## 1 Алгоритм перевода гиперплоскостного описания многогранника в вершинное представление

Пусть дан набор  $\mathcal{H}$  гиперплоскостей, возможно избыточный, описывающий многогранник. Нормали смотрят наружу.

*Этап 1.* Найти какую-нибудь вершину многогранника и набор гиперплоскостей, в ней сходящихся.

Наивный перебор / симплекс-метод = поиск точки. Поиск гиперплоскостей = подстановка точки в каждую гиперплоскость.

??? Есть ли у нас симплекс-метод, останавливающийся после нахождения какой-либо вершины (начальное решение). ?Alglib?

Этап 2. Найти оставшиеся вершины многогранника.

Создадим очередь из пар (вершина, набор индексов гиперплоскостей), из которых мы ещё не строили рёбра. Инициализируем её данными, найденными на первом этапе.

Пока очередь не пуста:

Берём очередную вершину z из очереди. Из построения этой вершины известен набор  $\mathcal{H}_z$  гиперплоскостей, проходящих через эту точку.

Перебираем всевозможные наборы J индексов совокупностей из d-1 гиперплоскостей из набора  $\mathcal{H}_z$ .

Для каждого такого набора

- а) ортогонализируем его с помощью метода Г-Ш;
- б) с помощью  $\Gamma$ -Ш на орты пространства построим направляющий вектор v прямой, получающейся в пересечении этого набора.

Проверяем вектор v. Идём по нормалям n гиперплоскостей из набора  $\mathcal{H}_z$  и считаем скалярное произведение  $\langle v, n \rangle$ . Если оно равно нулю, то игнорируем. Первое ненулевое скалярное произведение определяет ориентацию вектора v: если положительное, то меняем v на противоположный. Для всех последующих не нулевых произведений требуется, чтобы они были неотрицательны.

Если вектор прошёл фильтрацию, то он вместе с текущей вершиной z определяет луч, содержащий ребро. Обозначим его  $v_*$ . Иначе переходим к следующему набору гиперплоскостей.

Найдём все гиперплоскости из набора  $\mathcal{H}\backslash\mathcal{H}_z$ , наиболее близкие к z в направлении  $v_*$ :

$$J' = \operatorname{Arg\,min} \left\{ i \mid t_i = \frac{b_i - \langle n_i, z \rangle}{\langle n_i, v_* \rangle}, t_i > 0 \right\}.$$

Если знаменатель дроби равен нулю, то считаем  $t_i = +\infty$ .

Также в процессе запоминаем t', соответствующее набору J':

- в начале  $t' = +\infty$ ,  $J' = \emptyset$ ;
- берём очередную полуплоскость, вычисляем её  $t_i$ ;
- если  $t_i \leq 0$  или  $t_i > t'$ , то переходим к следующей полуплоскости;
- если  $t_i = t'$ , то добавляем i в J' и переходим к следующей полуплоскости;
- если  $t_i < t'$ , то  $t' = t_i$ ,  $J' = \{i\}$ ; вычисляем новую вершину  $z' = z + t'v_*$ ; если вершина z' в наборе уже известных вершин, то останавливаем обработку текущего ребра и переходим к новому набору J, иначе переходим к следующей полуплоскости.

Добавляем в очередь пару  $(z', J \cup J')$  как вершину многогранника и набор гиперплоскостей, в ней сходящийся.