基礎数学 I

1

開区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上の関数 $y = \tan x$ の逆関数を $y = \arctan x$ と書く． $f(x) = \arctan x$ は $\mathbb{R}$ 上の実解析的関数である．以下の問いに答えよ.

(i) 自然数 $n \geqq 1$ に対して,

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xf^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを示せ. ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階導関数である.

(ii) $f(x)$ の $x = 0$ を中心としたテイラー展開を求めよ.

(iii) (ii) で求めたテイラー展開の収束半径を求めよ.

(iv) 次式を示せ.

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

An English Translation:

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

Let $y = \arctan x$ denote the inverse function of $y = \tan x$ defined on the open interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. The function $f(x) = \arctan x$ is real analytic on $\mathbb{R}$. Answer the following questions.

(i) Show that for any integer $n \geqq 1$,

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xf^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0,$$

where $f^{(n)}(x)$ is the nth derivative of $f(x)$.

(ii) Obtain the Taylor series for $f(x)$ at $x = 0$.

(iii) Find the convergence radius of the Taylor series obtained in (ii).

(iv) Show that

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

アルゴリズム基礎

2

$G=(V,E)$ を点集合 V，枝集合 E から成る単純有向グラフとする．$\mathrm{R}(u;G)$ を G において点 u から有向路で到達できる点の集合と定め，$\mathrm{dist}(u,v;G)$ を点 u から点 v へ至る G の有向路の最短の長さとする．$v \notin \mathrm{R}(u;G)$ のときは $\mathrm{dist}(u,v;G) \triangleq |V|$ と定める．有向グラフ G から有向枝 $e \in E$ を削除した有向グラフを $G-e$ と記す．s,t を V の二点とする．G は隣接リストにより貯えられているとする．以下の問いに答えよ．

(i) $t \in \mathrm{R}(s;G)$ と仮定する．点 s から点 t へ至る有向路で最短のものを求める $O(|V|+|E|)$ 時間アルゴリズムを与えよ．

(ii) $\mathrm{dist}(s,t;G-e) > \mathrm{dist}(s,t;G)$ を満たす有向枝 $e \in E$ が存在するかどうかを判定する $O(|V|+|E|)$ 時間アルゴリズムを与えよ．

(iii) $\mathrm{dist}(s,t;G) = \mathrm{dist}(t,s;G) = 3 < \mathrm{dist}(s,t;G-e) = \mathrm{dist}(t,s;G-e)$ である二点 $s,t \in V$，有向枝 $e \in E$ をもつ有向グラフ $G=(V,E)$ の例を作成せよ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ be a simple directed graph with a vertex set V and an edge set E. Let $\mathrm{R}(u; G)$ denote the set of vertices reachable from a vertex u by a directed path in G and $\mathrm{dist}(u, v; G)$ denote the shortest length of a path from a vertex u to a vertex v in G, where we set $\mathrm{dist}(u, v; G) \triangleq |V|$ if $v \notin \mathrm{R}(u; G)$. Let $G - e$ denote the directed graph obtained from G by removing a directed edge $e \in E$. Let s and t be two vertices in V. Assume that G is stored in adjacency lists. Answer the following questions.

(i) Assume that $t \in \mathrm{R}(s; G)$. Give an $O(|V| + |E|)$-time algorithm that computes a directed path with the shortest length from s to t.

(ii) Give an $O(|V| + |E|)$-time algorithm that tests whether there exists a directed edge $e \in E$ such that $\mathrm{dist}(s, t; G - e) > \mathrm{dist}(s, t; G)$.

(iii) Construct an example of a directed graph $G = (V, E)$ that contains two vertices $s, t \in V$ and a directed edge $e \in E$ such that $\mathrm{dist}(s, t; G) = \mathrm{dist}(t, s; G) = 3 < \mathrm{dist}(s, t; G - e) = \mathrm{dist}(t, s; G - e)$.

線形計画

3

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を $m \times n$ 行列とする．さらに $\boldsymbol{A}$ の第 (i,j) 成分を $A_{i,j} = -i - j$ $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ とする．

以下のパラメータ $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ をもつ線形計画問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ とパラメータ $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ をもつ線形計画問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{u}): & \text{Minimize} & \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq 1 \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}(\boldsymbol{v}): & \text{Minimize} & \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{y} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \leqq 1 \\ & & \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，$\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ の決定変数は $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ であり，$\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ の決定変数は $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ である．また，$^\top$ は転置記号を表す．

問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ のすべての最適解の集合を $S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$ とし，問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ のすべての最適解の集合を $S_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{v})$ とする．さらに，$X = \{(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{x}^* \in S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{y}^*),\ \boldsymbol{y}^* \in S_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{x}^*)\}$ とする．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ の双対問題を書け．

(ii) $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^\top$ を $u_i \leqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ であるベクトルとする．このとき，$\boldsymbol{0} \in S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$ であることを示せ．

(iii) $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$ とする．このとき，すべての $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in X$ に対して $(\boldsymbol{y}^*)^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}^* = 0$ となることを示せ．

(iv) $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ を $\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ であるベクトルとする．このとき，$S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$ を求めよ．

(v) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ とする．このとき，X を求めよ．

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Let $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ be $m \times n$ matrices. Suppose that the (i, j)th entry of $\boldsymbol{A}$ is given by $A_{i,j} = -i - j$ $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$.

Consider the following linear programming problems $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ and $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ with vectors of parameters $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ and $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, respectively.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\boldsymbol{u}):\quad & \text{Minimize} && \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} && \sum_{i=1}^{n} x_i \leqq 1 \\ & && \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(\boldsymbol{v}):\quad & \text{Minimize} && \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{y} \\ & \text{subject to} && \sum_{i=1}^{m} y_i \leqq 1 \\ & && \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

where the decision variables of $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ and $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$ are $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ and $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^m$, respectively. Here the superscript $^\top$ denotes transposition.

Let $S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$ and $S_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{v})$ denote the sets of all optimal solutions of problems $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$ and $\mathrm{Q}(\boldsymbol{v})$, respectively. Moreover, let $X = \{(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{x}^* \in S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{y}^*),\ \boldsymbol{y}^* \in S_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{x}^*)\}$.

Answer the following questions.

(i) Write out a dual problem of problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{u})$.

(ii) Let $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^\top$ be a vector such that $u_i \leqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Show that $\boldsymbol{0} \in S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$.

(iii) Suppose that $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$. Then show that $(\boldsymbol{y}^*)^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = 0$ for all $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in X$.

(iv) Let $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ be a vector such that $\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}$ and $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. Obtain $S_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{u})$.

(v) Suppose that $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$. Obtain X.

線形制御理論

4

図１はフィードバック制御系を示す．ここで $P(s)$ は制御対象，k はフィードバックゲイン，r は参照入力，e は偏差，y は出力である．制御対象 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{cs+1}{s^2+as+b}$$

で与えられるとする．ただし $a>0, b>0$ ならびに c は実定数である．以下の問いに答えよ．

(i) フィードバック制御系を安定化するゲイン k の集合を求めよ．

(ii) r を単位階段関数とする．出力 y の定常値が存在するゲイン k の集合を求め，各 k に対する出力定常値を求めよ．

(iii) r を単位階段関数とする．ゲイン k は出力 y の定常値が存在するように選ばれているとする．ある $t_0>0$ が存在して，$0<t<t_0$ において $y(t)$ が y の定常値と異符号になるような定数 c の集合を求めよ．

(iv) ゲイン k はフィードバック制御系が安定になるように選ばれているとする．p を実定数として $r(t)=e^{pt}$ となる参照入力を加えるとき，出力 y が有界となる p の集合を求めよ．

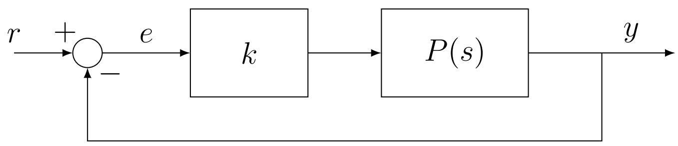

図１フィードバック制御系

An English Translation:

Linear Control Theory

$\boxed{4}$

A feedback control system is shown in Figure 1, where $P(s)$ is a plant, k is a feedback gain, r is a reference input, e is an error, and y is an output. The plant $P(s)$ is given by

$$P(s) = \frac{cs+1}{s^2+as+b},$$

where $a > 0$, $b > 0$, and c are real constants. Answer the following questions.

(i) Find the set of the gain k for which the feedback control system is stable.

(ii) Let the reference input r be the unit step signal. Find the set of the gain k for which the steady-state output exists. Moreover, calculate the steady-state output for each k in the set obtained in (ii).

(iii) Let the reference input r be the unit step signal and the gain k be chosen in such a way that the steady-state output exists. Find the set of the constant c for which there exists $t_0 > 0$ such that $y(t)$ and the steady-state output have opposite signs on $0 < t < t_0$.

(iv) Suppose that the gain k is chosen in such a way that the feedback control system is stable. Let the reference input r be written as $r(t) = e^{pt}$, where p is a real constant. Find the set of p for which the output y is bounded.

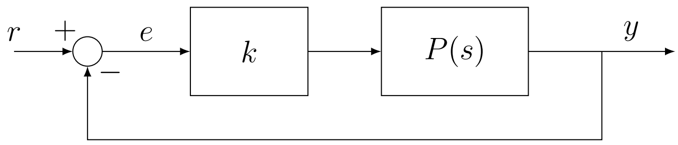

Figure 1 Feedback control system

基礎力学

$\boxed{5}$

質量 M, 半径 R_S の密度一様な球 A の中心から r $(\geqq R_S)$ の距離にある質量 m の質点の運動を考える．万有引力定数を G とする．以下の問いに答えよ.

(i) $r \geqq R_S$ のときの球 A によって生じる万有引力のポテンシャルを計算せよ.

(ii) 質点が球 A の表面上から速さ V_E で脱出可能 (無限遠点 $(r = \infty)$ に到達可能) とする．速さ V_E の最小値を求めよ.

(iii) (ii) の速度 V_E が光の速度 c で与えられるとする．そのときの球 A の半径 R_S を c, M を用いて求めよ.

An English Translation:

Basic Mechanics

5

Consider the motion of a particle of mass m at a distance r ($\geqq R_S$) from the center of a spherical body A with mass M of uniform density and radius R_S. Let Newton's gravitational constant be denoted by G. Answer the following questions.

(i) Compute the gravitational potential at $r \geqq R_S$ affected by the spherical body A.

(ii) Obtain the minimum speed V_E such that the particle can be attained at $r = \infty$, where V_E is a speed at a point of the surface of the spherical body A.

(iii) Consider that V_E obtained in (ii) is equal to the speed of light c. Obtain the radius R_S of the spherical body A in terms of c and M.

基礎数学 II

6

A を次に定める $n \times n$ 行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

また， $p(x)$ を次に定める x の多項式とする．

$$p(x) = \det(xI_n - A)$$

ここで，I_n は n 次単位行列を表す．$k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して，$n \times n$ 行列 A_k をブロック対角行列

$$A_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0_{k-1,2} & 0_{k-1,n-k-1} \\ 0_{2,k-1} & C_k & 0_{2,n-k-1} \\ 0_{n-k-1,k-1} & 0_{n-k-1,2} & I_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

とする．ただし，$0_{\ell,m}$ は $\ell \times m$ 零行列，C_k は 2×2 行列

$$C_k = \begin{pmatrix} -a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を表す．$n \times n$ 行列 A_n を対角行列 $A_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -a_n)$ とする．以下の問いに答えよ．

(i) 多項式 $p(x)$ を，定数 a と非負整数 r による ax^r の形の項の和によって表わせ．

(ii) $A = A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n$ が成り立つことを示せ．

(iii) $|j - k| > 1$ において，$A_k A_j = A_j A_k$ が成り立つことを示せ．

(iv) n を奇数とする．このとき，

$$p(x) = \det(xI_n - A_1 A_3 \cdots A_n \, A_2 A_4 \cdots A_{n-1})$$

が成り立つことを示せ．

(v) n を奇数とする．$p(x) = 0$ の根は，$n \times n$ の対称三重対角行列で定まる方程式

$$\det \begin{pmatrix} a_1 + x & -1 & & & & \\ -1 & 0 & x & & & \\ & x & a_3 + a_2 x & -1 & & \\ & & -1 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & x \\ & & & & x & a_n + a_{n-1} x \end{pmatrix} = 0$$

の根と一致することを示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let A be an $n \times n$ matrix defined as

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and let $p(x)$ be a polynomial in x defined as $p(x) = \det(xI_n - A)$, where I_n is the identity matrix of order n. For $k = 1, 2, \ldots, n-1$, let us define the $n \times n$ matrix A_k by the block diagonal matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0_{k-1,2} & 0_{k-1,n-k-1} \\ 0_{2,k-1} & C_k & 0_{2,n-k-1} \\ 0_{n-k-1,k-1} & 0_{n-k-1,2} & I_{n-k-1} \end{pmatrix},$$

where $0_{\ell,m}$ is the $\ell \times m$ zero matrix and C_k is the 2×2 matrix

$$C_k = \begin{pmatrix} -a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Define the $n \times n$ matrix A_n by the diagonal matrix $A_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -a_n)$.

Answer the following questions.

(i) Express the polynomial $p(x)$ as a sum of terms of the form ax^r, where a is a constant and r is a non-negative integer.

(ii) Show that $A = A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n$.

(iii) Show that $A_k A_j = A_j A_k$ for $|j - k| > 1$.

(iv) Let n be an odd integer. Show that $p(x) = \det(xI_n - A_1 A_3 \cdots A_n\, A_2 A_4 \cdots A_{n-1})$.

(v) Let n be an odd integer. Show that the roots of $p(x) = 0$ coincide with the roots of the equation

$$\det \begin{pmatrix} a_1 + x & -1 & & & & \\ -1 & 0 & x & & & \\ & x & a_3 + a_2 x & -1 & & \\ & & -1 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & x \\ & & & & x & a_n + a_{n-1} x \end{pmatrix} = 0,$$

determined by an $n \times n$ symmetric tridiagonal matrix.