

2020 年度 10 月期入学 / 2021 年度 4 月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
(情報学基礎)

2020 年 8 月 1 日 9:00～11:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて 9 枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は日本語と英語の両方で出題されている。すべて解答しなさい。
F1-1, F1-2 線形代数、微分積分……………1-4 ページ
F2-1, F2-2 アルゴリズムとデータ構造……………5-8 ページ
5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

*The Japanese version of this document is the prevailing and authoritative version;
the English translation below is provided for reference only*

October 2020 Admissions / April 2021 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Fundamentals of Informatics)

August 1, 2020
9:00 - 11:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 9 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. Questions are written in Japanese and English. **Answer all the questions.**
F1-1, F1-2 Linear Algebra, Calculus……………Pages 1 to 4
F2-1, F2-2 Algorithms and Data Structures……………Pages 5 to 8
5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

F1-1、F1-2、F2-1、F2-2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問1 以下の問いに答えよ。

(1) 次式で与えられる正方行列 D の行列式を求めよ。

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 次式で与えられる正方行列 X を考える。

$$X = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

ここで、 a および b は実数とする。 $X^3 - 5X^2 + 8X - 4E = O$ を満たすとき、 a および b を求めよ。ここで、 E および O はそれぞれ単位行列および零行列を表す。

設問2 ある正方行列 A が実歪対称行列であるとは、 A のすべての要素が実数であり、かつ $A^T = -A$ を満たす場合を言う。ここで、 T は行列の転置を表す。以下の問いに答えよ。

- (1) 2×2 および 3×3 の実歪対称行列の一般形を示せ。
- (2) 任意の奇数 n に対して、 $n \times n$ の実歪対称行列は正則でないことを示せ。
- (3) 実歪対称行列のすべての固有値は 0 あるいは純虚数であることを示せ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Use one answer sheet for each of F1-1, F1-2, F2-1, and F2-2.

Q.1 Answer the following questions.

(1) Compute the determinant of a square matrix \mathbf{D} given by

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Let \mathbf{X} be a square matrix given by

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

where both a and b are real numbers. Derive a and b if $\mathbf{X}^3 - 5\mathbf{X}^2 + 8\mathbf{X} - 4\mathbf{E} = \mathbf{O}$, where \mathbf{E} and \mathbf{O} represent the identity matrix and the zero matrix, respectively.

Q.2 A square matrix \mathbf{A} is called real skew-symmetric if all the elements of \mathbf{A} are real numbers and $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$, where $^\top$ denotes the matrix transpose. Answer the following questions.

- (1) Show the general expressions of 2×2 and 3×3 real skew-symmetric matrices.
- (2) Prove that for any odd number n , any $n \times n$ real skew-symmetric matrix is non-invertible (singular).
- (3) Prove that all the eigenvalues of any real skew-symmetric matrix are 0 or purely imaginary numbers.

F1-1、F1-2、F2-1、F2-2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1 下記の問いに答えよ。

(1) $x + y = 3$ のもとで、 $x^2 + y^2$ の最小値を求めよ。

(2) $x^2 + y^2 = 1$ のもとで、 $xy + x$ の最小値を求めよ。

設問 2 以下の積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\infty} e^{-x} x \, dx$

(2) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^3 \, dx$

(3) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{15} \, dx$

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Use one answer sheet for each of F1-1, F1-2, F2-1, and F2-2.

Q.1 Answer the following questions.

- (1) Derive the minimum value of $x^2 + y^2$ subject to the constraint that $x + y = 3$.
- (2) Derive the minimum value of $xy + x$ subject to the constraint that $x^2 + y^2 = 1$.

Q.2 Compute the following integrals.

- (1) $\int_0^{\infty} e^{-x} x \, dx$
- (2) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^3 \, dx$
- (3) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{15} \, dx$

F1-1、F1-2、F2-1、F2-2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

削除、挿入、置換により数列 A を数列 B に変形する編集操作列を考える。A と B の各要素は以下の通りである。

$$\begin{aligned} A[1] &= 8, & A[2] &= -4, & A[3] &= 1, & A[4] &= -6 \\ B[1] &= 7, & B[2] &= 2, & B[3] &= -4, & B[4] &= 3 \end{aligned}$$

任意の A の要素 a と B の要素 b に対し、 a を削除するコストは $|a|$ 、 b を挿入するコストは $|b|$ 、 a から b へ置換するコストは $|a - b|$ とする。なお A の左端や右端にも挿入操作は可能である。以下では 2 つの編集操作列において、編集操作の順序のみ異なる場合は、同一の編集操作列とみなす。例えば図 1 のように、A の左端に 7 を挿入、8 を 2 に置換、 -4 を削除、1 を -4 に置換、 -6 を 3 に置換する編集操作列のコストは $7 + 6 + 4 + 5 + 9 = 31$ となるが、これは最小ではない。

$$\begin{array}{ccccccccc} & 8 & -4 & & 1 & -6 & & & \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & & \\ & 7 & 2 & & -4 & 3 & & & \end{array}$$

図 1: 編集操作列の例 (順不同)

$A[i; j]$ を A の i 番目から j 番目の連続する要素で構成される数列とし、 $B[i; j]$ も同様に定義する。 $M(m, n)$ を $A[1; m]$ を $B[1; n]$ に変形するコスト最小の編集操作列のコストとする。動的計画法に基づくアルゴリズムに関する以下の設問に答えよ。

設問 1 $M(1, 1)$, $M(1, 2)$, $M(1, 3)$, $M(1, 4)$ の値をそれぞれ求めよ。

設問 2 $M(2, 1)$, $M(3, 1)$, $M(4, 1)$ の値をそれぞれ求めよ。

設問 3 $M(4, 4)$ を $M(3, 3)$, $M(3, 4)$, $M(4, 3)$ を用いて表現せよ。

設問 4 $M(4, 4)$ の値を求めよ。

設問 5 A を B に変形するコスト最小の編集操作列をすべて図 1 のように示せ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Use one answer sheet for each of F1-1, F1-2, F2-1, and F2-2.

Let us consider edit operation sequences consisting of deletion, insertion, and substitution that transform a number sequence A into another number sequence B. The elements of A and B are as follows:

$$\begin{aligned} A[1] &= 8, & A[2] &= -4, & A[3] &= 1, & A[4] &= -6, \\ B[1] &= 7, & B[2] &= 2, & B[3] &= -4, & B[4] &= 3. \end{aligned}$$

For any element a of A and any element b of B, the cost for deleting a is $|a|$, the cost for inserting b is $|b|$, and the cost for substituting a with b is $|a - b|$. Each insertion is allowed to the leftmost or rightmost position as well as between elements. Hereafter, for any pair of edit operation sequences, they are considered as the same edit operation sequence if only their orders are different. For example, as shown in Fig. 1, the cost for the edit operation sequence that inserts 7 to the leftmost position of A, substitutes 8 with 2, deletes -4, substitutes 1 with -4, and substitutes -6 with 3 is $7+6+4+5+9=31$, which is not the minimum.

$$\begin{array}{ccccccccc} & 8 & -4 & & 1 & & -6 & & \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 7 & 2 & & & -4 & & 3 & & \end{array}$$

Fig. 1: An example of an edit operation sequence. The operation order is arbitrary.

A number sequence $A[i; j]$ consists of successive elements from $A[i]$ to $A[j]$. $B[i; j]$ is also defined similarly. $M(m, n)$ is the minimum cost of the edit operation sequence that transforms $A[1; m]$ into $B[1; n]$. Answer the following questions related to algorithms based on dynamic programming.

Q.1 Derive the values of $M(1,1)$, $M(1,2)$, $M(1,3)$, and $M(1,4)$.

Q.2 Derive the values of $M(2,1)$, $M(3,1)$, and $M(4,1)$.

Q.3 Express $M(4,4)$ using $M(3,3)$, $M(3,4)$, and $M(4,3)$.

Q.4 Derive the value of $M(4,4)$.

Q.5 Draw all edit operation sequences that transform A into B with the minimum cost using the notation as in Fig. 1.

F1-1、F1-2、F2-1、F2-2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

クイックソートについて以下の設問に答えよ。

設問 1

クイックソートの基本的な考え方を 100 文字程度で説明せよ。

設問 2

以下は整数列のクイックソートを行う C 言語のプログラムであるが、正しく動作しない。
{3, 2, 6, 8, 5, 1, 7, 4} を入力とする場合を例に、どこに問題があるかを指摘し、プログラムを修正した上で、この例を整列する過程を示せ。

```
void quicksort(int a[], int first, int last)
{
    int i, j, x, t;

    x = a[(first + last) / 2];
    i = first; j = last;
    while (1) {
        while (a[i] <= x) i++;
        while (x <= a[j]) j--;
        if (i >= j) break;
        t = a[i]; a[i] = a[j]; a[j] = t;
        i++; j--;
    }
    if (first < i - 1) quicksort(a, first, i - 1);
    if (j + 1 < last) quicksort(a, j + 1, last);
}
```

設問 3

n 個のデータを整列するとき、クイックソートの平均計算量は $O(n \log n)$ であるが、最悪の場合は $O(n^2)$ となる。設問 2 の修正したプログラムで 8 個の整数を入力として整列するとき、この最悪の場合に相当する入力の例と、それがクイックソートによって整列される過程を示せ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Use one answer sheet for each of F1-1, F1-2, F2-1, and F2-2.

Answer the following questions about quicksort.

Q.1

Explain the basic idea of quicksort in about 100 Japanese characters or about 70 English words.

Q.2

The C program code below was intended to sort an integer array by quicksort, but it does not work properly. Suppose the input array is {3, 2, 6, 8, 5, 1, 7, 4}. Explain what is the problem in the code, describe how to fix it, and show the process of sorting the input array by the revised code.

```
void quicksort(int a[], int first, int last)
{
    int i, j, x, t;

    x = a[(first + last) / 2];
    i = first; j = last;
    while (1) {
        while (a[i] <= x) i++;
        while (x <= a[j]) j--;
        if (i >= j) break;
        t = a[i]; a[i] = a[j]; a[j] = t;
        i++; j--;
    }
    if (first < i - 1) quicksort(a, first, i - 1);
    if (j + 1 < last) quicksort(a, j + 1, last);
}
```

Q.3

The time complexity of sorting n items by quicksort is $O(n \log n)$ on average, but in the worst case it becomes $O(n^2)$. When the revised code in Q.2 sorts an input array of 8 integers, show an input array that causes such a worst-case scenario, and show the process of sorting it.