北京邮电大学 2020——2021 学年第一学期

《高等数学 B》期末参考答案

注意：所有题目答案都写在答题纸上，写在试卷上无效；

一． 填空题（每空 3 分，共 30 分）

1．设 a,b 为不为零的常数，$\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{\sin ax}{\tan 2bx}+x\sin\dfrac{1}{x}]=1$，则 $\dfrac{b}{a}=$ 1/2

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{1}{x}} & x>0\\ x+a & x\le 0\end{cases}$ 连续，则 $a=$________． e^2

3．设函数 $y=y(x)$ 的导数 $y'=2e^x$，则其反函数的导数 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$ 为________． $-\dfrac{1}{4e^{2x}}$

4．若 $y=x^2e^{-x^2}$，则 $y^{(2021)}|_{x=0}=$________0.

5．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$________． $-\dfrac{1+t^2}{t^3}$，

6. 设函数 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的______（高阶，等价，同阶但不等价）无穷小.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right]=$ ________. ln2

8．反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$________（收敛，发散）.

9．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\arcsin x^4}=$________. -1/12

10. 微分方程$y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$的通解为________. $\frac{1}{x}(-\cos+C)$.

二. 证明与计算题（共 70 分）

1.（15 分）函数$f(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ x^2\cos\frac{1}{x} & 0<x<2 \end{cases}$，（1）讨论$f(x)$的连续性；（2）求$f'(x)$；（3）讨论$f'(x)$在$(-\infty,2)$上的连续性，若有间断点，指出间断点的类型。

解 （1）$x<0, 0<x<2$时，$f(x)$分别是初等函数，故在定义区间上连续，又 （2 分）

因 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\cos\frac{1}{x}=0$，

所以$f(x)$在定义域内连续； （3 分）

（2）$x<0$，$f'(x)=(x)'=1$，

$0<x<2$时，$f'(x)=(x^2\cos\frac{1}{x})'=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$， （2 分）

$x=0$时，$f'_-(0)=1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}=0$，所以在$f(x)$ $x=0$不可导，故$f'(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ 2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x} & 0<x<2 \end{cases}$； （3 分）

（3） $f'(x)$在$x=0$点右极限不存在，所以$f'(x)$在$x=0$点不连续，且为二类震荡间断点，其它点上函数连续。 （5 分）

2. （15 分）设函数$y=f(x)=\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$， 求（1） $f(x)$单调区间、极值；（2）该曲线的凹凸区间、拐点；（3）该曲线的渐近线.

解 函数的定义域为$x \neq 1$. （2 分）

（1）$y'=\dfrac{2x}{(1-x)^3}$，令$y'=0$，得驻点$x=0$；

在$(-\infty,0],(1,+\infty)$内，$y'<0$，函数单调下降；

在$[0,1)$内，$y'>0$，函数单调上升，$f(0)=0$，为函数极小值。 （3 分）

（2）$y''=\dfrac{2(2x+1)}{(1-x)^4}$，令$y''=0$，得 $x=-1/2$ （2 分）

曲线在$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$内，$y''<0$，是凸的，在$[-\dfrac{1}{2},1),(1,+\infty)$内是凹的。

$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{9}\right)$为曲线的拐点. （3 分）

（3）$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{(1-x)^2}=\infty$，所以$x=1$.是曲线的铅直渐近线，

（2 分）

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2}{(1-x)^2}=1$，所以$y=1$是曲线的水平渐近线，无斜渐近线。 （3 分）

3.（12 分）计算下列积分

（1）$\displaystyle\int\frac{xe^x dx}{\sqrt{e^x-2}}\,(x>1)$；　（2）$\displaystyle\int_0^{\pi}[\sqrt{1-\sin^2 x}+(x-\frac{\pi}{2})]dx$.

解（1）令$\sqrt{e^x-2}=t$，$dx=\dfrac{2t}{t^2+2}dt$

$$\int\frac{xe^x dx}{\sqrt{e^x-2}}=2\int\ln(t^2+2)dt=2t\ln(t^2+2)-4\int(1-\frac{2}{t^2+2})dt$$

$$=2t\ln(t^2+2)-4t+\frac{8}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C$$

$=2x\sqrt{e^x-2}-4\sqrt{e^x-2}+4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x}{2}-1}+C$ ；

（6分，不加常数C扣一分）

（2） $\int_0^{\pi}(\sqrt{1-\sin^2 x}+(x-\frac{\pi}{2}))dx=\int_0^{\pi}|\cos x|dx+0=2$。 （6分）

4. （10分）设D是由曲线$y=2x^2$与直线$x=1, x=2$及$y=0$所围平面区域，求D分别绕x，y轴旋转所成旋转体的体积。

解：绕x轴旋转体积

$$V_x=\pi\int_1^2(2x^2)^2dx=\frac{124}{5}\pi; \quad （5分）$$

绕y轴旋转的体积

$$V_y=4\pi\cdot 8-\pi\cdot 1\cdot 2-\int_2^8 \pi x^2(y)dy=15\pi \quad （5分）$$

或 $V_y=2\int_1^2 \pi xy(x)dx=2\pi\int_1^2 2x^3dx=15\pi$

5. (10分)

解 (1) $\varphi'(x)=e^x+\int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$，$\boldsymbol{\varphi(0)=0}$，$\boldsymbol{\varphi'(0)=1}$

两边求导得 $\varphi''(x)=e^x+\varphi(x)$， （2分）

(2) $\boldsymbol{\varphi''(x)-\varphi(x)=e^x, r^2-1=0, r=\pm 1}$， （2分）

对应齐次方程通解为$\boldsymbol{y=C_1e^x+C_2e^{-x}}$； （2分）

设非齐次方程特解为$\boldsymbol{y^*=Axe^x}$，得$\boldsymbol{A=\frac{1}{2}}$； （2分）

代入初始条件解得 $\boldsymbol{\varphi(x)=\frac{1}{4}e^x(2x+1)-\frac{1}{4}e^{-x}}$ （2分）

6. (8分) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f'(x)>0$，试证在$\exists\xi\in(a,b)$，使曲线$y=f(x)$与直线$y=f(\xi), x=a$所围图形的面积是$y=f(x)$与直线$y=f(\xi), x=b$所围图形的面积的3倍，且此ξ唯一。

解 （1）设 $F(t)=\int_a^t[f(t)-f(x)]\mathrm{d}x-3\int_t^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}x$

$$=f(t)(t-a)-\int_a^t f(x)\mathrm{d}x+3f(t)(b-t)-3\int_t^b f(x)\mathrm{d}x \quad （2 分）$$

因 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调上升，且连续，所以

$F(a)=-3\int_a^b[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x<0$，

$F(b)=\int_a^b[f(b)-f(x)]\mathrm{d}x>0$，

由 0 点定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=0$，即为所证。（3 分）

（2）唯一性

因 $F'(t)=f'(t)[(t-a)+3(b-t)]>0$，$t\in(a,b)$，$F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调上升，故此 ξ 唯一。 **（3 分）**

////

$\sqrt{e^x+1}=t,\quad x=\ln(t^2-1), dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=\int\frac{\frac{2t}{t^2-1}dt}{t}=\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt=\ln|\frac{t-1}{t+1}|+C$$

$$=\ln|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}|+C$$