;

ВК (X,Y)/X&Y;

УD $(X\rightarrow Z,Y\rightarrow Z, X \vee Y)/Z$

BD X/X v Y, y/ X v Y

В квази-прямом методе доказательства мы можем на каждом шаге записывать 1 из посылок n-кратной импликации.

1. Гипотеза
2. РДФ(ранее доказанная ф-ла)
3. Логическое следствие
4. ТУ/У

Косвенный : 1,2,3,4

Прямой: 1,2

13. Непротиворечивость исчисления высказываний.

1. Формальная теория непротиворечива относительно преобразования $a\rightarrow a'$, если обе эти формулы одновременно не теоремы.
2. Если не всякая формула может быть теоремой, то теория абсолютно непротиворечива.
3. ФТ не противоречива в смысле поста, если никакая пропозиционная переменная не является теоремой.

Теорема: Любая теорема P1 – тавтология.

А) A1 $P\rightarrow(Q\rightarrow P)$ ЗУК

A2 $(S\rightarrow(P\rightarrow Q))\rightarrow((S\rightarrow P)\rightarrow(S\rightarrow Q))$ ЗСИ

A3 $((P\rightarrow F)\rightarrow F)\rightarrow P$ ЗДО

Б) MP сохраняет тавтологию

14. Полнота исчислений высказываний.

ФТ называется полной относительно преобразования a→a’, если

1) a) a - теорема

б) присоединение этой формулы в качестве аксиомы превращает нашу ФТ в противоречивую относительно преобразования.

Теория называется полной в абсолютном смысле, если

2) а) произвольная формула – теорема.

б) присоединение формулы в качестве аксиомы превращает теорию в противоречивую в абсолютном смысле.

в) присоединение формулы в качестве аксиомы превращает теорию в противоречивую в смысле поста.

15. Численные кванторы.

Существует 2 численных квантора:

1) ∃ (∃!) – существует единственный

2) ∃∞ - существует бесконечно много

Вводится для компактности изъяснения.

Предикат – это высказывательная форма, которая после замены переменных значениями, становится истиной или ложью.

Навешивание квантора:

∀x P(x) – для любого

∃ x P(x) - найдется

16. Область истинности предиката.

$\widehat{\mathfrak{A}}$ - область истинности предиката A//A - высказывательная

∀	E
&	V

¬	&	V	∃
—	∧	∨	пр

A – некоторое мн-во, тогда

$$\widehat{\mathfrak{A}} = A \to (\forall \alpha \in A)\, \mathfrak{A}(\alpha) \equiv И$$

$$\neg \mathfrak{A} \quad (\forall \alpha \in A)\, \neg \mathfrak{A}(\alpha) \equiv Л$$

$\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$, тогда

$$\widehat{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} = \widehat{\mathfrak{A}} \cup \widehat{\mathfrak{B}}$$

$$\widehat{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}} = \widehat{\mathfrak{A}} \cap \widehat{\mathfrak{B}}$$

$$\widehat{\exists x\, \mathfrak{A}(x,y)} = пр_2\, \widehat{\mathfrak{A}}$$

$$\mathfrak{A}(x,y) \equiv И \leftrightarrow \langle x,y\rangle \in \widehat{\mathfrak{A}}$$

$$\exists x\ \mathfrak{A}(x,y) = \overline{\forall x \langle x,b\rangle \notin \widehat{\mathfrak{A}}}$$

$$\widehat{\underline{\forall x\, \mathfrak{A}(x,y)}} = \widehat{\neg \exists x \underline{\neg \mathfrak{A}(x,y)}} = \widehat{\overline{\exists x \neg \mathfrak{A}(x,y)}}$$

$$= пр_2\, \widehat{\neg \mathfrak{A}(x)} = пр\, \widehat{\overline{\mathfrak{A}(\cdot)}}$$

$\widehat{a}$ - множество всех тех наборов значений его переменных, для которых этот предикат превращается в истинное высказывание.

17. Интерпретация.

Способ замены одного отношения другим, одного класса переменных другим, при котором тождества 1 варианта истинны для 2 варианта называются интерпретацией.

Интерпретация – пара <D,Γ>, где D – множество, называемое областью интерпретации, а Γ – соответствие.

⌋Γ = <G,X,Y>, тогда

1) Каждой константе теории ставится в соответствие элемент из D.

2) Каждому предикатному символу ставится в соответствие конкретное отношение на D Pij

3) Каждому символу fik ставит в соответствие функцию $F:D^k \rightarrow D$

18. Модель.

$I = < D, \Gamma >$, где

D – множество значений всех переменных и констант (обл итерпр-ции)

Γ – соответствие, которое любому предикатному символу ставит в соответствие некоторое отношение, а любой функции – некоторую функцию D^i->D

1) Предикативная формула истинна в некоторой интерпретации, если для любого набора значений из D формула – истинное высказывание
2) -//- ложна -//- - ложное высказывание
3) -//- выполнима, если существует хотя бы один набор из D для которого формула – истинное высказывание

- A истина $\Rightarrow \neg A$ ложна
- A не может быть И и Л одноврем
- $A \rightarrow N$ и A истина $\Rightarrow N$ истина
- $A \rightarrow N$ ложна $\Rightarrow A$ истина $\& N$ ложна
- $A \& N$ ложна $\Rightarrow A$ ложна $\& N$ ложна

  A & N истина -> A истина и N истина

19. Теорема Черча.

Теория исчисления предикатов первого порядка неразрешима.

Не существует общего алгоритма, определяющего для любой предикативной формулы, является ли она логически общезначимой.

20. Приведенная и предваренная нормальные формы. Теоремы о них.

О: $K_1 x_1 K_2 x_2 \ldots K_n x_n \alpha(\cdot)$, предикатная формула A не содержащая кванторов, называется предваренной нормальной формой.

Теорема: Для любой предикатной формулы существует равносильная ей формула в предваренной нормальной форме.

Д-во:

1) Если наша приведенная формула автоматически оказывается в ПНФ.

2) 1)-неверно. Применяется преобразование: $\{\forall x \mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N};\ \exists x \mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}\}$, удалив часть кванторов, снова оказывается в ПНФ.

3) Либо не применима, либо не обратима в ПНФ: $\{\forall x A(x_1\ldots) = \forall t A(t_1\ldots);\ \exists x A(x_1\ldots) = \exists t A(t_1\ldots)\}$

$$\begin{cases} (\forall x\, \mathfrak{A}(x,..))\,\&\,\mathfrak{B} = \forall x\,(\mathfrak{A}(x)\,\&\,\mathfrak{B}) \\ (\forall x\, \mathfrak{A}(x,...)) \vee \mathfrak{B} = \forall x\,(\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}) \\ (\exists x\, \mathfrak{A}(x,...))\,\&\,\mathfrak{B} = \exists x\,(\mathfrak{A}(x..)\,\&\,\mathfrak{B}) \\ (\exists x\, \mathfrak{A}(x...)) \vee \mathfrak{B} \equiv \exists x\,(\mathfrak{A}(x..) \vee \mathfrak{B}) \end{cases}$$

Приведенной формулой ЛП называется равносильная ей формула, не содержащая отрицаний и импликаций применимо к простым формулам.

Д-во:

1) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \equiv \neg\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$

2) $\neg(\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}) = \neg\mathfrak{A}\,\&\,\neg\mathfrak{B}$

3) $\neg\forall x\,\mathfrak{A} = \exists x \neg\mathfrak{A}$

Теорема: Для любой предикатной формулы найдется эквивалентная ей формула в приведенной форме.

21. Теории первого порядка.

- ни одна переменная не может иметь область значений набор предикатов.

Логические аксиомы, принадлежащие любой теории 1 порядка:

1) $\mathfrak{A}(\cdot) \to (\mathfrak{B}(\cdot) \to \mathfrak{A}(\cdot))$

2) $\mathfrak{A}(\cdot) \to (\mathfrak{B}(\cdot) \to \mathfrak{C}(\cdot)) \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to$
$\to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})$

3) $(\neg\mathfrak{A} \to \neg\mathfrak{B}) \to ((\neg\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \mathfrak{A})$

4) $\forall x\,\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(t)$, где t свободен для x в $\mathfrak{A}$

5) $\forall x\,(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(x)) \to (\mathfrak{A} \to \forall x\,\mathfrak{B}(x))$
не содержит своб вхожд x

Собственные:

Правило вывода МР $\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B},\ \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ Gen $\dfrac{\mathfrak{A}(x)}{\forall x\,\mathfrak{A}(x)}$

Если теория 1 порядка не имеет аксиом, то она называется исчислением 1 порядка.

Свойства теории 1 порядка:

⎣ А – формула, частный случай тавтологии, тогда существует вывод в ИП этой формулы, причем только аксиом а1,а2,а3 и правила МР.

Д-во:

⎣ в тавтологии $\mathfrak{A}$ были произведены замены пропозиц. Символов на формулы, но при этом возможно ∃ W_e(пропоз. символы), участвующие в выводе $\mathfrak{A}$, но не представленные в ней.

Ограничения:

1) переменные не принимают значений, равных предикату.

2) Квантор не навешивается на предикаты.

Смволы:

,-разделитель / + ( ) ; v ¬ ∩ → ↔ ∃ ∀ ai |xi| fki pnj

Формулы ЛП

22. Теоремы дедукции.

1) Для ИП

⌋Г, А $\vdash \mathfrak{N}$, тогда если правило обобщения не применялось ни к одной из формул, зависящих от А по свободной переменной в формуле А, то Г $\vdash (A \to \mathfrak{N})$

Док-во:

Базис формулы $\mathfrak{N}1\ \mathfrak{N}2 \ldots \mathfrak{N}к = \mathfrak{N}$

А) $\in Г$

Б) аксиомы (А+Б) => $\mathfrak{N}_1 \to (A \to \mathfrak{N}_1)$, $A \to \mathfrak{N}1$

В) А Вывод $A \to A$ – тавтология

23. Теорема Геделя о полноте.

Лемма 1

Пусть К – теория 1 порядка, которая не позволяет вывести для А ее отрицание $\bar{A}$, тогда теория К1 полученная из К путем добавления к аксиомам формулы А, тогда К1 непротиворечива относительно $A \to \neg A$.

Лемма 2

Все логические аксиомы ИП являются логически-общезначимыми формулами.

Лемма 3

Правило МР и обобщение сохраняют логическую общезначимость.

1) МР $\dfrac{A \to \mathfrak{N}, A}{\mathfrak{N}}$
2) Gen: A(x) – логическое общезначимая формула в любой интерпретации =>$\forall$x A(x) - истина

Т1: Всякая теорема ИП логически общезначимая.

Т2: Всякая логически общезначимая формула является теоремой ИП.

Т1, Т2 – теорема Гёделя о полноте ИП.

24. Формальная арифметика.

- Это теория 1 порядка с собственными аксиомами и алфавитом.

$a_1 \rightsquigarrow 0$ (константа)

$P_1^2(x,y) \rightsquigarrow x=y$

$f_1^1(x) \rightsquigarrow x'$

$f_1^2(x,y) \rightsquigarrow x+y$

$f_2^2(x,y) \rightsquigarrow x \cdot y$

Формулы из формул ЛП + собственные аксиомы.

S_1^* $t=r \to (t=s \to r=s)$

S_2^* $t=r \to t'=r'$

S_3^* $0 \neq t'$

S_4^* $t'=r' \to t=r$

S_5^* $t+0=t$

S_6^* $t+r'=(t+r)'$

S_7^* $t \cdot 0=0$

S_8^* $t \cdot r' = t \cdot r + t$

S_9^* $\mathcal{A}(0) \to (\forall x(\mathcal{A}(x) \to \mathcal{A}(x')) \to$
$\to \forall x\, \mathcal{A}(x))$

∀ t,r,s теоремами являются формулы

А) t=t // рефлексивность

Б) t=r → r=t // симметричность

В) t=r → (r=s → s=r)// транзитивность

25. Нестандартная модель арифметики.

- Нормальная модель формальной арифметики, не изоморфная стандартной.

Модель – (в теории 1 порядка) – интерпретация, в которой все аксиомы теории.

Т: а) $t+\bar{1}=t'$

б) $t \cdot \bar{1} = t$

в) $t \cdot \bar{2} = t+t$

Д: а) 1. $t+0=t$

2. $t+0=(t+0)'=t'$ S2

3. $t+0'=(t+0)'$ S6

4. $\vdash t+0'=(t+0)' \to ((t+0)'=t' \to t+0')$

5. $(t+0)'=t' \to t+\bar{1}=t'$ MP 4,3

6. $(t+0)'=t'$ MP 2,1

7. $t+\bar{1}=t'$ MP 5,6

Введем отношения порядка

$t<r \equiv \exists w (w \neq 0 \;\&\; t+w=r)$

$t \leq r \equiv t<r \vee t=r$

$t>r \equiv r<t$

$t \geq r \equiv r \leq t$

$t \nless r \equiv \neg(t<r)$

26. Примитивно рекурсивные функции и предикаты.

Предикат называется примитивно – рекурсивным, если его характеристическая функция примитивно-рекурсивная.

I $Z(x) = 0$

II $N(x) = x+1$

III $U_i^n(\cdot) = x_i$

Пусть R - отнош-е, тогда его характ. ф-ция

$$C_R(x_1 \ldots x_n) = \begin{cases} 0, & R(x_1 \ldots x_n) = u \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Это начальные функции.

IV Подстановка

V Рекурсия $f(x_1 \ldots x_n, y)$

$$f(x_1 \ldots x_n, 0) = g(x_1 \ldots x_n)$$

$$f(x_1 \ldots x_n, y+1) = h(x_1 \ldots x_n, y, f(x_1 \ldots x_n, y))$$

VI μ-оператор

My R(x1,…xn) номинальное значение y, при котором предикат истинен

R(.) = U

Функция f(.) называется примитивно-рекурсивной, если она за конечное число преобразований IV-V может быть получена из натуральной функции.

Т: а) $\oplus$

б) $\odot$

в) x^y

г) $x!$

д) $\delta(x) = \begin{cases} x-1, & x>0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

е) $x \dot{-} y = \begin{cases} x-y, & x>y \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

ё) $|x-y|$

ж) $Sg(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

з) $\overline{Sg}(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

и) $\min(x,y)$

к) $\max(x,y)$

л) $rm(x,y)$ – Остаток от y/x

м) $qt(x,y)$ – Целое от y/x

Все примитивно рекурсивные.

27. Общие свойства алгоритмов.

1) Детерминированность (определенность каждого последующего шага)
2) Массовость (разрешает класс задач)
3) Направленность (результат и область применимости должны быть получены за конкретное число шагов).

Алгоритм – четкое предложение, однозначно определяющее некоторую последовательность действий, которые за конечное число шагов приводят к некоторому заранее известному результату.

28. Вербальные переменные, предикаты и алгоритмы.

Вербальные переменные – переменные, значениями которых являются слова в некотором алфавите.

Литеральные переменные – переменные, значениями которых являются символы.

Натуральные переменные – переменные, содержащие единственный символ.

Вербальный предикат – значением является слово.

Предикат F(x1,…xn) – вербальный, если x1..xn – вербальные переменные.

Вербальный алгоритм – работающий над словами в некотором алфавите.

29. Схема.

Схема – гамма – система, все члены которой формулы подстановок.

Ее элемент действует на некоторое слово, если его ядро действует на это слово.

Активный элемент по отношению к некоторому слову – тот элемент схемы, который действует на слово и ему не предшествует никакой элемент, действующий на это слово.

Результат действия схемы на слово – результат действия ее активного элемента.

Схема Z переводит слово P в Q (Z : P|-Q), если

$G \to F$

$P \equiv RGS$

$Q \equiv RFS$

$Z : P \vdash Q$ - Просто переводит

$Z : P \vdash \cdot Q$ - Заключительно

$Z : P \vdash Q \neg$ - Естественно

30. Переводная система.

γ - система называется переводной системой схемы Z, если $\forall$ слов P и Q, если (P входит в X) (Q следует за P в X) $\rightarrow$ Z : P|-Q

Схема Z просто преобразует слово P в слово R, если $\exists$ переводная система X для Z, которая соединяет P с R Z : P|-R

Схема Z естественно преобразует слово P в R, если она просто преобразует и не действует на R
Z : P|-R$\neg$

Схема Z заключительно преобразует слово P в R(Z : P|-.R), если $\exists$! слово Q, такое что Z преобразует P в Q (Z : P|-Q) и Z : Q|-.R

Z преобразует слово P в Q (Z: P=>Q), если

А) она естественно преобразует P в Q

Б) она заключительно преобразует P в Q

Схема применима к слову P, если $\exists$ слово Q в которое Z перерабатывает данное слово.

Схема Z преобразует слово P в Q Z : P|-Q за n шагов, если $\exists$ переводная система схемы Z, соединяющая слова P и Q и имеющая объем N+1.

31. Тезис Черча и принцип нормализации.

Принцип нормализации – утверждение, которое невозможно доказать.

Любой алгоритм может быть заменен вполне эквивалентным ему нормальным алгоритмом

Если любой алгоритм эквивалентен нормальному, то он нормализуем.

Тезис Черча:

Всякая эффективно-вычислимая функция эквивалентна некоторой λ-определенной фунции.

Всякая эффективно-вычислимая процедура эквивалентна машине Тьюринга.

32. Нормальные алгоритмы(НА), применимость, замкнутость, композиция.

Нормальный алгоритм – алгоритм, определяющийся:

- алфавит A

- 3 специальных символа

$\lambda \sim \to$

$\beta \sim \to.$

$\gamma \sim$ CP (перевод строки)

- схема

$$\begin{cases} P_1 \to Q_1 \\ P_2 \to Q_2 \\ \ldots \\ P_k \to Q_k \end{cases}$$

Композиция: $\mathring{\mathfrak{A}}(P)$ и $\mathfrak{N}(Q)$

Тогда $\mathfrak{N}(\mathring{\mathfrak{A}}(P)) = \mathfrak{N}\circ\mathring{\mathfrak{A}}(P)$

НА замкнутый, если в схеме имеется подстановка с пустой левой частью.

НА применим к слову, если он перерабатывает слово за конечное число шагов и останавливается.

33. Естественная сложность НА, число шагов.

Естественная сложность НА – число формул подстановки |A|=n

Пример: Удваивающий алгоритм

$$\begin{cases} \alpha\xi \to \xi\beta\xi\alpha & n \\ \beta\eta\xi \to \xi\beta\eta & n^2 \\ \beta \to & \\ \alpha \to \cdot & \\ \to \alpha & \end{cases} \qquad \underline{n^2+n+3}$$

Число шагов, за которое алгоритм перерабатывает любое слово <= длине этого слова +1

34. Арифметически алгоритмы.

Арифметический алгоритм – частный случай вербальных алгоритмов над алфавитом {1}

Модуль разности |x-y|; входное слово $\overline{x} * \overline{y}$

$$\begin{cases} 1*1 \to * \\ * \to \cdot \end{cases}$$

Число шагов – min(x,y)

Алгоритм Евклида (НОД)

$$\begin{cases} 1*1 \to \alpha * \\ 1\alpha \to \alpha 1 \\ 1* \to *\beta \\ \beta \to 1 \\ \alpha \to \gamma \\ \gamma \to 1 \\ *1 \to \cdot 1 \end{cases}$$

35. Понятие о массовой алгоритмической проблеме.

Нормальная массовая проблема – построить нормальный алгоритм над алфавитом, содержащим все возможные символы входных наборов единичных задач, применимых к любому входному набору и перерабатывающей его в пустое слово т т т к это единственная задача разрешимая в положительном смысле.

Теорема (О неразрешимости задачи применимости нормального алгорифма).

НА $\mathfrak{M}$ может быть построен в алфавите {a,b}, такой что не $\exists$ НА (над тем же алфавитом), перерабатывающий любое слово в этом алфавите в пустое слово, т т т к $\mathfrak{M}$ применим к этому слову.

36. Классы задач.
37. Стандартная форма Сколема. Теорема о ней.
38. Эрбрановский универсум.
39. Эрбрановский базис.
40. Семантическое дерево и Теорема Эрбрана.
41. Резолютивный вывод.
42. Подстановка. Композиция подстановок. Унификатор.
43. Алгоритм унификации.
44. Метод резолюции для логики предикатов.
45. Алгоритм поглощения.