

必須科目：数学, 電磁気学

選択科目：電気回路, 量子力学/物性基礎

目 次

数学	2
電磁気学	4
電気回路	7
量子力学/物性基礎	9

注 意 事 項

1. 解答はそれぞれ指定された答案用紙に記入せよ。
 2. すべての答案用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ。
 3. 答案用紙の裏面には記入しないこと。
 4. 答案用紙のホチキスは取り外さないこと。
 5. 選択科目(電気回路, 量子力学/物性基礎)はどちらか1科目を選択して解答すること。
-

1. 絶対積分可能な実関数 $f(t)$ ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$) に対してフーリエ変換 $F(\omega)$ が

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

と定義される。ただし、 $j^2 = -1$ である。以下の問に答えよ。なお、答えには $F(\omega)$, もしくは $F(\omega)$ の ω を適宜変更した関数を含めてよい。(150 点)

- 1) $R(\omega), X(\omega), \varphi(\omega)$ を実関数として, $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = |F(\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}$ と書いたとき, $F(-\omega)$ は $F(\omega)$ の複素共役 に等しい。

下記の□1～□4に「偶関数」「奇関数」「いずれでもない」のどれか1つを入れよ。

$$R(\omega) \text{ は } \boxed{1}, \quad X(\omega) \text{ は } \boxed{2}, \quad |F(\omega)| \text{ は } \boxed{3}, \quad \varphi(\omega) \text{ は } \boxed{4}.$$

- 2) $f(at)$ のフーリエ変換を求めよ。なお、 a は正の実数である。
- 3) $f(t - t_0)$ のフーリエ変換を求めよ。ただし、 t_0 は正の実数である。
- 4) $f(t)$ の微分 $f'(t)$ のフーリエ変換を求めよ。導出過程も書くこと。
- 5) $f(t) e^{-j\omega_0 t}$ のフーリエ変換を求めよ。 ω_0 は正の実数である。
- 6) $f(t) \cos(\omega_0 t)$ のフーリエ変換を求めよ。導出過程も書くこと。

- 7) $f(t)$ を実関数として, $g(t) = f(t) \cos(\omega_0 t)$ のフーリエ変換の絶対値 $|G(\omega)|$ の概形を $\omega \geq 0$ について描け。なお、 $f(t)$ のフーリエ変換の絶対値 $|F(\omega)|$ は $\omega \geq 0$ について図 1.1 のとおりであり、図中の ω_1, ω_2 はいずれも正の実数で ω_0 よりも十分小さいとする。

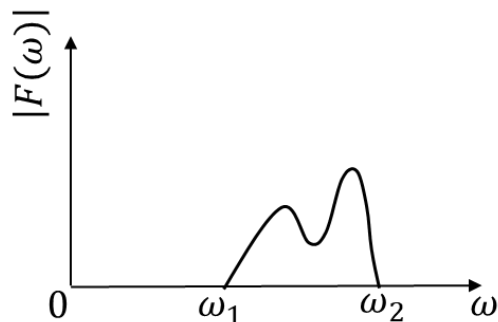


図 1.1

2. 不定積分と微分方程式に関する以下の問に答えよ。ただし、問 2) c), d) の解答は導出過程も含めて記述すること。(150 点)

1) 次の不定積分を求めよ。答のみを示せ。

a) $\int \frac{1}{x^2+4} dx$

b) $\int \frac{4x}{x^2+1} dx$

2) 式(2.1)で表される微分方程式がある。ただし、 y は x の関数とし、 $x \neq 0$ とする。また、 $\log x$ は x の自然対数を表す。このとき、以下の問に答えよ。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x+2y-4}{2x-3y+6} \quad (2.1)$$

a) 定数 a, b を用いて x, y を $k = x - a$, $m = y - b$ と書き直すと、式(2.1)の左辺は $dy/dx = dm/dk$ となる。また式(2.1)の右辺は式(2.2)のように定数項を含まない形で表すことができた。このとき、 a, b を求めよ。

$$\frac{dm}{dk} = \frac{3k+2m}{2k-3m} \quad (2.2)$$

b) 式(2.2)の左辺について、 $u = m/k$ ($k > 0$) と置いて変形すると、 dm/dk は u と k の関数となる。このとき、 dm/dk を du/dk , u , k を用いて表せ。

c) 式(2.2)の右辺についても前問 b) と同様に $u = m/k$ ($k > 0$) と置いて変形すると、式(2.2)は $du/dk = E/D$ の関係式で表すことができる。ただし、 D は u のみの関数であり、 $E = 3/k$ とする。このとき、 D を表せ。

d) 前問 c) の関係式より式(2.2)の一般解を求めると、 $F - 3 \log k + C = 0$ (C は任意定数) を得る。関数 F を u を用いて表せ。ただし、微分や積分を含まずに表すこと。

e) $x = 1$ において $y = 2$ とし、前問 d) より式(2.1)の特殊解を求めると、

$4 \tan^{-1} G - 3 \log H = 0$ を得る。関数 G と関数 H を x と y を用いて表せ。ただし、微分や積分を含まずに表すこと。

1. 設問 1)~2) を通して全ての領域で誘電率を ϵ_0 とする。(150 点)

- 1) 図 1.1 のように、単位体積当たりの電荷密度 $\rho(>0)$ が一定で、半径が a の球状に分布した電荷がある。以下の問に答えよ。
- a) 球の中心 O から距離 $r(>0)$ の点における電界の大きさ E を求め、 r に対する変化の概略をグラフに示せ。
- b) 球の中心 O から距離 r の点における電位 V を求め、 r に対する変化の概略をグラフに示せ。ただし、無限遠を電位の基準 ($V=0$) とする。
- c) 図 1.1 のように球の中心 O を原点として直交座標の x, y, z 軸を定めたとき、 $r < a$ の位置における x, y, z 各方向の電界成分 E_x, E_y, E_z を求めよ。

原点から点 (x, y, z) 方向の単位ベクトルが $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$ であることを利用せよ。ただし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。

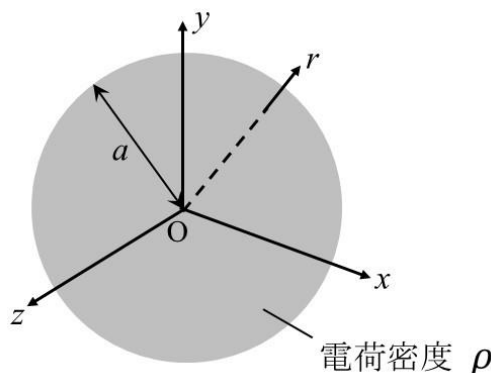


図 1.1

2)

- a) 図 1.2 のように、図 1.1 の球状に分布した電荷に、位置 $(d, 0, 0)$ を中心とする半径 b の球状に分布した電荷を追加した。ただし、 $d > 0$ および $b + d < a$ であり、電荷を追加した領域の単位体積当たりの電荷密度は一定値 $\rho + \rho_1$ になった。新しく電荷を追加した領域内部での x, y, z 各方向の電界成分 E_x, E_y, E_z を求めよ。
- b) 図 1.3 のように、図 1.1 の球状に分布した電荷のうち、位置 $(d, 0, 0)$ を中心とする半径 b の球内の電荷を取り去ると、この領域内部では電界の方向と大きさが一定となる。その方向と大きさを求めよ。ただし、a)と同じく $d > 0$ および $b + d < a$ とする。

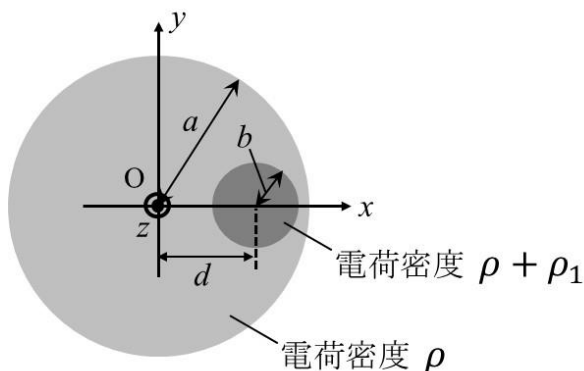


図 1.2

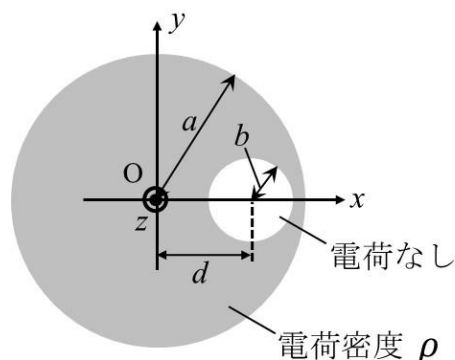


図 1.3

2. 直流電流の作る磁界に関する, 以下の設問 1) および 2) に答えよ。(150 点)

- 1) x - y 平面上で, 原点 O を中心とする半径 a の円周を直流電流 I が流れている。この時, z 軸上の点 $P(0, 0, z_1)$ における磁束密度 \mathbf{B}_1 を求めたい。その導出に関する以下の文章の空欄①～⑥を, 適切な式または言葉で埋めよ (同一の番号には同一の式または言葉が入る)。なお, 真空の透磁率を μ_0 とする。本問では, ベクトルはボールド体で表記するものとする。

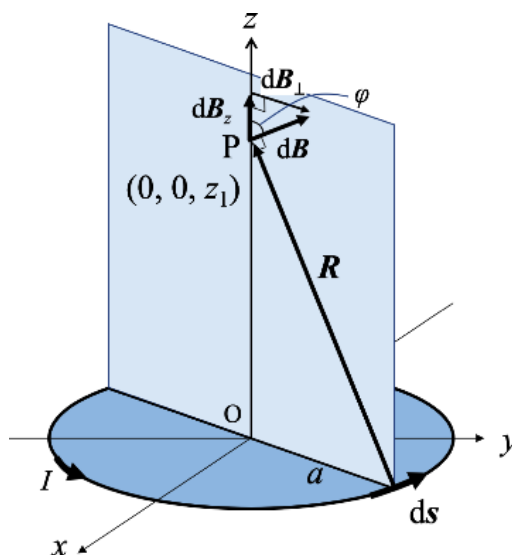


図 2.1

「図 2.1 のように円電流の微小線素ベクトル $d\mathbf{s}$ が, P の位置に作る磁束密度を $d\mathbf{B}$ とし, これを $d\mathbf{B}_z$ とそれに垂直な成分 $d\mathbf{B}_\perp$ に分け, $d\mathbf{B}_z = |d\mathbf{B}_z|$ とする。 $d\mathbf{B}_\perp$ については円電流全体からの寄与を合計すると消しあうので, 積分すると $|\mathbf{B}_\perp| = (\text{①})$ となる。次に $d\mathbf{B}_z$ を求める。微小線素 $d\mathbf{s}$ から点 P に向かうベクトルを \mathbf{R} とし, その大きさ R を $R = |\mathbf{R}|$ と定義すると, (②) の法則により, 外積を \times で表すものとして $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{R}}{R^3}$ である。 $d\mathbf{s}$ と \mathbf{R} は直交しているので, $d\mathbf{B}$ の大きさ $dB = |d\mathbf{B}|$ を μ_0, I, a, z_1 および $ds = |d\mathbf{s}|$ を用いて表すと $dB = (\text{③})$ となる。一方, $d\mathbf{B}$ と z 軸のなす角 φ につき, a および z_1 を用いると, $\cos \varphi = (\text{④})$ となる。そこで μ_0, I, a, z_1 および ds を用いて $d\mathbf{B}_z = (\text{⑤})$ を得る。⑤を円電流全体について積分することにより, μ_0, I, a, z_1 を用いて \mathbf{B}_1 の z 成分 B_z を $B_z = (\text{⑥})$ と表すことができる。よって, 直交座標成分で書くと $\mathbf{B}_1 = (\text{①}, \text{①}, \text{⑥})$ と, \mathbf{B}_1 が求められた。」

- 2) 図 2.2 のように, 断面が長方形のコアに細い導線が巻かれた環状コイルがあり (図の破線部分にもコイルは存在する), その内半径は a , 外半径は b , 厚さは h であるとする。コアの表面に沿って, 導線は十分に密に巻かれており, 巻き数は全体で N である。このとき, 以下の設問に答えよ。ただし, コアの透磁率を μ とする。

- a) コアの内側 ($a < r < b, 0 \leq \theta < 2\pi, -h/2 < z < h/2$) では, 図 2.2 のような円柱座標系(r, θ, z)を用いると, コイルに流れる直流電流 J による磁界が

$$B_r = B_z = 0, B_\theta = \mu N J / (2\pi r)$$

となることを示せ。

- b) コアの外側では, コイルに流れる直流電流 J による磁界がゼロとなることを説明せよ。

- c) コアの断面 ($a < r < b, -h/2 < z < h/2$) を貫く磁束 Φ は, 次式で表されることを示せ。ただし, $\ln(x)$ は x の自然対数を表す。

$$F = \frac{\mu N J h}{2\rho} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- d) 環状コイル全体に蓄えられた磁界のエネルギー U を求めよ。
- e) この環状コイルの自己インダクタンス L を求めよ。

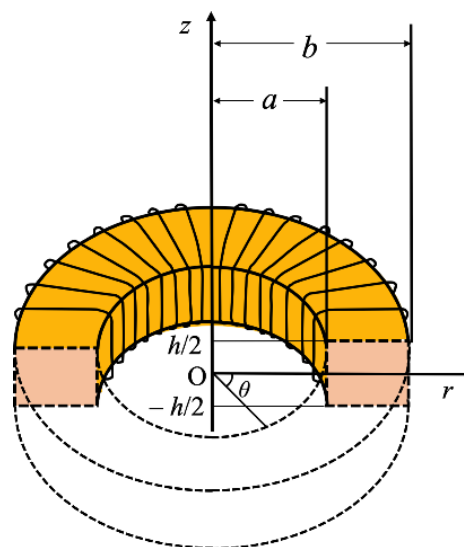


図 2.2

1. 図 1.1 の回路について以下の問に答えよ。回路の抵抗を R 、キャパシタンスを C とする。ただし、 $t = 0$ におけるキャパシタの電荷を 0 とする。また図 1.2, 図 1.3 の時間軸において、黒丸は範囲の端を含み、白丸は範囲の端を含まないものとする。(100 点)

- 1) 回路の両端 ab に印加する電圧を $v(t)$ 、キャパシタの電圧を $v_c(t)$ とする。回路方程式を $R, C, v(t), v_c(t)$ を用いて表せ。
- 2) $v(t)$ として図 1.2 に示す電圧を回路の両端 ab に印加した。回路方程式を解いて、 $t \geq 0$ における $v_c(t)$ を求めよ。ただし、 V は正とする。
- 3) 十分に時間が経ったときのキャパシタの静電エネルギーを求めよ。
- 4) $v(t)$ として図 1.3 に示す $2V$ から V に変化する電圧を回路の両端 ab に印加した。 $v_c(t)$ を求めよ。ただし、 $t = 0$ におけるキャパシタの電荷を 0 とし、 V および a は正とする。
- 5) 問 4)において $t \geq a$ のときキャパシタが放電した。 a, R, C に成り立つ関係式を求めよ。
- 6) 問 4)において R, C を調整したところ、 $t \geq a$ において回路に流れる電流が 0 となった。 $t = 0$ から a までに、抵抗 R で消費された電力量を C, V を用いて求めよ。
- 7) 問 6)において $t = 0$ から a までに端子 ab から供給された電力量を C, V を用いて求めよ。

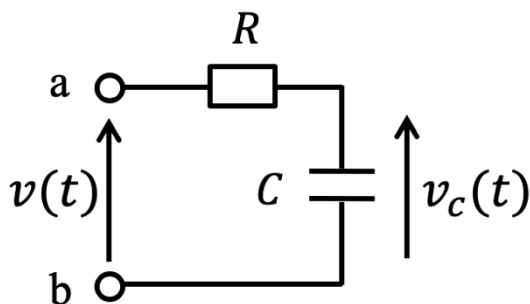


図 1.1

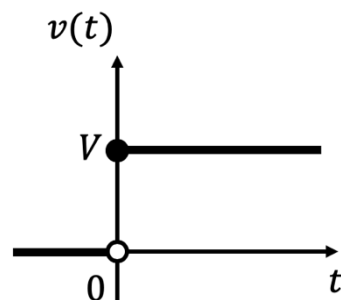


図 1.2

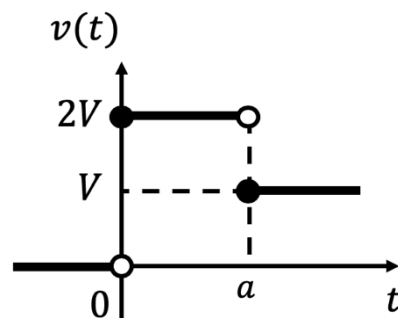


図 1.3

2. 理想オペアンプを用いた回路について以下の問に答えよ。ただし、理想オペアンプの電圧利得は無限大、入力インピーダンスは無限大、出力インピーダンスはゼロである。また、 v_A , v_B , v_C , v_D は交流電圧, i_A , i_B , i_C は交流電流, ω は角周波数, j は虚数単位とする。なお、問 3), 4), 6) については答だけでなく導出過程も示せ。(100 点)

- 1) 図 2.1 の増幅回路において、入力 v_A , v_B , v_C と出力 v_D の間の関係式を求めよ。
- 2) 図 2.1 の増幅回路の入力インピーダンス v_A/i_A , v_B/i_B , v_C/i_C を求めよ。
- 3) 図 2.2 のフィルタ回路の周波数伝達関数 $H(j\omega) = v_B/v_A$ を求めよ。
- 4) 図 2.2 のフィルタ回路の出力（右側端子）を図 2.3 のフィルタ回路の入力（左側端子）に接続したとき、角周波数によらず常に $v_C = v_A$ となるための条件式を, C , C' , R , R' を用いて書き表せ。
- 5) 図 2.4 の回路は入力電圧の時間微分に比例した電圧を出力する。比例定数 k を求めよ。
- 6) 図 2.5 の回路の入力インピーダンス $Z_{in} = v_A/i_A$ をインピーダンス Z_1 , Z_2 , Z_3 で表せ。
- 7) 図 2.5 のインピーダンス Z_2 の素子をキャパシタンス C のキャパシタとし、インピーダンス Z_1 , Z_3 の素子をそれぞれ抵抗 R_1 , R_3 とすることで、入力インピーダンス $Z_{in} = j\omega L_e$ が得られる。 L_e を求めよ。

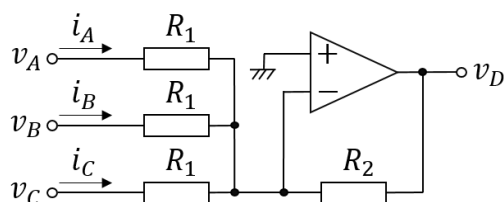


図 2.1

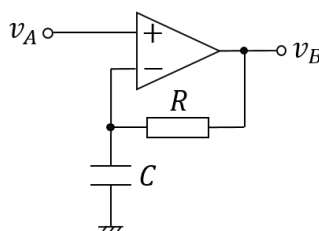


図 2.2

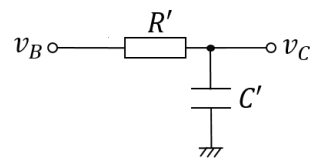


図 2.3

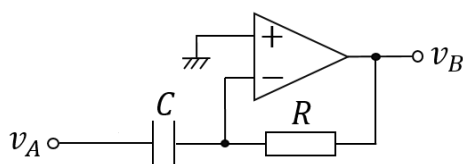


図 2.4

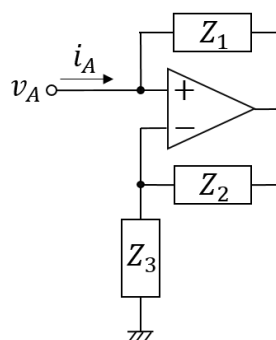


図 2.5

1. 図 1.1 のような一次元のポテンシャル

$$U(x) = \begin{cases} +\infty & (\text{領域 0: } x < 0) \\ -U_0 & (\text{領域 1: } 0 \leq x \leq a) \quad (U_0 > 0) \\ 0 & (\text{領域 2: } a < x) \end{cases}$$

の中に閉じ込められた質量 m , エネルギー E
($-U_0 < E < 0$) の粒子を考える。(100 点)

1) 以下の文中の空欄 ① ~ ⑫ に入る適切な数式を記せ:

領域 1, 2 で波動関数をそれぞれ $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$ と表すとき, それぞれの領域で成り立つシュレディンガー方程式は, プランク定数を h , $\hbar = h/(2\pi)$ とすると,

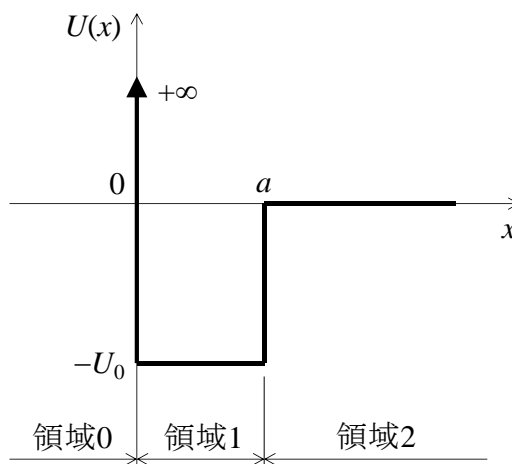


図 1.1

$$\text{領域 1: } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_1(x) - \text{①} = E \Psi_1(x), \dots (1.1)$$

$$\text{領域 2: } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_2(x) = \text{②} \dots (1.2)$$

となる。(1.1)を変形すると,

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi_1(x) = -k_1^2 \Psi_1(x) \dots (1.3)$$

となる。ただし,

$$k_1 = \text{③} \dots (1.4)$$

である。したがって $\Psi_1(x)$ の一般解は, 定数 A_1 と B_1 を用いて,

$$\Psi_1(x) = A_1 \sin(k_1 x) + B_1 \times \text{④} \dots (1.5)$$

と書ける。一方, (1.2)を変形すると,

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi_2(x) = k_2^2 \Psi_2(x) \dots (1.6)$$

となる。ただし,

$$k_2 = \text{⑤} \dots (1.7)$$

である。したがって $\Psi_2(x)$ の一般解は, 定数 A_2 と B_2 を用いて,

$$\Psi_2(x) = A_2 \times \text{⑥} + B_2 e^{k_2 x} \dots (1.8)$$

と書ける。ここで、 $x < 0$ で $U(x) = \infty$ であるから、波動関数の連続条件より、

$$\Psi_1(x=0) = \boxed{\textcircled{7}} \cdots (1.9)$$

でなければならない。したがって(1.5)で $B_1 = \boxed{\textcircled{8}} \cdots (1.10)$ である。よって、

$$\Psi_1(x) = \boxed{\textcircled{9}} \cdots (1.11)$$

となる。一方、領域 2 では

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_2(x) = \boxed{\textcircled{10}} \cdots (1.12)$$

でなければならないので、(1.8)で $B_2 = \boxed{\textcircled{11}} \cdots (1.13)$ となる。よって、

$$\Psi_2(x) = \boxed{\textcircled{12}} \cdots (1.14)$$

が得られる。

2) $x=a$ で $\Psi_1(x)$ と $\Psi_2(x)$ が満たすべき関係を記し、それを用いて定数 A_1 , B_1 , A_2 , B_2 を消去し、 k_1 , k_2 , a の間に成り立つ関係式を求めよ。

3) エネルギー $E = -U_0/2$ の固有状態が存在するために必要な最小の a を、 m , \hbar , U_0 を用いて表せ。計算の過程も示すこと。

2. 熱平衡状態にある真性半導体について考える。エネルギー E の状態を電子が占有する確率を表すフェルミ・ディラック分布関数 $F(E)$ は次のように与えられる。

$$F(E) = \frac{1}{1 + \exp[(E - E_F)/(kT)]}$$

ここで、 E_F はフェルミ準位、 k はボルツマン定数、 T は絶対温度である。 $T \neq 0$ として、以下の問に答えよ。(100点)

1) $E = E_F$ における $F(E)$ の傾き $[\partial F(E)/\partial E]_{E=E_F}$ を求めよ。

答案用紙の図 2.1 および図 2.2 のグラフは、ある温度 $T_1 (> 0)$ における $F(E)$ の概形である。ただし、横軸は $E - E_F$ 、縦軸は占有確率である。

2) 問 1)の結果を考慮し、温度 $T_2 = 2T_1$ における $F(E)$ の概形を図 2.1 に描け。

3) エネルギー E の状態を正孔が占有する確率 $F_h(E)$ を E 、 E_F 、 k 、 T を用いて表せ。また、温度 T_1 における $F_h(E)$ の概形を図 2.2 に描け。

4) 電子の占有確率 $F(E)$ において、分母の指数関数の項が 1 に比べて十分に大きいとき、 $F(E)$ をボルツマン分布関数に近似できる。正孔の占有確率 $F_h(E)$ に対しても同様に考えることができる。 $F_h(E)$ をボルツマン分布関数に近似せよ。

以下、 $F_h(E)$ をボルツマン分布関数に近似して考える。エネルギー E における正孔密度 $p(E)$ は、 $p(E) = G_h(E)F_h(E)$ で与えられる。ここで、 $G_h(E)$ は価電子帯の正孔の状態数を表す状態密度関数(単位エネルギー、単位体積あたり)であり、 $G_h(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_h^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (E_V - E)^{1/2}$ である。 m_h^* は正孔の状態密度有効質量、 E_V は価電子帯上端のエネルギーである。また、プランク定数を h とすると、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ である。

5) $p(E)$ が最大となるエネルギー E_1 を導出過程も含めて答えよ。

6) 価電子帯の正孔密度 p は次の式で与えられる。

$$p = \int_{-\infty}^{E_V} p(E) dE = 2 \left(\frac{m_h^* kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \times \exp \left(\boxed{\text{①}} \right)$$

空欄 $\boxed{\text{①}}$ にあてはまる数式を導出過程も含めて答えよ。必要ならば下記の積分公式を用いてもよい。

$$\int_0^{\infty} x^{1/2} \exp(-x) dx = \frac{\pi^{1/2}}{2}$$