

南京航空航天大学

第1页 (共4页)

二〇一八 ~ 二〇一九 学年 第II学期 《高等数学(2)》考试试题

考试日期: 2019年6月22日 试卷类型: A 试卷代号:

		班号			学号			姓名			
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、填空题(每小题3分,共24分):

1. 设函数 $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$, 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{3} \ln 3$.

2. 设 $f(x, y)$ 连续, 交换二次积分的次序: $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$.

3. 设 Σ 是上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, 则曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = \frac{8\pi}{3}$.

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{1}{1 + \sqrt{4}} dS = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2^2$$

4. 设 $\vec{A} = x(1 + x^2 z) \vec{i} + y(1 - x^2 z) \vec{j} + z(1 - x^2 z) \vec{k}$, 则 $\operatorname{div} \vec{A} = 3$.

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (1 + 3x^2 z) + (1 - x^2 z) + (1 - 2x^2 z)$$

5. 函数 $f(x) = \ln(1 + 2x)$ 展开成 x 的幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n} x^n, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

$$[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

6. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 收敛, 则该幂级数在 $x = \frac{3}{2}$ 的敛散性为: 绝对收敛.

7. 已知 $(x+4y)dx + (ax+y^2)dy = 0$ 是全微分方程, 则 $a = 4$.

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+4y) = \frac{\partial}{\partial x}(ax+y^2) \Rightarrow 4 = a$$

二、(6分) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy = e^x - e^y$ 确定的函数, 试计算 $dy|_{x=0}$.

解: 设 $F(x, y) = xy - e^x + e^y$ 则 $F_x = y - e^x, F_y = x + e^y, \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x + e^y}{x - e^x}$

由 $y(0) = 0, \Rightarrow y'(0) = 1; dy|_{x=0} = y'(0)dx = dx$

三、(8分) 设 f 是任意二阶可导函数, 并设 $z = f(ay + x)$, 满足方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$,

试确定 a 的值.

解: $\because \frac{\partial z}{\partial x} = f', \frac{\partial z}{\partial y} = af'; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'', \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = af'', \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 f''$ 由题设有:

$$6f'' + af'' - a^2 f'' = 0 \Rightarrow 6 + a - a^2 = 0 \therefore a = 3, \text{ or } a = -2$$

四、(6分) 计算 $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上点 $(-1, 1)$ 到 $(1, 1)$ 的一段弧.

$$\text{解: } I = \int_{-1}^1 [(x^2 - 2x \cdot x^2) + (x^4 - 2x \cdot x^2) \cdot 2x] dx = 2 \int_0^1 (x^2 - 4x^4) dx = -\frac{14}{15}$$

五、(10分) 判别下列级数的敛散性:

$$(1) (4 \text{ 分}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

$$(2) (6 \text{ 分}) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n^a}, \text{ 若收敛, 指明是条件收敛还是绝对收敛.}$$

解: (1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{3}{e} > 1$ 故由“比值判别法”知原级数发散.

(2) 当 $\alpha \leq 0$ 时, $\frac{1}{n^\alpha} \in [1, \infty), \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$ (振荡无极限) 此时原级数发散;

当 $0 < \alpha \leq 1$ 时, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha} < 1; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \sin \frac{1}{n^\alpha} > \sin \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ 由莱布尼茨定理知此时原级

数收敛. 而由 $\frac{1}{n^\alpha} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n^\alpha} \bigg/ \frac{1}{n^\alpha} = 1$, 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n^\alpha} \right|, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 同敛

散, 而 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散; 故此时原级数条件收敛.

当 $\alpha > 1$ 时, $\frac{1}{n^\alpha} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n^\alpha} \bigg/ \frac{1}{n^\alpha} = 1$ 此时也有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n^\alpha} \right|, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

同敛散, 故当 $\alpha > 1$ 时原级数绝对收敛.

六、(8 分) 将函数 $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

$$\text{解: } a_n = 0 (n = 0, 1, 2, 3, \dots), b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \frac{4\pi}{2k-1}, (k = 1, 2, 3, \dots) \therefore f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$$

七、(10 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的收敛域及和函数, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{2^n}$ 的值.

$$\text{解: } \because R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1, \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(\pm 1)^n \text{ 都发散. 所求收敛域为 } (-1, 1).$$

$$\text{令 } S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)t^{2n}, \int_0^t S(u) du = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+1} = \frac{t}{1-t^2}, s(t) = \left(\frac{t}{1-t^2} \right)' = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = \frac{1+x}{(1-x)^2}, x \in (-1, 1); \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{2^n} = S\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{9}.$$

八、(10 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^3 + z + 1) dy dz + (y^3 + x + 1) dz dx + (z^3 + 1) dx dy$, 其中

Σ 是上半球面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解: 设辅助圆面 $S_0: z = 0, (x, y) \in D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$ 的下侧, 则:

$$I = \iint_{\Sigma+S_0} - \iint_{S_0} = 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz - \iint_{S_0} 1 \cdot dx dy = 3 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^4 \sin \theta dr + \pi = \frac{11\pi}{5}$$

十、(8 分) 设定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$, 对任意 $x, y \in (-\infty, +\infty)$, 满足 $f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x$, 且 $f'(0) = a (a \neq 0)$,

(1) 证明: 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, $f'(x)$ 存在, 并求出函数 $f(x)$;

(2) 将 $f(x)$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数, 并求 $f^{(2007)}(1)$.

$$(1) \text{ 证: } \because f(x+\Delta x) = f(x)e^{\Delta x} + f(\Delta x)e^x, f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$a = f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x}, f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)(e^{\Delta x} - 1) + e^x [f(\Delta x) - f(0)]}{\Delta x} = f(x) + e^x f'(0) \Rightarrow f'(x) = f(x) + ae^x$$

$$\therefore f(x) = axe^x$$

$$(2) \text{ 解: } \because \int_0^x te^t dt = (x-1)e^x = e(x-1)e^{x-1} = e(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^{n+1}$$

$$\therefore f(x) = axe^x = ae \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} (x-1)^n, f^{(n)}(1) = ae \cdot \frac{n+1}{n!} \cdot n! = ae(n+1)$$

$$\text{故 } f^{(2007)}(1) = 2008ae$$

南航本科试卷+QQ



截至2022年1月，已有近3年本科试卷科目(后续会不断更新，具体可咨询)：

试卷科目（依据教务处或课表名称）	科目展示院系版
B:变分原理与有限元	全校热门：高数、线代、概率论、毛概、马原、航概、大物、创业基础、计算方法、理力、材力、电工电子技术、工程图学、数字电路、微机原理、复变函数、理工基础化学
C:测试技术、操作系统、测试信号分析与处理、材料力学、创业基础、冲压工艺学	院系热门(仅部分): (航空) 复合材力、飞行器结构力学、互换性、有限元、工数、控制系统工程、变分原理、塑性力学、流体力学、振动理论
D:电机学、电路、电子线路、电工与电子技术、电力工程、电磁场理论、电气测试技术、电力电子、大物、电离辐射探测学	(能动) 燃烧室、工热、互换性、机械设计、现控、自控、工程流体力学
F:复合材料力学、飞行器结构力学、复变函数	(自动化) 电机学、电路、电力电子、计硬、机械设计基础、模电、现控、自控、测试信号分析、电力工程、电气测试技术、功率变换器、数字信号处理、信号、系统可靠性
G:概率论、高数、工程热力学/基础、工程材料学、工数、工程图学、管理学、功率变换器计算机仿真与设计、工程经济学、工程流体力学	(电信) 电子线路、雷达原理、信号、微波技术、通信原理、电磁场、数据结构、数字信号处理、工程经济学、随机信号分析、数理方程、通信电子线路
H:航概、互换性与技术测量、宏观经济学	(机电) 测试技术、工热、机原、机械制造工艺、工材、互换性、控制系统工程、机床数控技术、冲压工艺学、计算机集成、机械制造技术、工程流体力学、机械设计
J:结构力学及有限元、计算方法、计算机组成原理、计算机硬件技术基础、计量经济学、机械原理、机械设计/基础、机械制造工艺与装备、机床数控技术、金属材料、计算机集成与柔性制造、机械制造技术、检测技术与传感原理	(材料) 金属材料、电离辐射探测学、数理方程
K:控制系统工程	(民航) 机械设计基础、模电、信号、运筹、自控、工程经济学、随机信号分析、民航机载电子设备、数据结构与数据库、工程流体力学、检测技术与传感原理、通信电子线路、项目管理、专业英语
L:理论力学、离散数学、雷达原理、流体力学、理工基础化学	(理) 计组、模电、数据库
M:模拟电子技术、马原、毛概、民航机载电子设备与系统、密码学	(经管) 管理学、计量、应统、运筹、操作系统、数据库、宏经、微经、工程经济学、项目管理、专业英语
R:燃烧室原理	(航天) 结构力学及有限元、电路、工材、机原、数字信号处理、通信原理、自控
S:数字电路/与逻辑设计、数据库原理、数据结构/与数据库、数字信号处理、塑性力学、随机信号分析、数理方程	(计科) 操作系统、工数、离散数学、计组、数据库、数据结构、密码学
T:通信原理、通信电子线路	(长空) 工热、工材、工数、计组、机原、数理方程
W:微机原理与应用/接口技术、微波技术、微观经济学	(国教) 计量、应统、运筹、宏经
X:线代、现代控制理论、信号与系统/线性系统、系统可靠性设计分析技术、项目管理	
Y:有限元、应用统计学、运筹学	
Z:自动控制原理、振动理论、专业英语	

资料使用tips

- (1) 名称相近的课程可能会因专业、年份、教学大纲等的不同在考试范围、题型、内容、难度上等出现细微差异，通常相互间都有借鉴价值，具体需自行判断试卷所考内容与自身所学是否大部分一致；
- (2) 试卷名称的数字是学年的后一年份，如22是指21-22学年，分第一(秋季)学期(9月-次年1月)和第二(春季)学期(2月-7月)，一门课程通常会出2套试卷即AB卷分别用于期末和补缓考，二者在范围、难度及题量上保持一致，由教务处随机抽取；
- (3) 图片形式的试卷可能在清晰度上会有所欠缺或者有少量缺漏，绝大部分基本可以辨认，同时缺漏的分值控制在一定限度；
- (4) 关于答案：大学学习不同于中学那样有浩如烟海的资料且基本配有参考答案，大学许多课程的资料不易获得，即使无答案的资源对复习也有较大参考价值，能帮助把握近年命题方向趋势、题型范围难度。试卷里手写形式的答案大多为人工制作，仅供参考，可能会存在某些题目答案正确性有待商榷的情况，欢迎能提供答案或者更正的同学予以分享；
- (5) 教材、课程设计、PPT、非试卷类复习资料、练习册或教材习题答案、网课或英语代做、四六级真题、研究生课程试卷、初复试专业课真题等均不是业务范围；
- (6) 试卷均来自同学分享，除为便利同学使用进行必要的整理外，不对试卷本身做其他操作，有问题可以协商处理，欢迎有近3年试卷资源的予以分享

守住及格底线，努力争取高分！
祝您考试顺利，取得理想成绩！