

## 1 Обозначения и определения

$dD$  – четырёх и более мерное пространство.

$hD$  – трёх- или более мерное пространство.

Евклидово пространство  $\mathbb{R}^d$ ,  $d > 1$ . Его элементы обозначим  $\vec{x} = (x_i)_{i=1}^d$ .

Ноль-вектор будем обозначать  $\vec{0}$ .

Аффинное пространство  $\mathbb{A}^d$ ,  $d > 1$ . Его элементы обозначим  $x = [x_i]_{i=1}^d$ .

Элементу  $x \in \mathbb{A}^d$  сопоставляется элемент  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ , который есть радиус-вектор точки  $x$ .

Определены операции умножения на скаляр, сложения и вычитания. Над элементами  $\mathbb{R}^d$  они определяются классическим образом как операции линейного пространства. Для аффинного пространства  $\mathbb{A}^d$  определения следующие:

- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x = [x_i] \in \mathbb{A}^d \alpha \cdot x = \alpha x = [\alpha \cdot x_i] \in \mathbb{A}^d$ ;
- $\forall a \in \mathbb{A}^d \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d a + \vec{x} = [a_i + x_i] \in \mathbb{A}^d$ ;
- $\forall a, b \in \mathbb{A}^d a - b = (a_i - b_i) \in \mathbb{R}^d$ .

Линейная независимость векторов из  $\mathbb{R}^d$  понимается в классическом смысле линейной независимости в линейном пространстве.

Линейная независимость набора точек  $\{a_k\}_{k=0}^m \subset \mathbb{A}^d$ ,  $m \leq d$ , понимается как линейная независимость набора векторов  $\{a_k - a_0\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}^d$ .

$k$ -мерным симплексом ( $k$ -симплексом) в пространстве  $\mathbb{A}^d$ ,  $k \leq d$ , назовём линейно независимый набор  $k + 1$  точек.

Базис линейного пространства  $\mathbb{R}^d$  понимается в классическом смысле. Аффинный базис аффинного пространства  $\mathbb{A}^d$  может представляться в двух эквивалентных формах: либо как  $d$ -симплекс этого пространства, либо как пару  $(o, \{\vec{x}_i\}_{i=1}^d)$ ,  $o \in \mathbb{A}^d$ ,  $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^d$ , такую что набор точек  $\{o, o + \vec{x}_i\}_{i=1}^d$  линейно независим.

Назовём  $(d - 1)$ -грань  $d$ -многогранника *симплициальной*, если она имеет ровно  $d$  вершин (является  $(d - 1)$ -симплексом).

Под словом «плоскость в пространстве  $\mathbb{R}^d$ » будем понимать гиперплоскость размерности  $\mathbb{R}^{d-1}$ .

Вектор  $\vec{e}_i = (\delta_{i,k})_{k=1}^d$  –  $i$ -й вектор ортонормированного базиса  $\mathbb{R}^d$ . Здесь  $\delta_{i,k}$  – символ Крёнекера:

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Обозначим через  $\mathcal{N}(\vec{x})$  операцию нормирования вектора:  $\mathcal{N}(\vec{x}) = \vec{x} / \|\vec{x}\|$ . Считаем, что  $\mathcal{N}(\vec{0}) = \vec{0}$ .

Обозначим через  $\mathcal{ON}(\vec{v}, \mathcal{B})$  операцию ортонормирования вектора  $\vec{v}$  на фоне ортонормированного набора векторов  $\mathcal{B}$ . Выполняется с использованием алгоритма Грамма-Шмидта. Считаем, что  $\mathcal{ON}(\vec{a}, \emptyset) = \mathcal{N}(\vec{a})$ .

## 2 Построение начальной грани $\mathcal{P}$

Пусть  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$  – рой  $d$ -мерных точек в  $d$ -мерном пространстве. Пусть  $\mathcal{B}$  – базис текущей плоскости. Построение начальной грани состоит из двух шагов. Первый – поиск аффинной плоскости, содержащей какую-либо грань выпуклой оболочки  $\mathcal{P}$ . Второй – поиск вершин этой грани. Построение аффинной плоскости заключается в последовательном

повороте некоторой начальной плоскости, проходящей через одну точку роя. Каждый поворот аффинной плоскости заключается в подмене одного вектора из её базиса так, чтобы она проходила через ещё хотя бы одну точку роя. Когда очередная плоскость содержит  $d$  линейно независимых точек, искомая плоскость построена.

Временные векторы базиса  $\mathbf{T}$  – векторы из этого множества могут быть заменены.

Финальные векторы базиса  $\mathbf{F}$  – векторы базиса, которые далее не будут заменяться и будут входить в базис искомой плоскости.

Если требуется построить выпуклую оболочку в двумерном пространстве, то запускается какой-либо плоский алгоритм построения выпуклой оболочки. Иначе запускается следующий многомерный алгоритм, вообще говоря, рекурсивный по размерности овыпукляемых роёв.

## 2.1 Построение начальной плоскости $\mathcal{L}$ по Сварту<sup>1</sup>

Вход:  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$  – рой точек в  $d$ -мерном пространстве.

Выход: Начальная плоскость  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$ , заданная аффинным базисом  $(o, \mathcal{B})$ , где размерность линейного базиса равна  $d - 1$ . Внешняя нормаль  $\vec{n}$  к этой плоскости.

1. Выберем точку  $o \in \mathcal{S}$ , минимальную в лексикографическом порядке (она гарантировано будет вершиной  $\mathcal{P}$ );
2. Проведём через  $o = (o_i)_{i=1}^d$  плоскость  $\mathcal{L}$  перпендикулярно первому базисному вектору пространства. (Все точки роя  $\mathcal{S}$  гарантированно лежат не левее этой плоскости.) Положим  $\mathbf{F}_0 = \emptyset$ ,  $\mathbf{T}_0 = \{\vec{e}_i\}_{i=2}^d$ .
3. Положим нормаль к плоскости  $\vec{n}_0 = -\vec{e}_1$ .
4. Обозначим  $\mathcal{V}$  – множество просмотренных точек плоскости  $\mathcal{L}$ . Положим  $\mathcal{V} = \{o\}$ .
5. Пока  $\mathbf{T} \neq \emptyset$ , повторяем:
  - (a) Имеем  $\vec{n}_k$  – нормаль к текущей плоскости,  $\mathbf{F}_k$  – накопленная часть базиса плоскости такая, что  $(o, \mathbf{F}_k)$  – аффинный базис тех точек, которые уже просмотрены и включены в плоскость.  $\mathbf{T}_k$  – оставшаяся часть временного базиса.
  - (b) Возьмём произвольный  $\vec{t} \in \mathbf{T}_k$ . Удалим вектор  $\vec{t}$  из  $\mathbf{T}_k$ :  $\mathbf{T}_{k+1} \leftarrow \mathbf{T}_k \setminus \{\vec{t}\}$ .
  - (c) Вычислим вектор  $\vec{v}$ , перпендикулярный оси вращения:  $\vec{v} = \mathcal{ON}(\vec{t}, \mathbf{F}_k)$ .
  - (d) Возьмём произвольную точку  $s \in \mathcal{S}$ ,  $s \notin \mathcal{V}$ . Рассмотрим вектор  $\vec{u} = \langle s - o, \vec{v} \rangle \vec{v} + \langle s - o, \vec{n}_k \rangle \vec{n}_k$  – вектор, перпендикулярный оси вращения и лежащий в новой плоскости, содержащей точку  $s$ . Если  $\vec{u} = \vec{0}$ , то есть точка  $s$  лежит в оси вращения, то добавляем точку  $s$  в множество  $\mathcal{V}$  и переходим на шаг 5d.
  - (e) Иначе найдём точку  $s_* \in \mathcal{S}$  такую, что  $s_* \notin \mathcal{V}$ , и угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{u}$ , наибольший среди всех точек роя (то есть скалярное произведение  $\langle \vec{v}, \mathcal{N}(\vec{u}) \rangle$ , наименьшее среди всех таких точек из  $\mathcal{S}$ ).
  - (f) Если точка  $s_*$  не нашлась, это означает, что весь рой  $\mathcal{S}$  лежит в аффинном подпространстве размерности меньше  $d - 1$ . В этом случае или алгоритм прекращает работу, если целью было найти выпуклую оболочку полной размерности, или переходит к построению выпуклой оболочки роя  $\mathcal{S}$  в найденном аффинном подпространстве с базисом  $(o, \mathbf{F}_k)$ .

<sup>1</sup>Swart, Garret. “Finding the Convex Hull Facet by Facet.” J. Algorithms 6 (1985): 17–48.

- (g) Если таких экстремальных точек несколько, то можно выбрать любую. Расширим финальный базис:  $\mathbf{F}_{k+1} \leftarrow \mathbf{F}_k \cup \{\mathcal{ON}(s_* - o, \mathbf{F}_k)\}$ . Добавим точку  $s_*$  в множество  $\mathcal{V}$ .
- (h) Вычислим нормаль  $\vec{n}_{k+1}$  новой плоскости:  $\vec{n}_{k+1} = \langle \vec{u}^*, \vec{n}_k \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}^*, \vec{v} \rangle \vec{n}_k$ . При необходимости надо переориентировать  $\vec{n}_{k+1}$  так, чтобы  $\langle \vec{n}_{k+1}, s - o \rangle < 0$ , где  $s$  — точка роя, не лежащая в текущей плоскости, то есть такая, что  $\langle \vec{n}_{k+1}, s - o \rangle \neq 0$ . Если такой точки не нашлось, значит все точки лежат в аффинном подпространстве с базисом  $(o, \mathbf{F}_{k+1})$ . Аналогично пункту 5f либо останавливаем алгоритм, либо переходим к построению выпуклой оболочки в этом аффинном подпространстве.

6. Положим  $\mathcal{B} = \mathbf{F}_k$ ,  $\vec{n} = \vec{n}_k$ .

## 2.2 Построение начальной плоскости $\mathcal{L}$ нашим методом.

Вход:  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$  — рой точек в  $d$ -мерном пространстве.

Выход: Начальная плоскость  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$ , заданная аффинным базисом  $(o, \mathcal{B})$ , где размерность линейного базиса равна  $d - 1$ .

1. Выберем точку  $o \in \mathcal{S}$ , минимальную в лексикографическом порядке (она гарантировано будет вершиной  $\mathcal{P}$ );
2. Проведём через  $o = (o_i)_{i=1}^d$  плоскость  $\mathcal{L}$  перпендикулярно первому базисному вектору пространства. (Все точки роя  $\mathcal{S}$  гарантированно лежат не левее этой плоскости.) Составим базис этой плоскости  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_i\}_{i=2}^d$ . Положим  $\mathbf{F} = \{o\}$ ,  $\mathbf{T} = \mathcal{B}$ ,  $|\mathbf{T}| = d - 1$ .
3. Обозначим  $\mathcal{V}$  — множество просмотренных вершин плоскости  $\mathcal{L}$ . Положим  $\mathcal{V} = \{o\}$ .
4. Пока  $\mathbf{T} \neq \emptyset$ , повторяем:
  - (a) Возьмём произвольный  $\vec{t} \in \mathbf{T}$ . Удалим вектор  $\vec{t}$  из  $\mathbf{T}$ :  $\mathbf{T} \leftarrow \mathbf{T} \setminus \{\vec{t}\}$ . Будем вращать вокруг ребра, аффинный базис которого есть  $(o, E)$ , где  $E = \mathbf{F} \cup \mathbf{T}$ .
    - i. Будем искать точку  $s_*$  такую, что на ней достигается максимум угла между  $\vec{t}$  и  $s - o$ .
    - ii. Пока можем взять произвольную точку  $s \in \mathcal{S}$ ,  $s \notin \mathcal{V}$ . Пусть  $\vec{n}_F = \mathcal{ON}(s - o, \mathbf{F})$ . Если  $\vec{n}_F = \vec{0}$ , то есть набор  $\mathbf{F} \cup \{s - o\}$  линейно зависим, то добавляем точку  $s$  в множество  $\mathcal{V}$  и переходим на шаг 4(a)ii.
    - iii. Иначе вычислим вектор  $\vec{n} = \mathcal{ON}(\vec{n}_F, \mathbf{T})$ . Если  $\vec{n} = \vec{0}$ , то есть набор  $\mathbf{T} \cup \{\vec{n}_F\}$  линейно зависим, то переходим на шаг 4(a)ii. (В этом случае мы не добавляем точку во множество просмотренных вершин, так как она ещё может пригодиться).
    - iv. Иначе вычислим угол между  $\vec{n}$  и  $\vec{t}$ . Если он больше текущего максимума, то запомнить текущий угол и данную точку  $s$ . Угол между двумя векторами может быть вычислен как арккосинус от скалярного произведения векторов делённых на их длину. Переходим на шаг 4(a)ii.
  - (b) Если точка  $s_*$  не нашлась, это означает, что весь рой  $\mathcal{S}$  лежит в аффинном подпространстве размерности меньше  $d - 1$ . В этом случае или алгоритм прекращает работу, если целью было найти выпуклую оболочку полной размерности, или переходит к построению выпуклой оболочки роя  $\mathcal{S}$  в найденном аффинном подпространстве с базисом  $(o, \mathbf{F})$ .

- (с) Если таких экстремальных точек несколько, то можно выбрать любую. Пусть  $\vec{v} = \mathcal{ON}(s_* - o, \mathbf{F})$ . Добавим вектор  $\vec{v}$  в финальный базис:  $\mathbf{F} \leftarrow \mathbf{F} \cup \{\vec{v}\}$ . Добавим точку  $s_*$  в множество  $\mathcal{V}$ .
- (d) Пересчитаем  $\mathbf{T}$  в  $\mathbf{T}'$  на фоне  $\mathbf{F}$ .
  - i.  $\mathbf{T}' \leftarrow \emptyset$ .
  - ii. Для всех векторов  $\vec{t} \in \mathbf{T}$ :
  - iii.  $\mathbf{T}' \leftarrow \mathcal{ON}(\vec{t}, \mathbf{F} \cup \mathbf{T}') = \mathcal{ON}(\mathcal{ON}(\vec{t}, \mathbf{F}), \mathbf{T}')$ .

5. Конец процедуры.

## 2.3 Построение грани

Вход: Рой точек  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$  и плоскость  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$ , то есть аффинный базис  $(o, \mathcal{B})$ . Возможна передача  $(d-2)$ -ребра  $\mathcal{E}$ , являющегося начальной гранью для процедуры овыпукления в  $(d-1)$ -пространстве плоскости  $\mathcal{L}$ .

Выход:  $(d-1)$ -грань  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$ , лежащая в плоскости  $\mathcal{L}$ .

1. Пусть  $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$  — множество точек  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ , лежащих в плоскости  $\mathcal{L}$ .
2. Если  $|\mathcal{S}_{\mathcal{L}}| = d$ , то полученная грань симплицальна, дальнейшая обработка не требуется. Искомая грань — симплекс, построенный на  $d$  данных точках.
3. Иначе проецируем  $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$  на  $\mathcal{L}$  используя аффинный базис (предварительно запоминая из какой точки  $s \in \mathcal{S}$  получилась очередная точка  $s' \in \mathcal{L}$ ) и рекурсивно строим выпуклую оболочку в аффинном подпространстве плоскости  $\mathcal{L}$ , если передано ребро  $\mathcal{E}$ , то проецируем его на  $\mathcal{L}$  и передаём в процедуру овыпукления в подпространстве.
4. Результатом овыпукления в подпространстве плоскости будет  $(d-1)$ -многогранник выраженный в терминах  $(d-1)$ -пространства, поэтому «поднимаем» его в  $d$ -мерное исходное пространство: очередную вершину  $s'$  подменяем исходной для неё точкой  $s$ . Производим аналогичную операцию для всех дочерних объектов данного многогранника.
5. На данном этапе можно убрать некоторые вершины из роя  $\mathcal{S}$ . В результате овыпукления данного роя получился набор  $V$  вершин выпуклого многогранника. Значит из  $\mathcal{S}$  можно выкинуть все точки содержащиеся в разности  $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$  и  $V$ . Данные точки точно не будут состоять в выпуклой оболочке всего роя.
6. Конец процедуры.

## 3 Процесс заворачивания

Можно рассмотреть граф граней искомой выпуклой оболочки  $\mathcal{P}$ . Вершины графа сопоставляются с гранями  $\mathcal{P}$ . Две вершины являются соседними, если соответствующие им  $(d-1)$ -грани имеют общее  $(d-2)$ -ребро.

В начале процесса заворачивания нам известна какая-то вершина этого графа, соответствующая грани, построенной алгоритмом из предыдущего раздела. Также нам известны рёбра графа, выходящие из этой вершины, так как нам известны рёбра этой начальной грани.

В таком рассмотрении построение выпуклой оболочки соответствует обходу всех её граней, то есть обходу графа граней  $\mathcal{P}$ . Такой обход графа может быть осуществлён каким-либо поисковым алгоритмом. Наиболее компактную реализацию имеет алгоритм поиска в глубину. Эта реализация является рекурсивной.

Напомним, что один рекурсивный шаг поиска в глубину состоит в переборе всех не посещённых соседей текущей вершины и переходов в них с продолжением поиска оттуда. В геометрических терминах перебор соседей и переход в них соответствует перебору рёбер текущей грани и построению грани, соседней текущей через очередное рассматриваемое ребро. Такое построение осуществляется поворотом плоскости текущей грани вокруг рассматриваемого ребра до касания какой-либо точки роя  $\mathcal{S}$ , не лежащей на рассматриваемом ребре. Такой поворот осуществляется аналогично шагу 5d алгоритма построения плоскости начальной грани.

### 3.1 Запуск поиска в глубину

Вход:  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ , возможна передача информации о начальной  $(d - 1)$ -грани  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$ .

Выход:  $d$ -многогранник  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ .

- Если не передали начальную грань:
  1. Выполняем построение начальной плоскости см. 2.1.
  2. Строим начальную грань  $\mathcal{F}$  см. 2.3.
- Для всех  $(d - 2)$ -рёбер грани  $\mathcal{F}$  счётчик смежных граней устанавливаем равным единице.
- Запускаем поиск в глубину от грани  $\mathcal{F}$ .

### 3.2 Поиск в глубину

Имеется текущая грань  $\mathcal{F}$ .

1. Пока у грани  $\mathcal{F}$  есть рёбра со счётчиком, равным единице, повторяем:
  - (a) Перекатываемся через ребро со счётчиком равным единице.
  - (b) Всем рёбрам получившейся грани увеличиваем счётчик на один.
  - (c) Запускаем поиск в глубину от получившейся грани.
2. Завершаем процедуру.

### 3.3 Процедура перекатывания через ребро

Вход:  $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^d$ , текущая  $(d - 1)$ -грань  $\mathcal{F}$  и  $(d - 2)$ -ребро  $\mathcal{E}$  текущей грани, через которое происходит перекатывание,  $(o, \mathcal{B}_{\mathcal{F}})$  — аффинный базис плоскости содержащей грань  $\mathcal{F}$ . Вектор  $\vec{n}$  — нормаль грани  $\mathcal{F}$ .

Выход: Новая грань  $\mathcal{F}$  и внешняя нормаль к ней.

1. Построим аффинный базис ребра  $\mathcal{E}$ .
  - (a) Возьмём произвольную точку  $o \in \mathcal{E}$  — начало аффинного базиса. Положим  $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \emptyset$ .
  - (b) Пока  $|\mathcal{B}_{\mathcal{E}}| < d - 2$ :  $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} \leftarrow \mathcal{ON}(s_e - o, \mathcal{B}_{\mathcal{E}})$ , где  $s_e \in \mathcal{E}$ .

2. Вычислим вектор  $\vec{v}$ , перпендикулярный оси вращения и лежащий в плоскости  $\mathcal{F}$ .
  - (a) Возьмём точку  $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{E}$ .
  - (b) Тогда искомый вектор равняется  $\vec{v} = \mathcal{ON}(f - o, \mathcal{B}_{\mathcal{E}})$ .
3. Находим точку  $s_* \in \mathcal{S}$  такую, что  $s_* \notin \mathcal{F}$ , и угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{u}$ , наибольший среди всех точек роя (то есть скалярное произведение  $\langle \vec{v}, \mathcal{N}(\vec{u}) \rangle$ , наименьшее среди всех таких точек из  $\mathcal{S}$ ), где  $\vec{u} = \langle s - o, \vec{v} \rangle \vec{v} + \langle s - o, \vec{n} \rangle \vec{n}$  — вектор, перпендикулярный оси вращения и лежащий в новой плоскости, содержащей точку  $s_*$ . Соответствующий такой точке  $s_*$  вектор  $\vec{u}$  обозначим  $\vec{r}$ .
4. Аффинный базис плоскости  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}} \triangleq (o, \mathcal{B}_{\mathcal{E}} \cup \{\vec{r}\})$ .
5. Вычислим нормаль  $\vec{n}_*$  новой плоскости:  $\vec{n}_* = \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle \vec{v} - \langle \vec{r}, \vec{v} \rangle \vec{n}$ . При необходимости надо переориентировать  $\vec{n}_*$  так, чтобы  $\langle \vec{n}_*, s - o \rangle < 0$ , где  $s$  — точка роя, не лежащая в текущей плоскости  $\mathcal{F}$ , то есть такая, что  $\langle \vec{n}_*, s - o \rangle \neq 0$ .
6. Выполняем построение новой грани  $\mathcal{F}'$  на точках роя, попавших в плоскость  $\mathcal{L}$ , проходящую через ребро  $\mathcal{E}$  и точку  $s$  (см. процедуру 2.3).

### 3.4 Процедура получения базиса плоскости, содержащего базис ребра

Вход: базис  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$   $(d - 1)$ -грани  $\mathcal{F}$ ,  $(d - 2)$ -ребро  $\mathcal{E}$  этой грани (важен набор  $E$  точек, лежащих в этом ребре).

Выход: базис  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}'}$ , содержащий базис ребра  $\mathcal{E}$ .

1. Выбираем две точки  $p, p'$  из  $E$ ,  $p \neq p'$ . Точку  $p$  полагаем началом аффинного базиса, нормированный вектор  $p' - p$  полагаем первым вектором  $\vec{b}_1$  конструируемого набора  $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$ .
2. Берём точку  $p'' \in \mathcal{F}$ ,  $p'' \notin E$ . Вектор  $p'' - p$ , нормированный на фоне  $\vec{b}_1$ , полагаем  $(d - 1)$ -м вектором  $\vec{b}_{d-1}$  конструируемого набора  $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$ .
3. Для всех векторов  $b \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$  проверяем, является ли  $b$  линейно-независимым на фоне уже накопленного набора  $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$ , и, если является, добавляем в  $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$  результат ортонормирования  $b$  на фоне текущего набора  $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$ .

## 4 TODO

- 
1. Перепланировать программу так, чтобы GW - конструктор объекта, из которого мы бы получали результат GW.
  2. Разумно перекидать какие-то данные в глобальные переменные экземпляра класса: в частности овыпукляемый рой, строящиеся грани, строящаяся информация о соседстве граней.
  3. При построении очередной грани выкидывать из роя те точки, которые были в плоскости, но не стали вершинами.