$\mathbb{TFJM}^2$

PROBLÈMES DU 5ÈME TOURNOI FRANÇAIS DES JEUNES MATHÉMATICIENNES ET MATHÉMATICIENS

VERSION NATIONALE (1.2)

Préambule

Ces problèmes sont difficiles et sont proposés par des chercheurs et étudiants en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète et sont accessibles à des lycéens, c'est-à-dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des candidats qu'ils résolvent entièrement un problème, mais qu'ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

Table des matières

Mots-clés : 1. jeux — 2. arithmétique — 3. géométrie — 4. combinatoire — 5. géométrie, systèmes dynamiques — 6. analyse — 7. algèbre linéaire, combinatoire — 8. probabilités.

Notations

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	ensemble des entiers positifs
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$	ensembles des nombres entiers et rationnels
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$	droite réelle, plan, espace
$\lvert E \rvert$	cardinal de l'ensemble E (nombre d'éléments dans l'ensemble E, si E est fini)
E^n	ensemble des n-uplets sur l'ensemble E
PGCD $(x_1, \ldots, x_n)$	plus grand diviseur commun des entiers $x_1, \ldots, x_n$
$[a, b]$, $]a, b[$	intervalle fermé et ouvert de $\mathbb{R}$

Date: 9 avril 2015.

1. Les gang stars

Chicago, 1930. Deux bandits, Al Capone et Bugs Moran, se lancent dans un concours de braquage de banques. La ville peut se représenter comme un rectangle de $n \times m$ cases figurant les quartiers. Il y a exactement une banque dans chaque quartier de la ville et chaque banque stocke un million de dollars (M$). Al commence en braquant une banque, puis Bugs fait de même. Ensuite, chacun attaque une banque dans un quartier voisin d'une banque qu'il a déjà dévalisée. Deux quartiers sont dits *voisins* lorsque les cases qui les représentent ont un côté en commun. Bien sûr, une banque déjà attaquée n'est plus bonne à braquer. Lorsqu'un joueur ne peut plus jouer alors que c'est son tour et qu'il reste au moins une banque non attaquée, son adversaire braque toutes les banques restantes. Le vainqueur est celui qui compte le plus de casses à son actif.

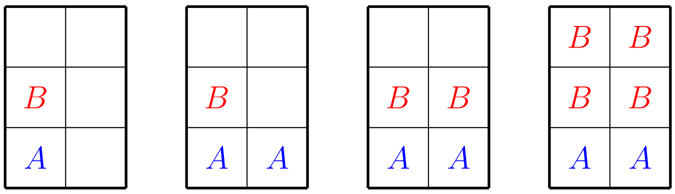


FIGURE 1. Un exemple avec $m = 2$ et $n = 3$.
Ici, Bugs gagne avec un avantage final de 2 M$.

1. On fixe une valeur de (m, n). Al choisit sa banque de départ, puis Bugs fait de même, puis Al et Bugs jouent chacun leur tour. Existe-t-il une stratégie gagnante [1] pour un joueur ? Si oui, pour quel joueur et laquelle ?

2. On dit qu'un joueur dispose d'un *avantage final* de d M$ lorsqu'il peut s'assurer d'avoir d M$ de plus que son adversaire, quelle que soit la manière dont il joue, mais que son adversaire peut l'empêcher d'avoir $(d + 1)$ M$ de plus que lui. Étudier l'avantage final de chaque joueur.

3. Dans cette question uniquement, on suppose que les banques de départ sont fixées à l'avance. Reprendre alors les questions 1 et 2.

4. Maintenant on ne suppose plus que les quartiers de la ville sont carrés. Al et Bugs ne jouent donc plus sur une grille, mais sur une carte *quelconque* (que l'on pourra représenter par un graphe planaire [2] non orienté).

a) Déterminer tous les $t \in [0, 1]$ tels qu'il existe un graphe pour lequel A peut s'assurer de braquer au moins une proportion t des banques.

b) Même question pour B. En particulier, existe-t-il un graphe pour lequel B a une stratégie gagnante ?

5. Un siècle plus tard, les descendants respectifs d'Al et Bugs, Alice et Bob, reprennent le jeu de leurs prédécesseurs. Mais en 2030, des quartiers pas voisins géographiquement le sont maintenant grâce aux modernes réseaux de transport public. Le graphe représentant les quartiers de la ville n'est donc plus forcément planaire. Reprendre la question 4 dans ce cadre.

6. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

1. Un joueur a une stratégie gagnante s'il existe un procédé lui permettant de gagner la partie, **quels que soient** les mouvements de son adversaire.
2. Un graphe est planaire s'il peut être dessiné sur le plan sans que deux arêtes ne s'intersectent. Pour la définition d'un graphe, voir sur Wikipédia.

2. Un problème de PGCD

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, fixé dans tout l'exercice. Si $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ sont des entiers, on note $d(a_1, ..., a_k)$ le PGCD de tous les nombres de la forme $n(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_k)$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, $d(a_1, ..., a_k)$ est le plus grand entier positif tel que pour tout n, $d(a_1, ..., a_k)$ divise $n(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_k)$.

1. Calculer $d(a_1, \dots, a_k)$ dans les cas suivants :

a) $a_i = bi$ avec $b \in \mathbb{N}$;

b) $a_i = i^r$ avec $r \in \mathbb{N}^*$;

c) $a_i = p_i$ où p_i est le i-ème nombre premier.

2. Montrer que pour tous $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, $d(a_1, ..., a_k) \leqslant d(1, 2, \dots, k)$.

3. Déterminer toutes les valeurs possibles de $d(a_1, \dots, a_k)$ avec $0 < a_1 < \cdots < a_k$.

4. On dira que le k-uplet $(a_1, \dots a_k)$ est *maximal* s'il y a égalité dans la question 2. Donner des exemples de k-uplets maximaux. Donner des conditions nécessaires et/ou suffisantes sur un k-uplet pour qu'il soit maximal.

5. Déterminer ou encadrer le plus grand entier ℓ avec la propriété suivante : si $(a_1, \dots, a_k)$ est maximal avec $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < \ell$, alors $a_i = i$ pour tout i.

6. Étudier les questions précédentes en remplaçant $\pi(n) = n(n+a_1)\dots(n+a_k)$ par les expressions :

a) $n + (n+a_1) + (n+a_2) + \cdots + (n+a_k)$;

b) $n^2 + (n+a_1)^2 + (n+a_2)^2 + \cdots + (n+a_k)^2$;

c) $\frac{\pi(n)}{n} + \frac{\pi(n)}{n+a_1} + \frac{\pi(n)}{n+a_2} + \cdots + \frac{\pi(n)}{n+a_k}$.

7. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

3. Souriez, vous êtes filmés !

On se fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\theta \in [0, \pi]$. On considère n points distincts fixés $A_1, \dots, A_n$ dans le plan. Sur chacun de ces points se trouve une caméra. Une caméra est capable de surveiller un faisceau d'angle θ, orienté dans la direction que l'on veut. Autrement dit, on peut choisir n demi-droites $[d_1), \dots, [d_n)$ telles que pour tout i, l'origine de $[d_i)$ est A_i. Un point B sera alors surveillé par la i-ème caméra si et seulement si l'angle formé en A_i par les demi-droites $[d_i)$ et $[A_iB)$ vaut au plus $\frac{\theta}{2}$ (voir figure 2).

Notons que les caméras sont "transparentes" : une caméra peut surveiller un point même si une autre caméra est interposée entre eux. Par ailleurs, on considérera qu'une caméra est capable de surveiller le point où elle se trouve. Par exemple, sur la figure 2 (avec $n = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$), la partie surveillée est en vert :

1. Chercher tous les couples (n, θ) tels que, quelles que soient les positions des caméras, on peut toujours les orienter de manière à ce que tout le plan soit surveillé, dans les cas suivants :

a) les n caméras sont les sommets d'un polygone régulier ;

b) les n caméras sont alignées.

2. On s'intéresse maintenant à des caméras placées de façon arbitraire. Étudier la situation :

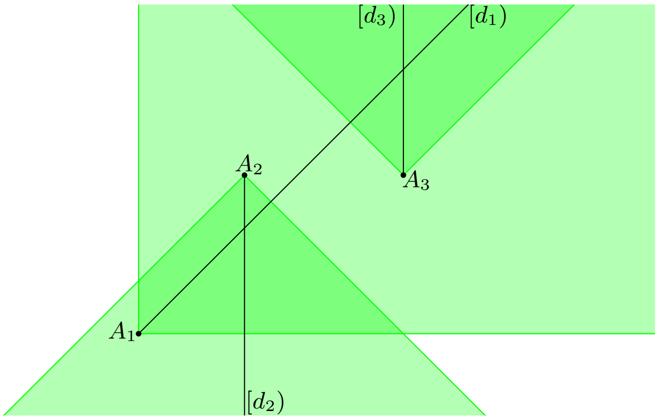


FIGURE 2. Un exemple avec $n = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. La partie surveillée est en vert.

a) lorsqu'on n'exige pas que tout le plan soit surveillé, mais seulement que l'ensemble des points non surveillés soit *borné*, c'est-à-dire qu'il existe un disque assez grand le contenant ;

b) dans le cas général.

3. On suppose maintenant (et seulement dans cette question) que les caméras ne sont plus transparentes. Elles sont assimilées à un point, qui peut cacher certaines zones aux autres caméras, comme sur la figure 3. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre.

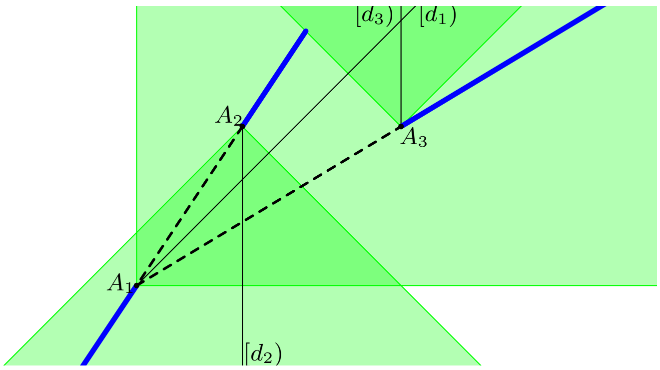


FIGURE 3. Le même exemple, mais pour la question 3.
Les segments et demi-droites en bleu ne sont pas surveillés.

4. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

4. POIGNÉES DE MAIN

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n > 1$ et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. On considère n personnes ayant k bras qui se sont donné rendez-vous. Ces personnes sont immobiles et ont des bras infiniment extensibles. Elles sont placées dans un plan de telle sorte que 3 d'entre elles ne sont jamais alignées. Afin de se saluer, ces personnes décident de se serrer la main en respectant les règles suivantes :
- Par respect pour la tradition, deux poignées de main ne peuvent pas se croiser.
- Chaque personne peut serrer la main à au plus k autres (il n'y a pas de limitation si $k = +\infty$).
- Lorsque deux personnes se serrent la main, leurs bras sont rectilignes et alignés.

Un ensemble de poignées de main vérifiant ces conditions est appelé *situation*. On note E l'ensemble des points représentant les individus dans le plan. Une *configuration de E à k bras* est une suite de situations au cours de laquelle chaque individu de E a serré la main à tous les autres. Le nombre de situations de cette configuration est appelée sa *longueur*. On note $L_k(E)$ la longueur minimale d'une configuration de E à k bras.

(a) (b)

FIGURE 4. Ici, $n = 4$, $k = 2$ et E est constitué des sommets d'un carré.
(a) n'est pas une situation car elle ne respecte pas la première condition.
(b) n'est pas une situation car elle ne respecte pas la seconde condition.

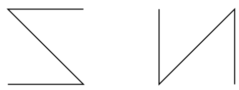


FIGURE 5. Une configuration de longueur 2.
On remarque qu'elle est de longueur minimale et donc $L_2(E) = 2$.

1. E est un n-gone régulier. Calculer $L_k(E)$.

2. On fixe n et k et on fait varier E parmi les ensembles de n points dont trois points quelconques sont non alignés.

Trouver ou encadrer $\max_E L_k(E)$ et $\min_E L_k(E)$.

3. On a désormais 2 groupes de personnes, A de cardinal a et B de cardinal b, se faisant face : les personnes de A sont toutes alignées sur une droite (d_A) et celles de B sur une droite (d_B) parallèle à (d_A). Les personnes d'un même groupe se connaissent déjà, donc chaque personne doit seulement saluer toutes celles de l'autre groupe. Calculer $L_k(A, B)$.

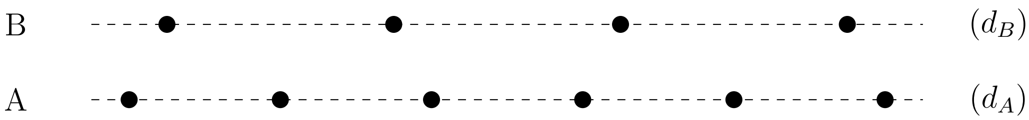


FIGURE 6. Un exemple pour la question 3, avec $a = 6$ et $b = 4$.

4. Reprendre la question 2 en supposant qu'avant chaque situation (y compris la première), tous les individus ont le droit de se déplacer. On supposera qu'à chaque situation, 3 personnes ne sont pas alignées.

5. Même chose, mais en supposant qu'à chaque étape, un unique individu a le droit de se déplacer (ce n'est pas forcément le même à chaque étape).

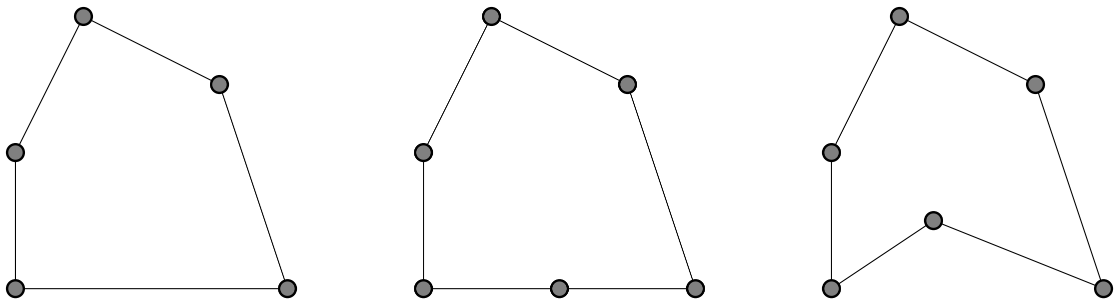
6. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

5. Le fils du polygone

Soit $n \geqslant 3$ un entier et $\mathscr{P} = A_1A_2\dots A_n$ un polygone convexe. Par *polygone convexe*, on entendra un polygone qui n'a pas d'angle rentrant. Il peut avoir 3 sommets alignés ou plus, mais tous les sommets ne sont pas alignés et deux sommets ne sont jamais confondus. On définit aussi un *polygone strictement convexe* comme un polygone convexe n'ayant pas 3 sommets alignés. On utilisera dans tout le problème la convention $A_{n+1} = A_1$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note B_i le point sur le bord de $\mathscr{P}$ tel que la droite (A_iB_i) coupe $\mathscr{P}$ en deux polygones de même aire. Le polygone $B_1B_2\dots B_n$ est appelé *fils du polygone* $\mathscr{P}$ et est noté $f(\mathscr{P})$.



$(\mathscr{P}_1)$ $(\mathscr{P}_2)$ $(\mathscr{P}_3)$

Figure 7. Un pentagone strictement convexe $(\mathscr{P}_1)$, un hexagone convexe $(\mathscr{P}_2)$ et un hexagone non-convexe $(\mathscr{P}_3)$. $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux polygones différents.

Dans toutes les questions du problème, on pourra traiter le cas des polygones convexes, puis celui des polygones strictement convexes.

1. On note $k(\mathscr{P})$ le nombre de côtés $[A_jA_{j+1}]$ de $\mathscr{P}$ qui contiennent au moins un des B_i. À n fixé, quelles sont les valeurs minimales et maximales que peut prendre $k(\mathscr{P})$? Et si on demande qu'aucun B_i ne soit égal à un A_j ?

2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $g_i(\mathscr{P})$ le nombre de sommets de $f(\mathscr{P})$ qui sont sur $[A_iA_{i+1}]$. La suite finie $\big(g_1(\mathscr{P}), g_2(\mathscr{P}), \dots, g_n(\mathscr{P})\big)$ est appelée *g-suite* de $\mathscr{P}$. Quelles sont toutes les g-suites possibles de polygones à n sommets ? On pourra commencer par étudier le cas où aucun B_i n'est égal à un A_j.

3. On fixe n. On note $\mathscr{A}(\mathscr{P})$ l'aire d'un n-gone $\mathscr{P}$. Déterminer les valeurs maximale et minimale du rapport $\frac{\mathscr{A}(f(\mathscr{P}))}{\mathscr{A}(\mathscr{P})}$.

4. Est-ce-que tous les polygones à n côtés sont le fils d'un polygone à n côtés ? Si oui, étant donné $\mathscr{P}$, comment construire un polygone dont le fils est $\mathscr{P}$? Si non, quels sont les polygones qui sont le fils d'un autre polygone ?

5. Étudier les polygones $\mathscr{P}$ tels que $f(\mathscr{P}) = \mathscr{P}$.

6. On définit par récurrence $f^i(\mathscr{P})$, le *i-ième descendant de* $\mathscr{P}$, de la manière suivante :

— $f^0(\mathscr{P}) = \mathscr{P}$.

— Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f^{i+1}(\mathscr{P}) = f(f^i(\mathscr{P}))$.

Le *descendant limite* de $\mathscr{P}$, noté $\ell(\mathscr{P})$, est l'ensemble des points qui sont à l'intérieur de tous les $f^i(\mathscr{P})$ (on considère que l'intérieur d'un polygone contient ses côtés).

Est-il vrai que $\ell(\mathscr{P})$ est toujours l'intérieur d'un polygone ? Quelles formes peut-il prendre ? Et si l'on suppose en plus que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, le polygone $f^i(\mathscr{P})$ est strictement convexe ?

7. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

6. Une suite récurrente

Soit A un sous-ensemble de $[0,1]$. On se donne $u_0 \in [0,1]$ et on définit une suite (u_n) par récurrence de la manière suivante : u_{n+1} est la proportion des termes de u_0 à u_n qui se trouvent dans A. Autrement dit :

$$u_{n+1} = \frac{\left|\left\{i \in \{0,1,\dots,n\} \mid u_i \in A\right\}\right|}{n+1}$$

1. La suite (u_n) converge-t-elle ? On pourra étudier les cas suivants :

a) $A = [0,a]$ avec $a \in [0,1]$.

b) $A = [a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup \dots \cup [a_k,b_k]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant a_1 < b_1 < \dots < a_k < b_k \leqslant 1$.

c) A est *ouvert*, c'est-à-dire que pour tout x dans A, il existe a et b dans $[0,1]$ tels que $a < x < b$ et $]a,b[\subset A$ (attention : un ouvert n'est pas forcément un intervalle ouvert !).

d) A quelconque.

2. On note $\ell_A(u_0)$ la valeur de la limite de (u_n) quand elle existe et $\mathscr{L}_0(A)$ l'ensemble de toutes ces valeurs. Déterminer $\mathscr{L}_0(A)$ dans les différents cas de la question 1.

3. On suppose maintenant qu'on choisit librement les deux premiers termes u_0 et u_1, et que la relation de récurrence est valable pour $n \geqslant 2$.

a) Les résultats de la question 1 sont-ils toujours valables ?

b) On note $\mathscr{L}_1(A)$ l'ensemble des valeurs possibles de la limite de (u_n) quand elle existe. Quels sont les ensembles B pour lesquels il existe A tel que $\mathscr{L}_1(A) = B$?

4. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note de même $\mathscr{L}_N(A)$ lorsqu'on fixe les valeurs de $u_0, u_1, \dots, u_N$. On définit $\mathscr{L}_\infty(A)$ la réunion des $\mathscr{L}_N(A)$, $N \in \mathbb{N}^*$. Quels sont les ensembles B pour lesquels il existe A tel que $\mathscr{L}_\infty(A) = B$? On pourra étudier les cas suivants :

a) B fini.

b) $B = [0,1]$.

c) $B = \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

d) $B \subset [0,1]$ quelconque.

5. A est maintenant un sous-ensemble de $[0,1]^2$. Etudier la convergence des suites vérifiant pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_{n+1} = \frac{\left|\left\{i \in \{0,1,\dots,n\}\right|(u_i, u_{n-i}) \in A\right\}\right|}{n+1}$$

On pourra par exemple étudier le cas $A = [0,a] \times [0,b]$.

6. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

7. Des points asociaux

On se place dans l'espace réel à N dimensions $\mathbb{R}^N$. Soit A un ensemble de points dans $\mathbb{R}^N$. On dira que A est un ensemble *asocial* si tous ses points se trouvent à une distance supérieure ou égale à 1 les uns des autres. Autrement dit,

$$d(x,y) \geqslant 1,\ \forall x, y \in A \text{ avec } x \neq y.$$

On rappelle que la distance entre deux points $x = (x_1, \ldots, x_N)$ et $y = (y_1, \ldots, y_N)$ est donnée par la formule

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}.$$

On se donne maintenant A et B deux ensembles finis asociaux dans $\mathbb{R}^N$. On notera m le cardinal de A et n le cardinal de B. On définit l'addition de deux points dans $\mathbb{R}^N$ par l'addition de leurs coordonnées. On considère enfin l'ensemble C défini par

$$C = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}.$$

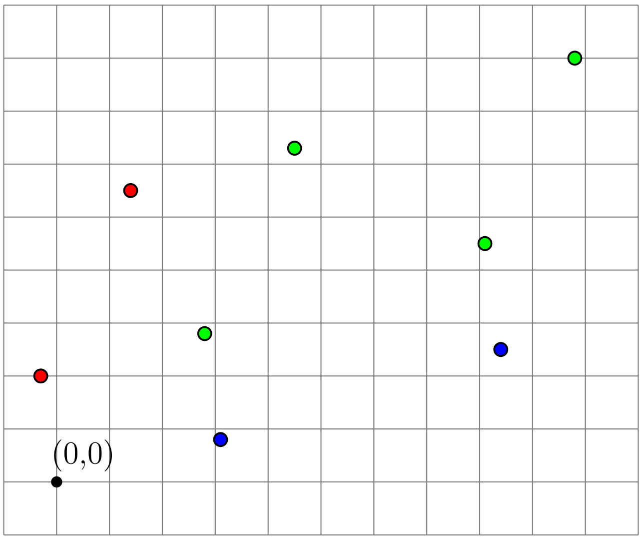


Figure 8. Un exemple d'ensembles A, B et C avec $n = m = N = 2$.

On se propose d'étudier les sous-ensembles asociaux maximaux de C. On dit qu'un sous-ensemble asocial de C est *maximal* s'il n'existe pas de sous-ensemble asocial de C de taille plus grande.

Pour chaque question, étudier les cas suivants :

a) $n = 2$ et m quelconque.

b) $n = m = 3$.

c) le cas général.

1. Pour des ensembles A et B bien choisis, quelle est la taille maximale que peut avoir un sous-ensemble asocial maximal de C ?

2. Pour des ensembles A et B bien choisis, quelle est la taille minimale que peut avoir un sous-ensemble asocial maximal de C ?

3. Répondre aux questions 1 et 2 mais avec cette nouvelle distance : pour $x, y \in \mathbb{R}^N$ on pose

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_N - y_N|\}.$$

Notez qu'on a l'inégalité triangulaire :

$$d_\infty(x, z) \leqslant d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z).$$

4. Répondre aux questions 1 et 2 mais avec cette nouvelle distance : pour $x, y \in \mathbb{R}^3$ on pose

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_N - y_N|.$$

Notez qu'on a toujours l'inégalité triangulaire :

$$d_1(x, z) \leqslant d_1(x, y) + d_1(y, z).$$

5. Répondre à toutes les questions précédentes avec cette nouvelle contrainte : les points des ensembles A et B sont tous à une distance inférieure ou égale à 1 de l'origine.

6. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

8. Quel chaos !

On se fixe deux entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$. On considère un village où habitent les n participants au $\mathbb{TFJM}^2$: exactement un participant habite dans chaque maison, et les maisons sont disposées en cercle. Ainsi, chaque élève à deux voisins.

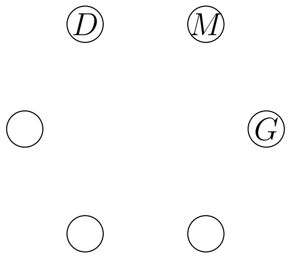


Figure 9. Avec $n = 6$. **M** a **G** pour voisin de gauche et **D** pour voisin de droite.

Le dernier jour de l'édition 2015 du $\mathbb{TFJM}^2$, nommé jour 0, à midi, Matthieu distribue m DVD du film *Dimensions* aux participants. Mais, dans sa précipitation, il n'en donne pas forcément à tout le monde ... Heureusement, les élèves sont attentionnés. Pour que chacun reçoive le DVD qui lui est dû, tout élève possédant au moins un DVD le jour k a 11h59 offre un DVD (et un seul) à son voisin de droite, qui le reçoit à midi.

On note $\mathcal{D}_{n,m}$ l'ensemble des distributions possibles, autrement dit l'ensemble des répartitions possibles des m DVD dans le village des n participants à un jour quelconque.

Pour une distribution d donnée, on définit le temps de d, noté $t(d)$, comme le plus petit nombre de jours au bout duquel tous les élèves ont vu le film, en partant de la distribution d au jour 0 (voir figure 2).

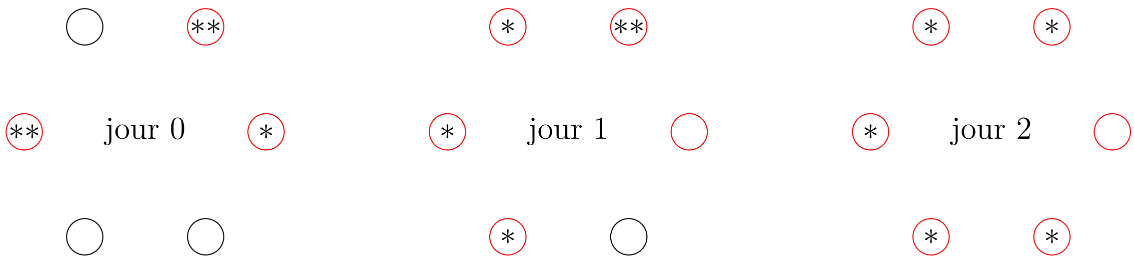


Figure 10. Un exemple avec $n = 6$, $m = 5$. En l'occurrence, $t(d) = 2$.

1. On fixe m et n. Déterminer la valeur minimale et maximale que peut prendre $t(d)$.

Dans les questions suivantes, n est fixé. On pourra commencer par étudier des petites valeurs de n.

2. On suppose dorénavant que Matthieu distribue ses DVD au hasard : chaque DVD, indépendamment des précédents, est donné à un des n élèves avec une probabilité de $\frac{1}{n}$ pour chaque élève. On note $M(n)$ le plus petit nombre de DVD que Matthieu doit distribuer pour avoir au moins une chance sur deux que chaque élève voie le film le soir même. Que vaut $M(n)$? On pourra chercher à l'encadrer par deux fonctions de n aussi proches que possible.

3. On suppose que $m = n$. On note $T(n)$ le plus petit entier tel que la probabilité que $t(d) \leq T(n)$, pour $d \in \mathcal{D}_{n,m}$, soit d'au moins $\frac{1}{2}$. Que vaut $T(n)$? On pourra chercher à l'encadrer par deux fonctions de n aussi proches que possible.

4. Finalement, Matthieu, très débordé, n'a pas eu le temps de distribuer ses DVD à la fin du $\mathbb{TFJM}^2$... Il vient donc tous les jours à midi au village, et donne un DVD à un élève au hasard. Reprendre la question précédente.

5. On suppose maintenant que les élèves désirent tous conserver un DVD chez eux. À midi, ils n'offrent donc un DVD à leur voisin de droite que si eux-mêmes ont au moins deux DVD à 11h59. Reprendre les questions **1.**, **3.** et **4.**

6. Reprendre les résultats des questions 3 et 4 en supposant qu'à chaque fois qu'un élève veut donner un DVD, il le donne à son voisin de gauche avec probabilité $\frac{1}{2}$ et à son voisin de droite avec probabilité $\frac{1}{2}$.

7. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

Adresse mail : `problemes@tfjm.org`
URL : `www.tfjm.org`