TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUẢN LÝ VÀ CÔNG NGHỆ TP. HCM

KHOA CÔNG NGHỆ

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN 2025

MÔN THI: ĐẠI SỐ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Ngày thi: 12.02.2025

Đề thi có 02 trang, gồm 05 câu

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (2.00 điểm) Xét đa thức $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6$.

a. (1.00 điểm) Hãy tính $f(A)$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

b. (1.00 điểm) Sau khi tính $f(A)$, giả sử $f(A)$ có dạng $f(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$. Dùng các phép biến đổi sơ cấp theo dòng đưa ma trận hệ số của hệ phương trình bên dưới về ma trận bậc thang và biện luận số nghiệm của hệ phương trình này

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 1 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + (a_{43}+4)x_3 + (3m-4)x_4 = m+6 \end{cases}.$$

Câu 2. (2.00 điểm) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 4 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

a. (1.00 điểm) Tính định thức của ma trận A và tìm ma trận khả nghịch của A (nếu có).

b. (1.00 điểm) Giải hệ phương trình sau bằng cách sử dụng định thức

$$\begin{cases} -3x + 5y + z = 2 \\ 7x - 2y + 4z = 3 \\ 6x + 3y + 9z = 7 \end{cases}.$$

Câu 3. (1.50 điểm) Xét tập hợp $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$.

a. (0.75 điểm) Chứng minh rằng S là một không gian vector con của $\mathbb{R}^3$.

b. (0.75 điểm) Tìm một cơ sở và tính số chiều của không gian S.

Câu 4. (2.00 điểm)

a. (1.00 điểm) Hỏi hệ vector $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ có độc lập tuyến tính không? Nếu không, hãy tìm một cơ sở B của không gian được sinh bởi S.

b. **(1.00 điểm)** Giả sử cơ sở tìm được ở trên có dạng $B = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_k, y_k, z_k)\}$. Xét cơ sở $B' = \{(x_1, y_1, z_1), (2x_2, 2y_2, 2z_2), \ldots, (kx_k, ky_k, kz_k)\}$ của $\text{span}\langle S\rangle$. Biết rằng vector $v = (2, 3, 3) \in \text{span}\langle S\rangle$. Hãy tìm tọa độ của v trong các cơ sở B, B' và tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

Câu 5. **(2.00 điểm)** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a. **(1.00 điểm)** Tính các trị riêng và vector riêng của A.

b. **(1.00 điểm)** Ma trận A có chéo hóa được không? Nếu có, hãy tìm ma trận khả nghịch P và ma trận chéo D thỏa mãn $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Tính A^{2024}.

HẾT

Sinh viên không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên sinh viên: .... Mã số sinh viên: ....

Câu 1. (2.00 điểm) Xét đa thức $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6$.

a. (1.00 điểm) Hãy tính $f(A)$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

b. (1.00 điểm) Sau khi tính $f(A)$, giả sử $f(A)$ có dạng $f(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$. Dùng các phép biến đổi sơ cấp theo dòng đưa ma trận hệ số của hệ phương trình bên dưới về ma trận bậc thang và biện luận số nghiệm của hệ phương trình này

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 1 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + (a_{43}+4)x_3 + (3m-4)x_4 = m+6 \end{cases}.$$

Lời giải. Đáp án sẽ bắt đầu từ đây. abc.

Câu 1. (2.00 điểm)

Đáp án sẽ bắt đầu từ đây. abc.

Câu 2. (2.00 điểm)