線形代数

2023 年 7 月 4 日

目次

1 ベクトル空間 2
1.1 ベクトル空間 2
1.2 線形写像 5
1.3 基底と次元 12
1.4 線形写像の表現 16
1.5 次元定理 16

1　ベクトル空間

1.1　ベクトル空間

定義 1.1.1. K を体とする．集合 V に加法 $V^2 \ni (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \mapsto \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in V$ とスカラー倍 $K \times V \ni (\lambda, \boldsymbol{x}) \mapsto \lambda \boldsymbol{x} \in V$ が定義され，以下の性質を満たすとき，V を K **上のベクトル空間** (あるいはベクトル空間) という．また，このとき V の元を**ベクトル**という．

1. $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_1}$.
2. $(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}) + \boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{x_1} + (\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3})$.
3. ある V の元 $\boldsymbol{0}$ が存在し，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$．$\boldsymbol{0}$ を**零ベクトル**という．
4. 各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し，$\boldsymbol{x}' \in V$ が存在し，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$．この $\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{x}$ の**逆ベクトル**という．
5. $(\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x} + \lambda_2 \boldsymbol{x}$.
6. $\lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda \boldsymbol{x}_1 + \lambda \boldsymbol{x}_2$.
7. $(\lambda_1 \lambda_2)\boldsymbol{x} = \lambda_1(\lambda_2 \boldsymbol{x})$.
8. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

記号 1.1.2. $\boldsymbol{x} \in V$ の逆ベクトル $\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}$ とも書く．また，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ に対し $\boldsymbol{x}_1 + (-\boldsymbol{x}_2)$ を $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ とも書く．

命題 1.1.3. V: ベクトル空間.

1. 零ベクトル $\boldsymbol{0}$ はただ 1 つ存在する．
2. $\boldsymbol{x} \in V$ に対し，$\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルはただ 1 つ存在する．
3. $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
4. $\lambda \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.
5. $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.

証明

1. $\boldsymbol{0}_1, \boldsymbol{0}_2 \in V$ を V の零ベクトルとすると，$\boldsymbol{0}_1 = \boldsymbol{0}_1 + \boldsymbol{0}_2 = \boldsymbol{0}_2$.
2. $\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2' \in V$ を $\boldsymbol{x} \in V$ の逆ベクトルとすると，$\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}_1' + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_2') = (\boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}_2' = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x}_2' = \boldsymbol{x}_2'$.
3. $0\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{x} + (0\boldsymbol{x} - 0\boldsymbol{x}) = (0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}) - 0\boldsymbol{x} = (0+0)\boldsymbol{x} - 0\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} - 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
4. $\lambda\boldsymbol{0} = \lambda\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \lambda\boldsymbol{0} + (\lambda\boldsymbol{0} - \lambda\boldsymbol{0}) = (\lambda\boldsymbol{0} + \lambda\boldsymbol{0}) - \lambda\boldsymbol{0} = \lambda(\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0}) - \lambda\boldsymbol{0} = \lambda\boldsymbol{0} - \lambda\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.
5. $\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = (1 + (-1))\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, (-1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = (-1+1)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より，$(-1)\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルである．

□

命題 1.1.4. V: ベクトル空間.

1. $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
2. $-(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.
3. $-(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = -\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$.
4. $-(\lambda\boldsymbol{x}) = (-\lambda)\boldsymbol{x}$.

証明

1. $-\mathbf{0} = (-1)\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
2. $-(-\boldsymbol{x}) = -((-1)\boldsymbol{x}) = (-1)((-1)\boldsymbol{x}) = ((-1)(-1))\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.
3. $-(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = (-1)(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = (-1)\boldsymbol{x}_1 + (-1)\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$.
4. $-(\lambda\boldsymbol{x}) = (-1)(\lambda\boldsymbol{x}) = ((-1)\lambda)\boldsymbol{x} = (-\lambda)\boldsymbol{x}$.

□

定義 1.1.5. V: ベクトル空間. $W \subseteq V$ が V と同じ和とスカラー倍によりベクトル空間となるとき，W は V の**部分空間**であるという.

命題 1.1.6. V: ベクトル空間.

1. $\{\mathbf{0}\} \subseteq V$ は V の部分空間である.
2. $V \subseteq V$ は V の部分空間である.

証明　自明. □

補題 1.1.7. V: ベクトル空間，$W \subset V$: 部分空間.

1. V の零ベクトルを $\mathbf{0}$ とおくと，$\mathbf{0} \in W$ である．また，$\mathbf{0}$ は W の零ベクトルである.
2. $\boldsymbol{x} \in W$ について，V における $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルを $\boldsymbol{x}'$ とおくと，$\boldsymbol{x}' \in W$ である．また，$\boldsymbol{x}'$ は W における $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルである.

証明

1. $W \neq \emptyset$ なので，$\boldsymbol{x} \in W$ を取ると $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. 一方，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \in W$ なので $\mathbf{0} \in W$．また，$\forall \boldsymbol{x} \in W$ に対し $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ なので $\mathbf{0}$ は W の零ベクトルである.
2. W における $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルを $\boldsymbol{x}''$ とおくと，$\mathbf{0}$ は W の零ベクトルなので，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}''+\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ であるから $\boldsymbol{x}''$ は $\boldsymbol{x}'$ に等しい.

□

命題 1.1.8. V: K 上のベクトル空間，$W \subseteq V$．以下は同値.

1. W は V の部分空間である.
2. 以下の (a), (b), (c) が成り立つ.

(a) $W \neq \emptyset$.

(b) $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W : \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in W$.

(c) $\forall \lambda \in K, \boldsymbol{x} \in W : \lambda \boldsymbol{x} \in W$.

3. 以下の (a), (b) が成り立つ.

(a) $W \neq \emptyset$.

(b) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W : \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \in W$.

証明

(1. $\Longrightarrow$ 3.) 自明.

(3. $\Longrightarrow$ 2.)

(a) 自明.

(b) $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 1\boldsymbol{x}_1 + 1\boldsymbol{x}_2 \in W$.

(c) $\lambda \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x} \in W$.

(2. $\Longrightarrow$ 1.)

W は加法とスカラー倍について閉じているので，定義域を W に制限することにより W に V と同じ加法 $W \ni (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \mapsto \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W$ とスカラー倍 $K \times W \ni (\lambda, \boldsymbol{x}) \mapsto \lambda \boldsymbol{x} \in W$ が定義できる．補題 1.1.7 より，W はベクトル空間となる．

$\square$

命題 1.1.9. V: K 上のベクトル空間，$W_1, W_2, \ldots, W_n \subseteq V$: V の部分空間．このとき，

$$\bigcap_{i=1}^{n} W_i := W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n \subseteq V$$

は V の部分空間.

証明 $\mathbf{0} \in W_i \, (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ より，$\mathbf{0} \in \bigcap_{i=1}^{n} W_i$ なので $\bigcap_{i=1}^{n} W_i \neq \emptyset$.

$\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \bigcap_{i=1}^{n} W_i$ とおく．$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_i$ より $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \in W_i$ であるから，$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \in \bigcap_{i=1}^{n} W_i$. $\square$

命題 1.1.10. V: ベクトル空間，$W_1, W_2, \ldots, W_n \subseteq V$: V の部分空間．このとき，

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = W_1 + W_2 + \cdots + W_n := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \;\middle|\; \boldsymbol{x}_i \in W_i \right\} \subseteq V$$

は V の部分空間.

証明 $\mathbf{0} \in W_i \, (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ より，$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{0} \in \sum_{i=1}^{n} W_i$ なので $\sum_{i=1}^{n} W_i \neq \emptyset$.

$\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \sum_{i=1}^{n} W_i$ とおくと，$\exists \boldsymbol{x}_i^{(j)} \in W_j \, s.t. \, \boldsymbol{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i^{(j)} \, (i \in \{1, 2, \ldots, n\}, j \in \{1, 2\})$．このとき，$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 \boldsymbol{x}_i^{(1)} + \lambda_2 \boldsymbol{x}_i^{(2)})$ であり，$\lambda_1 \boldsymbol{x}_i^{(1)} + \lambda_2 \boldsymbol{x}_i^{(2)} \in W_j$ なので $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \in \sum_{i=1}^{n} W_i$. □

命題 1.1.11. V: ベクトル空間，$W_1, W_2, \ldots, W_n \subseteq V$: V の部分空間．このとき，$W_i \in \sum_{j=1}^{n} W_i \, (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$.

命題 1.1.12. V: ベクトル空間，$W_1, W_2 \subseteq V$: V の部分空間．このとき，以下が成り立つ.

1. $W_1 + W_2 = W_1 \equiv W_2 \subseteq W_1$
2. $W_1 + W_2 = W_2 \equiv W_1 \subseteq W_2$

定義 1.1.13. V: ベクトル空間，$W_1, W_2, \ldots, W_n \subseteq V$: 部分空間，$\sum_{i=1}^{N} W_i = V$．任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}$ となる $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in W_1 \times W_2 \times \cdots \times W_n$ が一意に存在するとき，V は $W_1, W_2, \ldots, W_n$ の**直和**であるといい，$V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$ と書く.

命題 1.1.14. V: K 上のベクトル空間，$W_1, W_2 \subseteq V$: 部分空間，$W_1 + W_2 = V$．このとき，以下は同値.

1. $V = W_1 \oplus W_2$.
2. $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

1.2 線形写像

定義 1.2.1. V_1, V_2: K 上のベクトル空間．写像 $T \colon V_1 \to V_2$ が以下の条件を満たすとき，T は**線形写像**であるという.

1. $T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) \, (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1)$.
2. $T(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x}) \, (\lambda \in K, \boldsymbol{x} \in V_1)$.

記号 1.2.2. 線形写像 $V_1 \to V_2$ 全体の集合を $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ と書く．また，$\mathcal{L}(V, V)$ を $\mathcal{L}(V)$ と書く.

命題 1.2.3. V_1, V_2: K 上のベクトル空間．写像 $T \colon V_1 \to V_2$ について以下は同値.

1. $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.
2. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ について，$T(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2)$.

証明

(1. $\Longrightarrow$ 2.)

$T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ とすると，$\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ に対し，$T(\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2) = T(\lambda_1\boldsymbol{x}_1)+T(\lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2)$.

(2. $\Longrightarrow$ 1.)

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ に対し，$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T(1\boldsymbol{x}_1 + 1\boldsymbol{x}_2) = 1T(\boldsymbol{x}_1) + 1T(\boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2)$．また，$\lambda \in K, \boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，$T(\lambda\boldsymbol{x}) = T(\lambda\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x}) + 0T(\boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x})$．よって $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.

□

命題 1.2.4. V_1, V_2: ベクトル空間，$T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$．このとき，$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

証明 $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{0}) = 0T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. □

例 1.2.5. V: K 上のベクトル空間．写像 $V \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} \in V$ は線形写像である．この写像を V における恒等写像といい，1_V と表す.

証明 $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ に対し，$1_V(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 = \lambda_1 1_V(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 1_V(\boldsymbol{x}_2)$.

□

例 1.2.6. V_1, V_2: K 上のベクトル空間.

1. 写像 $V_1 \ni \boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{0} \in V_2$ は線形写像である．この写像を 0 写像といい，$0 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ と表す.
2. $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ に対し，写像 $V_1 \ni \boldsymbol{x} \mapsto -T(\boldsymbol{x}) \in V_2$ は線形写像である．この写像を $-T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ と表す.

証明

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ に対し，
$$\begin{aligned} 0(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2) &= \mathbf{0} \\ &= \lambda_1\mathbf{0} + \lambda_2\mathbf{0} \\ &= \lambda_1 0(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 0(\boldsymbol{x}_2). \end{aligned}$$
2. $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ に対し，
$$\begin{aligned} (-T)(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2) &= -(T(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2)) \\ &= -(\lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2)) \\ &= -\lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) - \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2) \\ &= \lambda_1(-T(\boldsymbol{x}_1)) + \lambda_2(-T(\boldsymbol{x}_2)) \\ &= \lambda_1(-T)(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2(-T)(\boldsymbol{x}_2). \end{aligned}$$

□

定義 1.2.7. V_1, V_2: K 上のベクトル空間.

1. $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ に対し，写像 $T_1 + T_2 \colon V_1 \to V_2$ を $T_1 + T_2 \colon V_1 \ni \boldsymbol{x} \mapsto T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x}) \in V_2$ と定める．
2. $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2), \lambda \in K$ に対し，写像 $\lambda T \colon V_1 \to V_2$ を $\lambda T \colon V_1 \ni \boldsymbol{x} \mapsto \lambda(T(x)) \in V_2$ と定める．

命題 1.2.8. V_1, V_2: K 上のベクトル空間.

1. $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ のとき，$T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.
2. $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2), \lambda \in K$ のとき，$\lambda T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.

証明

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ に対し，

$$
\begin{aligned}
(T_1 + T_2)(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) &= T_1(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) + T_2(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) \\
&= \lambda_1 T_1(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T_1(\boldsymbol{x}_2) + \lambda_1 T_2(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T_2(\boldsymbol{x}_2) \\
&= \lambda_1 T_1(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_1 T_2(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T_1(\boldsymbol{x}_2) + \lambda_2 T_2(\boldsymbol{x}_2) \\
&= \lambda_1 (T_1(\boldsymbol{x}_1) + T_2(\boldsymbol{x}_1)) + \lambda_2 (T_1(\boldsymbol{x}_2) + T_2(\boldsymbol{x}_2)) \\
&= \lambda_1 (T_1 + T_2)(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 (T_1 + T_2)(\boldsymbol{x}_2).
\end{aligned}
$$

2. $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ に対し，

$$
\begin{aligned}
(\lambda T)(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) &= \lambda(T(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2)) \\
&= \lambda(\lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2)) \\
&= \lambda(\lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1)) + \lambda(\lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2)) \\
&= (\lambda \lambda_1) T(\boldsymbol{x}_1) + (\lambda \lambda_2) T(\boldsymbol{x}_2) \\
&= (\lambda_1 \lambda) T(\boldsymbol{x}_1) + (\lambda_2 \lambda) T(\boldsymbol{x}_2) \\
&= \lambda_1 (\lambda T(\boldsymbol{x}_1)) + \lambda_2 (\lambda T(\boldsymbol{x}_2)) \\
&= \lambda_1 (\lambda T)(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 (\lambda T)(\boldsymbol{x}_2).
\end{aligned}
$$

□

命題 1.2.9. V_1, V_2: K 上のベクトル空間．このとき，$\mathcal{L}(V_1, V_2)$ は定義 1.2.7 で定めた加法とスカラー倍について K 上のベクトル空間となる．

証明

1. $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ とおくと，$\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(x) &= T_1(x) + T_2(x)\\ &= T_2(x) + T_1(x)\\ &= (T_2 + T_1)(x)\end{aligned}$$

より，$T_1 + T_2 = T_2 + T_1$.

2. $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ とおくと，$\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}((T_1 + T_2) + T_3)(x) &= (T_1 + T_2)(x) + T_3(x)\\ &= (T_1(x) + T_2(x)) + T_3(x)\\ &= T_1(x) + (T_2(x) + T_3(x))\\ &= T_1(x) + (T_2 + T_3)(x)\\ &= (T_1 + (T_2 + T_3))(x)\end{aligned}$$

より，$(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$.

3. $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2), \boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}(0 + T)(\boldsymbol{x}) &= 0(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x})\\ &= \mathbf{0} + T(\boldsymbol{x})\\ &= T(\boldsymbol{x}),\\ (T + 0)(\boldsymbol{x}) &= T(\boldsymbol{x}) + 0(\boldsymbol{x})\\ &= T(\boldsymbol{x}) + \mathbf{0}\\ &= T(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

より，$0 + T = T + 0 = T$ である.

4. $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2), \boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}(T + (-T))(\boldsymbol{x}) &= T(\boldsymbol{x}) + (-T)(\boldsymbol{x})\\ &= T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x})\\ &= \mathbf{0}\\ &= 0(\boldsymbol{x}),\\ (-T + T)(\boldsymbol{x}) &= (-T)(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x})\\ &= -T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x})\\ &= \mathbf{0}\\ &= 0(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

より，$T+(-T)=(-T)+T=0$ である．

5. $\lambda_1,\lambda_2\in K, T\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$ とおくと，$\boldsymbol{x}\in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}((\lambda_1+\lambda_2)T)(\boldsymbol{x}) &= (\lambda_1+\lambda_2)(T(\boldsymbol{x}))\\ &= \lambda_1(T(\boldsymbol{x}))+\lambda_2(T(\boldsymbol{x}))\\ &= (\lambda_1 T)(\boldsymbol{x})+(\lambda_2 T)(\boldsymbol{x})\\ &= (\lambda_1 T+\lambda_2 T)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

より，$(\lambda_1+\lambda_2)T=\lambda_1 T+\lambda_2 T$.

6. $\lambda\in K, T_1,T_2\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$ とおくと，$\boldsymbol{x}\in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}(\lambda(T_1+T_2))(\boldsymbol{x}) &= \lambda((T_1+T_2)(\boldsymbol{x}))\\ &= \lambda(T_1(\boldsymbol{x})+T_2(\boldsymbol{x}))\\ &= \lambda T_1(\boldsymbol{x})+\lambda T_2(\boldsymbol{x})\\ &= (\lambda T_1)(\boldsymbol{x})+(\lambda T_2)(\boldsymbol{x})\\ &= (\lambda T_1+\lambda T_2)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

より，$\lambda(T_1+T_2)=\lambda T_1+\lambda T_2$.

7. $\lambda_1,\lambda_2\in K, T\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$ とおくと，$\boldsymbol{x}\in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}((\lambda_1\lambda_2)T)(\boldsymbol{x}) &= (\lambda_1\lambda_2)(T(\boldsymbol{x}))\\ &= \lambda_1(\lambda_2(T(\boldsymbol{x})))\\ &= \lambda_1((\lambda_2 T)(\boldsymbol{x}))\\ &= (\lambda_1(\lambda_2 T))(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

より，$(\lambda_1\lambda_2)T=\lambda_1(\lambda_2 T)$.

8. $T\in\mathcal{L}(V_1,V_2), \boldsymbol{x}\in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}(1T)(\boldsymbol{x}) &= 1(T(\boldsymbol{x}))\\ &= T(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

より，$1T=T$.

□

命題 1.2.10. V_1,V_2,V_3: K 上のベクトル空間，$T_1\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$，$T_2\in\mathcal{L}(V_2,V_3)$. このとき，$T_2\circ T_1\in\mathcal{L}(V_1,V_3)$.

証明　$\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ に対し，

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) &= T_2(T_1(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2)) \\ &= T_2(\lambda_1 T_1(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T_1(\boldsymbol{x}_2)) \\ &= \lambda_1 T_2(T_1(\boldsymbol{x}_1)) + \lambda_2 T_2(T_1(\boldsymbol{x}_2)) \\ &= \lambda_1 (T_2 \circ T_1)(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 (T_2 \circ T_1)(\boldsymbol{x}_2).\end{aligned}$$

□

記号 1.2.11. 命題 1.2.10 における $T_2 \circ T_1$ を $T_2 T_1$ と書く．

命題 1.2.12. 以下が成り立つ．

1. V_1, V_2, V_3: ベクトル空間，$f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$，$0 \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$: 0 写像．このとき，$0f = 0 \in \mathcal{L}(V_1, V_3)$.
2. V_1, V_2, V_3: ベクトル空間，$0 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$: 0 写像，$f \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$．このとき，$f0 = 0 \in \mathcal{L}(V_1, V_3)$.
3. V_1, V_2: ベクトル空間，$f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$．このとき，$1_{V_2} f = f 1_{V_1} = f$.

証明

1. $\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，$(0f)(\boldsymbol{x}) = 0(f(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0} = 0(\boldsymbol{x})$.
2. $\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，$(f0)(\boldsymbol{x}) = f(0(\boldsymbol{x})) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = 0(\boldsymbol{x})$.
3. $\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し，$(1_{V_2} f)(\boldsymbol{x}) = 1_{V_2}(f(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x})$，$(f 1_{V_1})(\boldsymbol{x}) = f(1_{V_1}(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x})$.

□

命題 1.2.13. 以下が成り立つ．

1. V_1, V_2, V_3: K 上のベクトル空間，$f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$，$g \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$，$\lambda \in K$．このとき，$g(\lambda f) = (\lambda g) f = \lambda (g f)$.
2. V_1, V_2, V_3: ベクトル空間，$f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$，$g_1, g_2 \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$．このとき，$(g_1 + g_2) f = g_1 f + g_2 f$.
3. V_1, V_2, V_3: ベクトル空間，$f_1, f_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$，$g \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$．このとき，$g(f_1 + f_2) = g f_1 + g f_2$.
4. V_1, V_2, V_3, V_4: ベクトル空間，$f_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_2), f_2 \in \mathcal{L}(V_2, V_3), f_3 \in \mathcal{L}(V_3, V_4)$．このとき，$(f_3 f_2) f_1 = f_3 (f_2 f_1)$.

証明

1. $\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し,

$$\begin{aligned}(g(\lambda f))(\boldsymbol{x}) &= g((\lambda f)(\boldsymbol{x})) \\ &= g(\lambda(f(\boldsymbol{x}))) \\ &= \lambda(g(f(\boldsymbol{x}))) \\ &= \lambda((gf)(\boldsymbol{x})), \\ (\lambda g)(f)(\boldsymbol{x}) &= (\lambda g)(f(\boldsymbol{x})) \\ &= \lambda(g(f(\boldsymbol{x}))) \\ &= \lambda((gf)(\boldsymbol{x}))\end{aligned}$$

よって $g(\lambda f) = (\lambda g)f = \lambda(gf)$.

2. $\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し,

$$\begin{aligned}((g_1 + g_2)f)(\boldsymbol{x}) &= (g_1 + g_2)(f(\boldsymbol{x})) \\ &= g_1(f(\boldsymbol{x})) + g_2(f(\boldsymbol{x})) \\ &= (g_1 f)(\boldsymbol{x}) + (g_2 f)(\boldsymbol{x}) \\ &= (g_1 f + g_2 f)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

よって $(g_1 + g_2)f = g_1 f + g_2 f$.

3. $\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し,

$$\begin{aligned}(g(f_1 + f_2))(\boldsymbol{x}) &= g((f_1 + f_2)(\boldsymbol{x})) \\ &= g(f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})) \\ &= g(f_1(\boldsymbol{x})) + g(f_2(\boldsymbol{x})) \\ &= (gf_1)(\boldsymbol{x}) + (gf_2)(\boldsymbol{x}) \\ &= (gf_1 + gf_2)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

よって $g(f_1 + f_2) = gf_1 + gf_2$.

4. $\boldsymbol{x} \in V_1$ に対し,

$$\begin{aligned}((f_3 f_2) f_1)(\boldsymbol{x}) &= (f_3 f_2)(f_1(x)) \\ &= f_3(f_2(f_1(\boldsymbol{x}))) \\ &= f_3((f_2 f_1)(\boldsymbol{x})) \\ &= (f_3(f_2 f_1))(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

よって $(f_3 f_2) f_1 = f_3(f_2 f_1)$.

$\square$

1.3 基底と次元

定義 1.3.1. V: K 上のベクトル空間，$A = \{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}\}$: V のベクトルの多重集合．$\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{x}_i \,\middle|\, c_i \in K \right\} \subseteq V$ を A の**線形包**といい，$\operatorname{span} A$ と表す．

定義 1.3.2. V: K 上のベクトル空間，$A = \{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}\}$: V のベクトルの多重集合．$\operatorname{span} A = V$ のとき，A は V を**張る**という．

命題 1.3.3. V: K 上のベクトル空間，A: V のベクトルの多重集合．$\operatorname{span} A \subseteq V$ は V の部分空間である．

証明 $A = \{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}\}$ とする．

$c_i = 0 \, (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ とすると $\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ より，$\boldsymbol{0} \in \operatorname{span} A$ であるから $\operatorname{span} A \neq \emptyset$ である．

また，$\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{y}_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(j)} \boldsymbol{x}_i \in \operatorname{span} A \, (j \in \{1, 2\}, c_i^{(j)} \in K)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \boldsymbol{y}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{y}_2 &= \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} c_i^{(1)} \boldsymbol{x}_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} c_i^{(2)} \boldsymbol{x}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 c_i^{(1)} \boldsymbol{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_2 c_i^{(2)} \boldsymbol{x}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_1 c_i^{(1)} \boldsymbol{x}_i + \lambda_2 c_i^{(2)} \boldsymbol{x}_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_1 c_i^{(1)} + \lambda_2 c_i^{(2)} \right) \boldsymbol{x}_i
\end{aligned}$$

$\lambda_1 c_i^{(1)} + \lambda_2 c_i^{(2)} \in K$ であるから，$\lambda_1 \boldsymbol{y}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{y}_2 \in \operatorname{span} A$ である． □

命題 1.3.4. V: K 上のベクトル空間，$W \subseteq V$: 部分空間，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in V$．このとき，以下は同値．

1. $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} \subseteq W$.
2. $\operatorname{span}\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}\} \subseteq W$.

証明

(1. $\Longrightarrow$ 2.)

$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} \subseteq W$ より，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in W$ である．

$\boldsymbol{x} \in \{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}\}$ をとると，$\exists (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in K^n \; s.t. \; s = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{x}_i$ であるから，$\boldsymbol{x} \in W$．

よって $\operatorname{span}\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}\} \subseteq W$．

(2. $\Longrightarrow$ 1.)

$\boldsymbol{x}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\boldsymbol{x}_j$ であるから，$\boldsymbol{x}_i \in \operatorname{span}\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}\}\,(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$．よって，$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} \subseteq W$．

□

命題 1.3.5. V: K 上のベクトル空間，A_1, A_2: V のベクトルの多重集合．このとき，$\operatorname{span}(A_1 \sqcup A_2) = \operatorname{span} A_1 + \operatorname{span} A_2$．

証明 $A_i = \{\{\boldsymbol{x}_1^{(i)}, \boldsymbol{x}_2^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{n_i}^{(i)}\}\}\,(i \in \{1, 2\})$ とおく．

$$A_1 \sqcup A_2 = \{\{\boldsymbol{x}_1^{(1)}, \boldsymbol{x}_2^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{n_1}^{(1)}, \boldsymbol{x}_1^{(2)}, \boldsymbol{x}_2^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{n_2}^{(2)}\}\}$$

である．

$\boldsymbol{x} \in \operatorname{span}(A_1 \sqcup A_2)$ をとると，$\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n_1} c_j^{(1)}\boldsymbol{x}_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n_2} c_j^{(2)}\boldsymbol{x}_j^{(2)}$ とできる．$\boldsymbol{x}^{(i)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} c_j^{(i)}\boldsymbol{x}_j^{(i)} \in \operatorname{span} A_i\,(i \in \{1, 2\})$ とおくと，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{x}^{(2)}$ より，$\boldsymbol{x} \in \operatorname{span} A_1 + \operatorname{span} A_2$ である．

また，$\boldsymbol{x} \in \operatorname{span} A_1 + \operatorname{span} A_2$ をとると，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{x}^{(2)}\,(\boldsymbol{x}^{(i)} \in \operatorname{span} A_i\,(i \in \{1, 2\}))$ とできる．さらに，$\boldsymbol{x}^{(i)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} c_j^{(i)}\boldsymbol{x}_j^{(i)}\,(i \in \{1, 2\})$ とできる．このとき，$\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n_1} c_j^{(1)}\boldsymbol{x}_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n_2} c_j^{(2)}\boldsymbol{x}_j^{(2)}$ となるので，$\boldsymbol{x} \in \operatorname{span}(A_1 \sqcup A_2)$． □

系 1.3.6. V: K 上のベクトル空間，A, B: V のベクトルの多重集合，$A \subseteq B$．このとき，$\operatorname{span} A \subseteq \operatorname{span} B$ が成り立つ．

証明 $A \subseteq B$ より，V のベクトルの多重集合 A' が存在して $B = A \sqcup A'$ とできる．このとき，命題 1.3.5 より $\operatorname{span} A \subseteq \operatorname{span} A + \operatorname{span} A' = \operatorname{span}(A \sqcup A') = \operatorname{span} B$． □

系 1.3.7. V: K 上のベクトル空間，A, B: V のベクトルの多重集合，$A \subseteq B$．このとき，A が V を張るならば，B も V を張る．

証明 A は V を張るので，$\operatorname{span} A = V$ であるから $V = \operatorname{span} A \subseteq \operatorname{span} B$．また，$\operatorname{span} B$ は V の部分空間なので $\operatorname{span} B \subseteq V$．従って $\operatorname{span} B = V$ なので B は V を張る． □

定義 1.3.8. V: K 上のベクトル空間，$A = \{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}\}$: V のベクトルの多重集合．

1. $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ に対し $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{x}_i = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = \mathbf{0} \implies c_1 = \cdots = c_n = 0$ が成り立つとき，A は**一次独立**であるという．
2. A が一次独立でないとき，A は**一次従属**であるという．

命題 1.3.9. V: K 上のベクトル空間，A, B: V のベクトルの多重集合，$A \subseteq B$．このとき，以下が成り立つ．

1. A が一次従属ならば，B も一次従属である．
2. B が一次独立ならば，A も一次独立である．

証明

1. $A=\{\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n\}\}, B=\{\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}'_1,\boldsymbol{x}'_2,\dots,\boldsymbol{x}'_m\}\}$ とおく．A が一次従属のとき，$(c_1,c_2,\dots,c_n)\neq(0,0,\dots,0)\in K^n$ が存在して，$\sum_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}$ である．
   このとき，$c'_1=c'_2=\cdots=c'_m=0$ とおくと，$(c_1,c_2,\dots,c_n,c'_1,c'_2,\dots,c'_m)\neq(0,0,\dots,0)\in K^{n+m}$，$\sum_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{x}_i+\sum_{i=1}^{m}c'_i\boldsymbol{x}'_i=\boldsymbol{0}$ であるから，B は一次従属である．
2. 1. の対偶をとる．

□

補題 1.3.10. V: K 上のベクトル空間，$A=\{\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n\}\}$: V の一次独立なベクトル．このとき，$\boldsymbol{x}_i\neq\boldsymbol{0}$ $(i\in\{1,2,\dots,n\})$.

証明 ある $i\in\{1,2,\dots,n\}$ について $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}$ であると仮定する．$c_j=\delta_{ij}$ $(j\in\{1,2,\dots,n\})$ とおくと，$\sum_{j=1}^{n}c_j\boldsymbol{x}_j=c_i\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}$ だが，$(c_1,c_2,\dots,c_n)\neq(0,0,\dots,0)$ なので，$\{\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n\}\}$ が一次独立であることに矛盾する．よって $\boldsymbol{x}_i\neq\boldsymbol{0}$ $(i\in\{1,2,\dots,n\})$ である．□

補題 1.3.11. V: K 上のベクトル空間，$A=\{\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n\}\}$: V の一次独立なベクトル，$B=\{\{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\dots,\boldsymbol{y}_m\}\}$: V を張るベクトル．このとき，ある $1\leq i\leq m$ が存在して，$\{\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\dots,\boldsymbol{y}_{i-1},\boldsymbol{y}_{i+1},\dots,\boldsymbol{y}_m\}\}$ は V を張る．

証明 B は V を張るので，$\exists(c_1,c_2,\dots,c_m)\in K^m\ s.t.\ \boldsymbol{x}_1=\sum_{i=1}^{m}c_i\boldsymbol{y}_i$．ここで，$c_1=c_2=\cdots=c_m=0$ と仮定すると，$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$ となり，補題 1.3.10 に矛盾する．よって，$c_i\neq0$ となる i が存在する．このとき，$\boldsymbol{y}_i=\frac{1}{c_i}\boldsymbol{x}_1-\sum_{j\in\{1,2,\dots,m\}\setminus\{i\}}\frac{c_j}{c_i}\boldsymbol{y}_j$ が成り立つ．

B は V を張るので，任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対し，$\exists(c'_1,c'_2,\dots,c'_m)\in K^m\ s.t.\ \boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{m}c'_j\boldsymbol{y}_j$．よって，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}&=\sum_{j=1}^{m}c'_j\boldsymbol{y}_j\\
&=\sum_{j\in\{1,2,\dots,m\}\setminus\{i\}}c'_j\boldsymbol{y}_j+c'_i\boldsymbol{y}_i\\
&=\sum_{j\in\{1,2,\dots,m\}\setminus\{i\}}c'_j\boldsymbol{y}_j+c'_i\left(\frac{1}{c_i}\boldsymbol{x}_1-\sum_{j\in\{1,2,\dots,m\}\setminus\{i\}}\frac{c_j}{c_i}\boldsymbol{y}_j\right)\\
&=\sum_{j\in\{1,2,\dots,m\}\setminus\{i\}}c'_j\boldsymbol{y}_j-c'_i\sum_{j\in\{1,2,\dots,m\}\setminus\{i\}}\frac{c_j}{c_i}\boldsymbol{y}_j+\frac{c'_i}{c_i}\boldsymbol{x}_1\\
&=\sum_{j\in\{1,2,\dots,m\}\setminus\{i\}}\left(c'_j-c'_i\frac{c_j}{c_i}\right)\boldsymbol{y}_j+\frac{c'_i}{c_i}\boldsymbol{x}_1
\end{aligned}
$$

なので，多重集合 $\{\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\dots,\boldsymbol{y}_{i-1},\boldsymbol{y}_{i+1},\dots,\boldsymbol{y}_m\}\}$ は V を張る．□

定理 1.3.12. V: K 上のベクトル空間，$\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n\}\}$: V を張るベクトル，$\{\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_m\}\}$: V の一次独立なベクトル．このとき，$n \geq m$.

定義 1.3.13. V: 上のベクトル空間，A: V のベクトルの多重集合．A が以下の条件を満たすとき，A は V の**基底**であるという．

1. A は一次独立である．
2. A は V を張る．

定理 1.3.14. V: K 上のベクトル空間，$A = \{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n\}\}, B = \{\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_m\}\}$: V の基底．このとき，$n = m$.

証明 A は V を張り，B は一次独立であるから，定理 1.3.12 より $n \geq m$．同様に，B は V を張り，A は一次独立であるから，定理 1.3.12 より $m \geq n$．ゆえに $n = m$. □

定義 1.3.15. V: ベクトル空間．V に基底が存在するとき，定理 1.3.14 より，V の基底に含まれるベクトルの個数は基底によらない．この個数を V の**次元**といい，$\dim V$ と書く．

定義 1.3.16. V: ベクトル空間．V に基底が存在するとき，V は有限次元であるという．そうでないとき，V は無限次元であるという．

命題 1.3.17. V: ベクトル空間．このとき，以下は同値.

1. V は有限次元である．
2. V のベクトルの多重集合で V を張るものが存在する．

証明

(1. $\Longrightarrow$ 2.)
V は有限次元であるから，V のベクトルの多重集合 $\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n\}\}$ で V の基底であるものが存在する．このとき，$\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n\}\}$ は V を張る．

(2. $\Longrightarrow$ 1.)
$\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n\}\}$ を V のベクトルの多重集合で V を張るものとする．V のベクトルの多重集合 $S_0, S_1, \dots, S_n$ を以下のように定める．

- $S_0 = \emptyset$ とする．
- $i = 1, 2, \dots, n$ に対し，$\boldsymbol{x}_i \in \operatorname{span}\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{i-1}\}\}$ ならば $S_{i+i} = S_i$ とし，そうでないなら S_{i+1} は S_i に $\boldsymbol{x}_i$ を加えたものとする．

S_i は $\operatorname{span}\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_i\}\}$ の基底であることを i に関する帰納法により示す．

- $i = 0$ のときは自明である．
- S_i は $\operatorname{span}\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_i\}\}$ の基底であると仮定する．
  - $\boldsymbol{x}_{i+1} \in \operatorname{span}\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_i\}\}$ のとき，命題 1.3.4 より $\operatorname{span}\{\{\boldsymbol{x}_{i+1}\}\} \subseteq \operatorname{span}\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_i\}\}$ なので，命題 1.3.5, 1.1.12 より $\operatorname{span}\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}\}\} = \operatorname{span}\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_i\}\} + \operatorname{span}\{\{\boldsymbol{x}_{i+1}\}\} = \operatorname{span}\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_i\}\}$．また，$S_{i+1} = S_i$ であるから，S_{i+1} は

$\mathrm{span}\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{i+1}\}\}$ の基底である．

– $\boldsymbol{x}_{i+1} \notin \mathrm{span}\{\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_i\}\}$ のとき，TODO

□

命題 1.3.18. V: 有限次元ベクトル空間，$W \subseteq V$: V の部分空間．このとき，以下が成り立つ．

1. W は有限次元ベクトル空間である．
2. $\dim W \leq \dim V$.
3. $\dim W = 0 \iff W = \{\mathbf{0}\}$.
4. $\dim W = \dim V \iff W = V$.

命題 1.3.19. V: 有限次元ベクトル空間，$W_1, W_2 \subseteq V$: 部分空間．このとき，$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.

1.4 線形写像の表現

命題 1.4.1. V_1, V_2: K 上のベクトル空間，$T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$．このとき，以下が成り立つ．

1. $W \subseteq V_1$: 部分空間に対し，$T(W) = \{T(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in W\} \subseteq V_2$ は V_2 の部分空間.
2. $W \subseteq V_2$: 部分空間に対し，$T^{-1}(W) = \{\boldsymbol{x} \in V_1 \mid T(\boldsymbol{x}) \in W\} \subseteq V_1$ は V_1 の部分空間.

証明

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in T(W)$ とおくと，$\exists \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W : T(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1, T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_2$．このとき，$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \in W$ より $\lambda_1 \boldsymbol{y}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{y}_2 = \lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2) = T(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) \in T(W)$.
2. $\lambda_1, \lambda_2 \in K, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in T^{-1}(W)$ とおくと，$T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2) \in W$ より $T(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2) \in W$ であるから，$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \in T^{-1}(W)$.

□

定義 1.4.2. V_1, V_2: ベクトル空間，$T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.

1. $\mathrm{Ker}\, T := \{\boldsymbol{x} \in V_1 \mid T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\} = T^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ を T の**核**という．
2. $\mathrm{Im}\, T := \{T(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in V_1\} = T(V_1)$ を T の**像**という．

系 1.4.3. V_1, V_2: ベクトル空間，$T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.

1. $\mathrm{Ker}\, T \subseteq V_1$ は V_1 の部分空間.
2. $\mathrm{Im}\, T \subseteq V_2$ は V_2 の部分空間.

証明　命題 1.4.1 から従う． □

1.5 次元定理