

# 分からなかった計算について

Weyl 代数の表現への埋込を構成して、計算を検証した。

$$\begin{aligned}
 &H, E, a, b, d \in \mathbb{C} \langle x, y, \partial_x, \partial_y \rangle \\
 &\text{として考える。} \\
 &H = \partial_x - \partial_y, \quad E = x \partial_y \\
 &a = x, \quad b = y, \quad d = \frac{1}{x} \\
 &\text{とすると,} \\
 &[H, a] = a \quad [E, a] = 0 \\
 &[H, b] = -b \quad [E, b] = a \\
 &[H, d] = -d \quad [E, d] = 0 \\
 &[H, E] = 2E, \quad [a, b] = 0
 \end{aligned}$$

$$\sum_{n,s,r \geq 0} \frac{1}{n!s!r!} (a-E)^s b^{n+s} (-1)^r E^n (a-E)^r (-H-a)^s (H-a)^s E^n$$

$$\frac{1}{x} H x = H + 1$$

$$\sum_{n,\tilde{n},s,\tilde{s}} \frac{1}{n!\tilde{n}!s!\tilde{s}!} (x-1)^{\tilde{s}} y^{n+\tilde{n}} (-1)^{\tilde{s}} x^{\tilde{n}} \partial_y^{\tilde{s}} (x-1)^s (-H-\tilde{n})^{\tilde{s}} (H-n)^s x^n \partial_x^n$$

## Weyl 代数の生成元を定義する

(X,D),(Y,J)は変数と微分演算子の組である。4dim の Weyl 代数はこれらの元から生成される。

X(1)=X, X(2)=Y, D(1)=D, D(2)=J である。

```
[0,X,D]=WeylAlg.getGenerator(2,["X" "Y" "D" "J"])
```

$$\begin{aligned}
 0 = & \begin{array}{c|cccc} \text{coeff} & X & Y & D & J \\ \hline 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \\
 X = & \begin{array}{c|cccc} \text{coeff} & X & Y & D & J \\ \hline 1 & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \text{coeff} & X & Y & D & J \\ \hline 1 & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \\
 D = & \begin{array}{c|cccc} \text{coeff} & X & Y & D & J \\ \hline 1 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \text{coeff} & X & Y & D & J \\ \hline 1 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{array}
 \end{aligned}$$

## 代数 A の表現を構成する

```
Th=arrayfun(@(x,y)x*y,X,D);
H=Th(1)-Th(2);
E=X(1)*D(2);
a=X(1);
```

```
b=X(2);
```

式を計算する

$$\sum_{n,s,\check{n},\check{s} \geq 0} \frac{1}{n! s! \check{n}! \check{s}!} (a-E)^{\check{s}} b^{n+\check{n}} (-1)^{\check{n}} E^{\check{n}} (a-E)^s (-H-\check{n})^{\check{s}} (H-n)^s$$

```
operand=@(n,nc,s,sc)1/prod(factorial([n nc s sc]))*(a-1)^sc*b^(n+nc)*(-
E)^nc*(a-1)^s...
*FP(-H-nc,sc)*FP(H-n,s)*E^n
```

operand = 値をもつ function\_handle:

```
@(n,nc,s,sc)1/prod(factorial([n,nc,s,sc]))*(a-1)^sc*b^(n+nc)*(-E)^nc*(a-1)^s*FP(-H-nc,sc)*FP(H-n,s)*E^n
```

```
operand(0,0,0,1)
```

```
ans =
coeff    X    Y    D    J
-----
-1        0    1    0    1
 1         1    0    1    0
 1         1    1    0    1
-1         2    0    1    0
```

```
summation=0;
Acc=0;
for n=0:2
    for nc=0:2
        for s=0:2
            for sc=0:2
                S=operand(n,nc,s,sc);
                fprintf('case: (n,nc,s,sc)=(%d,%d,%d,%d)\n',n,nc,s,sc)
                Acc(end+1)=S;
                summation=summation+S;
            end
        end
    end
end
disp(summation)
```

```
coeff    X    Y    D    J
-----
 1        0    0    0    0
-1         0    1    0    1
 0.5       0    2    0    2
 1.5       0    3    0    3
 0.25      0    4    0    4
```

-1	1	0	1	0
3	1	1	0	1
2	1	1	1	1
-1.5	1	2	1	2
-9	1	3	0	3
-1	1	3	1	3
-2	1	4	0	4
3	2	0	1	0
0.5	2	0	2	0
-3	2	1	0	1
-9	2	1	1	1
-1.5	2	1	2	1
-6	2	2	0	2
6	2	2	1	2
1.5	2	2	2	2
22.5	2	3	0	3
7	2	3	1	3
7	2	4	0	4
-3	3	0	1	0
-3	3	0	2	0
1.5	3	0	3	0
1	3	1	0	1
15	3	1	1	1
9	3	1	2	1
-1	3	1	3	1
14	3	2	0	2
-7.5	3	2	1	2
-9	3	2	2	2
-30	3	3	0	3
-21	3	3	1	3
-17	3	4	0	4
1.5	3	5	0	5
0.5	3	6	0	6
1	4	0	1	0
6	4	0	2	0
-6	4	0	3	0
0.25	4	0	4	0
-11	4	1	1	1
-21	4	1	2	1
5	4	1	3	1
-13.5	4	2	0	2
22.5	4	2	2	2
22.5	4	3	0	3
38	4	3	1	3
35.75	4	4	0	4
-7.5	4	5	0	5
-1.5	4	5	1	5
-3.125	4	6	0	6
0.375	4	7	0	7
0.0625	4	8	0	8
-5	5	0	2	0
9	5	0	3	0
-1	5	0	4	0
3	5	1	1	1
24	5	1	2	1
-10	5	1	3	1
6	5	2	0	2
7.5	5	2	1	2
-30	5	2	2	2
-9	5	3	0	3
-44.5	5	3	1	3
-1.5	5	3	2	3
-47.5	5	4	0	4
-1.5	5	4	1	4

1.5	5	4	2	4
14.25	5	5	0	5
9	5	5	1	5
6.75	5	6	0	6
-0.375	5	6	1	6
-1.5	5	7	0	7
-0.25	5	7	1	7
-0.25	5	8	0	8
1.5	6	0	2	0
-6	6	0	3	0
1.5	6	0	4	0
-13.5	6	1	2	1
10	6	1	3	1
-1	6	2	0	2
-6	6	2	1	2
22.5	6	2	2	2
1.5	6	3	0	3
31.5	6	3	1	3
6	6	3	2	3
-0.5	6	3	3	3
35	6	4	0	4
5.25	6	4	1	4
-7.125	6	4	2	4
-12.75	6	5	0	5
-19.5	6	5	1	5
-0.375	6	5	2	5
-6.5	6	6	0	6
1.5	6	6	1	6
0.375	6	6	2	6
2.25	6	7	0	7
1	6	7	1	7
0.375	6	8	0	8
1.5	7	0	3	0
-1	7	0	4	0
3	7	1	2	1
-5	7	1	3	1
1.5	7	2	1	2
-9	7	2	2	2
-11.5	7	3	1	3
-9	7	3	2	3
2	7	3	3	3
-13.5	7	4	0	4
-6.75	7	4	1	4
12.75	7	4	2	4
0.375	7	4	3	4
5.25	7	5	0	5
19.5	7	5	1	5
1.5	7	5	2	5
-0.25	7	5	3	5
2.75	7	6	0	6
-2.25	7	6	1	6
-1.5	7	6	2	6
-1.5	7	7	0	7
-1.5	7	7	1	7
-0.25	7	8	0	8
0.25	8	0	4	0
1	8	1	3	1
1.5	8	2	2	2
1.5	8	3	1	3
6	8	3	2	3
-3	8	3	3	3
2.25	8	4	0	4
3.75	8	4	1	4
-10.5	8	4	2	4

-1.5	8	4	3	4
0.0625	8	4	4	4
-0.75	8	5	0	5
-9	8	5	1	5
-2.25	8	5	2	5
1	8	5	3	5
-0.375	8	6	0	6
1.5	8	6	1	6
2.25	8	6	2	6
0.375	8	7	0	7
1	8	7	1	7
0.0625	8	8	0	8
-1.5	9	3	2	3
2	9	3	3	3
-0.75	9	4	1	4
3.75	9	4	2	4
2.25	9	4	3	4
-0.25	9	4	4	4
1.5	9	5	1	5
1.5	9	5	2	5
-1.5	9	5	3	5
-0.375	9	6	1	6
-1.5	9	6	2	6
-0.25	9	7	1	7
-0.5	10	3	3	3
-0.375	10	4	2	4
-1.5	10	4	3	4
0.375	10	4	4	4
-0.375	10	5	2	5
1	10	5	3	5
0.375	10	6	2	6
0.375	11	4	3	4
-0.25	11	4	4	4
-0.25	11	5	3	5
0.0625	12	4	4	4

```
termMax=max([Acc.term]);
MatDisp=sym(zeros(termMax,numel(Acc)));
for ii=1:numel(Acc)
    Pol=Acc(ii).pol;
    MatDisp(1:numel(Pol),ii)=Pol;
end
```

結果を表示する

```
disp(MatDisp)
```

0	1	$-JY$	$\frac{J^2 Y^2}{2}$	$JY$	$-JY$	$J^2 Y^2$	$JY$	$-JY$	$\underline{3J}$
0	0	$DX$	$DX$	$-DX$	$-J^2 Y^2$	$\frac{J^3 Y^3}{2}$	$\frac{J^2 Y^2}{2}$	$-2J^2 Y^2$	$\underline{3J}$
0	0	$JXY$	$-DJXY$	$-JXY$	$-DX$	$-DX$	$-2JXY$	$-\frac{J^3 Y^3}{2}$	$\underline{J'}$
0	0	$-DX^2$	$-J^2 XY^2$	$DX^2$	$2JXY$	$DJXY$	$-DJXY$	$3JXY$	$-6J$
0	0	0	$-2DX^2$	0	$2DJXY$	$-3J^2 XY^2$	$-J^2 XY^2$	$DJXY$	$-\underline{3D}$
0	0	0	$\frac{D^2 X^2}{2}$	0	$2J^2 XY^2$	$-\frac{3DJ^2 XY^2}{2}$	$\frac{D^2 X^2}{2}$	$6J^2 XY^2$	$-6J$
0	0	0	$2DJX^2Y$	0	$2DX^2$	$-\frac{3J^3 XY^3}{2}$	$JX^2Y$	$\frac{3DJ^2 XY^2}{2}$	$-DJ$
0	0	0	$\frac{J^2 X^2 Y^2}{2}$	0	$-D^2 X^2$	$3DX^2$	$2DJX^2Y$	$\frac{3J^3 XY^3}{2}$	$-J^4$
0	0	0	$DX^3$	0	$-JX^2Y$	$-2D^2 X^2$	$\frac{J^2 X^2 Y^2}{2}$	$D^2 X^2$	$\underline{3L}$
0	0	0	$-D^2 X^3$	0	$-4DJX^2Y$	$-3DJX^2Y$	$-D^2 X^3$	$-3JX^2Y$	$-\underline{3D'}$
0	0	0	$-DJX^3Y$	0	$-J^2 X^2 Y^2$	$\frac{3D^2 JX^2 Y}{2}$	$-DJX^3Y$	$-3DJX^2Y$	$9J^2$
0	0	0	$\frac{D^2 X^4}{2}$	0	$-DX^3$	$3J^2 X^2 Y^2$	$\frac{D^2 X^4}{2}$	$-\frac{3D^2 JX^2 Y}{2}$	$6DJ$
0	0	0	0	0	$2D^2 X^3$	$\frac{9DJ^2 X^2 Y^2}{2}$	0	$-6J^2 X^2 Y^2$	$\underline{3D^2 J}$
0	0	0	0	0	$2DJX^3Y$	$\frac{3J^3 X^2 Y^3}{2}$	0	$-\frac{9DJ^2 X^2 Y^2}{2}$	$9J^3$
0	0	0	0	0	$-D^2 X^4$	$-3DX^3$	0	$-\frac{3J^3 X^2 Y^3}{2}$	$4DJ$
0	0	0	0	0	0	$6D^2 X^3$	0	$-3D^2 X^3$	$\underline{3J^4}$
0	0	0	0	0	0	$-\frac{D^3 X^3}{2}$	0	$\frac{D^3 X^3}{2}$	$-6J$
0	0	0	0	0	0	$3DJX^3Y$	0	$JX^3Y$	$\underline{3L}$
0	0	0	0	0	0	$-\frac{9D^2 JX^3 Y}{2}$	0	$3DJX^3Y$	$6D^2$
0	0	0	0	0	0	$-J^2 X^3 Y^2$	0	$\frac{9D^2 JX^3 Y}{2}$	$-D^3$
0	0	0	0	0	0	$-\frac{9DJ^2 X^3 Y^2}{2}$	0	$2J^2 X^3 Y^2$	$-6J'$
0	0	0	0	0	0	$-\frac{J^3 X^3 Y^3}{2}$	0	$\frac{9DJ^2 X^3 Y^2}{2}$	$-9D$

JY の項に着目すると、係数が 1 である。なので、そもそも式が成立してない可能性が高い。

(n,nc 等が別のパターンはまだ計算してない)

```
function Z=FP(z,s)
    Z=1;
    for i=0:s-1
        Z=Z*(z-i);
    end
end
```