

# 微分方程数值解 项目作业 4

凌子恒

信息与计算科学 3200102551

2023 年 6 月 18 日

## 理论分析

### 热方程

由  $h = \frac{1}{20}$  及定义域为  $[0, 1]$  知  $x$  方向上分成 21 个点。

$$\begin{cases} r = \frac{k\nu}{h^2} \\ h = \frac{1}{20} \\ \nu = 1 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{h^2}{\nu} r = \frac{r}{100}。$$

尝试运用  $s$ -stage RK method:

$$\begin{cases} y^i = f(U^n + k \sum_{l=1}^s a_{i,l} y^l, t_n + c_i k) \\ U^{n+1} = U^n + k \sum_{l=1}^s b_l y^l \\ f(u, t) = u_t = \nu u_{xx} = \frac{\nu}{h^2} (u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y_j^i = \frac{\nu}{h^2} (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n + k \sum_{l=1}^s a_{i,l} (y_{j+1}^l - 2y_j^l + y_{j-1}^l)) \\ U_j^{n+1} = U_j^n + k \sum_{l=1}^s b_l y_j^l \end{cases}。$$

Gauss 消元法解得  $y$ ，代入即可。

### 平流方程

欲求解  $([x_l, x_r], T)$  的解，需要在更大的区间上取点，以保证所有贡献都被计算。

以 Lax-Friedrichs 为例，考虑转移方程， $T$  每变化  $k$  时  $x$  至多变化  $h$ ，故需在包含  $[x_l - \frac{T}{k}h, x_r + \frac{T}{k}h]$  的区间上取点。其余方法同理。

## 实现思路

各方法的实现基于：

- solution.h 中的 solution 类存放结果，其支持 operator()(x,t) 查询  $(x, t)$  处拟合值。
- linear.h 中的两个线性方程组求解方法，分别是三对角矩阵和一般矩阵的求解。

## 热方程

热方程的全部方法实现在 `heat.h` 中。

Crank-Nicolson, BTCS, FTCS 方法名称分别为 CN, BTCS, FTCS, 均基于同一个基类 `theta_method`, 即对于 (12.22) 的实现, 再具体代入三种  $\theta$ 。

Example 11.258 和 Example 11.227 方法名称分别为 RKM2, GLRKM1, 均基于同一个基类 RKM, 其实现了一般的  $s$ -stage RK method 在热方程中的应用。

## 平流方程

平流方程的全部方法实现在 `advection.h` 中。

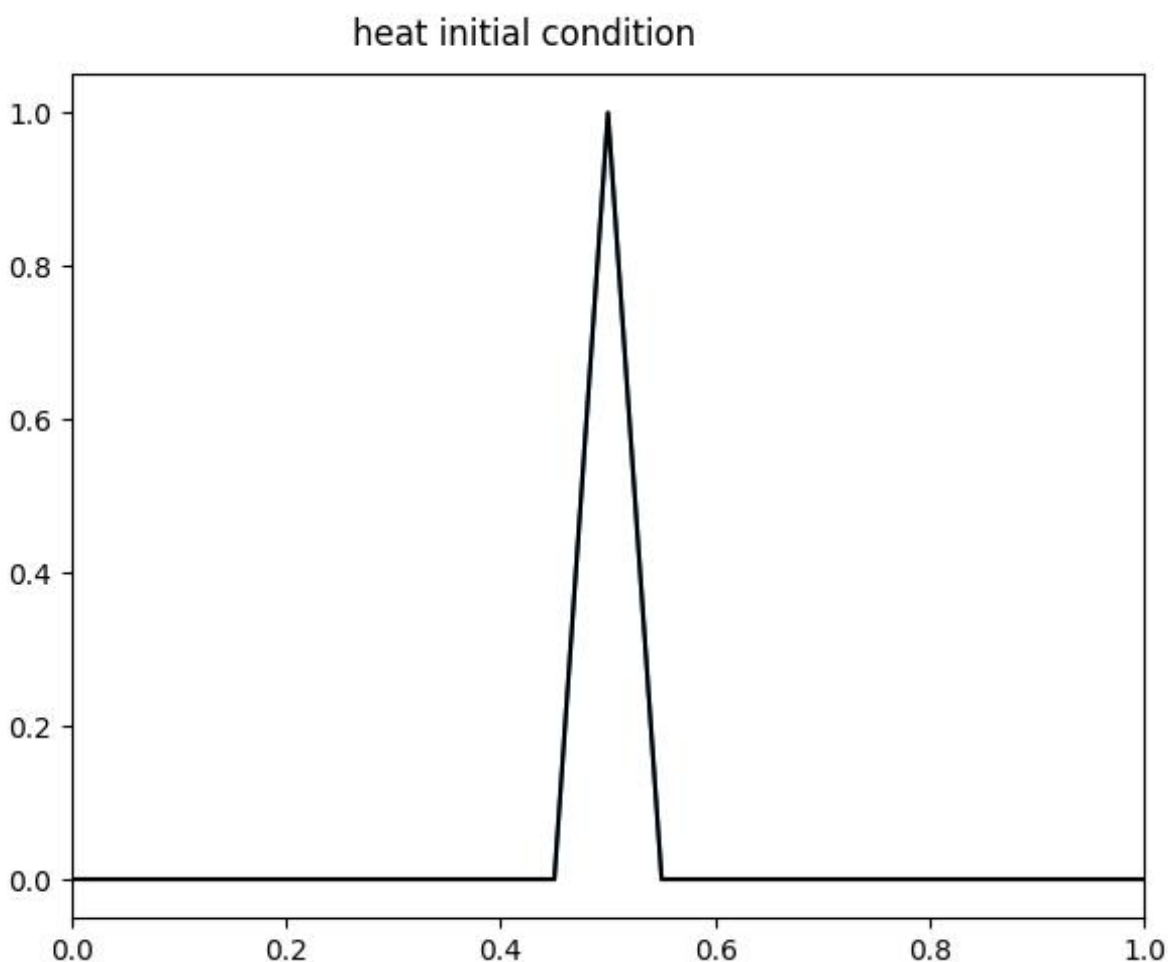
Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, upwind, Beam-Warming 方法名称分别为 LF, LW, upwind, BW, 均基于同一个基类 `advection`, 其实现了所有只与上一层有关的、转移矩阵为循环矩阵的方法。

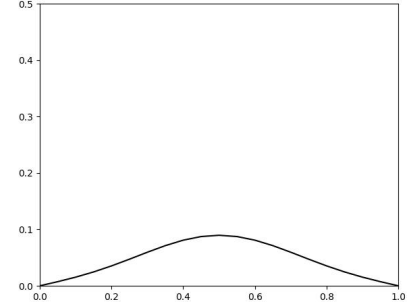
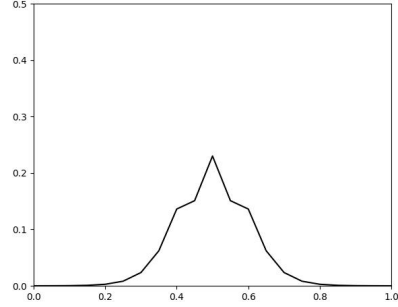
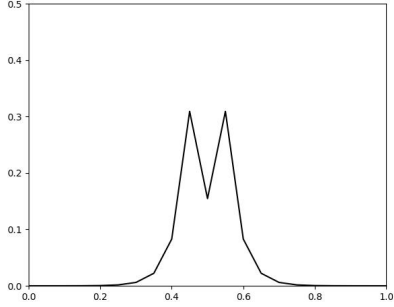
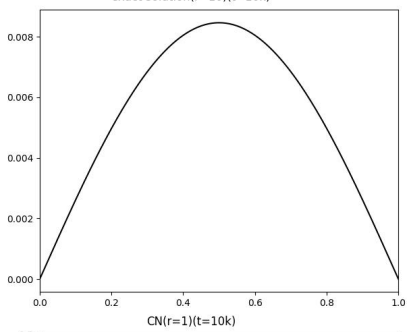
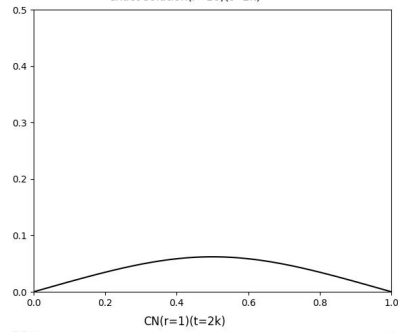
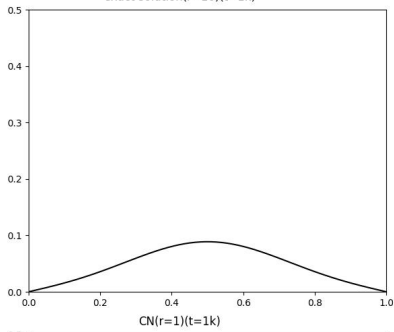
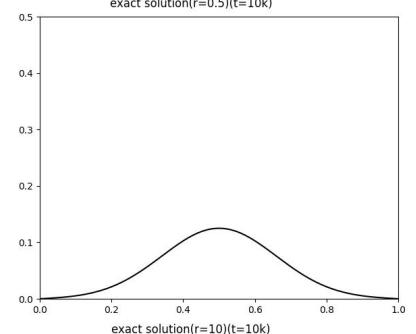
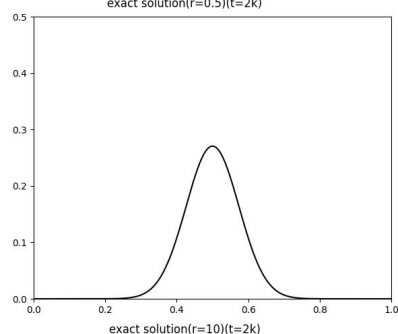
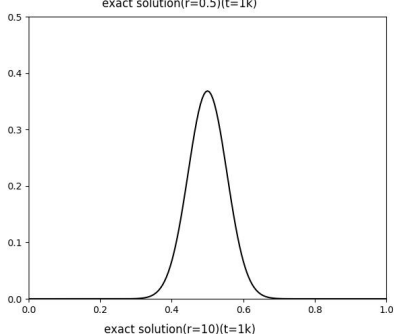
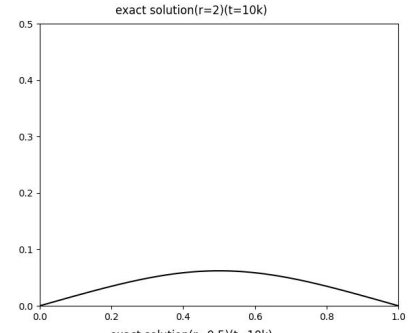
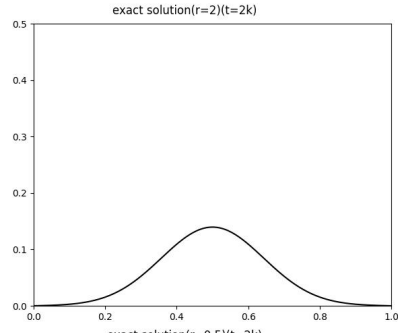
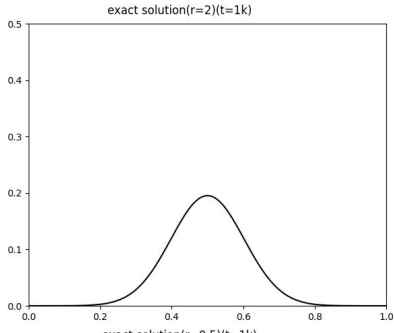
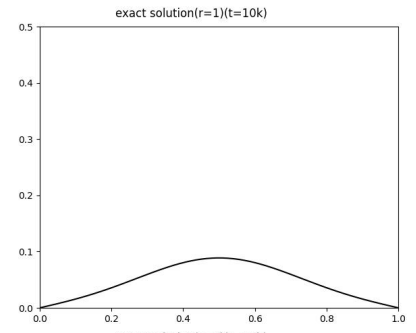
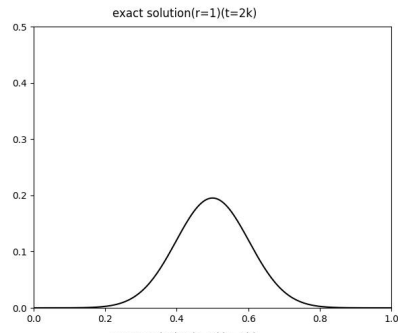
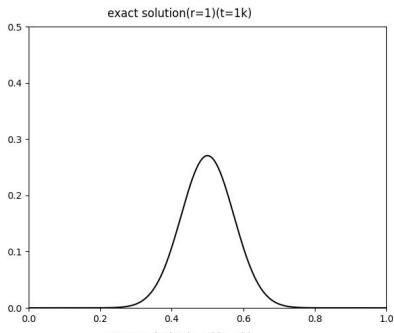
leapfrog 方法名称为 `leapfrog`, 由于其需要之前两层的结果, 故单独实现。其第二层的结果使用与 Lax-Friedrichs 一样的方程。

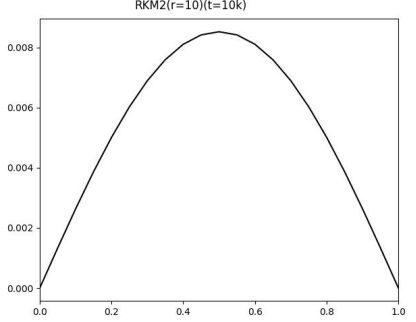
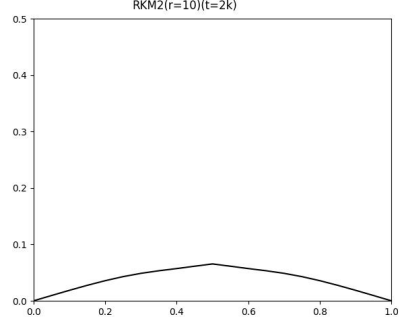
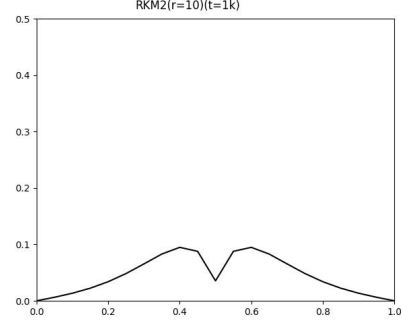
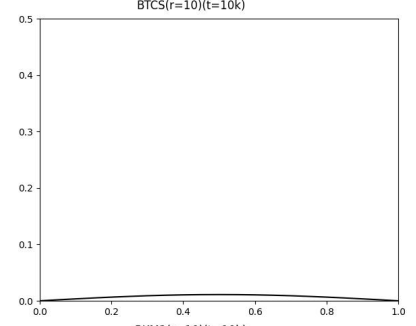
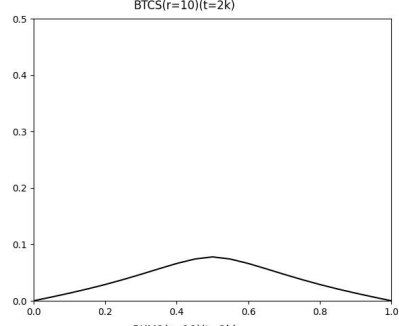
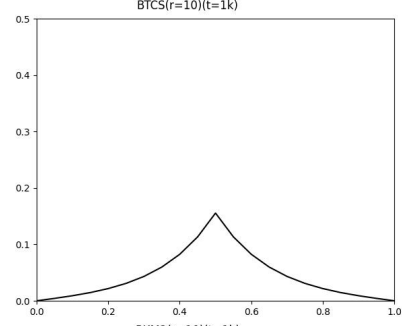
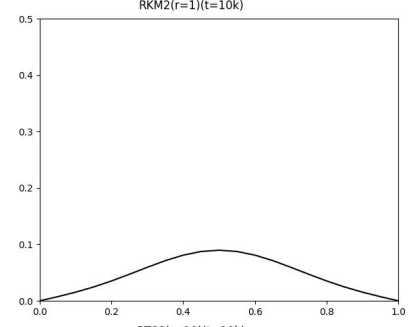
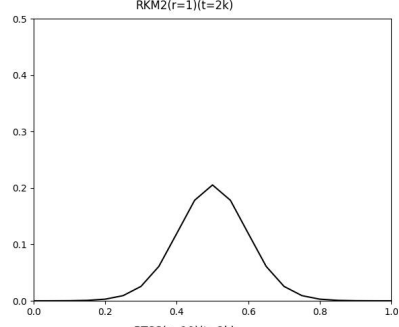
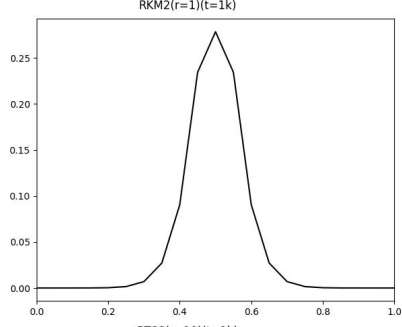
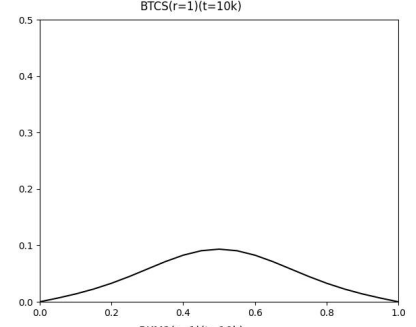
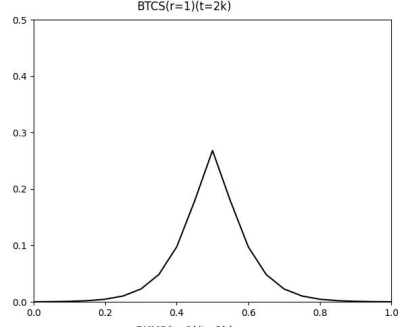
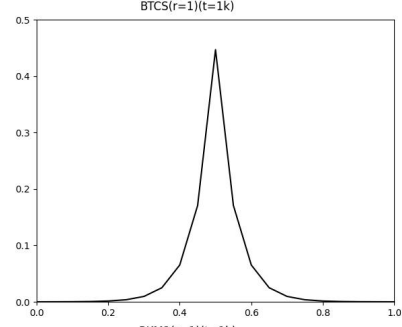
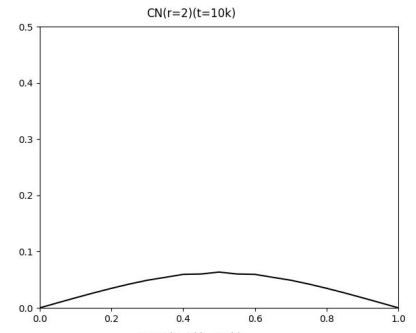
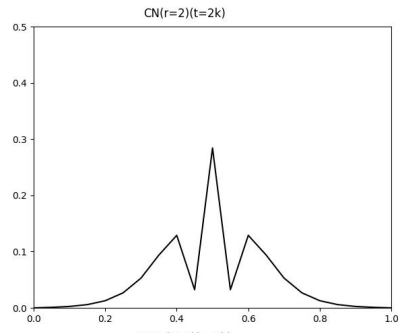
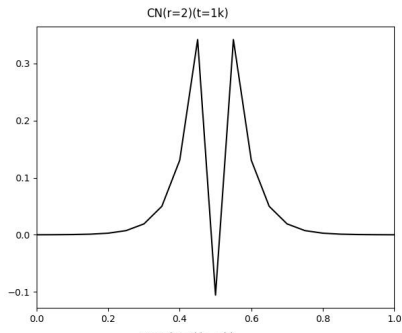
## 实验结果和结论分析

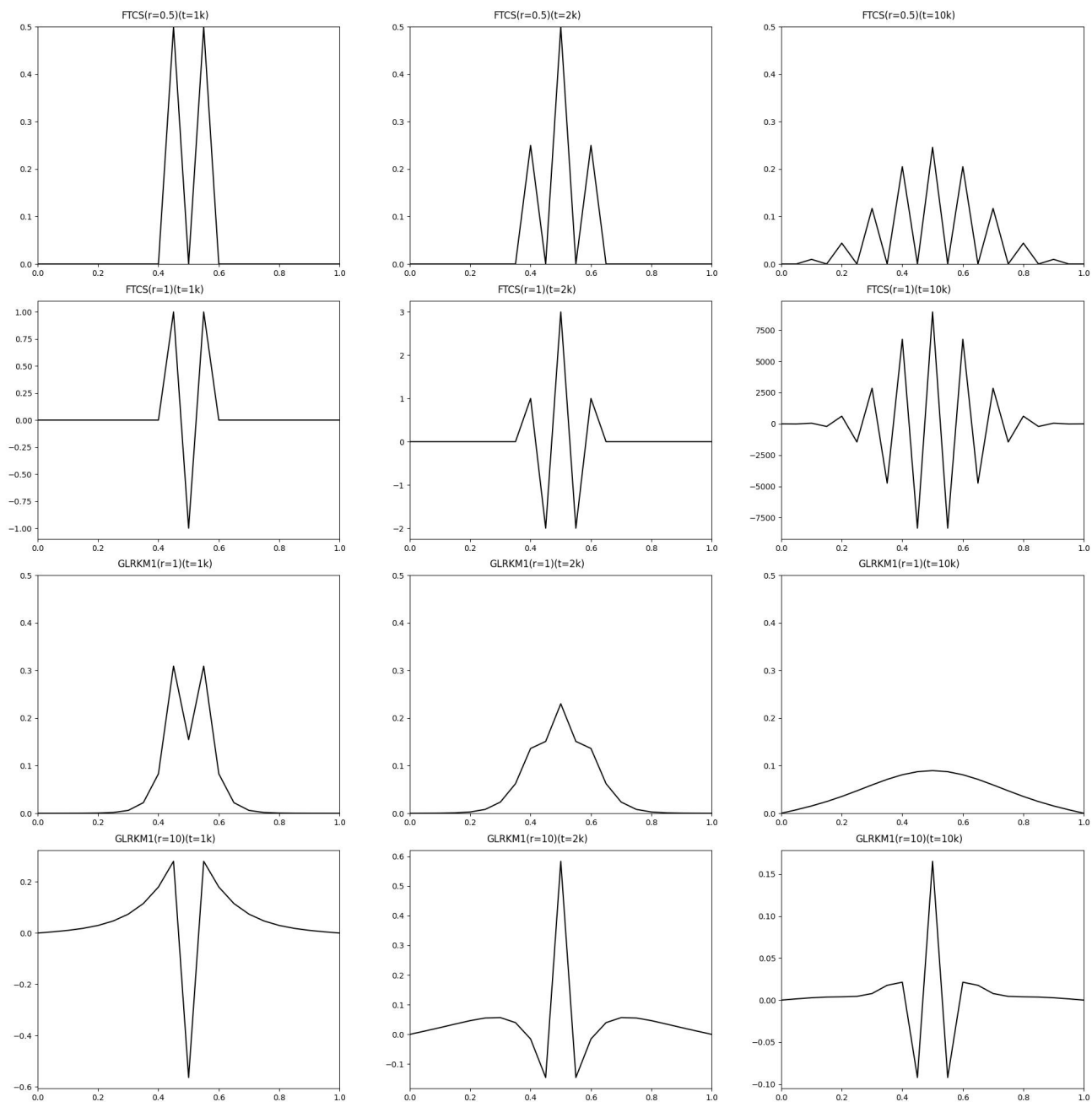
### 热方程

图如下:









从图像可以看出，Crank-Nicolson 方法 ( $r = 2, t = 1k$ )，FTCS 方法 ( $r = 1$ )，1-stage Gauss-Legendre RK 方法 ( $r = 10$ ) 的解都违反了极值原理。

各方法中，对于  $r = 1$ ，Example 11.258 的拟合效果较好。

对于  $r = 10$ ，各方法的表现都很差。

## 平流方程

