第一章　线性规划

2023 年 8 月 13 日

摘要

本章阐述了线性规划的数学基本原理，例子和Python代码实现。

1　数学原理

线性规划模型的一般形式为：

$$
\begin{aligned}
&max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.t. \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \geq b_m \\
x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其矩阵表示形式为：

$$
\begin{aligned}
&max \quad z = \boldsymbol{c^T x} \\
&s.t. \begin{cases}
\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} \geq 0
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

式中，$\boldsymbol{c^T}$为目标函数的系数向量，又称价值向量。$\boldsymbol{x}$称为决策向量，由决策者决定。$\boldsymbol{A}$为约束方程组的系数矩阵；$\boldsymbol{A}$的列向量为约束方程组的系数向量，$\boldsymbol{b}$称为约束方程组的常数向量。

1.1　线性规划问题的解

可行解：满足约束条件（2）的解$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$称为线性规划问题的可行解，其中使得目标函数$z$取得最大值的解称为最优解。

可行域：所有可行解构成的集合称为可行域。

1.2　灵敏度分析

线性规划问题中，$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$不一定为常矩阵。其中的一些值变化时，可行解会发生一定的变化。

将产生以下问题：

（1）在条件变化时，现行的最优解会发生什么变化；

（2）将参数变化限制在哪个范围内，原最优解仍是最优解。

对于数学建模问题而言，灵敏度分析是必要的。

2 Python程序

使用Python的spicy库可以解决线性规划问题：

对于Python而言，线性规划的标准形式如下：

$$
\begin{aligned}
& max \quad \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} \\
& s.t. \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}_{eq}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{eq} \\ \boldsymbol{lb} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{\mu b} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3}
$$

对应的，Python的函数如下

```python
"""
        线性规划函数：
        @param c 价值向量
        @param A_ub 不等式约束矩阵
        @param b_ub 不等式约束向量
        @param A_eq 等式约束矩阵
        @param b_eq 等式约束向量
        @param bounds 列表元素的元组 定义决策变量的最小值

        @retval x 目标函数最小化的决策变量值
        @retval fun 目标函数最优值
        @retval slack 不等式约束的松弛值，理论上为正值
        @retval con 等式约束的残差，理论上为0
        @retval status 算法退出状态的整数
        @retval nit 迭代总数
"""
        scipy.optimize.lineprog(c,A_ub=None,b_ub=None,A_eq=None,b_eq=None,bounds=None,method='simplex',
```

注1：函数是默认求最小值的，如果要求最大值，应该将$\boldsymbol{c}$改为$-\boldsymbol{c}$。

注2：对于带绝对值的线性规划，先尝试使用拆分等手段进行线性化，然后进行线性规划。