北京邮电大学 2017——2018 学年第 1 学期

《组合数学》期末考试试题（A 卷）参考答案

1，（18 分）(1) 从 1 到 300 的整数中**不重复**的选取 3 个数组成**无序** 3 元组(x,y, z),使得 x+y+z 是 6 的倍数,问可组成多少种这种 3 元组？ (2) 求 1,2,…,n 的全排列中 1 和 2 之间**有且有一个**数的排列个数。

解：（1）法一：令 Ai 表示 1 到 300 中被 3 除余 i 的元素组成的集合，即

Ai={3k+i| k=0,1…,99},i=1,2,3

则不重复的选取 3 个数组成无序 3 元组(x,y, z),使得 x+y+z 是 6 的倍数必为以下几种情形：

(1) x,y, z 同属于 Ai (2) x,y,z 各从 A1,A2,A3 中取一个

注意到每个 Ai 中恰有 50 个奇数 50 个偶数，于是对于第一种情况，一定是从 Ai 中全取偶数，或者取两个奇数，一个偶数，使得 x+y+z 为偶数且被 3 整除,即被 6 整除,共有 3*(C(50,2)C(50,1)+C(50,3)) =183750+58800=242550 种

（2）x,y,z 各从 A1,A2,A3 中取一个，此时必定是从从诸 Ai 都取偶数，或某 Ai 中取一个偶数，剩下的取奇数，故共有

C(3,1) C(50,1) C(50,1) C(50,1)+50^3=500000 种。

由加法原理，共有

242550+500000=742550 种

法二：令 Ai 表示 1 到 300 中被 6 除余 i 的元素组成的集合，即

Ai={6k+i| k=0,1…,49},i=1,2,…,6

则不重复的选取 3 个数组成无序 3 元组(x,y, z),使得 x+y+z 是 6 的倍数必为以下几种情形：

1） 都取自同一集合,有三种情形,即都取自 A2 或 都取自 A4 或都取自 A6， 共有 3*C(50,3) 种

2） 分别取自于三个不同集合，有 4 种选择，即分别取自 A1,A2,A3，分别取自于 A1,A5,A6，分别取自于 A2,A4,A6，分别取自于 A3,A5,A4，共有 4*50*50*50=500000 种

3） 分别取自于两个集合，一个取两个，另一个取一个，有如下三种情形：A1 取两个,A4 取一个；或者 A5 取两个,A2 取一个；或者 A3 取两个,A6 取一个，共有 3* C(50，2)*50 种

以上数字相加即得。

（2） 先取一个数放在 1 与 2 之间，有 n-2 种选取，然后把这三个数看成一个数参与排列，有(n-2)! 种， 1 和 2 有两种排序，故由乘法原理， 共有 2(n-2)*(n-2)! 种

2，（18 分）设$S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\infty\cdot e_3,\infty\cdot e_4，\infty\cdot e_5，\infty\cdot e_6\}$，求序列$\{a_n\}$的**普通或指数型**生成函数并由此求出 a_n的表达式。其中

（1）a_n 是从 S 中取出的满足元素 e_1和 e_3出现的次数同为偶数,其它元素任意的 **n 位数**的个数；

（2）a_{10}是从 S 中取出的 **10 个元素**中 e_1和 e_3出现的次数至少是 2 至多是 5 的方案数。

解：（1）元素 e_1和 e_3出现的次数同为偶数,其对应的枚举子为

$$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$$

而其余元素对应的枚举子为

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..$$

故其指数型生成函数为

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...\right)^4\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+....\right)^2$$

$$=e^{4x}\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}=\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{6x}+2e^{4x})$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(6^n+2\cdot 4^n+2^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{4}\left(6^n+2\cdot 4^n+2^n\right),n\geq 0$$

（2）容易得到生成函数为

$$\left(1+\mathrm{x}+\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^4+...\right)^4\left(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^4+\mathrm{x}^5\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{1-\mathrm{x}}\right)^4\cdot\left(\frac{\mathrm{x}^2\left(1-\mathrm{x}^4\right)}{1-\mathrm{x}}\right)^2=\frac{\mathrm{x}^4\left(1-2\mathrm{x}^4+\mathrm{x}^8\right)}{(1-\mathrm{x})^6}$$

$$=\left(\mathrm{x}^4-2\mathrm{x}^8+\mathrm{x}^{12}\right)\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\binom{\mathrm{n}+5}{5}\mathrm{x}^{\mathrm{n}}$$

于是

$$\mathrm{a}_{\mathrm{n}}=\binom{\mathrm{n}+1}{5}-2\binom{\mathrm{n}-3}{5}+\binom{\mathrm{n}-7}{5}$$

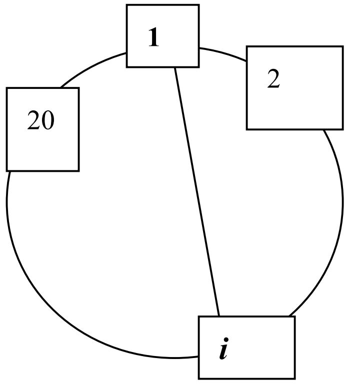
$$a_{10}=\binom{10+1}{5}-2\binom{10-3}{5}+\binom{10-7}{5}=420$$

3，（16 分）假设凸 20 边形的任意 3 条对角线不共点，求该凸 20 边形的对角线的交点数有多少？这些交点把对角线分成多少段？

解：（1）由于没有三条对角线共点，所以这凸多边形任取 4 点，组成的多边形内唯一的一个四边形，确定唯一一个交点，

从而总的交点数为 C(20,4)= 4845

（2）法一： 如图，不妨取顶点 1，考察由 1 出发的对角线被其他对角线剖分的总数。不妨设顶点标号按顺时针排列，取定对角线 ***1 i***



一个在右侧，则与对角线 1i 相交的其他对角线

必定一个顶点在左侧，

于是，这种交点总数为

（20-i）(i-2)

从而此对角线被剖分成

（20-i）(i-2)+1 段

从而由顶点 1 出发的所有对角线被分割成的小段总数为

$$\sum_{i=3}^{19}((20-i)(i-2)+1)$$

从而全体对角线被分割的小段总数为：

$$\frac{20\sum_{j=3}^{20}((20-i)(i-2)+1)}{2}=9860\text{条}$$

法二：注意到每增加一个交点会把原来的线段一分为二，即增加 1 段，但注意到内部的交点对应两条对角线，故其增加的条数为 2 条，同时还要加上原来的对角线条数，故共有

2*C(20,4)+10*（20-3）=9690+170=9860

4, （10 分）求解如下递推关系

$$\begin{cases} a_n\text{-}5a_{n-1}+4a_{n-2}=3^n \\ a_0=1,a_1=4 \end{cases}$$

解：先求 3^n 的特解，注意到 3 不是对应的齐次递推关系的特征根，故特解形如 $p*3^n$。 代入求得 p= -9/2

容易知道齐次递推关系的特征方程为 x^2-5x+4=0，特征根为 1,4，

于是问题的通解为

$$a_n=a*4^n+b-3^{n+2}/2,$$

代入初始条件，求得 a=4,b= 3/2

于是问题的解为：$a_n=4^{n+1}+3/2-3^{n+2}/2$

5，（10 分）令 Q_n 表示{1,2,⋯,n}中不出现 12,23,34,⋯,(n−1)n 这些模式的全排列的个数，则 Q_n 等于多少？

解：令 A_i 表示表示{1,2,⋯,n}中出现模式 i(i+1)的全排列的全体所组成的集合，i=1,2,⋯,n−1.

则 $|A_i|=(n-1)!$，$|A_i\cap A_j|=(n-2)!$，⋯，

$$\left|A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap\ldots\bigcap A_{i_k}\right|=(n-k)!$$

即有 w(0)=n!，w(1)=C(n−1,1)(n−1)!，⋯. w(k)=C(n−1,k)(n−k)!，. .

于是由容斥原理

$$Q_n=N(0)=\left|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-1}\right|=w(0)-w(1)+\ldots+(-1)^{n-1}w(n-1)$$

$$=n!-\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-1}{1}(n-1)!+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}(1)!$$

6，（10 分）今有标号为一到五的五房间安排 5 位同学入住，每人一间。其中甲不住五号房，乙不住四号和五号房，丙不住一号和二号房，丁不住三号房，戊不住二号房。问有多少种住宿方案？

解：根据题意，上述问题等价于如下的带禁区的排列。

				X
		X	X	
X	X			
		X		
	X			

经过等价变换后，带禁区的棋盘为

				X
		X	X	
		X		
X	X			
	X			

禁区的棋盘多项式是

$(1+x)(1+3x+x^2)^2=1+7x+17x^2+17x^3+7x^4+x^5$

所以，方案数为 5!-7*4!+17*3!-17*2!+7*1!-1=26

7，（10 分）证明：任给正整数 N，一定存在由 0 和 5 组成的数是 N 的倍数。

证明：构造序列

$$a_1=5, a_2=55, \ldots, a_k=\overbrace{555\ldots.5}^{k\text{个}5}, \ldots. a_{N+1}=\overbrace{555\ldots.5}^{N+1\text{个}5}$$

注意到这些 a_k 除以 N 的余数为 0,1,2，…,n-1，故由鸽巢原理必有两个余数相等，不妨设为 a_j，a_k，$j<k$，则

a_k-a_j 即为由 0 和 5 组成的且为 N 的倍数的整数，命题得证。

8. （8 分）求{1, 2, . . , n}中满足如下条件的子集 S 的个数：

S 中的任何一个元素 x 都满足 x≥ |S|。

注：空集也满足上述性质。

解： 先求|S|=k≥1 的这种子集的个数，x∈S ⇒**x≥ k,**

于是 S 中的元素即从{k, k+1, ⋯, n}中取，共取 k 个，有 C(n−k+1, k)种取法，即|S|=k 的这种子集有 C(n−k+1, k)个，而空集有 1 个，

于是由加法原理，共有

$$1+\sum_{k=1}^{[n/2]} C(n-k+1,k)$$

种