

СТАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

22.04.2020

Вероятность. Средние значения

Статистическая физика - это раздел физики, в котором изучают свойства микросистем, исходя из индивидуальных свойств составляющих макросистему частей и взаимодействий между ними.

Ключевое число частиц в макросистеме в макроскопическом приближении, несмотря на очевидный хаос, к появлению порядка, **статистических закономерностей**.

Вероятность - характеризует частоту его повторения

$$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \quad (2.1) \quad \text{где } N - \text{кол-во испытаний}$$

i - событие

N_i - кол-во событий

$$P_i \approx \frac{N_i}{N} \quad (2.2) \quad \text{считаем } N \text{ и } N_i \text{ бесконечно большими}$$

$$\sum P_i = \sum \left(\frac{N_i}{N} \right) = 1 \quad (2.3)$$

Теорема о сложении вероятностей:

$$P_{i \text{ или } k} = \frac{N_i + N_k}{N} = P_i + P_k \quad (2.4)$$

Теорема об умножении вероятностей:

Рассмотрим N независимых бросаний;

$$P_i \approx \frac{N_i}{N} \quad P_k \approx \frac{N_k}{N}$$

$$P_{i \text{ и } k} = \frac{N_i}{N} \cdot \frac{N_k}{N} = P_i \cdot P_k \quad (2.5)$$

Средние значения случайных величин:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum N_i x_i = \sum P_i x_i \quad (2.6)$$

Функция распределения

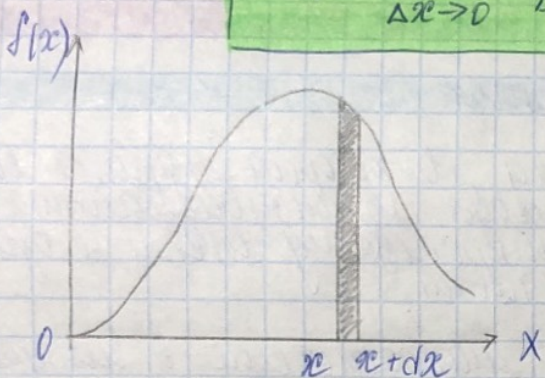
Рассмотрим случай, когда величина x имеет непрерывный характер (например, скорости молекул)

$$N_i \gg 1$$

P_x - вероятное попадание в тот или иной интервал Δx

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta x} = \frac{dP_x}{dx} \quad (2.7) \quad \text{— ф-я распределения}$$

≈ плотность вероятности



$$dP_x = f(x) dx \quad (2.8) \quad \text{— площадь по-$$

$$P = \int_a^b f(x) dx \quad (2.9) \quad \text{— ки на рисунке}

равна вероятности того, что x окажется в пределах $[x; x_2]$$$

$$\int f(x) dx = 1 \quad (2.10) \quad \text{— условие нормировки}$$

⇒ вся площадь под кривой $f(x)$ равна единице.

Средние значения

из (2.6)

$$\langle x \rangle = \int x dP = \int x f(x) dx \quad (2.11) \quad \text{— участвует}$$

справедливо для любой ф-ции:

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 f(x) dx$$

$$\Rightarrow P_i \rightarrow dP$$

и

Флуктуация

— любое случайное отклонение от предсказываемой вероятности

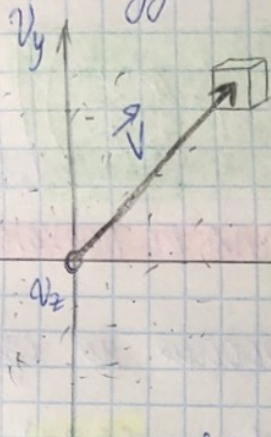
С увеличением числа N непостоянное относительное флуктуация любой величины уменьшается по закону $1/\sqrt{N}$.

Бесконечно малый объем макросистемы — объем, p -ро которого ничтожно по сравнению с размерами единицы макросистемы, но все же нашего происхождения характеризует размер ее микроустройства. Каждая бесконечно малая область, принадлежащая, содержит число частиц dN настолько большое, что относительная флуктуация dN можно пренебречь.

Распределение Максвелла

Представим себе пространство скоростей с принятой координатной системой, по которой будем откладывать значения проекций v_x, v_y, v_z отдельных молекул. Тогда каждая молекула будет

соответствовать точка в этом пространстве - концу вектора \vec{v} .
 Из-за равномерности макроскопического движения точек будут ернич-
 тельно малы, но их распределение в целом будет осе-
 ваться излучением, поскольку макросистема находится в тер-
 модинамическом равновесии.
 Вследствие равноправности всех направлений движения распо-
 нения точек от-но начала координат будет сферически сим-
 метричным. Поэтому плотность точек может зависеть только
 от модуля скорости v (но не от \vec{v})



Пусть макросистема (газ) содержит N мол.
 Возьмем малый объем $dV = dv_x dv_y dv_z$ в конце
 вектора \vec{v}

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{N} = f(v) dv_x dv_y dv_z$$

(2.12) - вероятность dP того, что скорость молекулы,
 т.е. конец вектора \vec{v} , попадет в этот объем

$f(v)$ имеет смысл объемной плотности вероятности

$$dP(v_x) = \frac{dN(v_x)}{N} = \varphi(v_x) dv_x \quad (2.13)$$

↑
 ϕ - распределение по v_x

- в-ть, что мол-на (•) будет
 иметь проекцию скорости в
 интервале $(v_x, v_x + dv_x)$

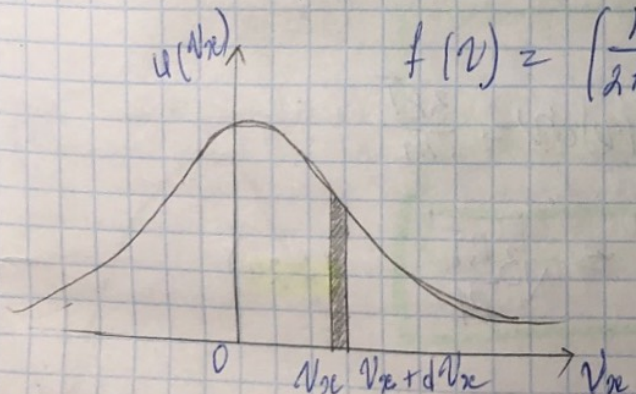
$$dP(v_x, v_y, v_z) = dP(v_x) dP(v_y) dP(v_z) = \varphi(v_x) \varphi(v_y) \varphi(v_z) dv_x dv_y dv_z \quad (2.14)$$

из (2.14), (2.13)

$$f(v) = \varphi(v_x) \cdot \varphi(v_y) \cdot \varphi(v_z) \quad (2.15)$$

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{mv_x^2}{2kT} \right) \quad (2.16)$$

$\varphi(v_y), \varphi(v_z)$ - аналогично



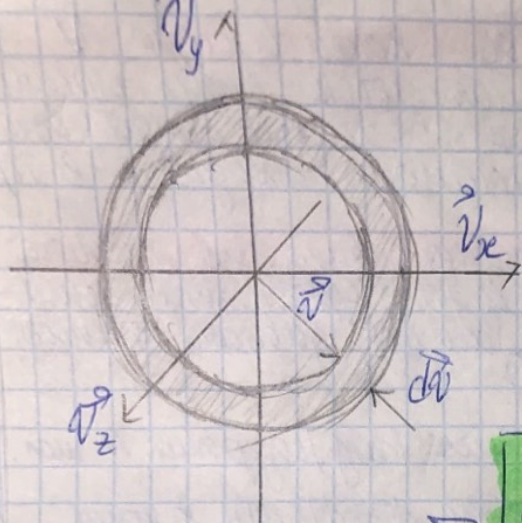
$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{mv^2}{2kT} \right) \quad (2.17)$$

Функция (2.16) нормирована на единицу,
 т.е. площадь под кривой $\varphi(v_x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v_x) dv_x = 1 \quad (2.18)$$

Распределение молекул по модулю скорости

Найдем вероятность или относительное число молекул
 модуль скорости которых заключен в интервале $(v, v + dv)$.
 Такие молекулы соответствуют все точки, попадающие в
 шаровой слой с радиусами v и $v + dv$



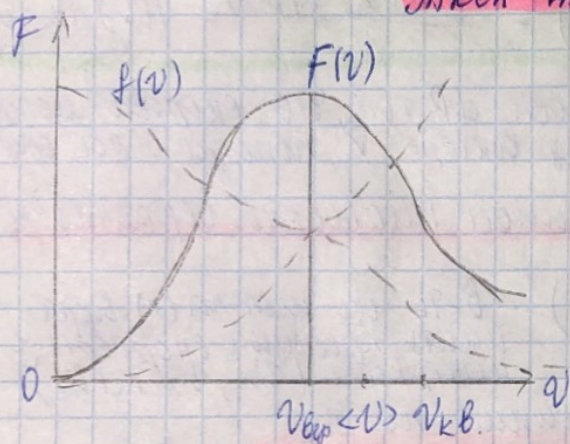
$$V = 4\pi v^2 dv$$

$$dP = f(v) \cdot 4\pi v^2 dv \quad (2.20)$$

$$\frac{dP}{dv} = F(v) = 4\pi v^2 f(v)$$

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (2.20)$$

Закон распределения Максвелла по модулю скорости



$F(v)$ тоже нормировано по единицу.

$$\int_0^\infty F(v) dv = 1 \quad (2.21)$$

$v_{\text{вир}}$ - наиболее вероятная скорость

Характерные скорости: $v_{\text{вир}}, \langle v \rangle, v_{\text{кб}}$.

$v_{\text{вир}}: \frac{dF}{dv} = 0$

$$v_{\text{вир}} = \sqrt{2 \frac{kT}{m}} = \sqrt{2 \frac{RT}{M}} \quad (2.22)$$

$\langle v \rangle:$

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v F(v) dv = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M}} \quad (2.23)$$

$v_{\text{кб}}:$

$$v_{\text{кб}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

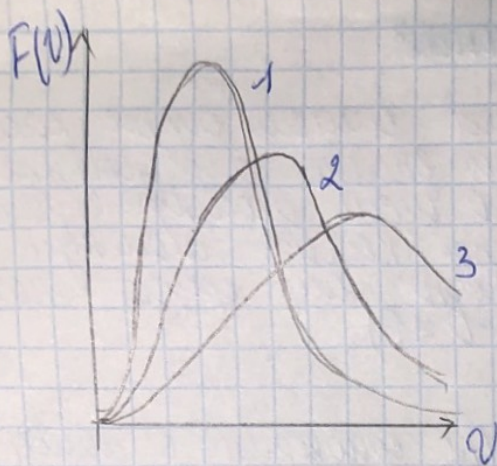
$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 F(v) dv = \frac{3kT}{m}$$

$$v_{\text{кб}} = \sqrt{3 \frac{kT}{m}} = \sqrt{3 \frac{RT}{M}} \quad (2.24)$$

$$v_{\text{вир}} : \langle v \rangle : v_{\text{кб}} = 1 : 1,13 : 1,22$$

Зависимость распределения по T

$$v_{\text{вир}} \text{ из (2.22) в (2.20) } F_{\text{Макс}} \sim \sqrt{\frac{m}{T}} \quad (2.25)$$



$$T_1 < T_2 < T_3 \quad S_1 = S_2 = S_3 = 1$$

$$m_1 > m_2 > m_3 \text{ при } T = \text{const}$$

Формула Максвелла в приведенном виде

$$u = \frac{v}{v_{\text{вер}}}$$

(2.26)

$$F(u) du = F(v) dv$$

$$F(u) = F(v) \cdot (dv/du) \quad v = u v_{\text{вер}}$$

$$F(u) = \left(4 / \sqrt{\pi} \right) u^2 \cdot e^{-u^2}$$

(2.27)

Распределение по энергиям молекул

$\varphi(\epsilon)$ — ф-я распределения по кинетическим энергиям поступательного движения

$$\epsilon = \frac{mv^2}{2}$$

$$\varphi(\epsilon) d\epsilon = F(v) dv$$

(2.28)

$$\frac{d\epsilon}{dv} = mv \sim \sqrt{\epsilon}$$

из (2.28)

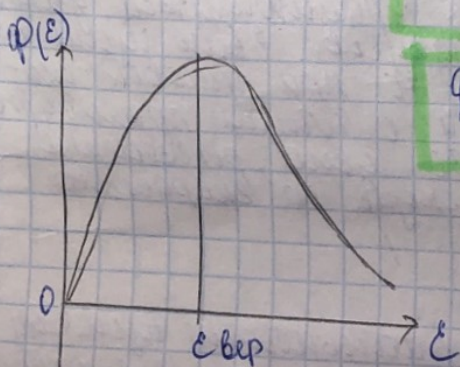
$$\varphi(\epsilon) = F(v) \frac{dv}{d\epsilon} \sim \text{se}^{-\epsilon/kT} / \sqrt{\epsilon}$$

(2.29)

$$\varphi(\epsilon) = A \sqrt{\epsilon} e^{-\epsilon/kT}$$

, где A — нормировочный множитель

$$A = \frac{2\sqrt{n}}{(kT)^{-3/2}}$$



$$\epsilon_{\text{вер}} = \frac{kT}{2}$$

Наиболее вероятная энергия находится из условия: $d\varphi/d\epsilon = 0$

(2.30)

$$\epsilon_{\text{вер}} \neq \epsilon(v_{\text{вер}})$$

Дополнительные замечания

1) При статистическом подходе не имеет смысла вопрос, какова вероятность (или сколько молекул) имеют вполне определенную скорость. Речь пойдет лишь только о числе молекул в заданном интервале скоростей. Поэтому на вопрос: какова вероятность — с какой вероятностью скоростью или средняя — можно отвечать: одинаково (в смысле $0 \rightarrow 0$) что относится и к термичам ϵ

2) Если интервал скоростей очень мал (по сравнению с самой скоростью), то распределение сводится просто к умножению:

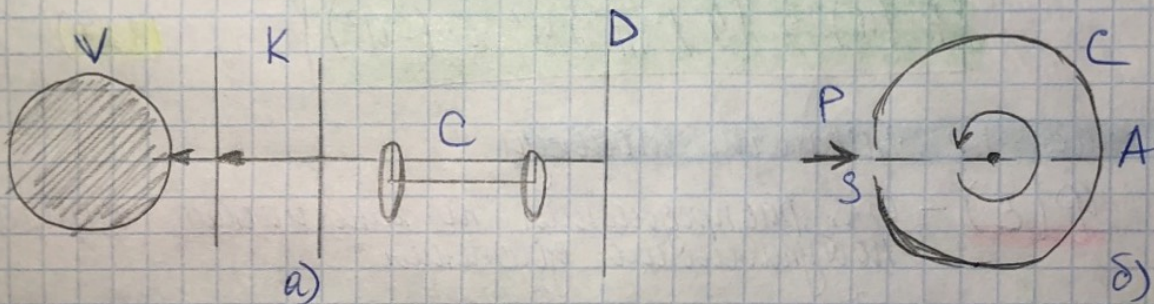
$$\Delta P \propto F(v) \cdot \Delta v \quad (2.31)$$

3) Ф-ии распределения — имеют размерности

$$[f(v_x)], [F(v)] = \epsilon/m$$

$$[f(v)] = \epsilon^3/m^3$$

Опытная проверка распределения Максвелла



I) В опыте Ламмерта в объеме V находится газ в равновесном состоянии. Возбуждая из отверстия в стенке объема V молекулярный пучок, проходит ламинатор K из последовательных отверстий, который образует почти параллельный пучок. Далее пучок падает на устройство C , сортирующее молекулы по скорости, и детектор D для регистрации молекул после сортировки.

Устройство C представляет собой два вращающихся диска (на одной оси) со щелями вдоль радиусов. Если щели на первом и втором дисках повернутся на угол φ в течение времени $\Delta t = \varphi/\omega$. Поэтому через обе щели, расположенные между которыми C , пройдут молекулы со скоростью $v = \varphi/\Delta t = \epsilon\omega/\varphi$

Меняя углы ω или φ между радиальными щелями можно выделить из пучка молекулы разных скоростей. Уловившаяся некоторая φ молекула в течение радиального времени, можно найти их относительное количество в пучке.

II) Если газ находится в объеме $(V, K$ на a), сортирующее параллельный пучок молекул, детектор D и ϵ и детектор D

совмещено во франц. цилиндре со щелью S (рис 8). Когда щель S попадает в падающий пучок E , через нее в цилиндр входят порции молекул. Молекулы с разными скоростями достигают противоположной стенки цилиндра с различными запаздываниями по отношению к моменту прохождения щели S . Пучок P и поэтому попадают на различные участки D противоположной стенки цилиндра. Измерив степень потерь на различных участках D , можно определить распределение молекул в пучке по скоростям.

Разумеется, все эти опыты проводились в условиях высокой вакуума и, кроме того, с учетом разнородного распределения молекул по скоростям v внутри и в обложке V .