

南京航空航天大学

第1页 (共6页)

二〇一六 ~ 二〇一七 学年 第一学期 《高等数学 I (1)》 考试试题

考试日期: 2017 年 月 日 试卷类型: B 试卷代号:

	班号	学号	姓名						
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一. 填空题 (每题 3 分):

本题分数	18
得 分	

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^{2x-1} =$ _____。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导, 且极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2-4} = 2$, 则 $f'(2) =$ _____。

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} (1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}) =$ _____。

4. 已知函数 $f(x)$ 连续, 广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 并且有 $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} \int_1^{+\infty} f(x)dx$ 则 $f(x) =$ _____。

5. 函数 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 的麦克劳林展开式是 _____。

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \cos x - 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, 记 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数是 $S(x)$, 则

$S(3\pi) =$ _____。

二. 选择题 (每题 3 分):

本题分数	6
得 分	

1. 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 为其原函数, 下列选项正确的是 ()

- (A) 若 $f(x)$ 是周期函数, 则 $F(x)$ 也是周期函数;
- (B) 若 $f(x)$ 是单调函数, 则 $F(x)$ 也是单调函数;
- (C) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $F(x)$ 是偶函数;
- (D) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $F(x)$ 是奇函数;

2. 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$, $g(x) = x^3 + x^4$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ()
 (A) 等价无穷小; (B) 同阶但非等价无穷小; (C) 高阶无穷小; (D) 低阶无穷小。

本题分数	36
得 分	

三. 计算题 (每题 6 分):

1. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$,

$f''(0) = e$, 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - e^x}{x^2}$;

2. 设 $\begin{cases} x = t + \arctan t \\ y + t \sin y = t^3 + 1 \end{cases}$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$;

3. $\int \frac{5-x}{\sqrt{1+x^2}} dx$;

4. $\int \max\{x+2, x^2\}dx;$

5. $\int_0^{\pi} x\sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x}dx;$

6. 设 $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+\sin^2 t} dt$, 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx$ 。

本题分数	8
得 分	

四. 已知 $f(x)$ 是连续函数, $\int_0^x tf(x-t)dt = 1 - \cos x$, 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ 。

本题分数	10
得 分	

五. 设直线 $y = kx (k \geq 1)$ 与曲线 $y = \sqrt{x}$ 所围成的平面图形为 D_1 , 它们与直线 $x = 1$ 所围成的平面图形为 D_2 。(1) 确定 k 的值, 使得 D_1 与 D_2 分别绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V_1 与 V_2 之和最小, 并求出最小值; (2) 求该最小值所对应的平面图形的面积 $D_1 + D_2$ 。

本题分数	8
得 分	

六. 判断下列级数的敛散性. 若收敛, 指出是条件收敛还是绝对收敛:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^2}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+1}.$$

本题分数	8
得 分	

七. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的收敛域及和函数。

本题分数	6
得 分	

八. 在原点的某个领域内，
函数 $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ，其中系数满足

$$a_0=a_1=1, a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n=0,1,2\cdots),$$
判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{f^{(n)}(0)}$

的敛散性，并证明。