2020年度10月期・2021年度4月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学専攻

入学者選抜試験問題

【専門科目】

2020年7月11日 13:00 – 14:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 専門科目は全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から1題を選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の若い順に1題のみを採点対象とする。

(5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答に際して裏面を用いる場合は解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1　次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上のノルム線型空間とし，M を X のある線型部分空間とする．また $x_0 \in X$ は

$$d := \inf_{x \in M} \|x - x_0\| > 0$$

を満たしているとする．このとき X 上の有界線型汎関数 F で

$$F(x_0) = d, \qquad F(x) = 0 \quad (x \in M), \qquad \sup_{\|x\|=1} |F(x)| = 1$$

の 3 つの条件を満たすものが存在することを証明せよ．ただし $\|\cdot\|$ は X のノルムを表すものとする．

問 2　$a < b$ とする．$f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続関数で，$\varphi(x)$ がこの区間上の有界変動関数であるとき，Stieltjes 積分

$$\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$$

が有限の値として存在することは既知とする．このとき Stieltjes 積分

$$\int_a^b \varphi(x)\, df(x)$$

が有限の値として存在することを証明し，

$$\int_a^b \varphi(x)\, df(x) = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$$

が成立することを証明せよ．

2 次の各問のそれぞれに答えよ.

問 1　xy 平面上の滑らかな単純閉曲線 C を考え，この曲線 C の囲む有界領域の面積は 1 とする．このとき C に (反時計まわりに) 沿う線積分

$$\int_C x(x^2+y^2)\,dx + (2x + x^2 y + y^3)\,dy$$

の値を求めよ．

問 2　複素平面 $\mathbb{C}$ で定義される $\mathrm{Log}(1+z)$ の $z_0 = 1+i$ における冪級数展開を与え，その収束半径を求めよ．但し，Log は対数関数の主枝を与えるものとする．

問 3　3 階の常微分方程式の初期値問題

$$y''' - 3y' + 2y = e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{11}{4}, \quad y''(0) = \frac{5}{4}$$

の解を求めよ．

問 4　数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T,\, x_k \in \mathbb{R}\,(1 \le k \le n)\}$ の元 $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}\| := \max_{1 \le k \le n} |x_k|$$

によりノルムを定める．このノルムを利用して $\mathbb{R}$ 上の n 次正方行列 A のノルムを

$$\|A\| := \sup_{\boldsymbol{x} \ne 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

によって定める．$n = 4$ の場合に

$$A_4 = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

のノルム $\|A_4\|$ の値を求めよ．

3

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1 C_r は複素平面の原点を中心とする半径 $r > 2$ の円周であり，反時計回りに向き付けられているものとする．このとき，次の複素積分の値を求めよ．

$$\int_{C_r} \frac{e^z \cos^2(z-1)}{(z-1)^5}\, dz$$

問 2 S を $\mathbb{R}^3$ の単位球面 $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ とする．また，$f(x,y,z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + z^3 + 3z^2$，$r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．このとき，次の積分の値を求めよ．

$$\int_S \nabla f \cdot \nabla r\ dS$$

ここに，dS は S の面積要素である．

問 3 A を n 次実正方行列，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$，$t \geq 0$ で定義された実関数 $u_m(t)\ (m = 1, 2, \cdots, n)$ に対して $\boldsymbol{u}(t)$ を

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

とする．また，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ の第 m 成分を x_m とし，$\mathbb{R}^n$ のノルムを $\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{m=1}^{n} x_m^2$ で定義する．次の問に答えよ．

(1) 常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}(t) = A\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{b} \quad (t > 0), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{c} \qquad (*)$$

に前進 Euler 法を適用して得られる $\boldsymbol{u}^{(i)}$ に関する漸化式を求めよ．但し，$h > 0$ を t の増分，$\boldsymbol{u}^{(i)}$ を $t = ih\,(i = 0, 1, \cdots)$ における差分解とする．

(2) $\boldsymbol{u}^{(0)} = \boldsymbol{c}$ とし，設問 (1) で求めた漸化式により $\boldsymbol{u}^{(i)}\,(i = 1, 2, \cdots)$ を定める．A が対称行列でその固有値が全て負の実数であるとき，$h > 0$ を十分小さくとれば，$\lim_{i \to \infty} \boldsymbol{u}^{(i)}$ が収束することを示せ．

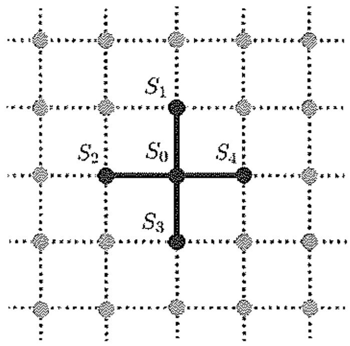
(3) 初期値問題 $(*)$ を前進 Euler 法の代わりに後退 Euler 法を用いて離散化することを考える．$h > 0$ を後退 Euler 法の t の増分，$\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(i)}$ を $t = ih\,(i = 0, 1, \cdots)$ における後退 Euler 法の差分解とする．h が十分小さいとき，後退 Euler 法により得られる漸化式によって $\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(i)}$ から $\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(i+1)}$ が一意的に定まることを示せ．

4

ある格子点上のイジングスピン系を考える．各格子点上にあるスピンは，その最近接格子点上のスピンとのみ相互作用する．この格子点上の，あるスピン S_0 を中心とする $n+1$ 個のスピン S_i $(i=0,1,\cdots,n)$ に着目しよう．下図は $n=4$ の例を示している．各スピンの状態 S_i は $+1$ あるいは -1 をとり，これら $n+1$ 個のスピン系のハミルトニアン H は

$$H=-JS_0\sum_{i=1}^{n}S_i-h\sum_{i=1}^{n}S_i$$

で与えられていると仮定する．ここで，J はスピン間相互作用の強さを表す正の定数，h は着目した $n+1$ 個のスピンの外側に存在するスピンからの S_i $(i=1,\cdots,n)$ への影響を近似的に表すために導入した平均場である．系は絶対温度 T の熱平衡状態にあるものとし，ボルツマン定数を k，$\beta=\dfrac{1}{kT}$ として，以下の問に答えよ．



(1) 平均場 h が与えられたものとして，$S_0=1$ に状態を固定した場合の分配関数を Z_+，$S_0=-1$ に状態を固定した場合の分配関数を Z_- とする．Z_+ および Z_- を求めよ．

(2) 平均場 h が与えられたものとして，スピン S_0 の熱平衡状態における平均値 $\langle S_0\rangle$ を Z_+ および Z_- を用いて表せ．

(3) 平均場 h が与えられたものとして，スピン S_i $(i=1,\cdots,n)$ の熱平衡状態における平均値 $\langle S_i\rangle$ に関して

$$\langle S_i\rangle=\frac{1}{n}\frac{\partial\log(Z_++Z_-)}{\partial(\beta h)}$$

が成立することを示し，さらに，これを利用して $\langle S_i\rangle$ を求めよ．

(4) 熱平衡状態では各スピンの平均値は互いに等しいという条件から，平均場 h が満たすべき方程式を導出することができる．この平均場 h の方程式を，ある実数 m とある関数 $f(x)$ を用いて

$$\left(\frac{\cosh(\beta h+\beta J)}{\cosh(\beta h-\beta J)}\right)^m=f(\beta h)$$

の形に表し，実数 m と関数 $f(x)$ を求めよ．

(5) この系は，温度 T を高温から低温に下げると，常磁性相から強磁性相へ相転移を起こす．相転移を起こす温度における $\tanh(\beta J)$ の値を n を用いて表せ．このとき，$|x/a|$ が十分小さい場合に成り立つ近似式

$$\log\left(\frac{\cosh(x+a)}{\cosh(x-a)}\right)\approx 2x\tanh(a)-\frac{2}{3}x^3\frac{\tanh(a)}{\cosh^2(a)}$$

を用いてもよい．

5

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1

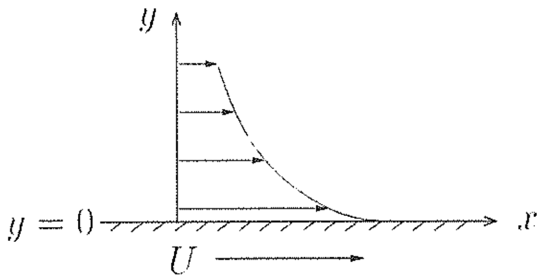
xy 平面上の流速場 $(u(x,y), v(x,y))$ が

$$u = \log r + \frac{y^2}{r^2}, \quad v = -\frac{xy}{r^2}, \quad (0 < r < \infty)$$

で与えられるとき，点 $(0,1)$ における渦度 ω を計算せよ．ただし $r = \sqrt{x^2+y^2}$ である．

問 2

xy 平面において $y=0$ を境界とする半無限領域 $y>0$ を満たす非圧縮性粘性流体の 2 次元非定常運動について考える．はじめに流体は一様な静止状態にあるとする．いま，ある瞬間にそれまで静止していた境界が x 軸の正の方向に一定の速さ U で一様な運動を始めたとし，そのときの時刻を $t=0$ とする．ただし t は時間を表す．このとき $t>0$ における流体の運動を考える（右図参照）．流体の速度は x 軸に平行であり，かつ，流体の状態は x 方向に変化しないと仮定すると，流速の x 方向成分 $u = u(y,t)$ は



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (0 < y < \infty, \quad 0 < t < \infty)$$

を満足することが知られている．ただし ν は流体の動粘性係数を表す．このとき以下の設問に答えよ．

(1) $t>0$ のとき，$y=0$ および $y \to \infty$ において u が満たす条件を各々に対して記せ．

(2) ある 1 変数関数 $f(\eta)$ およびある定数 α を用いて $u(y,t) = f\left(\dfrac{y}{t^\alpha}\right)$ と表されているとき，α の値を定め，さらに $f(\eta)$ が満足する微分方程式を求めよ．

(3) 設問 (1) の条件を満足し，かつ一様な静止状態を初期値とする解 $u(y,t)$ を求めよ．なお，解答に際し誤差関数

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} \mathrm{d}\xi$$

を用いよ．

(4) μ を流体の粘性係数とする．時刻 $t>0$ において流体が境界 $y=0$ に及ぼす接線応力を t, ν, μ, U のうち必要なものを用いて表せ．