**1)Мат.логика. Её предмет и задачи.** Логика - анализ методов рассуждения. Основная задача - найти корректные способы рассуждения. Формальная логика - раздел философии, который изучает и анализирует высказывание, опираясь на истину и ложь. МЛ является формальной, это более узкий раздел, она не рассматривает ничего, что не определено чётко и однозначно. Относится только к математике. Задачи МЛ: изучение и формализация языка науки, развитие основ математики, разработка принципов и методов построения теории и их совершенствование. Причины развития: 1) изменение роли математики в науке; 2) понимание связи между теорией и экспериментами; 3) зависимость научных результатов от структуры и состава языка науки.

**4) Конструктивное определение множества.** Множество -совокупность, область, геометрическое место точек, обозначение A, B, C ... M. Формальное определение понятия: 1) ø - пустое множество

2) Пусть М - некоторый объект, тогда {M} - мн-во

3) Пусть M1 и М2 - множества, тогда М1⋂М2, М1∪М2, М1\M2 - множества.

4) Совокупность бесконечных мн-в N, R, Z, Q

5) Пусть М - множество, тогда ∃ множество всех подмножеств µ

6) Пусть М - некое множество, φ(х), х ∈ М → М → М1 = {х ∈ М, φ(х)} - множество

7) Других множеств не существует

**7) Соответствие.** Соответствием называется тройка множеств <G,X,Y> где X - область отправления, Y - область прибытия, G -график. G ⊆ X\*Y

пр1G ⊆ X - область опред.

пр2G ⊆ Y - область знач.

Г=<G,X,Y> ∆ = <H,Z,W>

Г-1≜ <G-1,Y,X> - инверсия

Пусть Г, Г(А) - образ мн-ва при соотв-ии Г - множество всех тех элементов, к-рые соотв. элементам множ. А при Г

ГКомпозиция функций, произведение адамара, математический символ θ = <G Композиция функций, произведение адамара, математический символ T, X, W> - композиция

Свойства: 1) А ⊆ В → Г(А) ∈ Г(В)

2) ГКомпозиция функций, произведение адамара, математический символ θ(А) = θ(Г(А))

3) θКомпозиция функций, произведение адамара, математический символ Г(А) = θ (Г(А))

4) Соотв. функционально, если его график функц-ен

5) Инъективно, если его график инъективен

6) Всюду определено, если Х=пр1G

7) Сюръективно, если пр2G=Y

8) Биективно, если обладает св-ми 4, 5, 6, 7

**10) Разбиение, сопряжённое с отношением.** Пусть М. Разбиением множ-ва М наз. система мно-в M такая, что

1)Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого.А ∈ M А ⊆ М

2) М ≠ ø => Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого. (А ∈ M) А ≠ ø

3) Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого. А ∈ M, Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого. В ∈ M, если А≠В → А⋂В ≠ ø

4) ∪ А = М, А ∈ M

Тривиальные разбиения:

а) целое разбиение M = {М}

б) поэлементное M = {{a}, {b} ...}

Когда элементов больше 2, то для множеств сущ. нетривиальное разбиение.

Пусть М, M, φ. Говорят, что отношение сопряжено с разбиением <=> (Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого. x ∈ М) (Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого. у ∈ М) [х φ у ↔ (∃ А ∈ M) (х ∈ А & y ∈ A)]

Элементы разбиения наз. классами.

Теорема 1: Если разбиение M сопряжено с отношением φ и если M сопряжено с φ, то это одно и то же разбиение.

Док-во: пусть a, b ∈ классу К: & а ∈ Lj & b ∈ L & Lj ≠ Ls. Кi ∈ M, Lj, Ls ∈ M. По опред. сопряженности противор. #

Теорема 2: Если некот. φ сопряжено с разбиением, оно явл. отношением эквивалентности.

Док-во: реф., сим., трансз. отношение. Пусть a, b ∈ K; Пусть b, c ∈ K. Отсюда Ki=Kj (трансз.)

Теорема 3: Если отнош. с φ относит. эквивалентно, то ∃ разбиение, с которым φ сопряжено.

Док-во: Пусть а ∈ М, на котором задано φ. Перебираем элементы ∈ М, кот. находятся в отнош. φ: bc...z и добавляем их в новый класс до полного исчерпания.

**19) Теория Чёрча.** Чёрч доказал, что не существует алгоритма, с помощью которого за конечное число шагов можно доказать, является ли какая-либо формула теоремой ИП.

**13) Непротиворечивость исчисления высказываний.** Пусть A → A'.

1. Непротивореч. относит. некоторого преобразования, если A и A' не могут быть одновременно теоремами формально теории.

2. Абсолютная непротивореч., если не всякая ф-ла явл. теоремой.

3. Непротиворечивость в смысле Поста, если ни одна из пропозиц. переменных не может быть теоремой формальной теории.

Теорема: всякая теорема теории Р1 явл. тавтологией.

Аксиомы: с помощью таблицы истинности можно убедиться, что все 3 аксиомы Р1 тавтология.

МР (A → B, A)/A (сохраняет тавтологию)

Теорема: любая тавтология (неисчислим. высказываний) явл. теоремой Р1. (Р1 - разрешимая теория).

**16) Область истинности предиката.** Предикат - высказывательная форма (содержит предметные переменные), которая после замены всех предметных переменных превращается в высказывание.

Область действия предиката: та часть ф-лы, в которой содержится переменная, на кот. навешен предикат.

Операция квантификации: 1) Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого. x ∈ M R(...x...) ≡ 1, |M| < ∞ P(...a1...) ∧ ... ∧ P(...am) =1 - обобщение ∧

2) ∃ х ∈ M P(...x...) - обобщение ∧

Область истинности: A - A(.) - множество наборов значений его переменных, для которых он превращается в истинное высказывание.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ¬ | & | ∨ | ∃ |
| - | ⋂ | ∪ | проекция |

Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого. - &

∃ - ∨

A = М (М - множество значений)

A = ø

A ≠ ø, A ⊆ М

**22) Теоремы дедукции.** Теоремы дедукции ИВ: Пусть ф-ла N выводима из Г и {A}, тогда существует вывод из Г ф-лы A→N. Г ∪ {A}Стрелка, определение отображения, математический символ NСтрелка, определение отображения, математический символ r Стрелка, определение отображения, математический символ A Стрелка, определение отображения, математический символ N (r-мн-во РДФ)

Док-во: Пусть M1, M2...Mn ≡ M - вывод из Г ∪ {A}, 1 ≤ i ≤ n. Пусть i=1. Возможно 3 случая:

1) N1 - аксиома, тогда вывод 1. N1. 2. N1 → (A → N1). 3. A → N1 МР 2.1

2) Пусть N1 ∈r, тогда док-во аналогично 1)

3) Пусть N1 ∈A. Тогда Стрелка, определение отображения, математический символу N1→ N1=>Стрелка, определение отображения, математический символ у A → N1; ГСтрелка, определение отображения, математический символ A → N

4) Пусть i<K. Рассмотрим вывод Nn. Возможны 4 случая: 1. Nn - аксиома. 2. Nn∈r 3. Nn ∈ A 4. Nn получена из Ni и Nj по МР, причём i, j < K и Ni=Nj → NK

Для 1, 2, 3 док-во аналогично док-ву при i=1  
Для 4) 1. r Стрелка, определение отображения, математический символ A → Ni 2. ГСтрелка, определение отображения, математический символA → (Ni→ NK)

3. (A→(Ni→ NK))→((A→Ni) →(A→ NK)

4. (A→ Ni) →(A→ NK) - М.Р. 3.2.

5. A→ NK МР 1.4.

Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого. K, в том числе для K=n. ГСтрелка, определение отображения, математический символ A→ NK. #

Теорема дедукции ИП: Пусть Г ∪ {A}Стрелка, определение отображения, математический символ N, тогда если правило обобщения не применялось ни к 1ой ф-ле, зависящей от A по свободным переменным в ф-ле A, тогда ГСтрелка, определение отображения, математический символ A → N. Д-во: N1... Nn≡N - базис, вывод из Г, 1 ≤ i ≤ n. Пусть i=1, тогда для N возможны 3 случая: 1) N1 ∈ Г 2) N - акс. 3) N ∈ A - док-во, аналогично док-ву для N1 из B.

Для Nn возможны 4 случая: 1) Nn ∈ Г 2) Nn - акс. 3) Nn ∈ A - док-во, аналогично [1] 4) Nn получена из Ni и Nj с помощью A. Если правило обобщения применяется по какой-то ф-ле Ni: 1) Ni не зависит от A: Г1 A → Ni => ГСтрелка, определение отображения, математический символ N (.). A Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого.х Ni (х) Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого.х Ni (х) → (A →Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого.х

Ni (х)), ГСтрелка, определение отображения, математический символ(A→Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого.х Ni (х)). Ni зависит от AСтрелка, определение отображения, математический символ A → Ni, Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого.у (A → Ni) (A не зависит от у). Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого. у (A → Ni (у)) Стрелка, определение отображения, математический символ(A→Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого. у Ni (у)), A→ Ni

Лемма: Г, A Стрелка, определение отображения, математический символB, если B зависит от A, то ГСтрелка, определение отображения, математический символ B. Док-во: рассмотрим вывод формул Bi  т.к. она не зависит от A => все предыдущие ф-лы из вывода от A и зависят. #

**25) Нестандартная модель арифметики.** Рассмотрим конкретную интерпретацию. D - область интер. - множество неотр. чисел. О - интерпретируется О-м значением, х' - получение след. целого значения за х. х+у и х\*у - обычные арифметические действия. Это пример стандартной модели. Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого.нормальная модель ФА, изоморфная примеру - стандартная, Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого. нормальная модель, не изоморфная данной - нестандартная.

**28) Вербальные переменные, предикаты и алгоритмы.** Вербальная переменная - переменная, значениями которой являются различные слова в некотором алфавите. Алфавит - некоторое слово, подразумевающееся мно-вом символов алфавита. Любой символ алфавита называется литерой. Если алфавит состоит из единственного символа "1", то все вербальные переменные называются натуральными. В отличие от теории I-го порядка в НАМ допустимы предикатные переменные, но ими могут объявляться только свободные переменные, а сами предикаты, которые образуются, называются вербальными. Вербальный алгоритм - алгоритм, работающий со словами.

**31) Тезис Чёрча и принцип нормализации.** Алгорифмы A и M эквивалентны относительно алфавита Б, если выполнено:

A(Р)≖Q ↔ M(Р)≖Q, где P и Q - слово из Б. A и M - вполне эквивалентны, если они эквивалентны относительно Б и выполнено:

Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого. Q в A и Математический знак - обозначение понятия - любой, для любого, для всех, для каждого. Q в M A(Р)≖Q ↔ M(Р)≖Q

Принцип нормализации: любой НА может быть заменён вполне эквивалентным ему НА.

Тезис Чёрча: всякая эффективно вычислимая функция эквивалентна некоторой λ-определимой функции.

**34) Арифметические алгорифмы.** Частный случай вербального алгорифма - алгорифм над алфавитом, содержащим единственный символ "/".Число шагов - min (x,y)

Пример алгорифма Евклида: 1\*1→α

1α→α1

1\*→\*β

β→1

α→γ

γ→1

\*1→**˖**1

**37) Эрбрановский универсум.** Строится для конкретной системы S.

Н0={a, b, c...} - все константы системы S (если их нет, берём любую, но одну)

Н1= Н0 ∪{f(a), f(b), f(u1)...g(a, a)...} Н0∪ символы для всех сочетаний из Н0

Н1+i = Нi ∪{f(ti), ti - термы из Нi.

Интерпретация - интерпретиция, область которой Эрбрановский универсум и все const отображаются сами в себя. I = <D, Г>

Конечен, если S не содержит переменных или в S нет функц. символов, в остальных - бесконечен.

Теорема: Система S невыполнима <=> S невыполнима ни на одной интерпретации.

**40) Резолютивный вывод.** Резолютивный вывод - последовательность дизъюнктов α0, α1. . . αk, где αi - элемент системы S, либо резольвента двух предыдущих дизъюнктов.

**43) Метод резолюций для логики предикатов.** Склейка - дизъюнкт системы S, в котором его элементы унифицированы, если они униф. Пусть в системе S имеются 2 дизъюнкта Ai и Aj. Если в каждом из них есть литеры, которые униф., то мы строим резольвенту для AiG и AjG. Резольвентой называется 1 из вариантов: 1) бинарная резольвента дизъюнктов Ai и Aj. 2) бинарная резольвента дизъюнктов Ai и Aj и склейки. 3) бинарная резольвента двух склеек.

Метод резолюции - правило порождения резольвентов.

Теорема: Множество дизъюнктов невыполнимо <=> существует вывод дизъюнктов из этой системы.