1. Доказать в натуральном исчислении формулу

$$(A \vee B)\ \&\ (A \vee -B) \rightleftarrows A$$

Ответ:

$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \rightleftarrows A$

$(\rightarrow)$ $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \vdash A$

1. УК $A \vee B \vdash A$

2.1 случ. 1: $A \vdash A$

2.1.1 ТД, $\vdash A \rightarrow A$ - тавтология

2.2. случ. 2: $B \vdash A$

2.2.1 $B \rightarrow A$ - гипотеза

2.2.2. MP $B, B \rightarrow A \vdash A$

$(\leftarrow)$ $A \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

ч1: $A \vdash A \vee B$

1. ВД $A \vee B$
2. ТД $\vdash A \vee B \rightarrow A \vee B$

ч2: $A \vdash A \vee \neg B$

1 ВД, $A \vee \neg B$
2. ТД $\vdash A \vee \neg B \rightarrow A \vee \neg B$

$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \vdash A$

$A \vee B,\ A \vee \neg B,\ \neg A$

1. $A \vee B$
2. $A \vee \neg B$
3. $A \vee A = A$ 1, 2
4. $\neg A$
5. $\square$ 3, 5

2. Доказать в натуральном исчислении формулу

$$A \,\&\, (B \vee A) \rightleftarrows A$$

Ответ:

$A \wedge (B \vee A) \rightleftarrows A$

$(\rightarrow)$ $A \wedge (B \vee A) \vdash A$

1\. УК $A \vdash A$

2\. +Д $\vdash A \Rightarrow A$ - тавтологие

$(\leftarrow)$ $A \rightarrow A \wedge (B \vee A)$

1\. ВД, $A \vee B$

2\. ВК $A, A \vee B \vdash A \wedge (B \vee A)$

3. -

4. -

---

5. Построить взаимно однозначное соответствие между [0; 1] и [1;2].

   Ответ:

   Г = { G, [0; 1], [1;2] }

   G = { <x, y> | y = x + 1 }

---

6. Доказать что

$$\forall \varphi \quad \overline{\varphi^{-1}} = \left(\overline{\varphi}\right)^{-1}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} \varphi &= \langle \Phi, M \rangle \\ \varphi^{-1} &= \langle \Phi^{-1}, M \rangle \\ \overline{\varphi^{-1}} &= \langle M^2 \setminus \Phi^{-1}, M \rangle \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\varphi} &= \langle M^2 \setminus \Phi, M \rangle \\ \left(\overline{\varphi}\right)^{-1} &= \langle M^2 \setminus \Phi^{-1}, M \rangle \end{aligned} \right.$$

чтд

---

7. -

---

8. Доказать или опровергнуть: P o Q = Q o P.

   Ответ:

   P = { <a , b> , <c, d> }

   Q = {<b, c > , <d , f> }

   P o Q = { < a, c> , <c, f> }

   Q o P = { < b, d > }

   Опровергнуто.

Другой ответ:

P =<a,b>

Q = <b,c>

P o Q = {<a,c>}

Q o P= пустое множество

Опровергнуто.

---

9. Для каких отношений справедливо

$$\varphi^{-1} = \overline{\varphi}$$

Ответ: Прошлый год (антисимметрично, связанно)
Хз чо правильно

---

9. $\varphi^{-1} = \overline{\varphi}$

$\varphi = \langle \Phi, M \rangle$ $\quad \varphi^{-1} = \langle \Phi^{-1}, M \rangle$ $\quad \overline{\varphi} = \langle M^2 \setminus \Phi, M \rangle$

$$\varphi^{-1} = \overline{\varphi} \Leftrightarrow \underline{\Phi^{-1} = M^2 \setminus \Phi.}$$

Отношение φ:

1) не рефлексивно
2) антирефлексивно

т.к. $\forall a \, \langle a,a \rangle \notin \Phi^{-1} \Rightarrow \forall a \, \langle a,a \rangle \notin \Phi$

3) не симметрично т.к. $\Phi^{-1} \neq \Phi$
4) антисимметрично т.к. $\Phi \cap \Phi^{-1} = \varnothing \subseteq \Delta_M$.
5) не транзитивно. т.к. $\Phi \circ \Phi \subseteq \Phi$ не всегда вып.
$(\Phi = \{\langle a,b \rangle, \langle b,c \rangle\}, \ \Phi \circ \Phi = \{\langle a,c \rangle\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi \circ \Phi \nsubseteq \Phi)$
6) связно т.к. $M^2 \setminus \Delta_M \subseteq \Phi \cup \Phi^{-1}$, $\Phi^{-1} = M^2 \setminus \Phi \Rightarrow$
(гр-к связного отн)
$\Rightarrow M^2 \setminus \Delta_M \subseteq \Phi \cup (M^2 \setminus \Phi) = M^2$, $M^2 \setminus \Delta_M \subseteq M^2$ — верно.

Св-ва: $\overline{1}, 2, \overline{3}, 4, \overline{5}, 6$

10. Если |A| = m, то сколько существует парных отношений на A?

Ответ:

Представим матрицу m*m, пусть если в [i][j] ячейке стоит 1, то i и j вступают в отношение. Сколько существует вариантов расположения единиц в матрице?

В каждой ячейке может быть либо 0, либо 1, тогда представим матрицу как цепочку из m*m битов. Тогда вариантов цепочек будет равно 2 ^ (m * m). Т.е. 2 * 2 * 2 * …. 2 - m*m раз.

Ответ: 2 ^ (m*m).

---

11. -

---

12. -Верно ли равенство: Пр2<1,<3,8>>=Пр1,2<3,8,6>?

Ответ:

Пр2<1,<3,8>> = <3,8>

Пр1,2<3,8,6> = <3,8>

Верно.

---

13. -

---

14. Для формулы ниже построить интерпретацию с областью D = {a, b} , чтобы эта формула была противоречива.

$$\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$$

Ответ:

$\exists x\, P(x) \longrightarrow \forall x\, P(x) \quad D = \{a, b\}$

$\neg(\exists x\, P(x)) \vee \forall x\, P(x)$

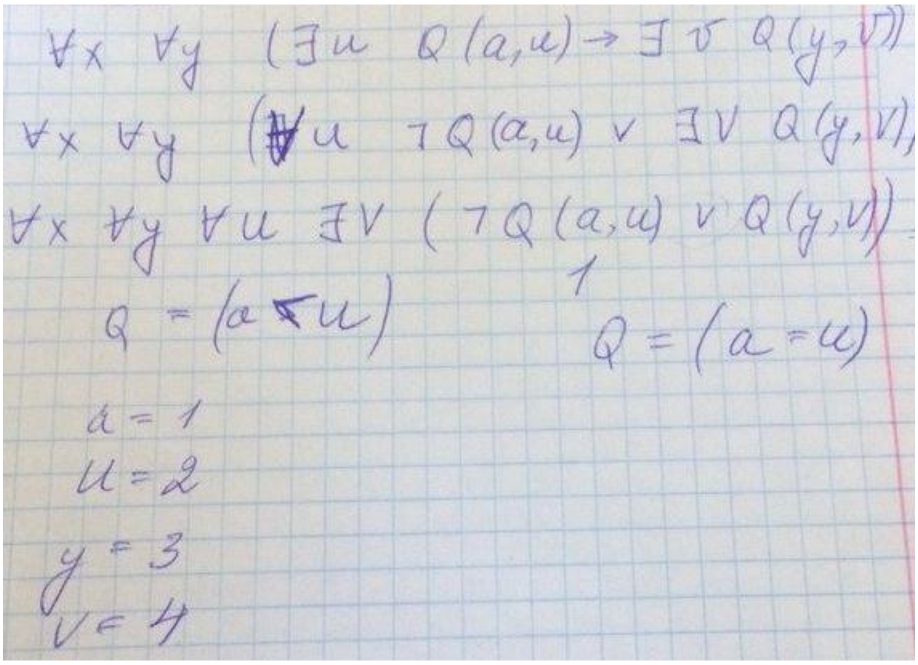
$\forall x\, \neg P(x) \vee \forall x P(x)$ – привести предикат, который $P(x) \neq 0$, $P(x) \neq 1$

<u>Пример:</u> $\boxed{P(x) = x = a}$

15. К какому классу истинности (общезначимы, выполнимы, и т.д.) относится формула

$$\forall x \forall y\ (\exists u\ Q(x,u) \to \exists v\ Q(y,v))\ ?$$

Ответ (непонятен):



$\forall x\ \forall y\ (\exists u\ Q(a,u) \to \exists v\ Q(y,v))$

$\forall x\ \forall y\ (\forall u\ \neg Q(a,u) \vee \exists V\ Q(y,V))$

$\forall x\ \forall y\ \forall u\ \exists V\ (\neg Q(a,u) \vee Q(y,V))$

$Q = (a \neq u)$ 1 $Q = (a = u)$

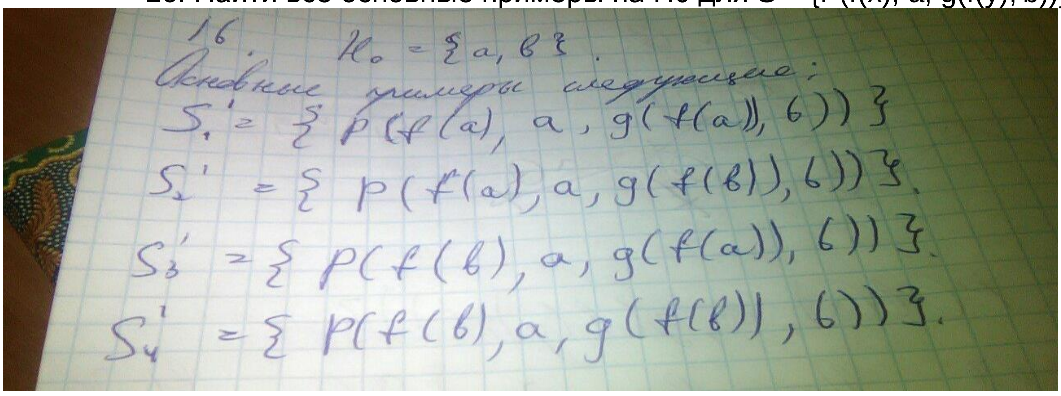
$a = 1$

$u = 2$

$y = 3$

$V = 4$

16. Найти все основные примеры на H0 для S = {P(f(x), a, g(f(y), b))}



16. $H_0 = \{a, b\}$.

Основные примеры следующие:

$S_1' = \{P(f(a), a, g(f(a)), b))\}$

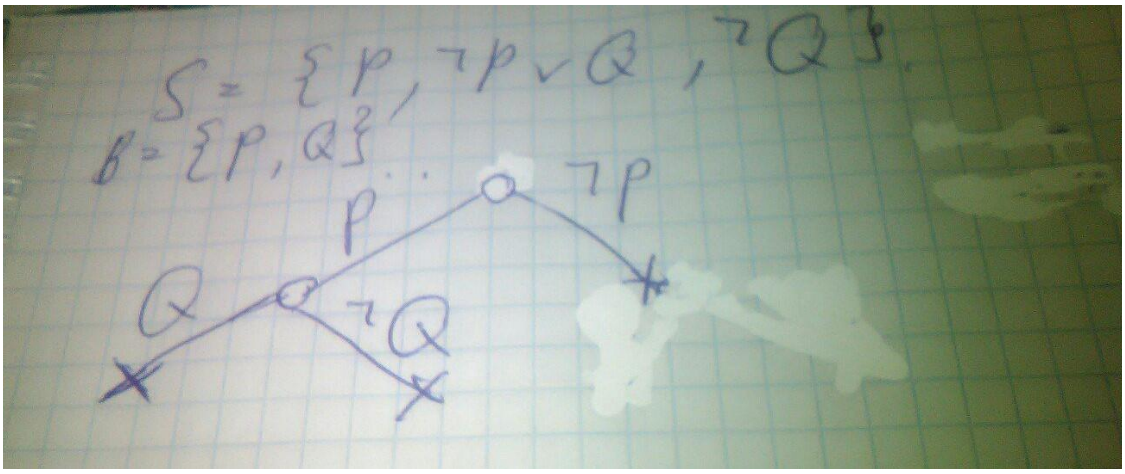
$S_2' = \{P(f(a), a, g(f(b)), b))\}$.

$S_3' = \{P(f(b), a, g(f(a)), b))\}$.

$S_4' = \{P(f(b), a, g(f(b)), b))\}$.

17. пусть S = { P , - P v Q, - Q}.

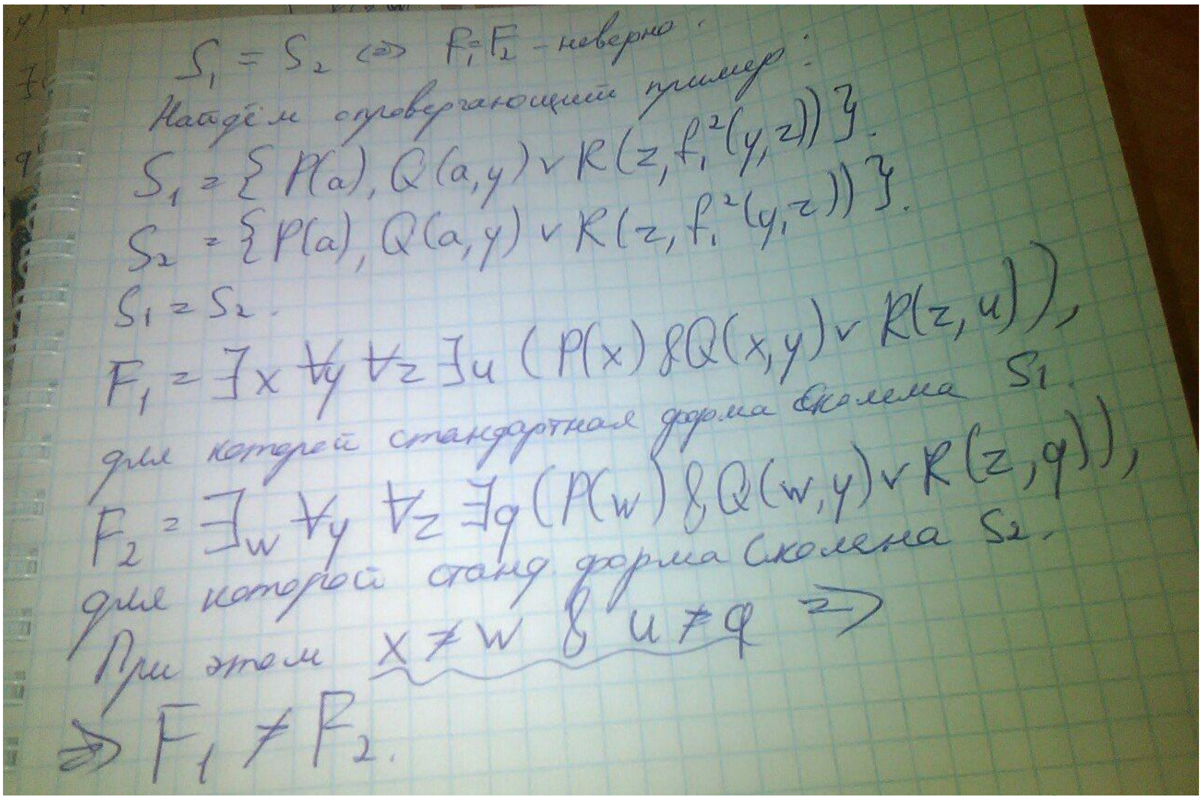
Построить замкнутое семантическое дерево для S.



18. Верно ли утверждение S1 = S2 -> F1 = F2

Si - стандартная форма Сколема для Fi.

Ответ: Нет, неверно



$S_1 = S_2 \Leftrightarrow F_1 = F_2$ – неверно.

Найдём опровергающий пример:

$S_1 = \{P(a), Q(a,y) \vee R(z, f_1^2(y,z))\}$.

$S_2 = \{P(a), Q(a,y) \vee R(z, f_1^2(y,z))\}$.

$S_1 = S_2$.

$F_1 = \exists x \forall y \forall z \exists u (P(x) \& Q(x,y) \vee R(z,u))$,

для которой стандартная форма Сколема S_1.

$F_2 = \exists w \forall y \forall z \exists q (P(w) \& Q(w,y) \vee R(z,q))$,

для которой станд форма Сколема S_2.

При этом $x \neq w \; \& \; u \neq q \Rightarrow$

$\Rightarrow F_1 \neq F_2$.

19. -

20. Унифицируемо ли множество W = {P(x,g(y),y,h(x,y)),P(y,z,c(x),v)}. Указание: использовать алгоритм унификации.

... переменная и терма, ее содержащего, то остановка Stop(−).
Множество не унифицируемо.

1) 0) $W_0 = W$, $k = 0$, $\sigma_0 = \varepsilon$.

1) $D_0 = \{x, y\}$.

2) Есть $\Rightarrow$ 3

3) Строим подстановку $\{x/y\}$.

$W_1 = \{P(x, g(x), x, h(x,x)), P(x, z, c(x), v)\}$.

$\sigma_1 = \{x/y\}$. $k = 1$ goto 1

1) $D_1 = \{g(x), z\}$

2) Есть $\Rightarrow$ 3

3) Подстановка $\{g(x)/z\}$. $\sigma_2 = \{x/y, g(x)/z\}$

$W_2 = \{P(x, g(x), x, h(x,x)), P(x, g(x), c(x), v)\}$

$k = 2$ goto 1

1) $D_2 = \{x, c(x)\}$.

2) Так как в D_2 нет терма, не содержащего переменной x, то Stop(−).

$\Rightarrow$ Множество не унифицируемо.

Примечание:

Допустимые пары рассогласования и соответствующие подстановки:

x/y или y/x, если x=y;

x/a, если x=a;

x/f(y), если x=f(y) или x=f(a), но не унифицируется x=f(x), f(x)=a.

21. Методом резолюций доказать невыполнимость S.

$S = \{P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(y), -P(y), -Q(f(a))\}$

Ответ:

$S \{P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(y), \neg P(y), \neg Q(f(a)$

1 $P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(y)$

2 $P(a) \vee Q(f(a)) \vee Q(y)$ из 1 $\{a/x\}$

3 $\neg P(y)$

4 $\neg P(a)$ из 3 $\{a/y\}$

5. $Q(f(a)) \vee Q(y)$ из 2 и 4

6 $Q(f(a))$ из 5 $\{f(a)/y\}$

7. $\neg Q(f(a))$

8. $\square$ из 6 и 7.

22.-

23. Доказать методом резолюций MP

$A, A \to B \vdash B$

$A, \neg A \vee B \vdash B$

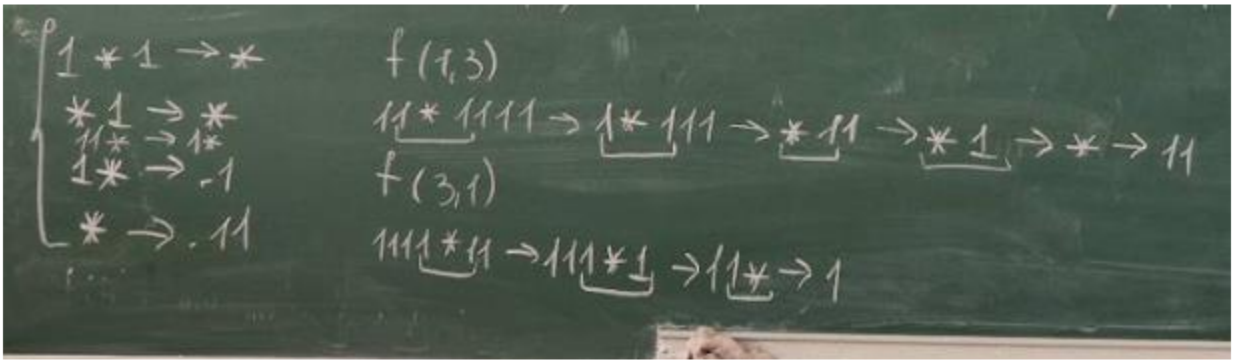
1) $\neg B$ - гипотеза

2) $res(\neg A \vee B, \neg B) = \neg A$

3) $res(\neg A, A) = \square$

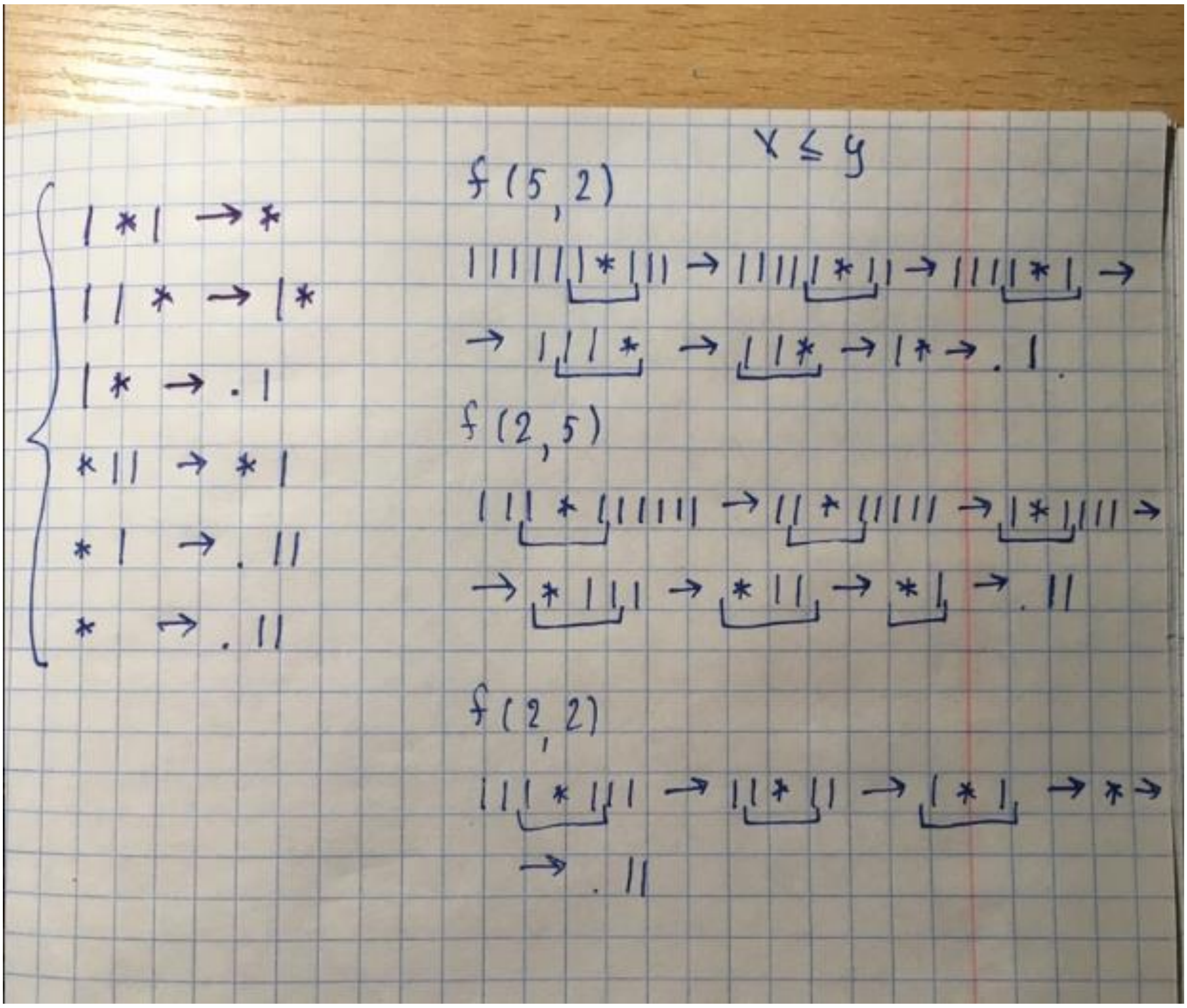
24. Построить НАМ, реализующий характеристическую функцию предиката x < y

Ответ:



25. Построить НАМ, реализующий характеристическую функцию предиката “x <= y”

Ответ:


x ≤ y

$$\begin{cases} |*| \to * \\ ||* \to |* \\ |* \to .| \\ *|| \to *| \\ *| \to .|| \\ * \to .|| \end{cases}$$

f(5, 2)

||||||*||| → |||||*|| → ||||*| → |||* → ||* → |* → .|

f(2, 5)

|||*|||||| → ||*||||| → |*|||| → *||| → *|| → *| → .||

f(2, 2)

|||*||| → ||*|| → |*| → * → .||