24.04.2020

13

$\boxed{№ 2.16}$

$T = 0°C = 273 K$

$\Delta h - ?$

а) $\frac{\rho_0}{\rho} = e$ б) $\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = 0{,}01$

$dp = -\rho g dh$ (если $h\uparrow$, то $p\downarrow$)

$pV = \nu RT = \frac{m}{M} RT = \frac{\rho V}{M} RT$

$p = \frac{\rho}{M} RT$ T - const => $dp = \frac{RT}{M} d\rho$

$\frac{RT}{M} d\rho = \rho g dh$

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho}=\int_0^h\frac{Mg\,dh}{RT} \qquad \ln\rho\Big|_{\rho_0}^{\rho}=\frac{Mgh}{RT}$$

а) $\ln\rho_0-\ln\rho=\frac{Mgh}{RT}$ $\qquad \ln\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{Mgh}{RT}$

$$\frac{\rho_0}{\rho}=e^{Mgh/RT} \qquad e^1=e^{Mgh/RT} \qquad 1=\frac{Mgh}{RT}$$

$$h=\frac{RT}{Mg}=\frac{8,314\cdot 273}{29\cdot 10^{-3}\cdot 10}=7,8\ (км)$$

б) $-(\ln\rho-\ln\rho_0)=\frac{Mgh}{RT}$ $\qquad \ln\frac{\rho}{\rho_0}=-\frac{Mgh}{RT}$

$$h=-\frac{RT\ln\frac{\rho}{\rho_0}}{Mg}=-\frac{RT}{Mg}\ln\frac{\rho}{\rho_0}=$$

$$=-\frac{8,314\cdot 273}{29\cdot 10^{-3}\cdot 10}\ln 0,99=\frac{8,314\cdot 273}{29}=78\,м$$

Ответ: а) 7,8 км б) 78 м

$\boxed{№ 2.111}$

$U(r)=ar^2$
$T,\ n_0$
а) dN - ? б) r - ?
в) dN/N - ? г) $\frac{n_1}{n_2}$ - ?

а) $n=n_0e^{-U/kT}=n_0e^{-ar^2/kT}$ $\qquad U(r)=ar^2$

$dN=n\,dV=n\,d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=n\cdot 4\pi r^2\cdot dr=n_0e^{-ar^2/kT}\cdot 4\pi r^2\,dr$

б) Т.к. нужно найти наиболее вероятное расстояние молекул, то мы ищем расстояние, где их максимальное количество

$$dN=n_0e^{-ar^2/kT}\cdot 4\pi r^2dr$$

$$\frac{dN}{dr}=n_0e^{-ar^2/kT}\cdot 4\pi r^2$$

Ищем максимум:

$$\frac{d(n_0e^{-ar^2/kT}\cdot 4\pi r^2)}{dr}=0 \qquad \frac{n_0\cdot 4\pi\, d(e^{-ar^2/kT}\cdot r^2)}{dr}=0$$

$$(e^{-ar^2/kT}\cdot r^2)'=e^{-ar^2/kT}\cdot 2r+r^2\left(-\frac{2ar}{kT}\right)\cdot e^{-ar^2/kT}=$$

$$=e^{-ar^2/kT}\cdot 2r\left(1-\frac{r^2a}{kT}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r^2a}{kT}=1$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{\frac{kT}{a}}$$

б) $\frac{dN}{N} =$

$$\int dN = \int 4\pi r^2 n_0 e^{-ar^2/kT} dr$$

$$N = 4\pi n_0 \int r^2 \cdot e^{-ar^2/kT} dr =$$

Пусть $x = \frac{ar^2}{kT}$ $\quad dx = \frac{a}{kT} 2r\,dr$ $\quad r\,dr = \frac{dx \cdot kT}{2a}$

$$r = \sqrt{\frac{xkT}{a}}$$

$$= \cancel{\int 4\pi r^2}\ 4\pi n_0 \int r^2 \cdot e^{-x} dr = 4\pi n_0 \int r \cdot e^{-x} \cdot r\,dr =$$

$$= 4\pi n_0 \int \sqrt{\frac{xkT}{a}} \cdot e^{-x} \cdot \frac{dx \cdot kT}{2a} =$$

$$= 4\pi n_0 \left(\frac{kT}{a}\right)^{3/2} \int \frac{\sqrt{x} \cdot e^{-x} dx}{2} =$$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^\infty x^{3/2-1} \cdot e^{-x} dx$$

$$= 2\pi n_0 \left(\frac{kT}{a}\right)^{3/2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$= 2\pi n_0 \left(\frac{kT}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = n_0 \left(\frac{\pi kT}{a}\right)^{3/2}$$

$$= \frac{4\pi r^2 n_0 \cdot e^{-ar^2/kT} dr}{n_0 \left(\frac{\pi kT}{a}\right)^{3/2}} = \frac{4r^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a}{kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-ar^2/kT} dr$$

г) $dN = N \cdot \frac{4r^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a}{kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-ar^2/kT} dr$

$dN = n\,dV \qquad n = \frac{dN}{dV}$

$$n = \frac{N \cdot \frac{4r^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a}{kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-ar^2/kT} dr}{4\pi r^2 dr} =$$

$$= N\left(\frac{a}{\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-ar^2/kT}$$

При $r = 0$ $T_1 = \eta T_2$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{N \cdot \left(\frac{a}{\pi k T_1}\right)^{3/2} \cdot e^0}{N \cdot \left(\frac{a}{\pi k T_2}\right)^{3/2} \cdot e^0} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} = \frac{1}{\eta^{3/2}}$$

$$n_2 = \eta^{3/2} n_1$$

Ответ: а) $4\pi r^2 \cdot n_0 \cdot e^{-ar^2/kT} dr$

б) $r = \sqrt{\frac{kT}{a}}$

в) $\frac{4r^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a}{kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-ar^2/kT} dr$

г) увеличится в $\eta^{3/2}$ раз

№ 2.112

$U(r) = ar^2, T, n_0$

а) dN - ? б) U - ?

а) $dN = n\,dV = n_0 \cdot e^{-U/kT} \cdot 4\pi r^2 dr$

$U = ar^2$ $\quad r^2 = \frac{U}{a}$ $\quad r = \sqrt{\frac{U}{a}}$

$dU = d(ar^2) = 2ar\,dr$ $\quad dr = \frac{dU}{2ar} = \frac{\sqrt{a}\,dU}{2a\sqrt{U}}$

$$dN = n_0 \cdot e^{-U/kT} \cdot 4\pi \frac{U}{a} \cdot \frac{\sqrt{a}\,dU}{2a\sqrt{U}} = n_0 e^{-U/kT} \frac{2\pi\sqrt{U}}{a\sqrt{a}} dU$$

б) $\frac{dN}{dU} = n_0 e^{-U/kT} \cdot \frac{2\pi\sqrt{U}}{a\sqrt{a}}$. Найдём максимум →

$$\to \frac{d\left(n_0 e^{-U/kT} \cdot \frac{2\pi\sqrt{U}}{a\sqrt{a}}\right)}{dU} = 0$$

$$\frac{n_0 \cdot \frac{2\pi}{a\sqrt{a}}\, d\left(e^{-U/kT} \cdot \sqrt{U}\right)}{dU} = 0$$

$$\left(e^{-U/kT} \cdot \sqrt{U}\right)' = -\frac{1}{kT} \cdot e^{-U/kT}\sqrt{U} + \frac{1}{2\sqrt{U}} \cdot e^{-U/kT} = e^{-U/kT}\left(\frac{1}{2\sqrt{U}} - \frac{\sqrt{U}}{kT}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{U}} - \frac{\sqrt{U}}{kT} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{U}} = \frac{\sqrt{U}}{kT} \qquad 2U = kT \qquad U = \frac{kT}{2}$$

На наиболее вероятном расстоянии $U_r = ar^2 = \frac{akT}{a} = kT$

$$U_r > U \qquad U_r = 2U$$

Ответ: а) $n_0 e^{-U/kT} \frac{2\pi\sqrt{U}}{a\sqrt{a}} dU$

б) $U = \frac{kT}{2}$, $U_r = 2U$