# 北京邮电大学 2018-2019 学年

# 线性代数期末试题（A）

**注意：请将所有题（包括填空题）的答案写在答题纸上，否则无效.**

## 一．填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 已知 $x_1,x_2,x_3$ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的 3 个根，

则 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} =$ ________.

答案：0

2. 已知 $\alpha=(1,-1,1)^T$，$A=E+\alpha\alpha^T$，则 $A^2=$________.

答案：$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

3. 已知直线 $L_1$：$x-1=y+2=-z-4$ 与直线 $L_2$：$\begin{cases} x=1+2t \\ y=at-3 \\ z=t-2 \end{cases}$ 共面，

则 $a=$________.

答案：$\dfrac{1}{2}$

4. 将 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 表示为两个初等矩阵相乘：

$A=$________.

答案：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

注：可交换

5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1$，$\beta_3=\alpha_1+6\alpha_2+a\alpha_3$. 则当$a=$ ______时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关.

答案： $a=9$

6. 已知$A,A^*,B$都是$n$阶非零矩阵（$A^*$是$A$的伴随矩阵），若$AB=O$（$O$为零矩阵），则$r(B)=$______.

答案： 1

7. 已知$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\x&y&z\\0&0&1\end{pmatrix}$的3个特征值为1,2,3，则$x=$______.

答案：$-1$

8. 已知$A$与$\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&-2&4\\0&0&5\end{pmatrix}$相似，则$|\lambda E-A|=$______.

答案：$(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-5)$

9. 已知4阶实对称矩阵$A$满足$A^2+A=O$，其中$O$为零矩阵，若$r(A)=3$，则$f=x^TAx$在正交变换$x=Oy$下的标准形为______.（其中$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，$y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T$）

答案：$f=-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

10 . 空间曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\y-z=1\end{cases}$在$xoy$面上的投影曲线方程为______.

答案：$\begin{cases} x^2+2y^2-2y-8=0 \\ z=0 \end{cases}$

**二.（10 分）**计算$n$阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}(n\ge 2)$.

解： 将$D_n$按第一行展开，得

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 0 & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix},$$

再将第二个行列式按第一列展开，得

$$D_n=x^n-y^2(-1)^n\begin{vmatrix} y & \cdots & 0 & 0 \\ x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

三. **（10 分）**已知可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix}$，若矩阵$B$满足

$A^{-1}BA=2A^{-1}B+E$，求$B$.

解：在等式 $A^{-1}BA=2A^{-1}B+E$ 两端左乘$A$，得 $BA=2B+A$，

$B = A(A-2E)^{-1}$，

$$A-2E=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}，(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}，$$

$$B=\begin{pmatrix}3&0&2\\2&1&3\\4&1&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21&4&4\\-8&1&2\\12&-2&-1\end{pmatrix}.$$

**四.（10 分）** 设 $\alpha_1=(1,-2,3,1)^T$，$\alpha_2=(2,0,4,-3)^T$，

$\alpha_3=(4,-4,10,-1)^T$，$\alpha_4=(3,-2,5,-2)^T$，求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一组极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解：对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 作初等行变换，化为行最简形，得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&4&3\\-2&0&-4&-2\\3&4&10&5\\1&-3&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一组极大无关组，$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$.

**五.（12 分）** 已知方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3-x_4=1\\x_1-2x_2+4x_3=1\\2x_1-4x_2+2x_3-3x_4=t\\x_1-2x_2+x_3-2x_4=2\end{cases}$ 有解.

（1）求 $t$；（2）求该方程组的通解.

解：（1）对方程组的增广矩阵作初等行变换，化为行阶梯形，得

$B = A(A-2E)^{-1}$，

$$A-2E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{pmatrix}，(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}，$$

$$B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21 & 4 & 4\\ -8 & 1 & 2\\ 12 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

**四.（10 分）** 设 $\alpha_1=(1,-2,3,1)^T$，$\alpha_2=(2,0,4,-3)^T$，

$\alpha_3=(4,-4,10,-1)^T$，$\alpha_4=(3,-2,5,-2)^T$，求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一组极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解：对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 作初等行变换，化为行最简形，得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 3\\ -2 & 0 & -4 & -2\\ 3 & 4 & 10 & 5\\ 1 & -3 & -1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一组极大无关组，$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$.

**五.（12 分）** 已知方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3-x_4=1\\ x_1-2x_2+4x_3=1\\ 2x_1-4x_2+2x_3-3x_4=t\\ x_1-2x_2+x_3-2x_4=2\end{cases}$ 有解.

（1）求 $t$；（2）求该方程组的通解.

解：（1）对方程组的增广矩阵作初等行变换，化为行阶梯形，得

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -3 & t \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-2 \end{array}\right),$$

故 $t=2$.

（2）继续对上述行阶梯形矩阵作初等行变换，化为行最简形，得

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$ 原方程

组同解于 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -2 \end{cases}$ ，取特解 $\eta = (-3,0,1,-2)^T$，

对应齐次方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解为

$x = x_2(2,1,0,0)^T$，$x_2$ 为任意实数.

所求方程组的通解为

$x = k(2,1,0,0)^T + (-3,0,1,-2)^T$，$k$ 为任意实数.

**六.（10 分）** 设 $\alpha_1 = (1,-1,1,-1)$，$\alpha_2 = (-1,2,0,1)$，$\alpha_3 = (-1,1,0,0)$，利用施密特正交化方法，求与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$，其中 $\beta_1 = \alpha_1$.

解：
$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 2 & -3 & t\\ 1 & -2 & 1 & -2 & 2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-2\end{array}\right),$$

故 $t=2$.

（2）继续对上述行阶梯形矩阵作初等行变换，化为行最简形，得

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$，原方程

组同解于 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -2 \end{cases}$，取特解 $\eta = (-3,0,1,-2)^T$，

对应齐次方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解为

$x = x_2(2,1,0,0)^T$，$x_2$ 为任意实数.

所求方程组的通解为

$x = k(2,1,0,0)^T + (-3,0,1,-2)^T$，$k$ 为任意实数.

**六.（10 分）**设 $\alpha_1 = (1,-1,1,-1)$，$\alpha_2 = (-1,2,0,1)$，$\alpha_3 = (-1,1,0,0)$，利用施密特正交化方法，求与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$，其中 $\beta_1 = \alpha_1$.

解：
$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$=(-1,2,0,1)-\frac{-4}{4}(1,-1,1,-1)=(0,1,1,0);$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=(-1,1,0,0)-\frac{-2}{4}(1,-1,1,-1)-\frac{1}{2}(0,1,1,0)=-\frac{1}{2}(1,0,0,1).$$

**七.（12 分）** 已知二次型 $f=4x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$ 在正交变换 $x=Py$ 下化为标准形 $f=y_1^2+ay_2^2+by_3^2(a<b)$，其中 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，$y=(y_1,y_2,y_3)^T$.

（1）求 $a,b$；（2）求正交矩阵 $P$.

解：（1）$f$ 在 $x$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&5&0\\-2&0&3\end{pmatrix}$，

依题意，$\lambda=1$ 是 $A$ 的特征值，另两个特征值为 $a,b$，则

$$a+b=trA-1=11,\quad |A|=28=ab\cdot 1,$$

求得 $a=4,b=7$.

（2）求解 $(A-E)x=0$，得 $A$ 的对应 $\lambda_1=1$ 的单位特征向量为 $p_1=\frac{1}{3}(2,1,2)^T$； 求解 $(A-4E)x=0$，得 $A$ 的对应 $\lambda_2=4$ 的单位特征向量为 $p_2=\frac{1}{3}(1,2,-2)^T$；求解 $(A-7E)x=0$，得 $A$ 的对应 $\lambda_3=7$ 的单位特征向量为 $p_3=\frac{1}{3}(-2,2,1)^T$.

$$=(-1,2,0,1)-\frac{-4}{4}(1,-1,1,-1)=(0,1,1,0);$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=(-1,1,0,0)-\frac{-2}{4}(1,-1,1,-1)-\frac{1}{2}(0,1,1,0)=-\frac{1}{2}(1,0,0,1).$$

**七.（12 分）**已知二次型 $f=4x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$ 在正交变换 $x=Py$ 下化为标准形 $f=y_1^2+ay_2^2+by_3^2(a<b)$，其中 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，$y=(y_1,y_2,y_3)^T$.

（1）求 $a,b$；（2）求正交矩阵 $P$.

解：（1）$f$ 在 $x$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&5&0\\-2&0&3\end{pmatrix}$，

依题意，$\lambda=1$ 是 $A$ 的特征值，另两个特征值为 $a,b$，则

$$a+b=trA-1=11,\ |A|=28=ab\cdot 1,$$

求得 $a=4,b=7$.

（2）求解 $(A-E)x=0$，得 $A$ 的对应 $\lambda_1=1$ 的单位特征向量为 $p_1=\frac{1}{3}(2,1,2)^T$； 求解 $(A-4E)x=0$，得 $A$ 的对应 $\lambda_2=4$ 的单位特征向量为 $p_2=\frac{1}{3}(1,2,-2)^T$；求解 $(A-7E)x=0$，得 $A$ 的对应 $\lambda_3=7$ 的单位特征向量为 $p_3=\frac{1}{3}(-2,2,1)^T$.

令 $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$，则在正交变换 $x=Py$ 下，$f$ 化为标准形

$f=y_1^2+4y_2^2+7y_3^2$.

**八. (6 分)** 已知 $A$ 为 $n$ 阶可逆矩阵，$A^*$ 为 $A$ 的伴随矩阵.

求证：$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

证明：已知 $A$ 可逆，所以 $|A|\neq 0$.

由 $AA^*=|A|E$ 可得 $A^*=|A|A^{-1}$，

在等式 $A^*=|A|A^{-1}$ 两端分别取逆、取行列式，得

$$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{A}{|A|},\quad |A^*|=|A|^{n-1}.$$

再由 $A^*=|A|A^{-1}$，可知 $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\frac{A}{|A|}=|A^{n-2}|A$.