線形代数

2023 年 6 月 17 日

目次

1　ベクトル空間

1.1　ベクトル空間

定義 1.1.1. K を体とする．集合 V に加法 $V^2 \ni (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \mapsto \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in V$ とスカラー倍 $K \times V \ni (\lambda, \boldsymbol{x}) \mapsto \lambda\boldsymbol{x} \in V$ が定義され，以下の性質を満たすとき，V を K 上のベクトル空間 (あるいはベクトル空間) という．また，このとき V の元をベクトルという．

1. $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_1}$.
2. $(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}) + \boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{x_1} + (\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3})$.
3. ある V の元 $\mathbf{0}$ が存在し，$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$．$\mathbf{0}$ を零ベクトルという．
4. 各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し，$\boldsymbol{x}' \in V$ が存在し，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$．この $\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{x}'$ の逆ベクトルという．
5. $(\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x} + \lambda_2\boldsymbol{x}$.
6. $\lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda\boldsymbol{x}_1 + \lambda\boldsymbol{x}_2$.
7. $(\lambda_1\lambda_2)\boldsymbol{x} = \lambda_1(\lambda_2\boldsymbol{x})$.
8. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

記号 1.1.2. $\boldsymbol{x} \in V$ の逆ベクトル $\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}$ とも書く．また，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ に対し $\boldsymbol{x}_1 + (-\boldsymbol{x}_2)$ を $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ とも書く．

命題 1.1.3. V: ベクトル空間.

1. 零ベクトル $\mathbf{0}$ はただ 1 つ存在する．
2. $\boldsymbol{x} \in V$ に対し，$\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルはただ 1 つ存在する．
3. $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
4. $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
5. $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.

証明

1. $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2 \in V$ を V の零ベクトルとすると，$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$.
2. $\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2 \in V$ を $\boldsymbol{x} \in V$ の逆ベクトルとすると，$\boldsymbol{x}'_1 = \boldsymbol{x}'_1 + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}'_1 + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'_2) = (\boldsymbol{x}'_1 + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}'_2 = \mathbf{0} + \boldsymbol{x}'_2 = \boldsymbol{x}'_2$.
3. $0\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = 0\boldsymbol{x} + (0\boldsymbol{x} - 0\boldsymbol{x}) = (0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}) - 0\boldsymbol{x} = (0 + 0)\boldsymbol{x} - 0\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} - 0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
4. $\lambda\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0} + \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0} + (\lambda\mathbf{0} - \lambda\mathbf{0}) = (\lambda\mathbf{0} + \lambda\mathbf{0}) - \lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) - \lambda\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0} - \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
5. $\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = (1 + (-1))\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, (-1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = (-1 + 1)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ より，$(-1)\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルである．

□

命題 1.1.4. V: ベクトル空間.

1. $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
2. $-(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.
3. $-(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = -\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$.
4. $-(\lambda\boldsymbol{x}) = (-\lambda)\boldsymbol{x}$.

証明

1. $-\mathbf{0} = (-1)\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
2. $-(-\boldsymbol{x}) = -((-1)\boldsymbol{x}) = (-1)((-1)\boldsymbol{x}) = ((-1)(-1))\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.
3. $-(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = (-1)(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = (-1)\boldsymbol{x}_1 + (-1)\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$.
4. $-(\lambda\boldsymbol{x}) = (-1)(\lambda\boldsymbol{x}) = ((-1)\lambda)\boldsymbol{x} = (-\lambda)\boldsymbol{x}$.

□

定義 1.1.5. V: ベクトル空間. $W \subseteq V$ が V と同じ和とスカラー倍によりベクトル空間となるとき, W は V の部分空間であるという.

命題 1.1.6. V: ベクトル空間.

1. $\{\mathbf{0}\} \subseteq V$ は V の部分空間である.
2. $V \subseteq V$ は V の部分空間である.

証明 自明. □

補題 1.1.7. V: ベクトル空間, $W \subset V$: 部分空間.

1. V の零ベクトルを $\mathbf{0}$ とおくと, $\mathbf{0} \in W$ である. また, $\mathbf{0}$ は W の零ベクトルである.
2. $\boldsymbol{x} \in W$ について, V における $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルを $\boldsymbol{x}'$ とおくと, $\boldsymbol{x}' \in W$ である. また, $\boldsymbol{x}'$ は W における $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルである.

証明

1. $W \neq \emptyset$ なので, $\boldsymbol{x} \in W$ を取ると $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. 一方, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \in W$ なので $\mathbf{0} \in W$. また, $\forall \boldsymbol{x} \in W$ に対し $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ なので $\mathbf{0}$ は W の零ベクトルである.
2. W における $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルを $\boldsymbol{x}''$ とおくと, $\mathbf{0}$ は W の零ベクトルなので, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}''+\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ であるから $\boldsymbol{x}''$ は $\boldsymbol{x}'$ に等しい.

□

命題 1.1.8. V: K 上のベクトル空間, $W \subseteq V$. 以下は同値.

1. W は V の部分空間である.
2. 以下の (a), (b), (c) が成り立つ.

(a) $W \neq \emptyset$.

(b) $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W : \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in W$.

(c) $\forall \lambda \in K, \boldsymbol{x} \in W : \lambda \boldsymbol{x} \in W$.

3. 以下の (a), (b) が成り立つ.

(a) $W \neq \emptyset$.

(b) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W : \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \in W$.

証明

(1. $\Longrightarrow$ 3.) 自明.

(3. $\Longrightarrow$ 2.)

(a) 自明.

(b) $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 1\boldsymbol{x}_1 + 1\boldsymbol{x}_2 \in W$.

(c) $\lambda \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x} \in W$.

(2. $\Longrightarrow$ 1.)

W は加法とスカラー倍について閉じているので，定義域を W に制限することにより W に V と同じ加法 $W \ni (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \mapsto \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W$ とスカラー倍 $K \times V \ni (\lambda, \boldsymbol{x}) \mapsto \lambda \boldsymbol{x} \in V$ が定義できる．補題 1.1.7 より，W はベクトル空間となる．

□

命題 1.1.9. V: K 上のベクトル空間, $W_1, W_2, \ldots, W_n \subseteq V$: V の部分空間. このとき, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} W_i := W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n \subseteq V$ は V の部分空間.

証明 $\mathbf{0} \in W_i \, (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ より，$\mathbf{0} \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} W_i$ なので $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} W_i \neq \emptyset$.

$\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} W_i$ とおく．$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_i$ より $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \in W_i$ であるから，$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} W_i$. □

命題 1.1.10. V: ベクトル空間, $W_1, W_2, \ldots, W_n \subseteq V$: V の部分空間. このとき, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} = W_1 + W_2 + \cdots + W_n := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \,\middle|\, \boldsymbol{x}_i \in W_i \right\} \subseteq V$ は V の部分空間.

証明 $\mathbf{0} \in W_i \, (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ より，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{0} \in \sum_{i=1}^{n} W_i$ なので $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} W_i \neq \emptyset$.

$\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \displaystyle\sum_{i=1}^{n} W_i$ とおくと，$\exists \boldsymbol{x}_{i,j} \in W_j s.t. \boldsymbol{x}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{x}_{i,j} \, (i \in \{1, 2\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\})$．このとき，$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (\lambda_1 \boldsymbol{x}_{1,j} + \lambda_2 \boldsymbol{x}_{2,j})$ であり，$\lambda_1 \boldsymbol{x}_{1,j} + \lambda_2 \boldsymbol{x}_{2,j} \in W_j$ なので $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \in \displaystyle\sum_{i=1}^{n} W_i$.

□

1.2 線形写像

定義 1.2.1. V_1, V_2: K 上のベクトル空間．写像 $T\colon V_1 \to V_2$ が以下の条件を満たすとき，T は線形写像であるという．

1. $T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2)\,(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1)$.
2. $T(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x})\,(\lambda \in K, \boldsymbol{x} \in V_1)$.

記号 1.2.2. 線形写像 $V_1 \to V_2$ 全体の集合を $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ と書く．また，$\mathcal{L}(V, V)$ を $\mathcal{L}(V)$ と書く．

命題 1.2.3. V_1, V_2: K 上のベクトル空間．写像 $T\colon V_1 \to V_2$ について以下は同値.

1. $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.
2. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ について，$T(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2)$.

証明

(1. $\Longrightarrow$ 2.)
 $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ とすると，$\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ に対し，$T(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = T(\lambda_1\boldsymbol{x}_1) + T(\lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2)$.
(2. $\Longrightarrow$ 1.)
 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ に対し，$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T(1\boldsymbol{x}_1 + 1\boldsymbol{x}_2) = 1T(\boldsymbol{x}_1) + 1T(\boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2)$．また，$\lambda \in K, \boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，$T(\lambda\boldsymbol{x}) = T(\lambda\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x}) + 0T(\boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x})$．よって $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.

□

命題 1.2.4. V_1, V_2: ベクトル空間，$T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$．このとき，$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

証明 $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{0}) = 0T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. □

例 1.2.5. V: K 上のベクトル空間．写像 $V \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} \in V$ は線形写像である．この写像を V における恒等写像といい，1_V と表す．

証明 $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ に対し，$1_V(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 = \lambda_1 1_V(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 1_V(\boldsymbol{x}_2)$.

□

例 1.2.6. V_1, V_2: K 上のベクトル空間.

1. 写像 $V_1 \ni \boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{0} \in V_2$ は線形写像である．この写像を 0 写像といい，$0 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ と表す．
2. $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ に対し，写像 $V_1 \ni \boldsymbol{x} \mapsto -T(\boldsymbol{x}) \in V_2$ は線形写像である．この写像を $-T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ と表す．

証明

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ に対し，$0(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0} = \lambda_1 \mathbf{0} + \lambda_2 \mathbf{0} = \lambda_1 0(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 0(\boldsymbol{x}_2)$.
2. $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}
(-T)(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) &= -(T(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2)) \\
&= -(\lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2)) \\
&= -\lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) - \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2) \\
&= \lambda_1(-T(\boldsymbol{x}_1)) + \lambda_2(-T(\boldsymbol{x}_2)) \\
&= \lambda_1(-T)(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2(-T)(\boldsymbol{x}_2).
\end{aligned}$$

□

定義 1.2.7. V_1, V_2: K 上のベクトル空間.

1. $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ に対し，写像 $T_1 + T_2 \colon V_1 \to V_2$ を $T_1 + T_2 \colon V_1 \ni \boldsymbol{x} \mapsto T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x}) \in V_2$ と定める.
2. $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2), \lambda \in K$ に対し，写像 $\lambda T \colon V_1 \to V_2$ を $\lambda T \colon V_1 \ni \boldsymbol{x} \mapsto \lambda(T(x)) \in V_2$ と定める.

命題 1.2.8. V_1, V_2: K 上のベクトル空間.

1. $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ のとき，$T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.
2. $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2), \lambda \in K$ のとき，$\lambda T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.

証明

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}
(T_1 + T_2)(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) &= T_1(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) + T_2(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) \\
&= \lambda_1 T_1(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T_1(\boldsymbol{x}_2) + \lambda_1 T_2(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T_2(\boldsymbol{x}_2) \\
&= \lambda_1 T_1(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_1 T_2(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T_1(\boldsymbol{x}_2) + \lambda_2 T_2(\boldsymbol{x}_2) \\
&= \lambda_1(T_1(\boldsymbol{x}_1) + T_2(\boldsymbol{x}_1)) + \lambda_2(T_1(\boldsymbol{x}_2) + T_2(\boldsymbol{x}_2)) \\
&= \lambda_1(T_1 + T_2)(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2(T_1 + T_2)(\boldsymbol{x}_2).
\end{aligned}$$

2. $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}(\lambda T)(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) &= \lambda(T(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2)) \\ &= \lambda(\lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2)) \\ &= \lambda(\lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1)) + \lambda(\lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2)) \\ &= (\lambda\lambda_1) T(\boldsymbol{x}_1) + (\lambda\lambda_2) T(\boldsymbol{x}_2) \\ &= (\lambda_1\lambda) T(\boldsymbol{x}_1) + (\lambda_2\lambda) T(\boldsymbol{x}_2) \\ &= \lambda_1(\lambda T(\boldsymbol{x}_1)) + \lambda_2(\lambda T(\boldsymbol{x}_2)) \\ &= \lambda_1(\lambda T)(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2(\lambda T)(\boldsymbol{x}_2).\end{aligned}$$

□

命題 1.2.9. V_1, V_2: K 上のベクトル空間．このとき，$\mathcal{L}(V_1, V_2)$ は定義 1.2.7 で定めた加法とスカラー倍について K 上のベクトル空間となる．

証明

1. $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ とおくと，$\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(x) &= T_1(x) + T_2(x) \\ &= T_2(x) + T_1(x) \\ &= (T_2 + T_1)(x)\end{aligned}$$

   より，$T_1 + T_2 = T_2 + T_1$.

2. $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ とおくと，$\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}((T_1 + T_2) + T_3)(x) &= (T_1 + T_2)(x) + T_3(x) \\ &= (T_1(x) + T_2(x)) + T_3(x) \\ &= T_1(x) + (T_2(x) + T_3(x)) \\ &= T_1(x) + (T_2 + T_3)(x) \\ &= (T_1 + (T_2 + T_3))(x)\end{aligned}$$

   より，$(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$.

3. $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2), \boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}(0+T)(\boldsymbol{x}) &= 0(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{0} + T(\boldsymbol{x}) \\ &= T(\boldsymbol{x}), \\ (T+0)(\boldsymbol{x}) &= T(\boldsymbol{x}) + 0(\boldsymbol{x}) \\ &= T(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{0} \\ &= T(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

より，$0 + T = T + 0 = T$ である．

4. $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2), \boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}(T+(-T))(\boldsymbol{x}) &= T(\boldsymbol{x}) + (-T)(\boldsymbol{x}) \\ &= T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{0} \\ &= 0(\boldsymbol{x}), \\ (-T+T)(\boldsymbol{x}) &= (-T)(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x}) \\ &= -T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{0} \\ &= 0(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

より，$T + (-T) = (-T) + T = 0$ である．

5. $\lambda_1, \lambda_2 \in K, T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ とおくと，$\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}((\lambda_1+\lambda_2)T)(\boldsymbol{x}) &= (\lambda_1+\lambda_2)(T(\boldsymbol{x})) \\ &= \lambda_1(T(\boldsymbol{x})) + \lambda_2(T(\boldsymbol{x})) \\ &= (\lambda_1 T)(\boldsymbol{x}) + (\lambda_2 T)(\boldsymbol{x}) \\ &= (\lambda_1 T + \lambda_2 T)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

より，$(\lambda_1+\lambda_2)T = \lambda_1 T + \lambda_2 T$.

6. $\lambda \in K, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ とおくと，$\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}(\lambda(T_1+T_2))(\boldsymbol{x}) &= \lambda((T_1+T_2)(\boldsymbol{x})) \\ &= \lambda(T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x})) \\ &= \lambda T_1(\boldsymbol{x}) + \lambda T_2(\boldsymbol{x}) \\ &= (\lambda T_1)(\boldsymbol{x}) + (\lambda T_2)(\boldsymbol{x}) \\ &= (\lambda T_1 + \lambda T_2)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

より，$\lambda(T_1+T_2)=\lambda T_1+\lambda T_2$.

7. $\lambda_1,\lambda_2\in K, T\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$ とおくと，$\boldsymbol{x}\in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}((\lambda_1\lambda_2)T)(\boldsymbol{x}) &= (\lambda_1\lambda_2)(T(\boldsymbol{x}))\\ &= \lambda_1(\lambda_2(T(\boldsymbol{x})))\\ &= \lambda_1((\lambda_2T)(\boldsymbol{x}))\\ &= (\lambda_1(\lambda_2T))(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

より，$(\lambda_1\lambda_2)T=\lambda_1(\lambda_2T)$.

8. $T\in\mathcal{L}(V_1,V_2), \boldsymbol{x}\in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}(1T)(\boldsymbol{x}) &= 1(T(\boldsymbol{x}))\\ &= T(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

より，$1T=T$.

□

命題 1.2.10. V_1,V_2,V_3: K 上のベクトル空間，$T_1\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$，$T_2\in\mathcal{L}(V_2,V_3)$. このとき，$T_2\circ T_1\in\mathcal{L}(V_1,V_3)$.

証明 $\lambda_1,\lambda_2\in K, \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}(T_2\circ T_1)(\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2) &= T_2(T_1(\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2))\\ &= T_2(\lambda_1T_1(\boldsymbol{x}_1)+\lambda_2T_1(\boldsymbol{x}_2))\\ &= \lambda_1T_2(T_1(\boldsymbol{x}_1))+\lambda_2T_2(T_1(\boldsymbol{x}_2))\\ &= \lambda_1(T_2\circ T_1)(\boldsymbol{x}_1)+\lambda_2(T_2\circ T_1)(\boldsymbol{x}_2).\end{aligned}$$

□

記号 1.2.11. 命題 1.2.10 における $T_2\circ T_1$ を T_2T_1 と書く.

命題 1.2.12. 以下が成り立つ.

1. V_1,V_2,V_3: ベクトル空間，$f\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$，$0\in\mathcal{L}(V_2,V_3)$: 0 写像. このとき，$0f=0\in\mathcal{L}(V_1,V_3)$.
2. V_1,V_2,V_3: ベクトル空間，$0\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$: 0 写像，$f\in\mathcal{L}(V_2,V_3)$. このとき，$f0=0\in\mathcal{L}(V_1,V_3)$.
3. V_1,V_2: ベクトル空間，$f\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$. このとき，$1_{V_2}f=f1_{V_1}=f$.

証明

1. $\boldsymbol{x}\in V_1$ に対し，$(0f)(\boldsymbol{x})=0(f(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{0}=0(\boldsymbol{x})$.
2. $\boldsymbol{x}\in V_1$ に対し，$(f0)(\boldsymbol{x})=f(0(\boldsymbol{x}))=f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}=0(\boldsymbol{x})$.
3. $\boldsymbol{x}\in V_1$ に対し，$(1_{V_2}f)(\boldsymbol{x})=1_{V_2}(f(\boldsymbol{x}))=f(\boldsymbol{x})$，$(f1_{V_1})(\boldsymbol{x})=f(1_{V_1}(\boldsymbol{x}))=f(\boldsymbol{x})$.

$\square$

命題 1.2.13. 以下が成り立つ.

1. V_1, V_2, V_3: K 上のベクトル空間, $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, $g \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$, $\lambda \in K$. このとき, $g(kf) = (kg)f = k(gf)$.
2. V_1, V_2, V_3: ベクトル空間, $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$. このとき, $(g_1 + g_2)f = g_1 f + g_2 f$.
3. V_1, V_2, V_3: ベクトル空間, $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, $g \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$. このとき, $g(f_1 + f_2) = gf_1 + gf_2$.
4. V_1, V_2, V_3, V_4: ベクトル空間, $f_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_2), f_2 \in \mathcal{L}(V_2, V_3), f_3 \in \mathcal{L}(V_3, V_4)$. このとき, $(f_3 f_2) f_1 = f_3 (f_2 f_1)$.

証明

1. $\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し,
$$\begin{aligned}
(g(kf))(\boldsymbol{x}) &= g((kf)(\boldsymbol{x}) \\
&= g(k(f(\boldsymbol{x}))) \\
&= k(g(f(\boldsymbol{x}))) \\
&= k((gf)(\boldsymbol{x})), \\
(kg)(f)(\boldsymbol{x}) &= (kg)(f(\boldsymbol{x})) \\
&= k(g(f(\boldsymbol{x}))) \\
&= k((gf)(\boldsymbol{x}))
\end{aligned}$$
よって $g(kf) = (kg)f = k(gf)$.
2. $\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し,
$$\begin{aligned}
((g_1 + g_2)f)(\boldsymbol{x}) &= (g_1 + g_2)(f(\boldsymbol{x})) \\
&= g_1(f(\boldsymbol{x})) + g_2(f(\boldsymbol{x})) \\
&= (g_1 f)(\boldsymbol{x}) + (g_2 f)(\boldsymbol{x}) \\
&= (g_1 f + g_2 f)(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$
よって $(g_1 + g_2)f = g_1 f + g_2 f$.
3. $\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し,
$$\begin{aligned}
(g(f_1 + f_2))(\boldsymbol{x}) &= g((f_1 + f_2)(\boldsymbol{x})) \\
&= g(f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})) \\
&= g(f_1(\boldsymbol{x})) + g(f_2(\boldsymbol{x})) \\
&= (gf_1)(\boldsymbol{x}) + (gf_2)(\boldsymbol{x}) \\
&= (gf_1 + gf_2)(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

よって $g(f_1 + f_2) = gf_1 + gf_2$.

4. $\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し,

$$\begin{aligned}((f_3 f_2) f_1)(\boldsymbol{x}) &= (f_3 f_2)(f_1(x)) \\ &= f_3(f_2(f_1(\boldsymbol{x}))) \\ &= f_3((f_2 f_1)(\boldsymbol{x}) \\ &= (f_3(f_2 f_1))(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

よって $(f_3 f_2) f_1 = f_3(f_2 f_1)$.

□

命題 1.2.14. V_1, V_2: K 上のベクトル空間，$T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$．このとき，以下が成り立つ．

1. $W \subseteq V_1$: 部分空間に対し，$T(W) = \{T(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in W\} \subseteq V_2$ は V_2 の部分空間.
2. $W \subseteq V_2$: 部分空間に対し，$T^{-1}(W) = \{\boldsymbol{x} \in V_1 \mid T(\boldsymbol{x}) \in W\} \subseteq V_1$ は V_1 の部分空間.

証明

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in T(W)$ とおくと，$\exists \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W : T(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1, T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_2$．このとき，$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \in W$ より $\lambda_1 \boldsymbol{y}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 = \lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2) = T(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) \in T(W)$.
2. $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in T^{-1}(W)$ とおくと，$T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2) \in W$ より $T(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2) \in W$ であるから，$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \in W$.

□

定義 1.2.15. V_1, V_2: ベクトル空間，$T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.

1. $\operatorname{Ker} T := \{\boldsymbol{x} \in V_1 \mid T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} = T^{-1}(\{\boldsymbol{0}\})$ を T の核という．
2. $\operatorname{Im} T := \{T(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in V_1\} = T(V_1)$ を T の像という．

系 1.2.16. V_1, V_2: ベクトル空間，$T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.

1. $\operatorname{Ker} T \subseteq V_1$ は V_1 の部分空間.
2. $\operatorname{Im} T \subseteq V_2$ は V_2 の部分空間.

証明　命題 1.2.14 から従う．□