

32份

北京邮电大学 2018-2019 学年第一学期

《概率论与数理统计》4 课时

期末考试试题答案 (B)

考试注意事项: 学生必须将答题内容写在答题纸上, 写在试题纸上一律无效

一. 填空与选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

1. 已知 10 件产品中有 2 件次品, 从该产品中任意取 3 件, 则恰好取到一件

次品的概率等于 $\frac{7}{15}$.

2. 设事件 A, B 相互独立, 且 $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) > 0$, 则 $P(A|B) = \frac{1}{3}$.

3. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} Ax^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 则常数 $A = 3$.

4. 设泊松分布随机变量 $X \sim P(\lambda)$, 且 $P\{X=0\} = e^{-1}$, 则 $E(X) = 1$.

5. 设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 $G: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ 上的均匀分布, 则 $P\{X \leq 1, Y \leq 1\} = 0.25$.

6. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 与方差 $D(X)$ 都存在, 且有 $E(X) = 10$,

$E(X^2) = 109$, 由切比雪夫不等式估计 $P\{|X-10| \geq 6\} \leq 0.25$.

7. 设来自总体 $N(0, 1)$ 的样本 X_1, \dots, X_6 , 则常数 $C = \frac{1}{3}$ 使得 $CY \sim \chi^2$ 分布,

其中 $Y = (X_1 + X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 + X_6)^2$.

8. 设总体 $X \sim N(1, 4)$, x_1, x_2, \dots, x_{10} 为来自该总体的样本, $\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i$,

则 $D(\bar{x}) = 0.4$.

9. 下列函数中可作为随机变量分布函数的是 (C)

$$A. F_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$B. F_2(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ x, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$C. F_3(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$D. F_4(x) = \begin{cases} 0, & 0 < 0; \\ x, & 0 \leq x < 1; \\ 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

10. 设 X_1, X_2 来自任意总体 X 的一个容量为 2 的样本, 则在下列 $E(X)$ 的无偏估计量中, 最有效的估计量是 (D)

$$A. \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 \quad B. \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$$

$$C. \frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2 \quad D. \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

二 (8 分). 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \text{求 } Y = X^2 \text{ 的概率密度函数.}$$

解:

$$Y \sim F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} < X \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y})$$

$$= \begin{cases} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x} dx + 0 = 1 - e^{-\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad (6 \text{ 分})$$

$$\therefore Y \sim f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0. \\ 0, & y \leq 0. \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

三 (12 分). 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0 < x < 1, 0 < y < +\infty \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 试确定常数 b , (2) 求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$,

(3) 求函数 $U=\max(X, Y)$ 的分布函数。

解: (1) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{+\infty} b e^{-(x+y)} dy dx = b[1 - e^{-1}]$

$$\therefore b = \frac{1}{1 - e^{-1}} \quad (4 \text{ 分})$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1 \\ \int_0^{+\infty} b e^{-(x+y)} dy = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}}, & 0 < x < 1 \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \int_0^1 b e^{-(x+y)} dx = e^{-y}, & y > 0 \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$(3) F_U(u) = P\{U \leq u\} = P\{\max(X, Y) \leq u\} = P\{X \leq u, Y \leq u\}$$

$$= F(u, u) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^u f(x, y) dx dy$$

$$u < 0, F_U(u) = 0$$

$$0 \leq u < 1, F_U(u) = \int_0^u \int_0^u b e^{-(x+y)} dx dy = \frac{(1 - e^{-u})^2}{1 - e^{-1}}$$

$$u \geq 1, F_U(u) = \int_0^u \int_0^1 b e^{-(x+y)} dx dy = 1 - e^{-u} \quad (4 \text{ 分})$$

四 (10 分) 设 (X, Y) 的分布律为

Y \ X	X		
	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(1) 求 X, Y 的边缘分布律。

(2) $E(X), E(Y)$,

(3) 设 $Z=Y/X$, 求 $E(Z)$

解: (1) 由 X, Y 的分布律易得边缘分布为

$Y \backslash X$	1	2	3	
-1	0.2	0.1	0	0.3
0	0.1	0	0.3	0.4
1	0.1	0.1	0.1	0.3
	0.4	0.2	0.4	1

(4 分)

(2)

$$E(X) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.4 = 0.4 + 0.4 + 1.2 = 2.$$

$$E(Y) = (-1) \times 0.3 + 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 = 0$$

(4 分)

(3) Z 的分布律

$Z=Y/X$	-1	-1/2	-1/3	0	1/3	1/2	1
p_k	0.2	0.1	0	0.4	0.1	0.1	0.1

$$\begin{aligned} E(Z) &= (-1) \times 0.2 + (-0.5) \times 0.1 + (-1/3) \times 0 + 0 \times 0.4 + 1/3 \times 0.1 + 0.5 \times 0.1 + 1 \times 0.1 \\ &= (-1/4) + 1/30 + 1/20 + 1/10 = (-15/60) + 11/60 = -1/15. \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

五 (8 分). 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 X, Y 相互独立. 求 $Z_1 = \alpha X + \beta Y$ 和 $Z_2 = \alpha X - \beta Y$ 的相关系数 (其中 α, β 是不为零的常数).

解: 由于 X, Y 相互独立

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1) E(Z_2)$$

$$= E[(\alpha X + \beta Y)(\alpha X - \beta Y)] - (\alpha E(X) + \beta E(Y))(\alpha E(X) - \beta E(Y))$$

$$= \alpha^2 E(X^2) - \beta^2 E(Y^2) - \alpha^2 (E(X))^2 + \beta^2 (E(Y))^2$$

$$= \alpha^2 D(X) - \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 - \beta^2) \sigma^2 \quad (4 \text{ 分})$$

$$D(Z_1) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 + \beta^2) \sigma^2, \quad D(Z_2) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 + \beta^2) \sigma^2,$$

$$\text{故 } \rho_{Z_1, Z_2} = \frac{\text{Cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{DZ_1} \sqrt{DZ_2}} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (4 \text{ 分})$$

六(12分) 设总体 $X \sim b(1, p)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X 的样本,

(1) 求 $\sum_{i=1}^n X_i$ 的分布律

(2) 求参数 p 的极大似然估计量

(3) 求参数 p 的矩估计量, 并判断它是否为无偏估计.

解: (1) 由二项分布可加性 $\sum_{i=1}^n X_i \sim b(n, p)$, 若记 $\sum_{i=1}^n X_i = Y$, 则

分布律为 $P(Y=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0, 1, \dots, n.$ (2分)

(2) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为相应于样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的一个样本值, X 的分布律为 $P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x}, x=0, 1,$

$$L(p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$

$$\ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(1-p),$$

$$\text{令 } \frac{d}{dp} \ln L(p) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0,$$

$$p \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}.$$

(6分)

(3) $E(X)=p$, p 的矩估计量是 \bar{X}

因为 $E(\bar{X})=E(X)=p$, 故它是无偏估计.

(4分)

七(10分). 某矿砂的5个样品中的镍含量, 经测定为 3.25, 3.27, 3.24, 3.26, 3.24 (单位%), 设测定值总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.

(1) 求 μ 的置信水平为 0.99 的双侧置信区间?

(2) 在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下, 这批矿砂的含镍量的均值 μ 是否为 3.25?

计算可得: 样本均值 $\bar{X}=3.252, S=0.01304, \sqrt{5}=2.236$

附表: $t_{0.005}(5)=4.0322, t_{0.01}(5)=3.3649, t_{0.005}(4)=4.6041, t_{0.01}(4)=3.7469$

解: (1) 测定值总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知时, μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的双

侧置信区间为 $\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right)$

$n=5$, $\alpha=0.01$, $t_{0.005}(4)=4.6041$, 计算可得 $(3.225, 3.278)$ 。(4分)

(2) 测定值总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知

$$H_0: \mu=3.25 \quad H_1: \mu \neq 3.25$$

$$\text{检验统计量为 } t = \frac{\bar{X} - 3.25}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\text{拒绝域为 } |t| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$$

$n=5$, $\alpha=0.01$, $t_{0.005}(4)=4.6041$

$$\text{代入样本值有 } |t| = \left| \frac{3.252 - 3.25}{0.01304/\sqrt{5}} \right| = 0.343 < t_{\alpha/2}(n-1)$$

故在 $\alpha=0.01$ 下, 接受假设 H_0 , 认为这批矿砂的含镍量的均值 μ 为 3.25。
(6分)

北京邮电大学 2017—2018 学年第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题标准答案 (A 卷)

考试注意事项: 学生必须将答案内容做在试题答题纸上, 做在试题纸上一律无效

一、填空题 (本题共 40 分, 每小题 4 分)

1. 从 0 到 9 十个数字中任取三个不同的数字, 事件 $A = \{\text{三个数字中不含 0 或 5}\}$,

则概率 $P(A) = \frac{14}{15}$ 。 或者 $\frac{C_9^3}{C_{10}^3} + \frac{C_9^3}{C_{10}^3} - \frac{C_8^3}{C_{10}^3}$

2. 设在三次独立试验中, 事件 A 出现的概率均相等, 且 A 至少出现一次的概率为

$\frac{19}{27}$, 则在一次试验中事件 A 出现的概率为 $\frac{1}{3}$ 。

3. 设随机变量 $X_1 \sim U[0, 6]$, $X_2 \sim N(0, 2^2)$, $X_3 \sim \text{泊松分布 } P(1)$, 且 X_1, X_2, X_3 相互独立,

若 $Y = 3X_3 + X_1 - 2X_2$, 则 $D(Y) = 28$ 。

4. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数

为 -0.5, 则根据切比雪夫不等式有 $P\{|X+Y| \geq 6\} \leq \frac{1}{12}$ 。

5. 设随机变量 K 服从区间 $[1, 6]$ 上的均匀分布, 则方程 $x^2 + Kx + 1 = 0$ 有实根的概率为 0.8。

6. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x \in [0, 1] \\ \frac{2}{9} & x \in [3, 6] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 若 K 使得 $P(X \geq K) = \frac{2}{3}$,

则 K 的取值范围是: $[1, 3]$ 。

7. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(10, (0.02)^2)$, 设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数,

已知 $\Phi(2.5) = 0.9938$, 则 X 落在区间 $(9.95, 10.05)$ 内的概率为 0.9876。

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(1, 2)$, $Y \sim N(0, 1)$, 则随机变量 $Z = 2X - Y + 3$

的概率密度函数 $f(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$ 。

9. 设 X_1, X_2, X_3 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $\frac{\sqrt{2}X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2}}$ 服从 $t(2)$ 分布。(给出分布类型及参数)

10. 设零件长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 现随机抽取 11 个零件, 测得其长度的样本方差 $S^2 = 1$, 则总体方差 σ^2 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right) = \left(\frac{10 \times 1}{20.48}, \frac{10 \times 1}{3.25} \right) = (0.49, 3.08)。$$

$$(\chi_{0.975}^2(10) = 3.25, \chi_{0.025}^2(10) = 20.48)$$

二、(12 分) 设 D 是由曲线 $xy=1$ 与直线 $x=1, y=0, x=e^2$ 围成的平面区域, 二维随机变量 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 则

(1) 给出 (X, Y) 的概率密度函数,

(2) 求 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度函数及其在 $x=2$ 处的值,

(3) 求 $E(2X+1)$ 。

解: (1) 由 $S_D = \int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx = 2$, 因为 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布,

设 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$ 。(4 分)

(2) 当 $1 \leq x \leq e^2$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2x}$,

则 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} & 1 \leq x \leq e^2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 。(4分)

$f_X(x)$ 在 $x=2$ 处的值为 $\frac{1}{4}$ 。

(3) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_1^{e^2} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$, 则 $E(2X+1) = e^2$ 。(4分)

三、(8分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 其概率密度函数分别为

$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$, 求 $Z = 2X + Y$ 的概率密度函数。

解: (X, Y) 的联合概率密度函数 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 \leq x \leq 1, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

Z 的分布函数为:

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\{2X + Y \leq z\} = \iint_{2x+y \leq z} f(x, y) dx dy$

$$= \begin{cases} \iint_{2x+y \leq z} 0 dx dy = 0 & z < 0 \\ \int_0^{\frac{z}{2}} dx \int_0^{z-2x} e^{-y} dy = \frac{z}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-z} & 0 \leq z < 2 \quad (4 \text{分}) \\ \int_0^1 dx \int_0^{z-2x} e^{-y} dy = 1 - \frac{1}{2} e^{2-z} + \frac{1}{2} e^{-z} & z \geq 2 \end{cases}$$

从而 Z 的概率密度为: $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-z}) & 0 \leq z < 2 \quad (4 \text{分}) \\ \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{-z} & z \geq 2 \end{cases}$

四、(12分) 设一箱装有 100 件产品, 其中一、二、三等品分别为 80、10、10 件,

现从中任取一件, 且 $X_i = \begin{cases} 1 & \text{抽到 } i \text{ 等品} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, $i = 1, 2, 3$ 。求:

(1) 随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布,

(2) X_1 与 X_2 的相关系数 ρ ,

(3) X_1 与 X_2 是否独立?

解: 设事件 $A_i = \{\text{从 100 件产品种任取一件是 } i \text{ 等品}\}$, $i = 1, 2, 3$, 据题意可知

$$P(A_1) = 0.8, P(A_2) = P(A_3) = 0.1$$

(1) 随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布如下:

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(A_3) = 0.1$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(A_1) = 0.8$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(A_2) = 0.1$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(A_1 A_2) = 0 \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 关于 X_1 的边缘概率分布如下:

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1) = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0.8 + 0 = 0.8$$

关于 X_2 的边缘概率分布如下:

$$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0.1 + 0.8 = 0.9$$

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0.1 + 0 = 0.1$$

$$\text{由 (1), 可得 } E(X_1 X_2) = 0 \times 0 \times 0.1 + 0 \times 1 \times 0.1 + 1 \times 0 \times 0.8 + 1 \times 1 \times 0 = 0$$

$$\text{因此 } \text{Cov}(X_1, X_2) = E[(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)]$$

$$= E(X_1 X_2) - EX_1 EX_2 = 0 - 0.8 \times 0.1 = -0.08$$

$$\text{因此 } \rho = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}} = \frac{-0.08}{\sqrt{0.16}\sqrt{0.09}} = -\frac{2}{3} \quad (4 \text{ 分})$$

(3) X_1 与 X_2 不是不相关, 故不独立。 (4 分)

(或者利用 (1) 及边缘分布的结果, 用独立的定义判断, 不独立)

五、(12分) 设总体 X 的密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(X_1, X_2, \dots, X_n) 是来自总体 X 的简单随机样本,

(1) 求未知参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$,

(2) 判断 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2 = n \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是否是 θ 的无偏估计量,

(3) 判断 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的有效性。

解: (1) 密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \text{ 则 } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \theta.$$

将 $E(X)$ 替换成 \bar{X} , 得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 为 $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ 。(4分)

(2) 由于 $E(\bar{X}) = E(X) = \theta$, 所以 $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ 是 θ 的无偏估计量。

令 $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$,

$$F_Z(z) = 1 - P(X_1 > z, X_2 > z, \dots, X_n > z) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(X_i \leq z)) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - e^{-\frac{nz}{\theta}} & z \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{n}{\theta} e^{-\frac{nz}{\theta}} & z \geq 0 \end{cases}, \text{ 则 } Z \sim E\left(\frac{n}{\theta}\right) \therefore E(Z) = \frac{\theta}{n} \therefore E(nZ) = \theta,$$

所以 $\hat{\theta}_2 = n \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是 θ 的无偏估计量。(4分)

(3) $\because D(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{n}$, $D(n \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}) = \theta^2$, 所以 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效。(4分)

六、(8分) 设总体 X 服从 $[0, \lambda]$ 区间上的均匀分布, 参数 $\lambda > 0$, (X_1, X_2, \dots, X_n)

是来自总体 X 的简单随机样本,

(1) 求 λ 的最大似然估计, (2) 若 $\beta = 3\lambda + 2$, 求 β 的最大似然估计。

解: (1) $X \sim f(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & 0 \leq x \leq \lambda \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

所以, 似然函数为 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^n} & 0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \lambda \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

考虑 L 的取值, 要使 L 取值最大, λ 应最小。

当 $\lambda = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 时, L 取值最大,

所以, 最大似然估计为 $\hat{\lambda} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。 (5 分)

(2) 由极大似然估计的不变性,

因此, β 的最大似然估计量为 $\hat{\beta} = 3\hat{\lambda} + 2 = 3\max(x_1, x_2, \dots, x_n) + 2$ 。 (3 分)

七、(8 分) 设考生的某次考试成绩服从正态分布, 从中任取 36 位考生的成绩, 其平均成绩为 66.5 分, 标准差为 15 分, 问在 0.05 的显著性水平下, 可否认为全体考生这次考试的平均成绩为 70 分, 给出检验过程。

附表: t 分布数值表

$$t_{0.025}(35) = 2.0301, \quad t_{0.025}(36) = 2.0281, \quad t_{0.05}(35) = 1.6896, \quad t_{0.05}(36) = 1.6883$$

解: 要检验的假设为 $H_0: \mu = \mu_0 (\mu_0 = 70), H_1: \mu \neq \mu_0$

$$\text{检验用的统计量 } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

$$\text{拒绝域为 } |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}, t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} = t_{0.025}(35) = 2.0301, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{而观测值为 } |t| = \frac{|66.5 - 70|}{15 / \sqrt{36}} = 1.4, \quad |t| = 1.4 < t_{0.025}(35) = 2.0301, \text{ 没落在拒绝域内,}$$

所以接受 H_0 , 故可认为全体考生这次考试的平均成绩为 70 分。 (4 分)