$U_q(\mathfrak{sl}_2) \leftrightarrow F_q(SL_2)$ duality

理論背景

$Generator(U_q(\mathfrak{sl}_2^+)) = \{E, F, H\}$

$Generator(F_q(SL_2^+)) = \{a, b, c, d\}$

について，E, F, H の双対基底を構成したい．両者はE, F, H および$\xi := a - 1, b, c$の次数に関するフィルターが定まるので，双対基底をフィルターから定まる次数 deg で打ち切って，deg を上げることで双対基底の詳細度を上げていくことで具体的に双対基底が計算できるのではないか？と考えた．すなわち，
$G := \{E, F, H\} = \{e_1, e_2, e_3\}, G^\vee := \{b, c, \xi\} = \{f^1, f^2, f^3\}$としてある係数$x^{(X)}_{d_1,\cdots,d_n}$があり，双対基底がつぎのようにかけるとする．

$$e_n^\vee = \sum_d x_d^{(n)} \prod_i f^{d_i}$$

ここで次の仮定(A)のもと，詳細度を上げることにする．

(A)

次数 deg で打ち切ったものが双対基底をなす，すなわち

$$e_n^\vee \approx \sum_{|d| \le deg} x_d^{(n)} \prod_i f^{d_i}$$

と近似して，任意の長さ 2 以上 deg 以下の添字配列D $(2 \le |D| \le deg)$　にたいして

$$\left\langle \prod_i e_{D_i}, \sum_{|d| \le deg} x_d^{(n)} \prod_i f^{d_i} \right\rangle = 0$$

となる．

$deg = 1$のとき$E^\vee \approx b, F^\vee \approx c, H^\vee \approx \xi$という近似できる．

実際，$X, Y \in G$について$\langle X, Y^\vee \rangle = \delta_{X,Y}$が成立する．

$deg = 2, 3, \ldots$と段階的に精度を上げることを考える．

まず古典的な場合$q = 1$で考える．

$q = 1 \wedge deg = 2$の考察

結論としてある仮定のもとで，$q = 1 \wedge deg = 2$の場合の双対基底として有り得る解を一意に絞ることに成功した．

具体的には次の 2 次の近似を得た．

$E^{\vee} \approx b + b\xi, F^{\vee} \approx c - c\xi, H^{\vee} \approx \xi - bc - \frac{1}{2}\xi^2$

2 次の係数のつくる対称行列$(x_{ij}^{(n)})$の 3 次元配列を以後計算する.

生成元の定義

```
[~,E,F,H]=Usl2Full.getGenerator
```

```
E = 
    coeff    base
    _____    ____
      1       E
F = 
    coeff    base
    _____    ____
      1       F
H = 
    coeff    base
    _____    ____
      1       H
```

```
[~,M,L]=FSL2Full.getGenerator
```

```
M = 
    coeff    base
    _____    ____
      1      m11
    coeff    base
    _____    ____
      1      m21
    coeff    base
    _____    ____
      1      m12
    coeff    base
    _____    ____
      1      m22
L = 
    coeff    base
    _____    ____
      1       d1
    coeff    base
    _____    ____
      1       d2
```

```
a=M(1,1);
b=M(1,2);
c=M(2,1);
d=M(2,2);
t=M(1,1)-1;
```

検算

```
HP(M(1,2)*M(2,2),E(1))
```

ans = 1

```
HP(M(1,2)*M(2,2),H(1)^1*E(1))
```

ans = 0

```
HP(M(1,2)*M(2,2),H(1)^2*E(1))
```

ans = 0

```
HP(M(1,2)*M(2,2),H(1))
```

ans = 0

symbolic 方程式による解法

```
X = sym('X', [3 3]);
eqn1 = X(1,1) == X(1,2)^2;
eqn2 = X(2,2) + X(3,3) == 0;
eqns = [eqn1, eqn2];
S = solve(eqns, X, 'ReturnConditions', true);
disp(S);
```

```
           X1_1: z2^2
           X2_1: z1
           X3_1: z
           X1_2: z2
           X2_2: -z6
           X3_2: z3
           X1_3: z4
           X2_3: z5
           X3_3: z6
     parameters: [z    z1    z2    z3    z4    z5    z6]
     conditions: symtrue
```

symbolic の solve を使えば解の探索がラクに行うことができるだろう

dual basis の探索

$a-1, b, c$ で位相的に生成される代数においてフィルターの次数を上げていくことで, E, F, H の双対基底を探索する.

係数の決定に symbolic equation を用いる.

変数の宣言

X:2 次の係数

```
X = sym('X', [3 3 3]);
cond=fold(@and,reshape(permute(X, [1, 3, 2])==X,1,[]))
```

cond = $X_{3,3,2} = X_{3,2,3} \wedge X_{3,2,3} = X_{3,3,2} \wedge X_{3,3,1} = X_{3,1,3} \wedge X_{3,2,2} = X_{3,2,2} \wedge X_{3,1,3} = X_{3,3,1} \wedge X_{3,2,1} = X_{3,1,2} \wedge X_{3,1,2} = X_{3,2}$

```
G2=[M(1,2),M(2,1),M(1,1)-1];
G1=G2;
for ii=1:3
    G2(ii)=G2(ii)+sum(sum( ...
        arrayfun(@(x,y,z)x*y*z, ...
```

```
        reshape(X(ii,:,:),3,3,1),repmat(G1,3,1),repmat(G1,3,1).') ...
        ),2);
end
```

方程式の立式

仮定(A)のもと，条件式を立式する．

```
G3=[E,F,H];
G4=[E*E,E*F,E*H,F*F,F*H,H*H];
cond2=symtrue(3,9);
for ii=1:3
   for jj=1:3
       cond2(ii,jj)=HP(G2(ii),G3(jj))==(ii==jj)+0;
   end
   for jj=1:6
       cond2(ii,3+jj)=HP(G2(ii),G4(jj))==0;
   end
end
```

方程式を解く

```
S = solve([cond;cond2(:)], X, 'ReturnConditions', true);
disp(S);
```

```
        X1_1_1: 0
        X2_1_1: 0
        X3_1_1: 0
        X1_2_1: 0
        X2_2_1: 0
        X3_2_1: -1/2
        X1_3_1: 1/2
        X2_3_1: 0
        X3_3_1: 0
        X1_1_2: 0
        X2_1_2: 0
        X3_1_2: -1/2
        X1_2_2: 0
        X2_2_2: 0
        X3_2_2: 0
        X1_3_2: 0
        X2_3_2: -1/2
        X3_3_2: 0
        X1_1_3: 1/2
        X2_1_3: 0
        X3_1_3: 0
        X1_2_3: 0
        X2_2_3: -1/2
        X3_2_3: 0
        X1_3_3: 0
        X2_3_3: 0
        X3_3_3: -1/2
    parameters: [1×0 sym]
    conditions: symtrue
```

解が唯一存在し，それが出力された．結果として次を得た．

$E^\vee \approx b + b\xi, F^\vee \approx c - c\xi, H^\vee \approx \xi - bc - \frac{1}{2}\xi^2$