LLG Tournament for Young Mathematicians

contact : Roger Mansuy [1]

Problème 1. Des dés étranges

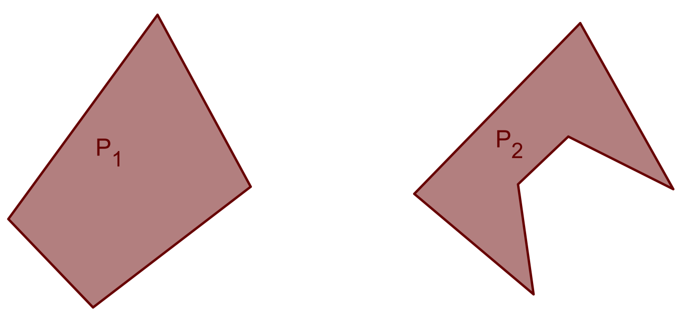
Un ensemble de n dés équilibrés $A_1, \ldots, A_n$ est *étrange* si les conditions suivantes sont vérifiées

- pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$, le dé A_k donne plus fréquemment un chiffre strictement plus gros que le dé A_{k+1} ;
- le dé A_n donne plus fréquemment un chiffre strictement plus gros que le dé A_1.

1. Trouver un ensemble étrange de 3 dés équilibrés à 6 faces marquées par les entiers entre 1 et 18.
2. Dénombrer tous les ensembles étranges de 3 dés.
   On pourra commencer par ajouter des conditions supplémentaires.
3. Soit $p \geq 4$. Quel est le nombre minimal N_p de dés équilibrés à p faces, marquées par les entiers entre 1 et $p{\cdot}N_p$ pour former un ensemble étrange ?

Problème 2. Nombre d'embrassade d'une partie

Une partie P du plan est convexe si pour toute paire de points de P, le segment joignant ces deux points est encore dans P. Par exemple, sur la figure suivante, la partie P_1 est convexe, alors que la partie P_2 ne l'est pas.



Le nombre d'embrassade d'une partie convexe P du plan est le plus grand nombre de copies (isométriques) de P deux à deux disjointes qui peuvent être arrangées dans le plan de sorte à toutes rencontrer P.

1. Trouver le nombre d'embrassade dans le cas où P est

[1] casier 27 ou roger.mansuy@gmail.com

   (a) un disque,
   (b) un triangle équilatéral,
   (c) un triangle quelconque,
   (d) un carré,
   (e) un quadrilatère quelconque.
2. Évaluer le nombre d'embrassade d'une partie P du plan.

Problème 3. Nombre de Richert

Un nombre de Richert est un entier naturel non nul tel que toutes les permutations donnent un nombre premier. Par exemple, 13 et 199 sont tous les deux des nombres de Richert puisque les permutations de leurs chiffres donnent respectivement les nombres premiers suivants 13 et 31 d'une part, 199, 919 et 991 d'autre part.

1. Montrer que tous les nombres de Richert sauf 2 ont leurs chiffres dans l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
2. Trouver tous les nombres de Richert qui contiennent le chiffre 5.
3. Trouver tous les nombres de Richert inférieur à 10^3.
4. Considérons un nombre premier $p > 10$ tel que
$$\min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } p \text{ divise } 10^k - 1\} = p - 1.$$
Soit un entier $n \geq p - 1$ et a, b deux chiffres distincts tels que
$$\underbrace{a \cdots a}_{n-1\text{fois}} b$$
soit un nombre de Richert.
Montrer que $p - 1$ divise n.
5. Étudier l'ensemble des nombres de Richert.

Problème 4. Problème diophantien de F. Bozgan

Soit $a, b \geq 2$ deux entiers.

1. Supposons a et b pairs tels que $a + b$ soit une puissance de 2.
Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels non nuls k tels que k^2 divise $a^k + b^k$.
2. Supposons que $a + b$ admette un diviseur premier impair.
Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels non nuls k tels que k^2 divise $a^k + b^k$.
3. Explorer la réciproque.

Problème 5. Jouons avec le fou : cylindre

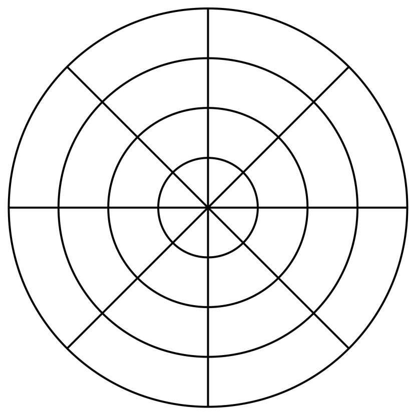
On place un fou (la pièce des échecs) sur la case de coordonnées (a, b) d'un damier de taille $m \times n$ où l'on a collé entre eux les deux côtés de longueur m. Deux joueurs A et B bougent successivement le fou (selon les règles traditionnelles des échecs) jusqu'à une case pas encore visitée. Le perdant est celui qui ne peut plus bouger le fou.

1. Montrer que selon les positions de départ A ou B a une stratégie gagnante.
2. Déterminer cette stratégie gagnante.

3. Quelles sont les cases de départ qui mènent à la plus longue partie si le joueur qui a une stratégie gagnante suit effectivement cette stratégie ? Estimer la longueur de cette partie (en nombre de coups joués).
4. Étudier les généralisations au tore (lorsque l'on colle entre eux les deux côtés de longueur m et que l'on colle entre eux les deux côtés de longueur n).

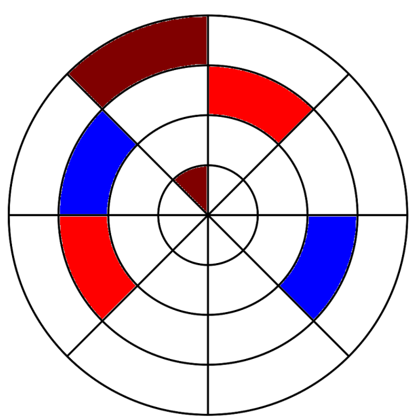
Problème 6. Coloriage du disque

Considérons un disque découpé en n secteurs angulaires et p anneaux. Par exemple, la figure suivante illustre la configuration pour $n = 8$ et $p = 4$.



Un coloriage *intéressant* du disque est un coloriage d'une partie des np cellules tel qu'il n'y ait jamais deux cellules coloriées "symétriques" par rapport à un rayon, un cercle ou le centre du disque (le mot symétrique est à prendre au sens intuitif). On fera attention au cas particulier où n est impair où il n'y a pas de symétrie par rapport au centre.

Sur la figure suivante, on a représenté des cellules symétriques par rapport à un cercle (bordeaux), à un rayon (rouge), au centre (bleu), c'est-à-dire des configurations impossibles dans un coloriage intéressant.



1. Évaluer le nombre maximal de cellules coloriées dans un coloriage intéressant du disque (par exemple, donner une borne supérieure).

2. Considérons une coloriage intéressant du disque.
   Comment pouvez vous connaître le nombre maximal de cellules que l'on peut colorier en plus du coloriage existant sans perdre la propriété d'être intéressant ?