

微分方程数值解 上机作业 1

凌子恒

信息与计算科学 3200102551

2023 年 3 月 26 日

0.1 原理分析

利用有限差分法求解二维 Poisson 方程。

设点 (ih, jh) 处点值为 $u_{i,j}$ 。

对于 regular point (ih, jh) , 以 $-\frac{4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h^2}$ 作为 Δu 估计。

对于 irregular point (ih, jh) , 分别计算 x, y 上二阶导。以 x 方向上有非规则边界 $((i + \theta)h, jh)$ 为例, 设其点值为 u' , 以 $\frac{2((1 + \theta)u_{i,j} - u' - \theta u_{i-1,j})}{\theta(1 + \theta)h^2}$ 作为二阶导估计。其余情况可类似处理。

对于边值 $(ih, 0)$ 处的一阶导, 以 $\frac{3u_{i,0} - 2u_{i,1} + u_{i,2}}{2}$ 近似。其余边值也同理。

0.2 代码解释

定义 solution 类存放结果。

solution 类有两个构造函数, 分别对应 $(0, 1)^2$ 和 $(0, 1)^2 - D$ 。

两个构造函数的前三个参数均为: Poisson 方程等式右侧函数 f , 边值函数, 以及格点段数。

其中边值函数期待返回类型为 `pair<int,double>`, 其中第一项为 1 表示给出的是边界处的一阶导, 为 0 表示给出的是边值。所有一阶导均给出垂直边界的方向导数, 其中方向向内。

对于第二个构造函数, 还需要按顺序给出 D 的圆心 x, y 坐标及半径。

构造完成后, 可以调用 `operator()` 求出某个点的估计函数值。对于不规则区域, 可以调用 `is_domain()` 函数得到需要求值的点是否在定义域内。

利用定义了的 `norm` 函数可以计算出范数。

0.3 具体例子 (题 2)

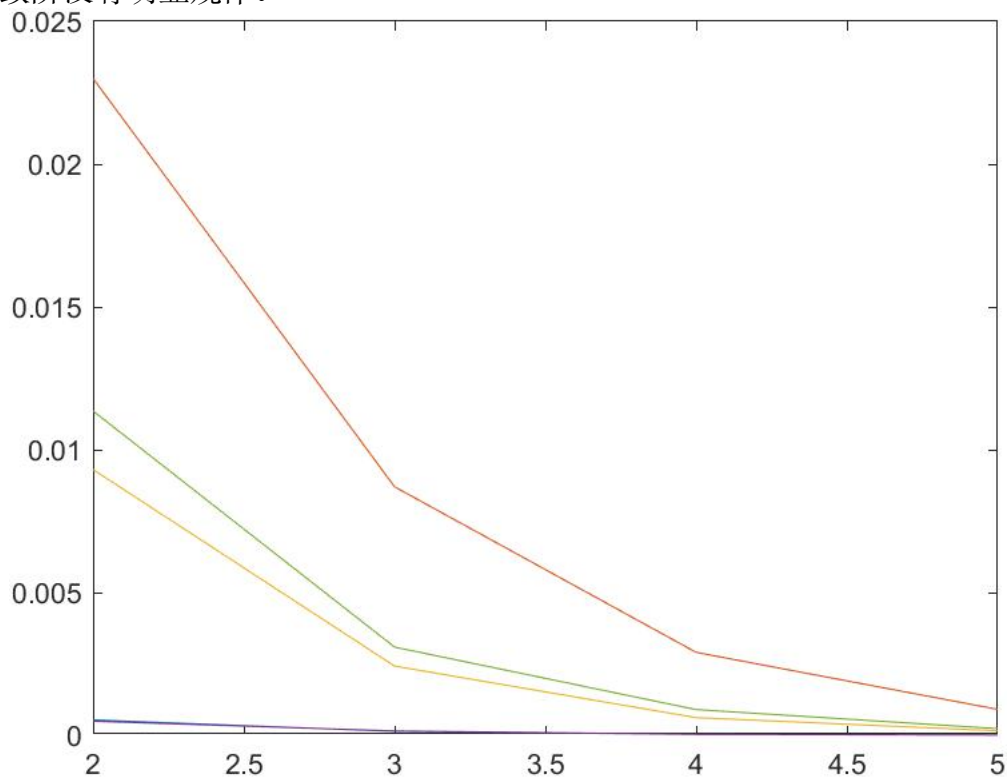
$$u = e^{y+\sin x} \Rightarrow \begin{cases} u_x = (\cos x)e^{y+\sin x} \\ u_y = e^{y+\sin x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} = (\cos^2 x)e^{y+\sin x} - (\sin x)e^{y+\sin x} = e^{y+\sin x}(1 - \sin x - \sin^2 x) \\ u_{yy} = e^{y+\sin x} \\ u_x + u_y = (1 + \cos x)e^{y+\sin x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f = -u_{xx} - u_{yy} = (\sin x + 2)(\sin x - 1)e^{y+\sin x}$$

误差计算结果输出至 `Dirichlet.out` 等文件中。

对于规则区域，可以发现，Dirichlet 边值以及混合边值的 ∞ 范数收敛阶均为 2，2 范数收敛阶为 1。Neumann 边值的收敛阶无法确定，可能由于实现有漏洞等原因。

对于不规则区域，收敛阶没有明显规律。



∞ 范数误差如下图：

画图代码见 m1.m。

另一例子的函数见注释，输出结果见 Dirichlet2.out 等文件。

0.4 参考内容

调用了 <https://github.com/MikeMirzayanov/testlib> 的 testlib 库。