

TFJM²

PROBLÈMES DU 5^{ÈME} TOURNOI FRANÇAIS DES JEUNES MATHÉMATIENNES ET MATHÉMATIENS

VERSION RÉGIONALE (1.2)

PRÉAMBULE

Ces problèmes sont difficiles et sont proposés par des chercheurs et étudiants en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète et sont accessibles à des lycéens, c'est-à-dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des candidats qu'ils résolvent entièrement un problème, mais qu'ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

TABLE DES MATIÈRES

Préambule	1
Notations	1
1. Les gang stars	2
2. Un problème de PGCD	2
3. Souriez, vous êtes filmés !	3
4. Poignées de main	4
5. Le fils du polygone	5
6. Une suite récurrente	6
7. Des points asociaux	7
8. Quel chaos !	8

MOTS-CLÉS : 1. jeux — 2. arithmétique — 3. géométrie — 4. combinatoire — 5. géométrie, systèmes dynamiques — 6. analyse — 7. algèbre linéaire, combinatoire — 8. probabilités.

NOTATIONS

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	ensemble des entiers positifs
\mathbb{Z}, \mathbb{Q}	ensembles des nombres entiers et rationnels
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$	droite réelle, plan, espace
$ E $	cardinal de l'ensemble E (nombre d'éléments dans l'ensemble E , si E est fini)
E^n	ensemble des n -uplets sur l'ensemble E
$\text{PGCD}(x_1, \dots, x_n)$	plus grand diviseur commun des entiers x_1, \dots, x_n
$[a, b],]a, b[$	intervalle fermé et ouvert de \mathbb{R}

1. LES GANG STARS

Chicago, 1930. Deux bandits, Al Capone et Bugs Moran, se lancent dans un concours de braquage de banques. La ville peut se représenter comme un rectangle de $n \times m$ cases figurant les quartiers. Il y a exactement une banque dans chaque quartier de la ville et chaque banque stocke un million de dollars (M\$). Al commence en braquant une banque, puis Bugs fait de même. Ensuite, chacun attaque une banque dans un quartier voisin d'une banque qu'il a déjà dévalisée. Deux quartiers sont dits *voisins* lorsque les cases qui les représentent ont un côté en commun. Bien sûr, une banque déjà attaquée n'est plus bonne à braquer. Lorsqu'un joueur ne peut plus jouer alors que c'est son tour et qu'il reste au moins une banque non attaquée, son adversaire braque toutes les banques restantes. Le vainqueur est celui qui compte le plus de casses à son actif.

Four 2x2 grids illustrating the evolution of a system. Grid 1: Top-left is empty, top-right is empty, bottom-left is B , bottom-right is A . Grid 2: Top-left is empty, top-right is empty, bottom-left is B , bottom-right is A . Grid 3: Top-left is empty, top-right is empty, bottom-left is B , bottom-right is A . Grid 4: Top-left is B , top-right is B , bottom-left is B , bottom-right is A .

FIGURE 1. Un exemple avec $m = 2$ et $n = 3$. Ici, Bugs gagne avec un avantage final de 2 M\$.

- 1.** Supposons d'abord qu'Al et Bugs décident de coopérer. On suppose de plus que les banques de départ sont fixées. Pour quelles valeurs de (m, n) et quelles positions des banques de départ peuvent-ils s'arranger pour que chacun braque autant de banques que l'autre ?

On fixe maintenant une valeur de (m, n) . Pour chaque question, on pourra commencer par regarder des petites valeurs de m et n .

2. Désormais Al et Bugs s'affrontent. Al choisi sa banque de départ, puis Bugs fait de même, puis Al et Bugs jouent chacun leur tour. Existe-t-il une stratégie gagnante pour un joueur ? Si oui, pour quel joueur et laquelle ?
3. On dit qu'un joueur dispose d'un *avantage final* de d M\$ lorsqu'il peut s'assurer d'avoir d M\$ de plus que son adversaire, quelle que soit la manière dont il joue, mais que son adversaire peut l'empêcher d'avoir $(d + 1)$ M\$ de plus que lui. Étudier l'avantage final de chaque joueur.
4. Reprendre les deux questions précédentes dans le cas où Al puis Bugs choisissent, dans cet ordre, la banque de départ de l'autre (les autres règles du jeu étant inchangées).
5. Reprendre ces deux questions lorsque les banques de départ sont fixées à l'avance.

* * *

2. UN PROBLÈME DE PGCD

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, fixé dans tout l'exercice. Si $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$ sont des entiers, on note $d(a_1, \dots, a_k)$ le PGCD de tous les nombres de la forme $n(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_k)$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, $d(a_1, \dots, a_k)$ est le plus grand entier positif tel que pour tout n , $d(a_1, \dots, a_k)$ divise $n(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_k)$. Dans tout le problème, on pourra commencer par étudier de petites valeurs de k .

- 1.** Calculer $d(a_1, \dots, a_k)$ dans les cas suivants :

- a) $a_i = i$;
 b) $a_i = bi$ avec $b = 3, 10, 12$;
 c) $a_i = bi$ avec $b \in \mathbb{N}$;
 d) $a_i = i^2$.

2. Montrer que pour tous $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$, $d(a_1, \dots, a_k) \leq d(1, 2, \dots, k)$.
3. Déterminer toutes les valeurs possibles de $d(a_1, \dots, a_k)$ avec $0 < a_1 < \dots < a_k$.
4. On dira que le k -uplet (a_1, \dots, a_k) est *maximal* s'il y a égalité dans la question 2. Donner des exemples de k -uplets maximaux. Donner des conditions nécessaires et/ou suffisantes sur un k -uplet pour qu'il soit maximal.
5. Déterminer ou encadrer le plus grand entier ℓ avec la propriété suivante : si (a_1, \dots, a_k) est maximal avec $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k < \ell$, alors $a_i = i$ pour tout i .

* * *

3. SOURIEZ, VOUS ÊTES FILMÉS !

On se fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\theta \in [0, \pi]$. On considère n points distincts fixés A_1, \dots, A_n dans le plan. Sur chacun de ces points se trouve une caméra. Une caméra est capable de surveiller un faisceau d'angle θ , orienté dans la direction que l'on veut. Autrement dit, on peut choisir n demi-droites $[d_1), \dots, [d_n)$ telles que pour tout i , l'origine de $[d_i)$ est A_i . Un point B sera alors surveillé par la i -ème caméra si et seulement si l'angle formé en A_i par les demi-droites $[d_i)$ et $[A_i B)$ vaut au plus $\frac{\theta}{2}$ (voir figure 2).

Notons que les caméras sont "transparentes" : une caméra peut surveiller un point même si une autre caméra est interposée entre eux. Par ailleurs, on considérera qu'une caméra est capable de surveiller le point où elle se trouve. Par exemple, sur la figure 2 (avec $n = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$), la partie surveillée est en vert :

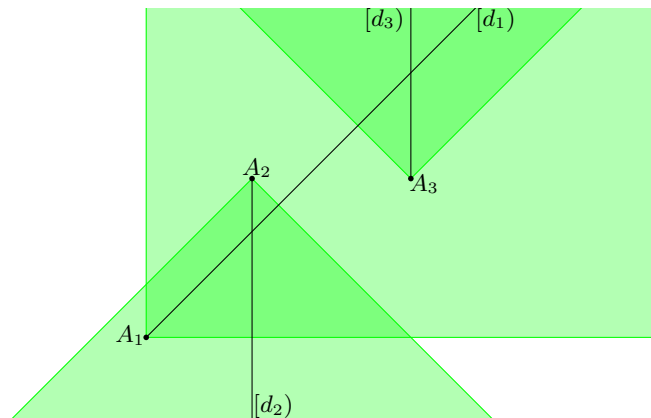


FIGURE 2. Un exemple avec $n = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. La partie surveillée est en vert.

1. Chercher tous les couples (n, θ) tels que, quelles que soient les positions des caméras, on peut toujours les orienter de manière à ce que tout le plan soit surveillé, dans les cas suivants :
- les n caméras sont les sommets d'un polygone régulier ;
 - les n caméras sont alignées.
2. On s'intéresse maintenant à des caméras placées de façon arbitraire. Étudier la situation :
- pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$;

- b) lorsqu'on n'exige pas que tout le plan soit surveillé, mais seulement que l'ensemble des points non surveillés soit *borné*, c'est-à-dire qu'il existe un disque assez grand le contenant ;
 c) dans le cas général.

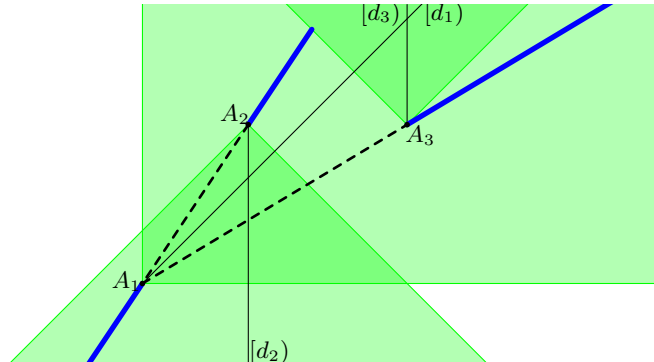


FIGURE 3. Le même exemple, mais pour la question 3.
 Les segments et demi-droites en bleu ne sont pas surveillés.

3. On suppose maintenant que les caméras ne sont plus transparentes. Elles sont assimilées à un point, qui peut cacher certaines zones aux autres caméras, comme sur la figure 3. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre.

* * *

4. POIGNÉES DE MAIN

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n > 1$ et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. On considère n personnes ayant k bras qui se sont donné rendez-vous. Ces personnes sont immobiles et ont des bras infiniment extensibles. Elles sont placées dans un plan de telle sorte que 3 d'entre elles ne sont jamais alignées. Afin de se saluer, ces personnes décident de se serrer la main en respectant les règles suivantes :

- Par respect pour la tradition, deux poignées de main ne peuvent pas se croiser.
- Chaque personne peut serrer la main à au plus k autres (il n'y a pas de limitation si $k = +\infty$).
- Lorsque deux personnes se serrent la main, leurs bras sont rectilignes et alignés.

Un ensemble de poignées de main vérifiant ces conditions est appelé *situation*. On note E l'ensemble des points représentant les individus dans le plan. Une *configuration de E à k bras* est une suite de situations au cours de laquelle chaque individu de E a serré la main à tous les autres. Le nombre de situations de cette configuration est appelée sa *longueur*. On note $L_k(E)$ la longueur minimale d'une configuration de E à k bras.



(a)



(b)

FIGURE 4. Ici, $n = 4$, $k = 2$ et E est constitué des sommets d'un carré.
 (a) n'est pas une situation car elle ne respecte pas la première condition.
 (b) n'est pas une situation car elle ne respecte pas la seconde condition.

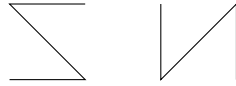


FIGURE 5. Une configuration de longueur 2.
On remarque qu'elle est de longueur minimale et donc $L_2(E) = 2$.

1. E est un n -gone régulier. Calculer $L_k(E)$. On pourra étudier les cas suivants :

a) $n = 4, 5, 6$.

c) $k = 1$.

b) $k \geq 2$.

2. On fixe n et k et on fait varier E parmi les ensembles de n points dont trois points quelconques sont non alignés.

Trouver ou encadrer $\max_E L_k(E)$ et $\min_E L_k(E)$. On pourra étudier les petites valeurs de k et n , ou $k = \infty$.

3. On a désormais 2 groupes de personnes, A de cardinal a et B de cardinal b , se faisant face : les personnes de A sont toutes alignées sur une droite (d_A) et celles de B sur une droite (d_B) parallèle à (d_A) . Les personnes d'un même groupe se connaissent déjà, donc chaque personne doit seulement saluer toutes celles de l'autre groupe.

Calculer $L_k(A, B)$ dans les cas suivant :

a) $k = 1$.

c) $k = \min(a, b)$.

b) $k = +\infty$.

d) Cas général.

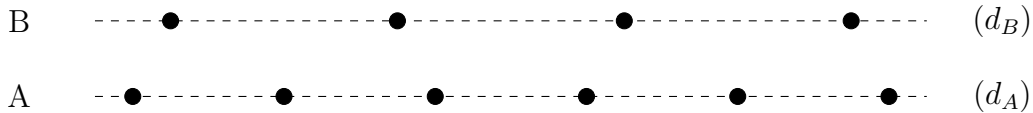


FIGURE 6. Un exemple pour la question 3, avec $a = 6$ et $b = 4$.

4. Reprendre la question 2 en supposant qu'avant chaque situation (y compris la première), tous les individus ont le droit de se déplacer. On supposera qu'à chaque situation, 3 personnes ne sont pas alignées.

* * *

5. LE FILS DU POLYGONE

Soit $n \geq 3$ un entier et $\mathcal{P} = A_1 A_2 \dots A_n$ un polygone convexe. Par *polygone convexe*, on entendra un polygone qui n'a pas d'angle rentrant. Il peut avoir 3 sommets alignés ou plus, mais tous les sommets ne sont pas alignés et deux sommets ne sont jamais confondus. On utilisera dans tout le problème la convention $A_{n+1} = A_1$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note B_i le point sur le bord de \mathcal{P} tel que la droite $(A_i B_i)$ coupe \mathcal{P} en deux polygones de même aire. Le polygone $B_1 B_2 \dots B_n$ est appelé *fils du polygone* \mathcal{P} et est noté $f(\mathcal{P})$.

Dans toutes les questions du problème, on pourra commencer par étudier les cas $n = 3$, $n = 4$, $n = 5 \dots$

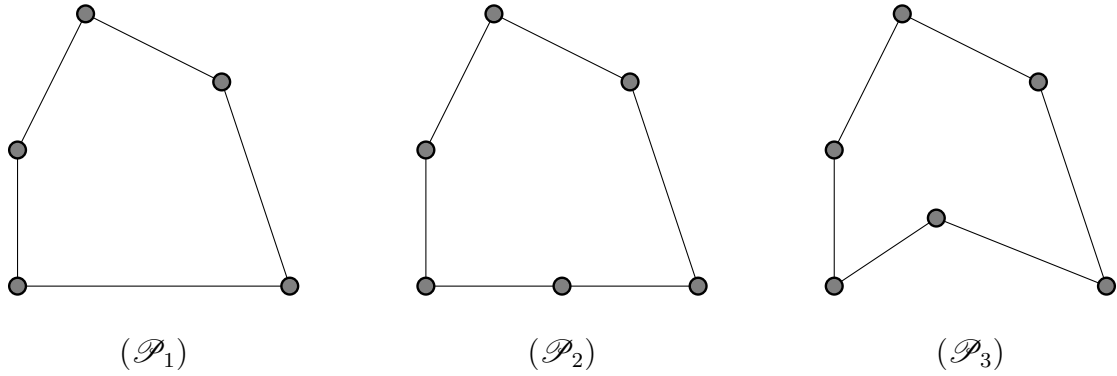


FIGURE 7. Un pentagone convexe (\mathcal{P}_1), un hexagone convexe (\mathcal{P}_2) et un hexagone non-convexe (\mathcal{P}_3). \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont deux polygones différents.

1. On note $k(\mathcal{P})$ le nombre de côtés $[A_j A_{j+1}]$ de \mathcal{P} qui contiennent au moins un des B_i . À n fixé, quelles sont les valeurs minimales et maximales que peut prendre $k(\mathcal{P})$? Et si on demande qu'aucun B_i ne soit égal à un A_j ?
2. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $g_i(\mathcal{P})$ le nombre de sommets de $f(\mathcal{P})$ qui sont sur $[A_i A_{i+1}]$. La suite finie $(g_1(\mathcal{P}), g_2(\mathcal{P}), \dots, g_n(\mathcal{P}))$ est appelée *g-suite* de \mathcal{P} . Quelles sont toutes les *g-suites* possibles de polygones à n sommets? On pourra commencer par étudier le cas où aucun B_i n'est égal à un A_j .
3. On fixe n . On note $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ l'aire d'un n -gone \mathcal{P} . Déterminer les valeurs maximale et minimale du rapport $\frac{\mathcal{A}(f(\mathcal{P}))}{\mathcal{A}(\mathcal{P})}$.
4. Est-ce que tous les polygones à n côtés sont le fils d'un polygone à n côtés? Si oui, étant donné \mathcal{P} , comment construire un polygone dont le fils est \mathcal{P} ? Si non, quels sont les polygones qui sont le fils d'un autre polygone?
5. Étudier les polygones \mathcal{P} tels que $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

* * *

6. UNE SUITE RÉCURRENTÉ

Soit A un sous-ensemble de $[0, 1]$. On se donne $u_0 \in [0, 1]$ et on définit une suite (u_n) par récurrence de la manière suivante : u_{n+1} est la proportion des termes de u_0 à u_n qui se trouvent dans A . Autrement dit :

$$u_{n+1} = \frac{|\{i \in \{0, 1, \dots, n\} \mid u_i \in A\}|}{n+1}$$

1. La suite (u_n) converge-t-elle? On pourra étudier les cas suivants :
 - a) $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
 - b) $A = [a, 1]$ avec $a \in [0, 1]$.
 - c) $A = [0, a]$ avec $a \in [0, 1]$.
 - d) $A = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \dots \cup [a_k, b_k]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq a_1 < b_1 < \dots < a_k < b_k \leq 1$.
 - e) A quelconque.
2. On note $\ell_A(u_0)$ la valeur de la limite de (u_n) quand elle existe et $\mathcal{L}_0(A)$ l'ensemble de toutes ces valeurs. Déterminer $\mathcal{L}_0(A)$ dans les différents cas de la question 1.

3. On suppose maintenant qu'on choisit librement les deux premiers termes u_0 et u_1 , et que la relation de récurrence est valable pour $n \geq 2$.

- a) Les résultats de la question 1 sont-ils toujours valables ?
- b) On note $\mathcal{L}_1(A)$ l'ensemble des valeurs possibles de la limite de (u_n) quand elle existe. Quels sont les ensembles B pour lesquels il existe A tel que $\mathcal{L}_1(A) = B$?

4. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note de même $\mathcal{L}_N(A)$ lorsqu'on fixe les valeurs de u_0, u_1, \dots, u_N . On définit $\mathcal{L}_\infty(A)$ la réunion des $\mathcal{L}_N(A)$, $N \in \mathbb{N}^*$. Quels sont les ensembles B pour lesquels il existe A tel que $\mathcal{L}_\infty(A) = B$? On pourra étudier les cas suivants :

- a) B fini.
- b) $B = [0, 1]$.
- c) $B = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
- d) $B \subset [0, 1]$ quelconque.

* * *

7. DES POINTS ASOCIAUX

On se place dans l'espace réel à 3 dimensions \mathbb{R}^3 . Soit A un ensemble de points dans \mathbb{R}^3 . On dira que A est un ensemble *asocial* si tous ses points se trouvent à une distance supérieure ou égale à 1 les uns des autres. Autrement dit,

$$d(x, y) \geq 1, \forall x, y \in A \text{ avec } x \neq y.$$

On rappelle que la distance entre deux points $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ est donnée par la formule

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Remarquez que dans le plan \mathbb{R}^2 ceci n'est rien d'autre que le théorème de Pythagore.

On se donne maintenant A et B deux ensembles finis asociaux dans \mathbb{R}^3 . On notera m le cardinal de A et n le cardinal de B . On définit l'addition de deux points dans \mathbb{R}^3 par l'addition de leurs coordonnées. On considère enfin l'ensemble C défini par

$$C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

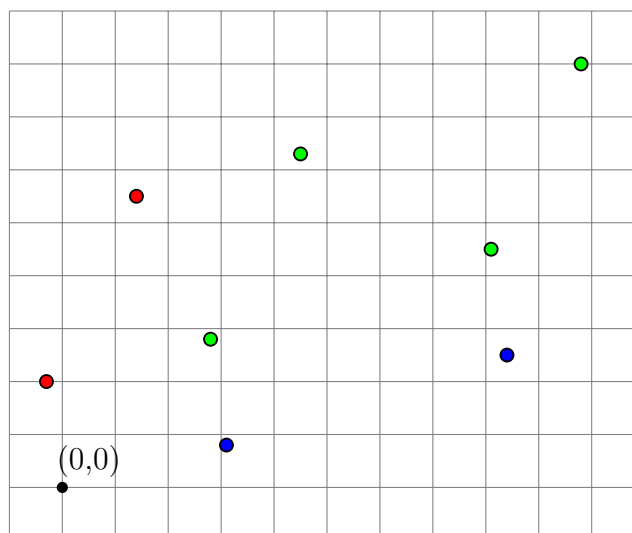
On se propose d'étudier les sous-ensembles asociaux maximaux de C . On dit qu'un sous-ensemble asocial de C est *maximal* s'il n'existe pas de sous-ensemble asocial de C de taille plus grande.

Pour chaque question, étudier les cas suivants :

- a) $n = 1$ et m quelconque.
- b) m et n quelconques mais tous les points sont alignés.
- c) $n = 2$ et m quelconque.
- d) $n = m = 3$.
- e) le cas général.

1. Pour des ensembles A et B bien choisis, quelle est la taille maximale que peut avoir un sous-ensemble asocial maximal de C ?

2. Pour des ensembles A et B bien choisis, quelle est la taille minimale que peut avoir un sous-ensemble asocial maximal de C ?

FIGURE 8. Un exemple d'ensembles A , B et C avec $n = m = 2$.

3. Répondre aux questions 1 et 2 mais avec une nouvelle notion de distance : pour $x, y \in \mathbb{R}^3$ on pose

$$d_{\infty}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|\}.$$

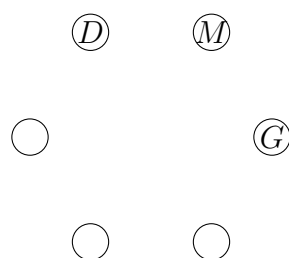
Notez qu'on a l'inégalité triangulaire :

$$d_{\infty}(x, z) \leq d_{\infty}(x, y) + d_{\infty}(y, z).$$

* * *

8. QUEL CHAOS !

On se fixe deux entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$. On considère un village où habitent les n participants au TFJM² : exactement un participant habite dans chaque maison, et les maisons sont disposées en cercle. Ainsi, chaque élève à deux voisins.

FIGURE 9. Avec $n = 6$. M a G pour voisin de gauche et D pour voisin de droite.

Le dernier jour de l'édition 2015 du TFJM², nommé jour 0, à midi, Matthieu distribue m DVD du film *Dimensions* aux participants. Mais, dans sa précipitation, il n'en donne pas forcément à tout le monde ... Heureusement, les élèves sont attentionnés. Pour que chacun reçoive le DVD qui lui est dû, tout élève possédant au moins un DVD le jour k à 11h59 offre un DVD (et un seul) à son voisin de droite, qui le reçoit à midi.

On note $\mathcal{D}_{n,m}$ l'ensemble des distributions possibles, autrement dit l'ensemble des répartitions possibles des m DVD dans le village des n participants à un jour quelconque.

Pour une distribution d donnée, on définit le temps de d , noté $t(d)$, comme le plus petit nombre de jours au bout duquel tous les élèves ont vu le film, en partant de la distribution d au jour 0 (voir figure 2).

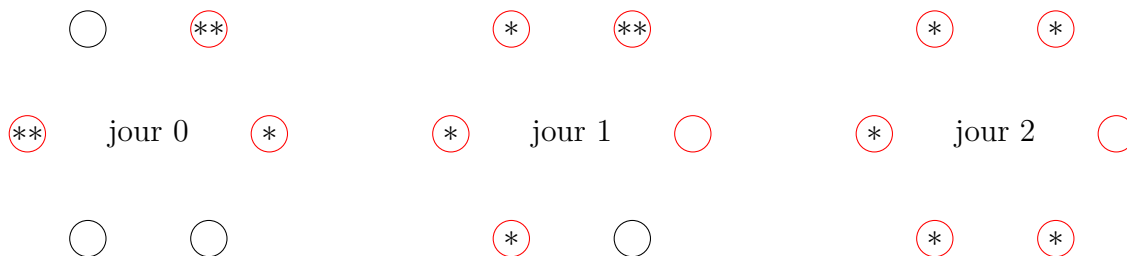


FIGURE 10. Un exemple avec $n = 6$, $m = 5$. En l'occurrence, $t(d) = 2$.

1. On fixe m et n . Déterminer la valeur minimale et maximale que peut prendre $t(d)$.

Dans les questions suivantes, n est fixé. On pourra commencer par étudier des petites valeurs de n .

2. On suppose dorénavant que Matthieu distribue ses DVD au hasard : chaque DVD, indépendamment des précédents, est donné à un des n élèves avec une probabilité de $\frac{1}{n}$ pour chaque élève. On note $M(n)$ le plus petit nombre de DVD que Matthieu doit distribuer pour avoir au moins une chance sur deux que chaque élève voie le film le soir même. Que vaut $M(n)$? On pourra chercher à l'encadrer par deux fonctions de n aussi proches que possible.

3. On suppose que $m = n$. On note $T(n)$ le plus petit entier tel que la probabilité que $t(d) \leq T(n)$, pour $d \in \mathcal{D}_{n,m}$, soit d'au moins $\frac{1}{2}$. Que vaut $T(n)$? On pourra chercher à l'encadrer par deux fonctions de n aussi proches que possible.

4. Finalement, Matthieu, très débordé, n'a pas eu le temps de distribuer ses DVD à la fin du TFJM²... Il vient donc tous les jours à midi au village, et donne un DVD à un élève au hasard. Reprendre la question précédente.

5. On suppose maintenant que les élèves désirent tous conserver un DVD chez eux. À midi, ils n'offrent donc un DVD à leur voisin de droite que si eux-mêmes ont au moins deux DVD à 11h59. Reprendre les questions **1.**, **3.** et **4.**

* * *

Adresse mail : problemes@tfjm.org

URL : www.tfjm.org