**3. Семиотика (основные понятие и определения, равносильность форм)**

Семиотика занимается изучением языка.

Высказывание - некая фраза или предложение естественного языка, о котором разумно говорить истинно оно или ложно.

Буква - некоторый символ, который воспринимается, как единое целое.

Алфавит - конечная совокупность букв.

Математический язык включает в себя все алфавиты мира и дополнительные символы.

Слово -совокупность букв данного алфавита, записанных одна за одной в строчку.

Выражение - совокупность букв фиксированного алфавита, записанная в "разумном" порядке.

Переменная - символ или буква, которая объявляется с областью значений.

Форма -выражение, содержащее переменную.

Формы бывают истинными и произвольно ложными (они же предикаты, формулы, высказывательные формы).

Две формы называются равносильными, если для каждого набора своих значений они либо неопределенны, либо определены и принимают одно и то же значение.

**6. График**

G⊆A×B G={<a,b>}

пр1G - область определения

пр2G - область значений

Инверсия: G-1={<b,a>}

Симметрия: G=G-1

График инъективен, когда нет пар с одинаковыми вторыми и разными первыми элементами (функционален наоборот)  
Композиция графиков P∘Q={<a,b> | ∃c: <a,c>∈P, <c,b>∈Q}

**15. Численные кванторы**

∃x P(x) - существование

∀x P(x) - всеобщность

Перемещение кванторов через отрицание:

¬∀x A(x)≡∃x ¬A(x)

¬∃x A(x)≡∀x ¬A(x)

Введены для удобства, не являются независимыми:

∃1x (∃!x) - существует единственный

∃∞x - существует бесконечно много

**33. Естественная сложность НА, число шагов**

Естественная сложность НА - число формул подстановки. |A|=n (длина схемы)

(z:p) -число шагов, за которые схема z перерабатывает слово p.

**18. Модель**

I=<D,Г>

D - множество значений всех переменных, констант

Г - соответствие, которое любому предикатному символу ставит в соответствие некоторое отношение, а любой функции - некоторую функцию

Если в некоторой интерпретации все аксиомы ФТ≡И, то эта интерпретация - модель ФТ.

1) Предикатная формула истинна в некоторой интерпретации, если для любого набора значений из D формула - истинное высказывание.

2) Предикатная формула ложна в некоторой интерпретации, если для любого набора значений из D формула - ложное высказывание.

3) Интерпретация выполнима, если существует хотя бы один набор из D, для которого формула - истинное высказывание.

A Истинна => ¬A Ложна //Далее И и Л  
А не может быть Л и И одновременно

А→N и А И => N Л

А→N Л => А И & N Л

А & N Л => А Л & N Л

А & N И => А И & N И

**9. Отношение**

Отношение - множество кортежей одинаковой длины. Любой график - бинарное отношение.

Отношение между числами: >, <, =, ≤, ≥.  
a) Графика (множество пар, таблица)

б) Соответствие

в) Высказывательная форма

Операции:1)х(φvψ)y=(xφу)v(xψy)

2)х(φ&ψ)y=(xφу)&(xψy)

3) х(φ\ψ)y=(xφу)&¬(xψy)

4) x(¬φ)у = ) ¬(xφу)

5) x(φ-1)у = уφх

6) х(φ◦ψ)у = ∃z ((xφz)&(zψy))

7) x(φA)у = (хφу)&(х,у∈А)

Свойства: 1) Рефлексивность

ΔM⊆Ф, xφx

2) Антирефлексивность

ΔM⋂Ф x¬φx

3) Симметричность

Ф-1=Ф (x≠y)&(xφy)→(yφx)

4) Антисимметричность

Ф-1⋂Ф (xφy)&(yφx)→(y=x)

5) Транзитивность

Ф∘Ф⊆Ф (xφy)&(yφz)→(xφz)

6) Связанность

M2/ΔM⊆Ф-1∪Ф (x≠y)→(xφy)v(yφx)

Эквивалентность: 1 3 5

Нестрогий: 1 4 5

Совершенный нестрогий: 1 4 5 6

Строгий: 2 4 5

Совершенный строгий: 2 4 5 6

Теорема: Если отношение обладает свойством, оно сохраняется при инверсии.  
Теорема: Операция сужения сохраняет все отношения.

**27. Алгоритм, свойства**

Алгоритм - предписание, однозначно определяющее ход конструктивного процесса.

Свойства: 1. Детерминированность

2. Массовость

3. Направленность

4. Область применения

**12. Натуральное исчисление**

1. Алфавит: (,),&,v,¬,→,↔, пропозициональные переменные

2. Правильно построенные формулы

3. Аксиом нет

4. Правила вывода: MP ; ВК;

УК, ; ВД, ; УД

ВК - введение конъюнкции

УК - устранение конъюнкцией

УД - удаление дизъюнкции

В квази-прямом методе доказательства мы можем на каждом шаге записывать одну из посылок n-кратной импликации.

1. Гипотеза

2. РДФ(ранее доказанная формула)

3. Логическое следствие

4. ТУ\У

Косвенный: 1,2,3,4 Прямой: 1,2

Гипотезу можно записать на любом шаге; можно записывать РДФ, затес следствие по правилам вывода. Доказательство оканчивается получением формулы Y.

При косвенном делается тоже самое, но добавляется отрицание заключения. Противоречие доказывает теорему.

Существует доказательство по частям для частного виду, когда заключением является конъюнкция.

**21. Теории первого порядка**

ФТ, не имеющие в области значений функции или предиката, а из термов лишь константы доступны для значений переменных.

Кванторы навешены только по переменным.

1. Алфавит: ,; (; ); ¬; &; v; →; ↔; ∀; ∃; пропозициональные переменные; A...; fi...; xi...; ai...

2.Формулы ИП

3.Аксиомы:

А) Логические

А1 A→(B→A)

А2 A→(B→C)→(A→B)→(A→C)

A3 (¬B→¬A)→( ¬A→B)→A)

A4 ∀x A(x)→A(t), t - свободный для x в A

A5 ∀x (A→B(x)→(A→∀x B(x)), A не содержит свободного вхождения x

Б) Нелогические (собственные)

4. Правила вывода: MP ; Gen

//A и B в формулах выше готические!!!

Если теория не содержит собственных аксиом, то это ИП первого порядка.

Теорема-свойство: Любой частный случай тавтологии выводим в ТПП.

Доказательство: Пусть в тавтологии были произведены замены пропозициональных символов на формулы, но при этому возможно существовали пропозициональные символы, которые не представлены в N, а представлены в выводе. Ui представлены в N. Wi не представлены в N. Каждое Wi можно заменить любой формулой.

**24. Формальная арифметика**

ФА - теория первого порядка с равенством.

1.Символы

A12 (x,x)≡x=y имеет единственный предикатный символ

f11 (x)=x' (Next(x)) }

f12 (x,y)=x+y } функциональные

f22 (x,y)=x\*y } символы

a1=0 -единственная const

<N,Гi> все интерпретации для ФА

2. Аксиомы

S1. x1=x2→(x1=x3→x2=x3)

S2. x1'=x2'→x1=x2

S3.0≠x'

S4. x1=x2→x1'=x2'

S5. x1+0=x1

S6. x1+x2'=(x1+x2)'

S7. x1\*0=0

S8. x1\*(x2')=x1\*x2+x1

S9. A(0), ∀x (A(x)→A(x')) ├─ ∀x A(x)

Т15: Для ФА следующие 3 формулы являются теоремами: а) t=t рефлексивность

б) t=r→r=t симметричность

в) t=r→(r=s→r=s) транзитивность

Данная теорема доказывает, что "=" является отношением эквивалентности.

Доказательство: а) 1. t+0=t S5'

2. t+0=t→(t+0=t→t=t) S1'

3. t+0=t→t=t MP 2,1

4. t=t MP 3,1

б) (A→(B→C))→(B→(A→C)) - частный случай≡B

1.├─S(t=r→(t=t→r=t)) →(t=t→(t=r→r=t))

2. t=r→(t=t→r=t) S1' =B|

3. t=t→(t=r→r=t) MP 1,2 =B|

4-7 t=t =B|

8. t=r→r=t MP 3,7

в) (D→A)→((A→(B→C))→(D→(B→C)))

1.├─S(t=r→r=t)→((r=t→r=s→t=s))→(t=r→)r=s→t=s)))

2. ├─St=r→r=t //T15 б)

3. (r=t→(r=s→t=s))→(t=r→(r=s→t=s)) MP 1,2

4. r=t→(r=s→t=s) S1'

5. t=r→(r=s→t=s) <P 3,4  **#**

<N,M> - стандартная интерпретация ФА.

1.μ(0)=0

2. μ(A12)= "=" //тождественность

3. μ(+)= сложение

4. μ(\*)= умножение

5. μ(')= Next

**30. Переводная система**

Пусть x - γ система. x≖γR1 γR2.. γPγQγ.. γTγ

P, Q, T, Ri – слова в алфавите А, γ∉А

x – переводная система схемы z, если имеет место материальная импликация ∀Р∀Q (γPγQγ→z: P├─Q)

**входит в х**

Будем говорить, что переводная система х некоторой схемы z соединяет слово R со словом T.

z: P⊨Q – просто преобразует, если для z переводная система х, соединяющая P и Q

z: Q-1 – z не действует на Q

z: P├─Q-1 (естественно преобразует)≡z:P├─Q& z: Q-1

z: P├─Q (заключительно преобразует)≡∃' R(z: P├─R & z: R├─Q)

z: P├─Q (перерабатывает P в Q)≡z: P├─Q-1 v z: P⊨Q

! схема z применима к слову Р, если ∃Q:z:P=>Q

! z(A)≡∃Q(z:P=>Q)

**42. Алгоритм унификации**

Система дизъюнктов называется унифицированной, если существует НОУ(наиболее общий унификатор), для которого Ciδ=Cjδ, ∀i,j

W={C1..Cn} ε=Ø - подстановка, не содержащая ни одного элемента

Шаг 0. k:=0,W0:=W, δ:= ε

Шаг 2. |Wk|=1→Stop(+) δk - НОУ

Шаг 2. х, t∈Dn ¬∃→Stop(-) - множество не унифицировано.

Шаг 3. δk+1:= δk◦{t/x}, Wk+1= Wk {t/x}, k:=k+1 goto 1.

Теорема: Если некоторое множество унифицировано, то алгоритм унификации за конечное число шагов найдёт НОУ для этой системы и остановка произойдёт на Шаге ё.

**36. Стандартная форма Сколема. Теорема о ССФ**

ПНФ = ʞx1... ʞxn M(x1...xn) - пренексная, если М - КНФ (матрица).

∃x1∀x2... ∃xk... A(•)

1) ∃x1 которому не предшествует ни 1 квантор ∀. Тогда все вхождения переменной x заменяются на константу, которой нет в матрице.

2) ∃x которому предшествуют два или несколько квантора ∀: f -функциональный символ, не встречающийся в матрице, x в матрице заменяют на (xi...xin) xi - переменная, на которую навешен ∀

f - подбирает xi, f =- сколемовская функция

3) все ∀ оставить в "уме"(работает КНФ)

A(•), состоящая из 1 матрице в КНФ - нормальная форма Сколема для формулы логики предиката.

S={P(x)vQ(y)...} - система дизъюнкций матрицы .

Теорема: Пусть имеется f ИП и её нормальная форма Сколема представлена системой S для F. Тогда, для того, чтобы формула f была невыполнима <=> чтобы S была невыполнима

(F≜S)

Доказательство: Пусть F невыполнима и S выполнима на такой последовательности, что интерпретации ∃xk...(xi...xin)

Если восстановить матрицу F по S, то F - истина, F - выполнима=>допущение о невыполнимость неверное.

Пусть S невыполнима, G выполнима.

F - выполнима=>∃ интерпретация, на которой матрица F - истина>S выполнима=> допущение неверно #

**39. Семантическое дерево и теорема Эрбрана**

Семантическое дерево строится под конкретную систему S. Растёт вниз, у каждого угла выходит конечное число рёбер, каждому ребру подставлено конечное число элементов Эрбрановского базиса B, причём для любых рёбер, выходящих из одного угла (P(a), Q(b), f(c)) v...v - логически общезначимая формула.

Ветвь любого узла не должна содержать контрарные пары. I(N) - множество всех литер, которые присутствуют на ветви, соединяющей корень с вершиной.

Атом ложен, если он присутствует в виде литеры о отрицаниях.

IN={(M1,M2..Mn)} - частная интерпретация, Mi

Если узел I(N) опровергает хотя бы один дизъюнкт S, и никакая I(N-1) этим свойством не обладает, то этот узел замыкающий.

Семантическое дерево полное, если любая ветвь содержит литеру для каждого элемента Эрбрановского базиса.

Теорема: Система S невыполнима т.т.т.к. любая ветвь содержит литеру для каждого элемента Эрбрановского базиса.