北京邮电大学 2021—2022 学年第 2 学期

《组合数学》期末考试试题 A 卷答案

1，从－2，－1，0，1，2，3 共 6 个数中不重复地选 3 个数作为二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的系数，使得抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的开口方向向下，共可作出多少个二次函数？

解：a 取-2 或-1，有两种取法，取定后，b，c 有 P(5,2)=20 种取法，
故共有 2P(5,2)=40 种

2, 甲乙丙丁戊共 5 位同学由前后两个门排队进入教室，每个门每次只能同时进一人，问有多少种进法？

解：按甲乙丙丁戊的次序进入教室，则甲有 2 种选择，乙有 3 种，依此类推，共有 2*3*4*5*6=6！种

3，证明：

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{n}} \frac{(-1)^{k\text{-}1}}{\mathrm{k+1}} C(\mathrm{n,k}) = \frac{n}{n+1}$$

证明：

$$(1+\mathrm{x})^n = \sum_{k=0}^{\mathrm{n}} C(\mathrm{n,k}) x^k$$

$$\Rightarrow \int_0^x (1+\mathrm{x})^n dx = \sum_{k=0}^{\mathrm{n}} C(\mathrm{n,k}) \int_0^x x^k dx = \sum_{k=0}^{\mathrm{n}} C(\mathrm{n,k}) \frac{1}{k+1} x^{k+1} \Big|_0^x$$

$$\Rightarrow \frac{(1+\mathrm{x})^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^{\mathrm{n}} C(\mathrm{n,k}) \frac{1}{k+1} x^{k+1}$$

$$令\mathrm{x} = -1, \Rightarrow \frac{-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{\mathrm{n}} C(\mathrm{n,k}) \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} C(\mathrm{n,k}) \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\mathrm{n}} C(\mathrm{n,k}) \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} - C(n,0)(-1) = \frac{n}{n+1}$$

4，9 名同学分成 3 组要求没有任何两组人数相同（组之间不考虑次序），问有多少种方法？

解：将 3 组按人数从小到大排列，设为甲乙丙三组，注意到最少人数的甲组中人数只能是 1 或者 2，故只有这样几种可能

甲 1 乙 2 丙 6，甲 1 乙 3 丙 5，甲 2 乙 3 丙 4，其分别的选取方法为

C(9,1)C(8,2)C(6,6)，C(9,1)C(8,3)C(5,5)，C(9,2)C(7,3)C(4,4)，
故总数为 9*28+9*56+36*35=756+1260=2016

5， 求从 1 到 1000 的偶数中不能被 3 整除或不能被 5 整除的数的个数。12 分

解：记 U 为 1 到 1000 的偶数全体，有|U|=500，A 为 U 中被 3 整除的数的全体，有|A|=[500/3]=166，B 为 U 中被 5 整除的数的全体，有|B|=100，|AB|=33，故

$$\left|\overline{A}\cap\overline{B}\right| = 500-166-100+33=267$$

6，求序列 $a_n=n\,(n+2)$的生成函数。

解：

$$a_n = n(n+1)+n$$

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$$

7， 求递推关系$a_n+4a_{n-1}+4a_{n-2}=2^n$，$a_1=2, a_2=0$的解。

解：对应的齐次递推关系的特征方程为 $x^2+4x+4=0$，特征根为 x=-2（重根），对应于 2^n 的特解为 2^{n-2}, 故通解为（cn+d）$(-2)^n+2^{n-2}$

代入初值得：c=1/2,d=-5/4

8，五位学生来应聘学院的勤工俭学，有教学、党务、财务、团委、科研五个助理岗位，每人只能承担一个岗位的助理，其中，甲不愿做财务和科研助理，乙不愿做教学和科研助理，丙不愿做教学和团委助理，丁不愿做党务和财务助理，戊不愿做党务和团委助理，问有多少种安排方法？ 12 分

解：对应的棋盘为

	教	党	财	团	科
甲			X		X
乙	X				X
丙	X			X	
丁		X	X		
戊		X		X	

将棋盘进行行列对换，化成如下的等价的棋盘

X	X			
	X	X		
		X	X	
			X	X
X				X

从而得其棋盘多项式为

$$P(x)=1+10x+35x^2+48x^3+25x^4+2x^5$$

所以，方案数为 5!-10*4!+35*3!-48*2!+25*1!-2=17

9，老师准备了 6 种不同的书各若干本，每位同学选两本，问至少要几位同学选书才可以保证有两位同学选取的书相同？ 给出理由。 10 分

解：每位同学选书的方案相当于从 6 个不同的球中取两个做可重组合的方案，即有 C(6+2-1,2)=21，故需要 22 名同学。

注：不能仅仅给出答案，要有解题过程。