基礎数学 I

$\boxed{1}$

n を正の整数とする．実数 $\beta_{k,n}$ および n 次多項式

$$b_{k,n}(x) = \frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}, \quad k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$$

を用いて，高々 n 次の多項式 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{k,n} b_{k,n}(x)$$

によって定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) 次の恒等式が成り立つことを示せ．

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) = 1$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k b_{k,n}(x) = nx$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 b_{k,n}(x) = nx(1-x)$

(ii) $\delta > 0$ および $x \in (0,1)$ に対して，

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqq \delta} b_{k,n}(x) \leqq \frac{1}{4n\delta^2}$$

が成り立つことを示せ．ここで和の記号は，$\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqq \delta$ を満たす全ての k に対する和を表す．

(iii) f を区間 $(0,1)$ 上の連続な実数値有界関数とし，$\beta_{k,n} = f(k/n)$ によって多項式列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を定義する．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある正の整数 N で

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geqq N, x \in (0,1))$$

を満たすものが存在することを示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

Let n be a positive integer. We introduce a polynomial of degree at most n by

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{k,n} b_{k,n}(x),$$

where $\beta_{k,n} \in \mathbb{R}$ and the polynomial of degree n,

$$b_{k,n}(x) = \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k},$$

for $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Answer the following questions.

(i) Prove the following identities:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) = 1,$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k b_{k,n}(x) = nx,$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 b_{k,n}(x) = nx(1-x).$

(ii) Show that

$$\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqq \delta} b_{k,n}(x) \leqq \frac{1}{4n\delta^2}$$

for $\delta > 0$ and $x \in (0, 1)$, where the summation symbol denotes the sum over k satisfying $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqq \delta$.

(iii) Let f be a continuous real-valued bounded function on the interval $(0, 1)$. By $\beta_{k,n} = f(k/n)$, we define the polynomial sequence $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Show that for any $\varepsilon > 0$ there exists a positive integer N such that

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geqq N, x \in (0, 1)).$$

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る連結な単純無向グラフとし，G は隣接リストにより貯えられているとする．二点 $u,v \in V$ 間の路の最短の長さを $\mathrm{dist}(u,v)$ と記す．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の点 $s \in V$ を選ぶ．$\mathrm{dist}(s,u)=\mathrm{dist}(s,v)$ を満たす枝 $uv \in E$ が存在すれば，枝 uv は長さ奇数の単純閉路に含まれることを証明せよ．

(ii) G が二部グラフであるかどうかを $O(|V|+|E|)$ 時間で判定する方法を示せ．

(iii) 異なる二点 $s,t \in V$ に対して，s,t 間の最短路が唯一であるかどうかを $O(|V|+|E|)$ 時間で判定する方法を示せ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple connected undirected graph with a vertex set V and an edge set E. Assume that G is stored in adjacency lists. For two vertices $u, v \in V$, let $\mathrm{dist}(u, v)$ denote the shortest length of a path between them. Answer the following questions.

(i) Let $s \in V$ be an arbitrary vertex. Prove that if there is an edge $uv \in E$ such that $\mathrm{dist}(s, u) = \mathrm{dist}(s, v)$ then edge uv is contained in a simple cycle of an odd length.

(ii) Show how to test whether G is a bipartite graph or not in $O(|V| + |E|)$ time.

(iii) Let $s, t \in V$ be two distinct vertices. Show how to test whether G has only one shortest path between s and t or not in $O(|V| + |E|)$ time.

線形計画

3

$\boldsymbol{a}^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ と $\boldsymbol{b}$ を m 次元ベクトル，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$ を n 次元ベクトルする．ただし $^\top$ は転置記号を表す．さらに，$\boldsymbol{A}$ を第 i 列が $\boldsymbol{a}^i$ となる $m \times n$ 行列，つまり $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}^1\ \boldsymbol{a}^2\ \cdots\ \boldsymbol{a}^n]$ とする．

次の線形計画問題 (P) とその双対問題 (D) を考える．

$$
\begin{array}{llllll}
\text{(P)} & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & \qquad \text{(D)} & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} & & \text{subject to} & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{c} \\
 & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} & & &
\end{array}
$$

ただし，(P) の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，(D) の決定変数は $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$ である．

問題 (P) は $x_1^* = 0$ となる唯一の最適解 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^\top$ を持つとする．このとき，次の線形計画問題 (Q) を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(Q)} & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^*) v \\
 & \text{subject to} & (\boldsymbol{a}^1)^\top \boldsymbol{u} - c_1 v \leqq -1 \\
 & & (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{u} - c_i v \leqq 0 \ \ (i = 2, 3, \ldots, n) \\
 & & v \geqq 0
\end{array}
$$

ただし，決定変数は $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ と $v \in \mathbb{R}$ である．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 (Q) の双対問題を書け．

(ii) 問題 (Q) が最適解を持つことを示せ．

(iii) 問題 (Q) の最適値が 0 となることを示せ．

(iv) 問題 (Q) は $v^* > 0$ となる最適解 $(\boldsymbol{u}^*, v^*)$ を持つとする．$\boldsymbol{w}^* = \dfrac{\boldsymbol{u}^*}{v^*}$ とする．このとき，$\boldsymbol{w}^*$ は双対問題 (D) の最適解であることを示せ．

(v) 問題 (Q) は $v^* = 0$ となる最適解 $(\boldsymbol{u}^*, v^*)$ を持つとする．このとき，$(\boldsymbol{a}^1)^\top \boldsymbol{w}^* < c_1$ となる (D) の最適解 $\boldsymbol{w}^*$ が存在することを示せ．

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Let $\boldsymbol{a}^i$ $(i = 1, \dots, n)$ and $\boldsymbol{b}$ be m-dimensional vectors, and let $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top$ be an n-dimensional vector, where the superscript $^\top$ denotes transposition. Moreover, let $\boldsymbol{A}$ be an $m \times n$ matrix whose ith column is $\boldsymbol{a}^i$, that is, $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}^1\ \boldsymbol{a}^2\ \cdots\ \boldsymbol{a}^n]$.

Consider the following linear programming problem (P) and its dual problem (D):

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0},
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{c},
\end{array}
$$

where the decision variables of (P) and (D) are $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ and $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$, respectively.

Suppose that problem (P) has a unique optimal solution $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^\top$ such that $x_1^* = 0$. Then consider the following linear programming problem (Q):

$$
\begin{array}{lll}
\text{(Q)} & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^*) v \\
& \text{subject to} & (\boldsymbol{a}^1)^\top \boldsymbol{u} - c_1 v \leqq -1 \\
& & (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{u} - c_i v \leqq 0 \ \ (i = 2, 3, \dots, n) \\
& & v \geqq 0,
\end{array}
$$

where the decision variables are $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ and $v \in \mathbb{R}$.

Answer the following questions.

(i) Write out a dual problem of problem (Q).

(ii) Show that problem (Q) has an optimal solution.

(iii) Show that an optimal value of problem (Q) is 0.

(iv) Suppose that problem (Q) has an optimal solution $(\boldsymbol{u}^*, v^*)$ such that $v^* > 0$. Let $\boldsymbol{w}^* = \dfrac{\boldsymbol{u}^*}{v^*}$. Then show that $\boldsymbol{w}^*$ is an optimal solution to problem (D).

(v) Suppose that problem (Q) has an optimal solution $(\boldsymbol{u}^*, v^*)$ such that $v^* = 0$. Then show that problem (D) has an optimal solution $\boldsymbol{w}^*$ such that $(\boldsymbol{a}^1)^\top \boldsymbol{w}^* < c_1$.

線形制御理論

4

図１はフィードバック制御系を示す．ここで $P(s)$ は制御対象，$C(s)$ は PI 補償器，r は参照入力，e は偏差である．制御対象 $P(s)$ と補償器 $C(s)$ は

$$P(s) = \frac{-s+2}{s^2+3s+2}, \quad C(s) = 1 + \frac{1}{Ts}$$

でそれぞれ与えられているとする．ただし $T > 0$ は積分時間である．以下の問いに答えよ．

(i) フィードバック制御系が安定となる T の集合を求めよ．

(ii) 参照入力を単位ランプ関数，すなわち $r(t) = t$ とする．$T > 0$ を変化させるとき，定常偏差の下限を求めよ．

(iii) $T = 1$ とする．ゲイン余裕と位相余裕をそれぞれ g_m, ϕ_m で表す．このとき g_m と $\tan\phi_m$ を計算せよ．

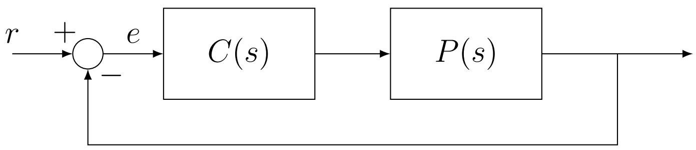

図 1 フィードバック制御系

An English Translation:

Linear Control Theory

$\boxed{4}$

A feedback control system is shown in Figure 1, where $P(s)$ is a plant, $C(s)$ is a PI controller, r is a reference input, and e is an error. The plant $P(s)$ and the controller $C(s)$ are given by

$$P(s) = \frac{-s+2}{s^2+3s+2}, \quad C(s) = 1 + \frac{1}{Ts},$$

respectively, where $T > 0$ is the integration time. Answer the following questions.

(i) Find the set of T for which the feedback control system is stable.

(ii) Let the reference input be the unit ramp signal, that is, $r(t) = t$. Calculate the infimum of the steady state error when $T > 0$ varies.

(iii) Let $T = 1$. Denote the gain margin and the phase margin by g_m and ϕ_m, respectively. Calculate g_m and $\tan \phi_m$.

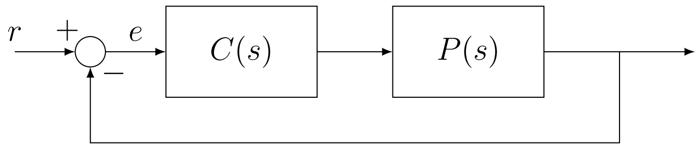

Figure 1 Feedback control system

基礎力学

$\boxed{5}$

ポテンシャル $V(r) = \dfrac{k}{r^n} \quad (k > 0, n \geqq 1)$ をもつ中心力による質量 m の粒子の散乱を考える．ここで, 力の中心から粒子までの距離を r とし, r の最小値を r_0, 力の中心のまわりの角運動量の大きさを $h(> 0)$ とし, 無限遠方での粒子の速さを v_∞ とする．以下の問いに答えよ．

(i) $r = r_0$ の時の粒子の速さ v_0 を求めよ．

(ii) 散乱角 Θ が

$$\Theta = \pi - 2\int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2 + \frac{2m}{h^2}[V(\frac{1}{u_0}) - V(\frac{1}{u})]}}$$

で与えられることを示せ．但し, $u = \dfrac{1}{r}$, $u_0 = \dfrac{1}{r_0}$ とする．

(iii) ポテンシャルが $V(r) = \dfrac{k}{r} \quad (k > 0)$ で与えられる場合の散乱の微分断面積を導出せよ．

An English Translation:

Basic Mechanics

$\boxed{5}$

Let us consider a particle of mass m scattering under the action of a central force by a potential $V(r) = \dfrac{k}{r^n}$ $(k > 0, n \geqq 1)$ where r denotes the distance between the particle and the center of the central force. Let r_0 be the minimal value of r, $h(> 0)$ be the magnitude of the angular moment around the center of the central force and v_∞ be the speed of the particle at $r = \infty$. Answer the following questions.

(i) Obtain the speed v_0 of the particle at $r = r_0$.

(ii) Show that the scattering angle Θ is given by

$$\Theta = \pi - 2\int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2 + \frac{2m}{h^2}[V(\frac{1}{u_0}) - V(\frac{1}{u})]}}$$

where $u = \dfrac{1}{r}$ and $u_0 = \dfrac{1}{r_0}$.

(iii) Derive the scattering differential cross section in the case that $V(r) = \dfrac{k}{r}$ where k is a positive constant.

基礎数学 II

6

以下の問いに答えよ．

(i) 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -7 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

のランク（階数）r を求め，$\mathrm{rank}\ B = r$ なる適当な $4 \times r$ 行列 B，$\mathrm{rank}\ C = r$ なる $r \times 4$ 行列 C への分解 $A = BC$ を計算せよ．

(ii) n 本の m 次元列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ からなる $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

のランク r は $r < \min\{m, n\}$ であるものとする．このとき，行列 A は，$\mathrm{rank}\ B = r$ なる適当な $m \times r$ 行列 B，$\mathrm{rank}\ C = r$ なる $r \times n$ 行列 C を用いて

$$A = BC$$

と分解されることを示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Answer the following questions.

(i) Find the rank r of the 4×4 matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -7 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

and a decomposition of A into a product $A = BC$, where B is a suitable $4 \times r$ matrix of rank r and C is an $r \times 4$ matrix of rank r.

(ii) Let $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ be n column vectors of dimension m and let the $m \times n$ matrix

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

be of rank r with $r < \min\{m, n\}$. Show that the matrix A can be decomposed into a product

$$A = BC,$$

where B is a suitable $m \times r$ matrix of rank r and C is an $r \times n$ matrix of rank r.