МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКИ

кафедра программных систем

Отчёт к лабораторной работе № 3

«Интерполирование функций»

Вариант 9

Выполнила:

Гижевская В. Д.

гр. 6313

Проверил:

Заболотнов Ю. М.

Самара 2020

**Дано:**



1. Задать таблицу значений функции f (xk) и значений аргумента xk , где k = 0,1,...n . Положить n = 10. Значения аргумента задать как возрастающую последовательность.

2. С помощью программных средств пакета MATHCAD, реализуя формулу Лагранжа, провести интерполирование функции f (xk) .

3. Построить график для интерполяционного полинома Qn (x), на который необходимо нанести точки, соответствующие заданной таблице значений функции.

4. Для исследования зависимости погрешности интерполирования от количества узлов разбиения отрезка построить график другой функции f (x), соответствующей индивидуальному заданию.

5. Выбрать отрезок [xmin , xmax], на котором будет строиться интерполяционный полином (область интерполирования функции f (x)).

Замечание. Отрезок интерполирование не должен включать точек разрыва функции.

6. С помощью программных средств пакета MATHCAD, реализуя формулу Лагранжа, провести интерполирование функции при равномерном разбиении заданного интервала узлами интерполяции.

4. Исследовать зависимость погрешности интерполяции от количества узлов разбиения отрезка.

5. Провести интерполирование функции при неравномерном разбиении отрезка, когда в качестве узлов интерполяции берутся корни полиномов Чебышёва.

6. Построить графики функций f (x) и Qn (x) для характерных случаев интерполяции, показывающих возрастание погрешности при малом и большом количествах узлов разбиения отрезка.

Замечание. Возрастание погрешности интерполирования при большом количестве узлов разбиения отрезка объясняется возникающей вычислительной погрешностью при использовании формулы Лагранжа.

**Постановка задачи:**

Дана таблица значений функции  , где -

узловые значения аргумента. Необходимо найти многочлен

степени , значения которого в узловых точках совпадают со значениями функции. Для непрерывной функции сформулированная задача имеет единственное

решение, если среди узловых точек нет совпадающих. В

этом случае задача определения коэффициентов полинома сводится к

решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

, где . Причем определитель этой системы отличен от нуля, если, где .

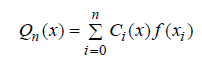
Многочлен (полином), найденный из условий (3.3), называется

интерполяционным многочленом (полиномом) для функции f(x).

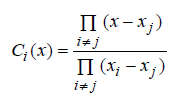
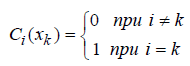
**Основные используемые формулы:**

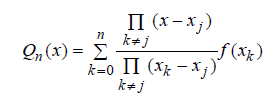
* Интерполяционная формула Лагранжа

Формула Лагранжа



Многочлен определяется как линейная комбинация значений  .

, при этом .

Окончательно формула Лагранжа принимает вид .

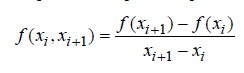
Интерполяционную формулу Лагранжа удобно применять тогда, когда

имеется большое количество интерполируемых функций, а число узлов

фиксировано.

* Интерполяционная формула Ньютона

Другая форма решения системы, получившая название формулы Ньютона, основывается на вычислении так называемых конечных разностей.

Конечная разность первого порядка имеет вид .

Тогда .

Интерполяционный полином Ньютона удобно применять, когда число узлов необходимо увеличивать для достижения заданной точности интерполяции. В этом случае учет каждого дополнительного слагаемого не требует пересчета предыдущих слагаемых.

* С использованием полиномов Чебышева

Величину погрешности интерполирования можно уменьшить за счет специального

выбора узлов интерполяции. Задачу минимизации погрешности интерполирования решил русский математик П.Л.Чебышёв. Он решил задачу минимакса на интервале [xmin , xmax]. Оказалось, что в общем случае минимальная погрешность интерполирования достигается, если в качестве узлов выбираются корни полиномов Чебышёва. В этом случае точки интерполирования определяются по формуле

, где 

При этом узловые точки на отрезке интерполирования расположены неравномерно (их больше ближе к концам заданного отрезка).

**Распечатка программы**

Рисунок 1 - Результаты интерполирования

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Исследование зависимости погрешности интерполирования от количества узлов



**Для 5 узлов:**















a:=0 



Рисунок 2 – Интерполирования по 5 узлам

**Для 10 узлов:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Рисунок 3 – Интерполирование для 10 узлов (рациональное количество узлов)  Рисунок 4 – Интерполирование для 10 узлов (рациональное количество узлов)  Рисунок 3 – Интерполирование для 10 узлов (рациональное количество узлов)  Рисунок 5 – Интерполирование для 10 узлов  Рисунок 6 – Интерполирование для 10 узлов (рациональное количество узлов) |

**Для 65 узлов:**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Рисунок 4 – Интерполирования по 65 узлам

**Для 66 узлов:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | |  |
|  | | | Рисунок 7 – Интерполирование по 66 узлам |

Рисунок 5 – Интерполирование функции при неравномерном разбиении отрезка для 66 узлов

**Выводы**

1. При малом количестве точек наблюдается большая погрешность интерполирования. Это можно увидеть на рисунке. А при большом количестве узлов и равномерном разбиении возникают краевые эффекты. Это можно увидеть на рисунке 5 (краевые эффекты появились при nmin=65)
2. Возрастание погрешности интерполирования при большом количестве узлов разбиения отрезка можно объяснить возникновением вычислительной погрешности при использовании формулы Лагранжа, поэтому для достижения минимальной погрешности интерполирования можно применять интерполирование функции при неравномерном разбиении отрезка узлами Чебышёва. В этом случае при n=65 краевые эффекты исчезли (рисунок 4).