北京邮电大学 2022—2023 学年第二学期

《数学分析（下）》期末考试试题（A 卷）

考试注意事项	一、学生参加考试须带学生证或学院证明，未带者不准进入考场。学生必须按照监考教师指定座位就坐。 二、书本、参考资料、书包等物品一律放到考场指定位置。 三、学生不得另行携带、使用稿纸，要遵守《北京邮电大学考场规则》，有考场违纪或作弊行为者，按相应规定严肃处理。 四、学生必须将答题内容做在试题答卷上，做在草稿纸上一律无效。

一、填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan\frac{\pi}{4^n}$ ________（收敛或发散）.

2.幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[2^n+(-1)^n]} x^n$ 的收敛域为________.

3.设 $f(x)=\begin{cases} x^2, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases}$，它的以 2π 为周期的余弦级数的和函数为 $s(x)$，则 $s(\frac{3\pi}{2})=$________.

4. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2+x^4}=$________.

5. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$________.

6. 曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ 2x+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,1,-2)$ 处的切线方程为________.

7.设曲面 $\sum: x^2+y^2+z^2=R^2$，$z \ge 0$，则 $\iint\limits_{\Sigma} (x+y+z)^2 dS=$________.

8. 设曲线 $C: x^2+y^2=1, y \ge 0$，方向为点 $A(1,0)$ 到 $B(-1,0)$，则

$\int_C (y^3 e^x - 2y)dx + (3y^2 e^x - 2)dy =$________________.

9.设函数 $f(x,y)$ 连续，二次积分 $\int_{-1}^{0}dy\int_{1-y}^{2} f(x,y)dx + \int_0^1 dy\int_1^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$ 交换积分次序后可化为________________.

10.设闭曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2(a>0) \\ x+y+z=0 \end{cases}$，则曲线积分 $\oint_C y^2 ds =$_____________ .

二（10 分）设平面区域 $D: x^2+y^2 \le R^2$， $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2+y^2}, & y \ge |x| \\ 0, & y<|x| \end{cases}$，求以 D 为底， $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

三（12 分）设 Ω 是由曲面 $z-1=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的区域，求（1）三重积分 $I=\iiint_\Omega \dfrac{1+xz+yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV$ 的值；（2） Ω 的表面积.

四（10 分）在曲面 $z=2-x^2-y^2$ 位于第一卦限的部分上求一点，使该点的切平面与三个坐标平面围成的四面体的体积最小.

五（12 分）计算曲线积分 $I=\oint_C \dfrac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$，其中 C 为圆周 $x^2+y^2=R^2 \quad (R \ne 1)$ 的正向.

六（10 分）计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma xy^2dy\wedge dz + yz^2dz\wedge dx + zx^2dx\wedge dy$，其中 Σ 是曲面 $y=\sqrt{4-z^2-x^2}$ 的右侧.

七（10 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一阶导数连续， C 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向光滑曲线，其起点为 $(1,4)$，终点为 $(4,1)$，记

$$I=\int_C [\frac{1}{y}+yf(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy,$$

（1）证明曲线积分 I 与路径无关；（2）求出 I 的值.

八（6 分）设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 均收敛，且 $a_n \le b_n \le c_n$， $n=1,2,\cdots$，问：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛还是发散？请给出理由.