МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва» (Самарский университет)

Факультет информатики
Кафедра программных систем

Дисциплина
Теория информации

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

Вариант №7

Студент: Гижевская В.Д.

Группа: 6413-020302D

Преподаватель: Додонов М.В
Оценка:
____

Дата:
____

Самара 2021

ЗАДАНИЕ

1. Смоделировать СВ, плотность распределения вероятностей которой представлена на рис. 2.

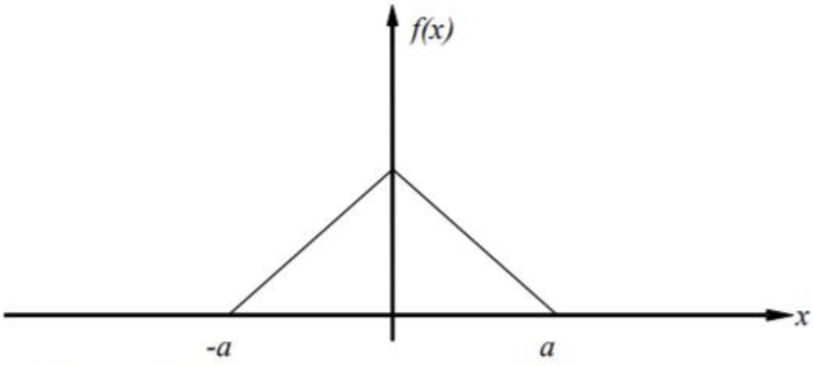


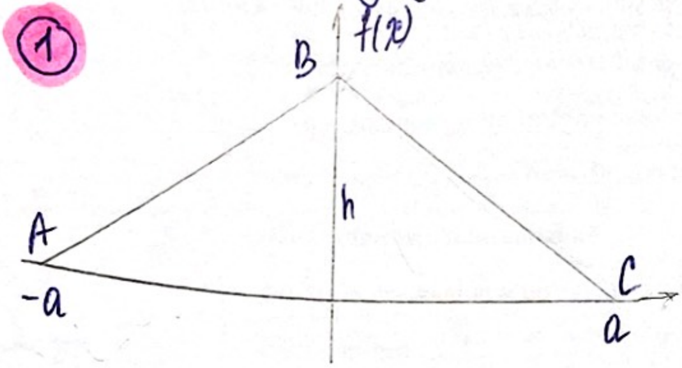
Рис. 2. Плотность распределения вероятностей случайной величины

2. Взять индивидуальное задание у преподавателя.
3. Смоделировать СВ с заданным законом распределения.
4. Смоделировать СВ с экспоненциальным законом распределения.
5. Смоделировать СВ с нормальным законом распределения (центрированным и нормированным, т.е. с MX=0 и DX=1).
6. Оформить отчет.

ЛР 1

Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

1



Условие нормировки: $S_\Delta = 1$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot h = ah$$

$$\Rightarrow ah = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{a}$$

Используем уравнение прямой, проходящей через 2 точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

Найдём с помощью него функции, которые задают наши прямые:

AB

	A	B
x	-a	0
f(x)	0	1/a

$$\frac{x+a}{0+a} = \frac{f(x)-0}{1/a-0}$$

$$f(x) = \frac{1/a\,(x+a)}{a} = \frac{x+a}{a^2}$$

BC

	B	C
x	0	a
f(x)	1/a	0

$$\frac{x-0}{a-0} = \frac{f(x)-1/a}{0-1/a}$$

$$f(x) = \frac{-\frac{x}{a}}{a} + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a}$$

Тогда:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x}{a^2} + \frac{1}{a}, & x \in [-a; 0) \\ -\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a}, & x \in [0; a) \\ 0, & x \geq a \end{cases}$$

Для AB: $F(x) = \int_{-a}^{x}\left(\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a}\right)dx = \int_{-a}^{x}\frac{x\,dx}{a^2} + \int_{-a}^{x}\frac{dx}{a} =$

$$= \frac{x^2}{2a^2}\Big|_{-a}^{x} + \frac{x}{a}\Big|_{-a}^{x} = \frac{x^2}{2a^2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{a} + 1$$

Для BC: $F(x) = \int_{-a}^{0}\left(\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a}\right)dx + \int_{0}^{x}\left(-\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a}\right)dx = \frac{1}{2} - \int_{0}^{x}\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{1}{a}\int_{0}^{x}dx =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2a^2}\Big|_{0}^{x} + \frac{x}{a}\Big|_{0}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x}{a}$$

Следовательно:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -a \\ \dfrac{x^2}{2a^2} + \dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{2}, & x \in [-a; 0) \\ -\dfrac{x^2}{2a^2} + \dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{2}, & x \in [0; a) \\ 1, & x \geq a \end{cases}$$

Обратная функция:

$$y = \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x}{a} + \frac{1}{2}$$

$$2y = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{a}\right) + 1$$

$$2y = \left(\frac{x}{a} + 1\right)^2$$

$$\sqrt{2y} = \frac{x}{a} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = a\left(\sqrt{2y} - 1\right)$$

при $x \geq -a$

$$a(\sqrt{2y} - 1) \geq -a$$

$$\sqrt{2y} - 1 \geq -1$$

$$2y \geq 0$$

$$y \geq 0$$

при $x < 0$

$$a(\sqrt{2y} - 1) < 0$$

$$\sqrt{2y} - 1 < 0$$

$$2y < 1$$

$$y < \frac{1}{2}$$

$$y \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$$

$$y = -\frac{x^2}{2a^2} + \frac{x}{a} + \frac{1}{2}$$

$$-2y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} + 1 - 2$$

$$2(1-y) = \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2$$

$\frac{x}{a} \geq 1$

$\frac{x}{a} - 1 \geq 0$

$$-\sqrt{2(1-y)} = \frac{x}{a} - 1 \Rightarrow x = a\left(-\sqrt{2(1-y)} + 1\right)$$

при $x \geq 0$

$$a\left(-\sqrt{2(1-y)} + 1\right) \geq 0$$

$$-\sqrt{2(1-y)} + 1 \geq 0$$

$$-\sqrt{2(1-y)} \geq -1$$

$$\sqrt{2(1-y)} \leq 1$$

$$2(1-y) \leq 1$$

$$y \geq \frac{1}{2}$$

при $x < a$

$$a\left(-\sqrt{2(1-y)} + 1\right) < a$$

$$-\sqrt{2(1-y)} + 1 < 1$$

$$-\sqrt{2(1-y)} < 0$$

$$\sqrt{2(1-y)} > 0$$

$$2(1-y) > 0$$

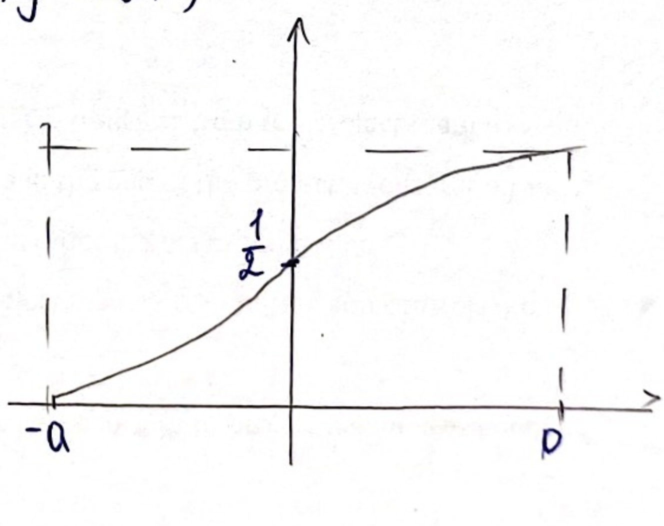
$$1 - y > 0$$

$$y < 1$$

$$y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$$

Тогда:

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ a(\sqrt{2y} - 1), & y \in [0; \frac{1}{2}) \\ a(1 - \sqrt{2 - 2y}), & y \in [\frac{1}{2}; 1) \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$



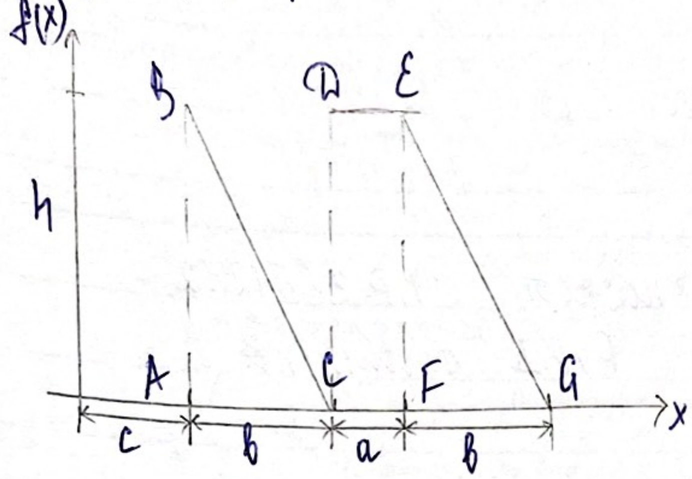
Следовательно:

$$y = \begin{cases} 0, & \varepsilon < 0 \\ a(\sqrt{2\varepsilon} - 1), & \varepsilon \in [0; \frac{1}{2}) \\ a(1 - \sqrt{2 - 2\varepsilon}) & \varepsilon \in [\frac{1}{2}; 1) \\ 1, & \varepsilon \geq 1 \end{cases}$$

где ε – равном. распред. случ. величина

③

Вариант 7



Условие нормировки:

$S_{ABC} + S_{CDEF} + S_{EFG} = 1$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}hb$

$S_{CDEF} = ah$

$S_{EFG} = \frac{1}{2}hb$

$hb + ah = 1 \qquad h = \frac{1}{a+b}$

Ур-е прямой, проход. через 2 точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

Найдём ф-ии, которые задают наши прямые.

BC

	B	C
x	c	$c+b$
f(x)	$\frac{1}{a+b}$	0

$$\frac{x-c}{c+b-c} = \frac{f(x) - \frac{1}{a+b}}{0 - \frac{1}{a+b}} = \cancel{\frac{\quad}{-\frac{1}{a+b}}}$$

$$f(x) = \frac{\frac{c-x}{a+b}}{b} + \frac{1}{a+b} = \frac{c-x}{b(a+b)} + \frac{1}{a+b} = \frac{-x+b+c}{b(a+b)}$$

DE

$$f(x) = \frac{1}{a+b}$$

EG

	E	G
x	$c+b+a$	$c+b+a+b$
f(x)	$\frac{1}{a+b}$	0

$$\frac{x-c-b-a}{\cancel{c}+\cancel{b}+\cancel{a}+b-\cancel{c}-\cancel{b}-\cancel{a}} = \frac{f(x) - \frac{1}{a+b}}{0 - \frac{1}{a+b}}$$

$$\frac{x-c-b-a}{b} = \frac{f(x) - \frac{1}{a+b}}{-\frac{1}{a+b}}$$

$$f(x) = \frac{-x+c+b+a}{b(a+b)} + \frac{1}{a+b} = \frac{-x+a+2b+c}{b(a+b)}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ \frac{-x+b+c}{b(a+b)}, & x \in [c; c+b) \\ \frac{1}{a+b}, & x \in [c+b; c+b+a) \\ \frac{-x+a+2b+c}{b(a+b)}, & x \in [c+b+a; c+2b+a) \\ 0, & x \geq c+2b+a \end{cases}$$

Для BC:

$$F(x)=\int_c^x \frac{-x+b+c}{b(a+b)}dx=\frac{1}{b(a+b)}\left(-\int_c^x x\,dx+b\int_c^x dx+c\int_c^x dx\right)=$$

$$=\frac{1}{b(a+b)}\left(-\frac{x^2}{2}\Big|_c^x+bx\Big|_c^x+cx\Big|_c^x\right)=$$

$$=\frac{1}{b(a+b)}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{c^2}{2}+bx-bc+cx-c^2\right)=$$

$$=\frac{1}{b(a+b)}\left(-\frac{1}{2}(x^2-c^2)+b(x-c)+c(x-c)\right)=$$

$$=\frac{(x-c)}{2b(a+b)}\left(-(x+c)+2b+2c\right)=\frac{(x-c)(-x+2b+c)}{2b(a+b)}$$

Для DE

$$F(x)=\int_c^{c+b}\frac{-x+b+c}{b(a+b)}dx+\int_{c+b}^x\frac{1}{a+b}dx \;=$$

$$=\frac{1}{2b(a+b)}\left(-(c+b)^2+c^2+2b(c+b)-2bc+2c(c+b)-2c^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2b(a+b)}\left(\cancel{-c^2}\cancel{-2cb}-b^2\cancel{+c^2}\cancel{+2bc}+2b^2\cancel{-2bc}\cancel{+2c^2}\cancel{+2cb}\cancel{-2c^2}\right)=$$

$$=\frac{b^2}{2b(a+b)}=\frac{b}{2(a+b)}$$

$$=\;\frac{b}{2(a+b)}+\frac{(x-c-b)}{a+b}=\frac{b+2x-2c-2b}{2(a+b)}=\frac{2x-b-2c}{2(a+b)}$$

Для EG

$$F(x)=\int_c^{c+b}\frac{-x+b+c}{b(a+b)}dx+\int_{c+b}^{c+b+a}\frac{1}{a+b}dx+\int_{c+b+a}^x\frac{-x+a+2b+c}{b(a+b)}dx \;=$$

$$\int_{c+b}^{c+b+a}\frac{1}{a+b}dx=\frac{1}{a+b}\cdot x\Big|_{c+b}^{c+b+a}=\frac{c+b+a-c-b}{a+b}=\frac{a}{a+b}$$

$$\int_{c+b+a}^x\frac{-x+a+2b+c}{b(a+b)}dx=\frac{1}{b(a+b)}\left(-\frac{x^2}{2}\Big|_{a+b+c}^x+ax\Big|_{a+b+c}^x+2bx\Big|_{a+b+c}^x+cx\Big|_{a+b+c}^x\right)=$$

$$=\frac{1}{2b(a+b)}\left(-x^2+a^2\cancel{+2bc}\cancel{+2ab}\cancel{+2ac}+b^2+c^2+2ax\cancel{-2ac}\cancel{-2ab}-2a^2+4bx-4bc-4b^2-4ba+2cx-2c^2\cancel{-2cb}-2ca\right)=$$

$$=-\frac{(x-c-3b-a)(x-c-b-a)}{2b(b+a)}$$

$$= \frac{b}{2(a+b)} + \frac{a}{a+b} - \frac{(x-c-3b-a)(x-c-b-a)}{2b(b+a)} =$$

$$= \frac{-(x-a-2b-c)(x-a-b-c)+bx+cx+ba}{2b(b+a)}$$

Следовательно:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<c \\ \dfrac{(x-c)(-x+2b+c)}{2b(a+b)}, & x \in [c; c+b) \\ \dfrac{2x-b-2c}{2(a+b)}, & x \in [c+b; c+b+a) \\ \dfrac{b+2a}{2(a+b)} - \dfrac{(x-c-3b-a)(x-c-b-a)}{2b(b+a)}, & x \in [c+b+a; c+2b+a) \\ 0, & x \geq c+2b+a \end{cases}$$

Обратная функция:

1) $y = \dfrac{(x-c)(-x+2b+c)}{2b(a+b)}$ Пусть $x-c=k$, $-x+c=-k$

$$y = \frac{k(-k+2b)}{2b(a+b)} = \frac{-k^2+2kb}{2b(a+b)} = -\frac{k^2-2kb+b^2-b^2}{2b(a+b)}$$

$$y = \frac{-(k-b)^2-b^2}{2b(a+b)}$$

$$y \cdot 2b(a+b)+b^2 = -(k-b)^2$$

$$(k-b)^2 = b^2-2b(a+b)y$$

$$k-b = -\sqrt{b^2-2b(a+b)y}$$

$$k = -\sqrt{b^2-2b(a+b)y}+b \Rightarrow x = -\sqrt{b^2-2b(a+b)y}+b+c$$

т.к. $c \leq x < c+b$

$$c \leq \sqrt{b^2-2b(a+b)y}+b < c+b$$

$$c-b \leq \sqrt{b^2-2b(a+b)y} < c$$

$$(c-b)^2 \leq b^2-2b(a+b)y < c^2$$

$$c^2+b^2-2cb \leq b^2-2b(a+b)y < c^2$$

$$c^2-2cb \leq -2b(a+b)y < c^2-b^2$$

$$2cb-c^2 \geq 2b(a+b)y > b^2-c^2$$

$$\frac{b^2-c^2}{2b(a+b)}+c < y < \frac{2cb-c^2}{2b(a+b)}+c$$

$$-b \le -\sqrt{b^2-2b(a+b)y} < 0$$
$$-b^2 < -2b(a+b)y \le 0$$
$$0 \le y < \frac{b}{2(a+b)}$$

2) $y = \frac{2x-b-2c}{2(a+b)}$

$$2(a+b)y = 2x-b-2c$$
$$x = (a+b)y + \frac{b}{2} + c$$

Т.к. $c+b \le x < c+b+a$

$$c+b \le (a+b)y + \frac{b}{2} + c < c+b+a$$
$$\frac{b}{2} \le (a+b)y < \frac{b}{2} + a$$
$$\frac{b}{2(a+b)} \le y < \frac{b+2a}{2(a+b)}$$

3) $y = \frac{b+2a}{2(a+b)} - \frac{(x-c-3b-a)(x-c-b-a)}{2b(b+a)}$

Пусть $x-c-b-a = k$, тогда $x-c-3b-a = x-c-b-a-2b = k-2b$

$$x = k+c+b+a$$

$$y = \frac{b+2a}{2(a+b)} - \frac{k(k-2b)}{2b(b+a)} = \frac{b+2a}{2(a+b)} - \frac{k^2-2bk+b^2-b^2}{2b(b+a)} =$$
$$= \frac{b+2a}{2(a+b)} - \frac{(k-b)^2-b^2}{2b(b+a)} = \frac{b^2+2ab+b^2-(k-b)^2}{2b(b+a)} =$$
$$= \frac{2b^2+2ab-(k-b)^2}{2b(b+a)} = \frac{2b(b+a)-(k-b)^2}{2b(b+a)} = 1 - \frac{(k-b)^2}{2b(b+a)}$$

$$(1-y) \cdot 2b(b+a) = (k-b)^2$$
$$-\sqrt{(1-y) \cdot 2b(b+a)} = k-b$$
$$k = -\sqrt{(1-y) \cdot 2b(b+a)} + b$$

$$x = -\sqrt{2b(a+b)(1-y)} + 2b+a+c$$
$$c+b+a \le x < c+2b+a$$

$$c+b+a \le -\sqrt{2b(a+b)(1-y)} + 2b + a + c < c + 2b + a$$

$$-b \le -\sqrt{2b(a+b)(1-y)} < 0$$

$$0 < \sqrt{2b(a+b)(1-y)} \le b$$

$$0 < 2b(a+b)(1-y) \le b^2$$

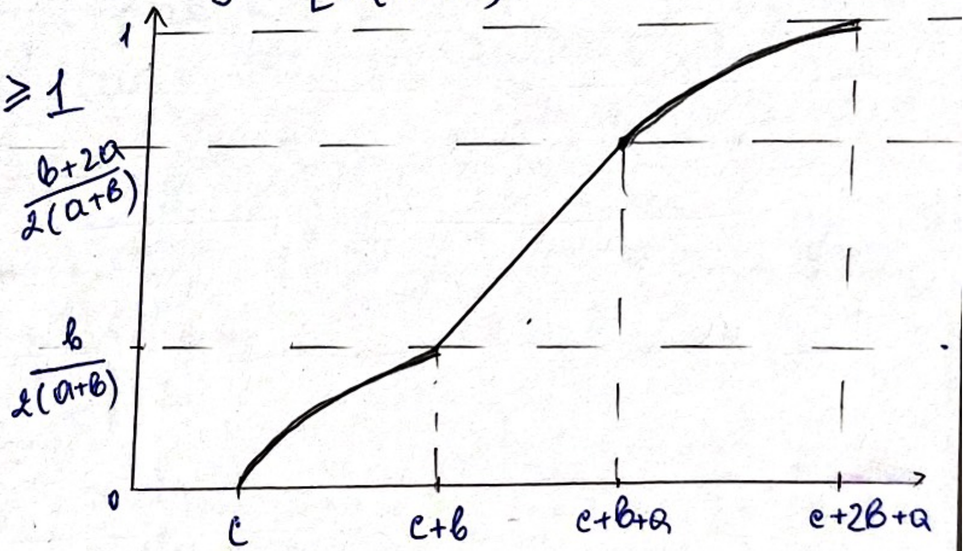
$$0 < 1-y \le \frac{b}{2(a+b)}$$

$$-1 < -y \le \frac{b-2a-2b}{2(a+b)}$$

$$\frac{2a+b}{2(a+b)} \le y < 1$$

Тогда:

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ -\sqrt{b^2-2b(a+b)y} + b + c, & y \in \left[0; \frac{b}{2(a+b)}\right) \\ (a+b)y + \frac{b}{2} + c, & y \in \left[\frac{b}{2(a+b)}; \frac{b+2a}{2(a+b)}\right) \\ -\sqrt{2b(a+b)(1-y)} + 2b + a + c, & y \in \left[\frac{2a+b}{2(a+b)}; 1\right) \\ 0, & y \ge 1 \end{cases}$$



Следовательно:

$$\eta = \begin{cases} 0, & \xi<0 \\ -\sqrt{b^2-2b(a+b)\xi} + b + c, & \xi \in \left[0; \frac{b}{2(a+b)}\right) \\ (a+b)\xi + \frac{b}{2} + c, & \xi \in \left[\frac{b}{2(a+b)}; \frac{b+2a}{2(a+b)}\right) \\ -\sqrt{2b(a+b)(1-\xi)} + 2b + a + c, & \xi \in \left[\frac{2a+b}{2(a+b)}; 1\right) \\ 0, & \xi \ge 1 \end{cases}$$

4

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + 1 = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Обратная ф-ия: $y = 1 - e^{-\lambda x}$

$$e^{-\lambda x} = 1 - y$$

$$x = \frac{-\ln(1-y)}{\lambda}$$

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}, & y \in [0;1] \\ 0, & y > 1 \end{cases}$$

$$\eta = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\varepsilon), \quad \varepsilon \in [0;1]$$

ε – равном. распр. случ. величина

5 Пусть ε_i – незав. равном. распр. ~~на~~ случ. вел. на отрезке $[0;1]$ с мат. ожиданием $M_\varepsilon = 1/2$ и дисперсией $D_\varepsilon = \frac{1}{12}$

Тогда случ. величина $\eta = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ при $n \to \infty$ будет иметь норм. закон распределения с $M_\eta = 1/2$ и $D_\eta = \frac{D_\varepsilon}{n}$

После нормализации случ. величина $\eta = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ получим $\eta = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - 1/2)$. При этом полученная случ. величина имеет нулевое матем. ожидание $M = 0$ и единичную дисперсию $D = 1$