2021年度10月期・2022年度4月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学専攻

入学者選抜試験問題

【専門科目】

2021年7月17日 13:00 – 14:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 専門科目は全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から1題を選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の若い順に1題のみを採点対象とする。

(5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答に際して裏面を用いる場合は解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　複素平面 $\mathbb{C}$ において $D = \{z \mid |z| \le 1\}$ とし，複素関数 $f(z)$ は閉集合 D 上で正則であるとする．$z \in \mathbb{C}$ を極座標により $z = re^{i\theta}$ と表し，$f(z)$ を実部と虚部に分けて $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ と表す．このとき $\displaystyle\int_0^{2\pi} u(1,\theta)\,d\theta = 0$ が満たされていれば，

$$u(1,\theta) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_0^{2\pi} \cot\frac{\varphi-\theta}{2}\,v(1,\varphi)\,d\varphi$$

が成立することを証明せよ．ただし i は虚数単位を表し，p.v. は Cauchy の意味での積分の主値を意味する．

問 2　$a < b$ とし，$\mathrm{Lip}\bigl([a,b]\bigr)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の Lipschitz 連続な実数値関数全体のつくる線型空間とする．$f \in \mathrm{Lip}\bigl([a,b]\bigr)$ に対して

$$(*) \qquad \|f\| := \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{\substack{x,y\in[a,b]\\ x\neq y}} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$$

とする．このとき以下の (1), (2) に答えよ．

(1) $(*)$ で定められる $\|\ \ \|$ は，線型空間 $\mathrm{Lip}\bigl([a,b]\bigr)$ のノルムであることを証明せよ．

(2) $\mathrm{Lip}\bigl([a,b]\bigr)$ はノルム $(*)$ に関して Banach 空間であることを証明せよ．

2 次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　常微分方程式の初期値問題について，次の (1), (2) に答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y-1}{\cos^2 x} = 0$, $y(0) = 2$ を満たす $y(x)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{dy}{dx} + \sin(\pi y) = 0$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$ を満たす $y(x)$ は，$0 < y(x) < 1$ を満たすことを示せ．

問 2　Γ は xy 平面上の単純閉曲線で，D は Γ で囲まれた単連結領域とする．2 つの実数値関数 $P(x,y)$ と $Q(x,y)$ は D 上で定義された C^1 級関数で，D の各点において $\dfrac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$ を満たしている．D 内に点 (x_0, y_0) を 1 つ固定し，この点を始点として点 $(x,y) \in D$ を終点とする D に含まれる滑らかな曲線を $\ell(x,y)$ と表す．このとき次の (1), (2) に答えよ．

(1) 曲線 $\ell(x,y)$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_{\ell(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ の値は，2 点 (x_0, y_0) と (x,y) のみに依存し，曲線 $\ell(x,y)$ の採り方に依存しないことを示せ．

(2) (1) の線積分により，D を定義域とする関数 $\varphi(x,y)$ を

$$\varphi(x,y) = \int_{\ell(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

によって定める．このとき偏導関数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ を計算せよ．

問 3　$a < b$ とし，$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上の C^2 級関数とする．この区間 $[a,b]$ を N 等分して $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ (ただし $x_0 = a$, $x_N = b$) を定め，定積分

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

の値を (複合型) 台形公式によって求めることを考える．このとき次の (1), (2) に答えよ．

(1) この定積分 I に対する (複合型) 台形公式を具体的に記せ．

(2) (1) によって計算される定積分 I の近似値を I_N とする．このとき，N に依存しない定数 C が存在して $|I - I_N| \leq \dfrac{C}{N^2}$ が成立することを示せ．

問 4　複素平面 $\mathbb{C}$ において，$z \neq 0$, $z \neq 1$ に対して $f(z) = \sqrt{z(z-1)}$ とする．ξ, η は実数で $0 < \xi < \dfrac{1}{2}$, $\eta > 0$ を満たすとき，

$$\lim_{\eta \to +0} \bigl(f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)\bigr)$$

を計算せよ．ただし i は虚数単位を表している．

3

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4x^2 - \pi^2}\, dx$$

問 2　xyz 空間において $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{4}\right)^2$ とし、曲面 S を

$$S = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 1,\ z > 0\}$$

によって定める．このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} yz \\ x^3(z+1) \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$ に対して曲面積分

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\, dS$$

の値を求めよ．ここに、dS は曲面 S の面積要素である．

問 3　n は正の整数とする．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は $\mathbb{R}^n$ の元とし，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の第 i 成分をそれぞれ $u_i, v_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ とする．n 次正方行列 W の第 (i,j) 成分 w_{ij} を $w_{ij} = u_i v_j$ によって与え，$2n$ 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} I_n & W \\ W^T & I_n \end{pmatrix}$$

とする．ただし，I_n は n 次単位行列，W^T は W の転置行列である．このとき次の問に答えよ．

(1) A が正則行列となるために $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が満たすべき必要十分条件を求めよ．

(2) A が正則行列のとき，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{2n}$ を与えて連立方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{$*$}$$

の近似解を Jacobi 法により求めることを考える．初期値 $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$ を与えて k 回反復後の Jacobi 法による値を $\boldsymbol{x}^{(k)}$ と表すとき，Jacobi 法のアルゴリズムを記せ．

(3) A は正則行列とする．(2) で与えた Jacobi 法による値 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ が $k \to \infty$ のとき連立方程式 $(*)$ の解に収束するために，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が満たすべき必要十分条件を求めよ．ただし，すべての計算は厳密に行われるものとする．

4

次の各問のそれぞれに答えよ．ただしボルツマン定数を k と表す．

問 1. 相互作用のない N 個の分子からなり，絶対温度 T の熱平衡状態にある系を考える．以下の問に答えよ．

(1) 各分子がエネルギー $0, \varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon$ である微視的 4 状態をとる場合の，この系の 1 分子あたりの比熱を C とする．C を求めよ．

(2) 各分子がエネルギー $0, \varepsilon$ である微視的 2 状態をとる場合の，この系の 1 分子あたりの比熱を C' とする．C' と (1) で求めた C の関係を求めよ．また，その関係が成立する理由を物理的に説明せよ．

問 2. 質量 m の単原子分子 N 個からなる理想気体が，体積 V の容器中において，絶対温度 T の熱平衡状態にある系を考える．プランク定数を h と表す．以下の問に答えよ．

(1) この理想気体のヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ．

(2) この理想気体の化学ポテンシャル $\mu = \left(\dfrac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V}$ を求めよ．

次にこの理想気体を，ある吸着面に絶対温度 T の熱平衡状態で吸着させることを考える．この吸着面には M 個の吸着点が存在し，各吸着点は 1 個の気体分子を吸着できる．各吸着点は，気体分子が吸着していないときは 0，吸着しているときは $-\varepsilon$ のエネルギーを持つ．吸着点間の相互作用は無視できる．また，吸着点数 M は理想気体の分子数 N に比べて十分小さく $M \ll N$ とする．

(3) この理想気体を化学ポテンシャル μ の粒子浴と考えることで，この吸着面の 1 つの吸着点の大分配関数を k, T, ε, μ を用いて表せ．

(4) この吸着面の平均吸着分子数を $k, h, m, N, T, V, M, \varepsilon$ を用いて表せ．
また，その概形を，ε が正の場合と負の場合について，それぞれ T の関数としてグラフに描け．

5

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1

2次元平面 xy 上の流速場 $(u(x,\,y),\,v(x,\,y))$ が，ある関数 $f(x,\,y)$ を用いて

$$u=\frac{\partial f}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial f}{\partial x}$$

と表されている．a を正の定数として，以下の問に答えよ．

(1) xy 平面上の流線に沿って $f(x,\,y)$ が一定値をとることを示せ．

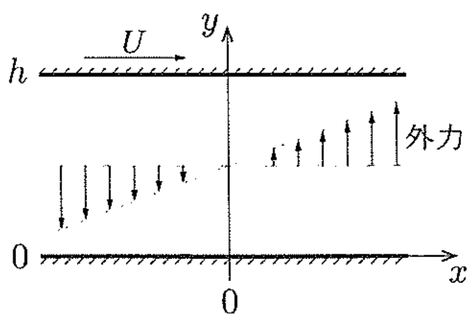
(2) f が $f(x,\,y)=ax^2y^2$ で与えられるとき，点 $(x,\,y)=(1,\,1)$ における流体粒子の加速度の x 方向成分を求めよ．

(3) $f(x,\,y)$ が微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{a}{x^2+y^2+1}$$

を満たしているとき，$(x,\,y)=(0,\,0)$ を中心とする半径1の円周に沿う循環 Γ を計算せよ．

問 2



2次元平面 xy 上で直線 $y=0$ および直線 $y=h$ に挟まれた領域を占める非圧縮性粘性流体の定常流を考える．境界 $y=0$ は静止しており，境界 $y=h$ は x の正方向に一定速度 U で運動しているとする．a を正の定数として，流体の各点には $(0,\,ax)$ の外力が働いている（右図）．流れは x 軸に平行であり，流速の x 方向成分 u は y のみの関数であるとする．また，流体の圧力 p は $(x,\,y)$ の関数であり，$y=0$ において $p=p_0$ を満たすとする．ここで p_0 は定数である．流体の粘性係数を μ として，以下の問に答えよ．

(1) u と圧力勾配の x 方向成分 $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ が満たす関係を記せ．

(2) y 方向の力のつり合いから p を x，y，a，p_0 を用いて表せ．

(3) u を y，h，U，a，p_0，μ のうち必要なものを用いて表せ．

(4) y 軸に平行な任意の直線を横切る流体の流量が0となるとき，h，U，a，μ の間に成り立つ関係を求めよ．