応用数学

1

$R>0$ とし，図のように複素平面において，$C_1(R)$ を iR を始点とし 0 を終点とする線分，$C_2(R)$ を 0 を始点とし $(1+i)R$ を終点とする線分，$C_3(R)$ を $(1+i)R$ を始点とし iR を終点とする線分とする．$f(z)=e^{\frac{1}{2}z^2}$ $(z\in\mathbb{C})$ とおき，

$$A=\int_0^\infty \cos(t^2)dt,\quad B=\int_0^\infty \sin(t^2)dt$$

とおく． 以下の問いに答えよ．なお，

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

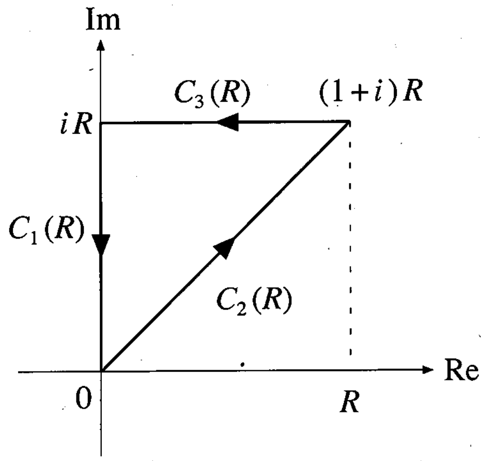
は用いてよい．

(i) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{C_1(R)} f(z)dz$ を求めよ．

(ii) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{C_2(R)} f(z)dz$ を A と B とを用いて表せ．

(iii) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{C_3(R)} f(z)dz=0$ を示せ．

(iv) A と B を求めよ．



An English Translation:

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

Let $R > 0$ and let $C_1(R)$, $C_2(R)$ and $C_3(R)$ be the paths from iR to 0, from 0 to $(1+i)R$, and from $(1+i)R$ to iR, respectively, in the complex plane, as shown in the figure. Define $f(z) = e^{\frac{1}{2}z^2}$ $(z \in \mathbb{C})$ and let

$$A = \int_0^\infty \cos(t^2)dt, \quad B = \int_0^\infty \sin(t^2)dt.$$

Answer the following questions. Here you can use the equality

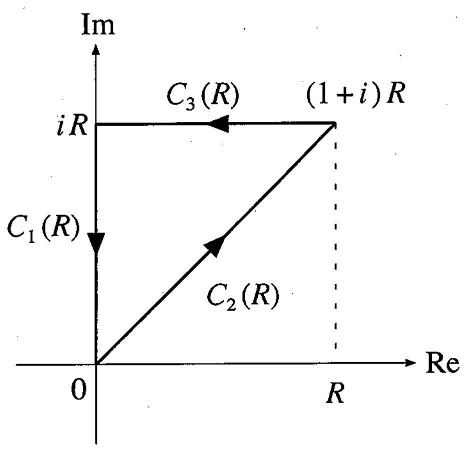
$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(i) Obtain $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_1(R)} f(z)dz$.

(ii) Write $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_2(R)} f(z)dz$ in terms of A and B.

(iii) Show that $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_3(R)} f(z)dz = 0$.

(iv) Obtain A and B.



グラフ理論

$\boxed{2}$

$\mathbb{R}_+$ を非負実数の集合とし，$N = [G, w]$ を単純連結無向グラフ $G = (V, E)$，枝重み $w : E \to \mathbb{R}_+$ からなるネットワークとする．$|V| = n \geqq 2$ とする．V の分割 $\pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ に対し，異なる節点集合 $V_i, V_j \in \pi$ 間をつなぐ枝の集合を $E(\pi)$ と記す．V のすべての分割の集合を Π と記す．

N に対しクラスカルのアルゴリズムを用いて求めた最小木を $T = (V, \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\})$ とする．ここで，a_i は木の枝として i 番目に選ばれた枝とする．森 $T_0 = (V, \emptyset)$，$T_i = (V, \{a_1, a_2, \ldots, a_i\})$，$i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対し，$\pi_i \in \Pi$，$i = 0, 1, \ldots, n-1$ を森 T_i の連結成分が作る節点集合 V の分割と定める．$\pi_{n-1} = \{V\}$ である．各分割 $\pi \in \Pi$ に対する実数値 $y(\pi)$ を以下のように定める．

$y(\pi_0) = w(a_1),$

$y(\pi_i) = w(a_{i+1}) - w(a_i),\ i = 1, 2, \ldots, n-2,$

$y(\pi) = 0,\ \forall \pi \in \Pi - \{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-2}\}.$

以下の問いに答えよ．

(i) N に対する最小木を求めるクラスカルのアルゴリズムを記述せよ．

(ii) 各枝 $e \in E$ に対し次を満たす添え字 $j(e) \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ が存在することを証明せよ．

$e \in E(\pi_i),\ \forall i \leqq j(e),$

$e \notin E(\pi_i),\ \forall i > j(e).$

(iii) 各 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対し $w(a_i) \leqq w(e),\ \forall e \in E(\pi_{i-1})$ が成り立つことを証明せよ．

(iv) 各 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対し $\displaystyle\sum_{j=0,1,\ldots,i-1} y(\pi_j) = w(a_i)$ が成り立つことを証明せよ．

(v) 各枝 $e \in E$ に対し $\displaystyle\sum_{\pi \in \Pi:\ e \in E(\pi)} y(\pi) \leqq w(e)$ が成り立つことを証明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $\mathbb{R}_+$ be the set of non-negative reals, and $N = [G, w]$ be a network that consists of a simple connected graph $G = (V, E)$ and an edge weight $w : E \to \mathbb{R}_+$, and let $|V| = n \geqq 2$. For a partition $\pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ of V, let $E(\pi)$ denote the set of edges between distinct vertex subsets $V_i, V_j \in \pi$. Denote by Π the set of all partitions of V.

Let $T = (V, \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\})$ be a minimum spanning tree obtained from N by Kruskal's algorithm, where a_i is added to T as the i-th tree edge. For forests $T_0 = (V, \emptyset)$ and $T_i = (V, \{a_1, a_2, \ldots, a_i\})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, let $\pi_i \in \Pi$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ be the partition formed by the connected components of forest T_i, where $\pi_{n-1} = \{V\}$. Choose a real value $y(\pi)$ for each partition $\pi \in \Pi$ as follows.

$y(\pi_0) = w(a_1)$,

$y(\pi_i) = w(a_{i+1}) - w(a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$,

$y(\pi) = 0$, $\forall \pi \in \Pi - \{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-2}\}$.

Answer the following questions.

(i) Give a description of Kruskal's algorithm to find a minimum spanning tree of N.

(ii) Prove that each edge $e \in E$ admits an index $j(e) \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ which satisfies the conditions:

$e \in E(\pi_i)$, $\forall i \leqq j(e)$,

$e \notin E(\pi_i)$, $\forall i > j(e)$.

(iii) Prove that $w(a_i) \leqq w(e)$, $\forall e \in E(\pi_{i-1})$ holds for each $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

(iv) Prove that $\displaystyle\sum_{j=0,1,\ldots,i-1} y(\pi_j) = w(a_i)$ holds for each $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

(v) Prove that $\displaystyle\sum_{\pi \in \Pi:\ e \in E(\pi)} y(\pi) \leqq w(e)$ holds for each edge $e \in E$.

オペレーションズ・リサーチ

3

$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqq x_i \leqq 1 \ (i = 1, \ldots, n)\}$ とする．さらに，関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は次の不等式を満たす連続的微分可能な関数とする．

$$\begin{aligned} &\alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y}) \\ &\quad \geqq \ f(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) + \alpha(1-\alpha)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \ \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in [0,1] \end{aligned}$$

ただし，$^\top$ は転置記号である．

次の非線形計画問題 P を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{Minimize} & -f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \Omega \end{array}$$

さらに，パラメータ $\boldsymbol{z} \in \Omega$ をもつ次の凸２次計画問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$ を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}(\boldsymbol{z}): & \text{Minimize} & -\nabla f(\boldsymbol{z})^\top \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \Omega \end{array}$$

ただし，問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$ の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ である．任意の $\boldsymbol{z} \in \Omega$ に対して，問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$ は唯一の最適解 $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})$ をもつ．

以下の問いに答えよ．

(i) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) \geqq \nabla f(\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

(ii) 問題 $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$ のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を書け．

(iii) 任意の $\boldsymbol{z} \in \Omega$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$f(\boldsymbol{z}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})) \leqq -(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})-\boldsymbol{z})^\top(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})-\boldsymbol{z})$$

(iv) 次の命題 (A) について，真であれば証明を，偽であれば反例を与えよ．

(A) $\boldsymbol{z} \in \Omega$ かつ $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$ であれば，$\boldsymbol{z}$ は問題 P の局所的最適解である．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqq x_i \leqq 1 \ (i = 1, \ldots, n)\}$, and let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a continuously differentiable function satisfying

$$\begin{aligned} &\alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y}) \\ &\quad \geqq f(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) + \alpha(1-\alpha)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \ \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in [0,1], \end{aligned}$$

where the superscript $^\top$ denotes the transposition of a vector.

Consider the following nonlinear programming problem P.

$$\begin{aligned} \text{P} : \ \ &\text{Minimize} \quad -f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{subject to} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Moreover, consider the following convex quadratic programming problem $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$ with a vector $\boldsymbol{z} \in \Omega$ of parameters:

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(\boldsymbol{z}) : \ \ &\text{Minimize} \quad -\nabla f(\boldsymbol{z})^\top \boldsymbol{x} + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) \\ &\text{subject to} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \end{aligned}$$

where $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ represents decision variables of $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$. For any $\boldsymbol{z} \in \Omega$ problem $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$ has a unique optimal solution $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})$.

Answer the following questions.

(i) Show that the following inequality holds for any $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) \geqq \nabla f(\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).$$

(ii) Write out Karush-Kuhn-Tucker conditions for problem $\mathrm{Q}(\boldsymbol{z})$.

(iii) Show that the following inequality holds for any $\boldsymbol{z} \in \Omega$.

$$f(\boldsymbol{z}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})) \leqq -(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z})^\top(\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z}).$$

(iv) Prove or disprove the following proposition (A), giving a proof or a counterexample.

(A) If $\boldsymbol{z} \in \Omega$ and $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$, then $\boldsymbol{z}$ is a local optimal solution to problem P.

現代制御論

4

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^3$ は状態ベクトル，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$x_0 \in \mathbb{R}^3$ は初期状態とする．また，

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とし，$^\top$ は転置をあらわす．以下の問いに理由とともに答えよ．

(i) A のすべての実固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(ii) このシステムの可制御性を判定せよ．

(iii) $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ とする．このとき，$x(\tau) = -2x_0$ を満たす $\tau > 0$ および $u(t)$ が存在するか判定せよ．

(iv) 状態フィードバック $u(t) = k^\top x(t)$ がシステムを内部安定化するような $k \in \mathbb{R}^3$ が存在するか判定せよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \ x(0) = x_0$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^3$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, and $x_0 \in \mathbb{R}^3$ is an initial state. Let

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

and $^\top$ denotes the transposition. Answer the following questions. Show the derivation process.

(i) Find all the real eigenvalues of A and their corresponding eigenvectors.

(ii) Determine the controllability of the system.

(iii) Let $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$. Then, determine whether there exist $\tau > 0$ and $u(t)$ for which $x(\tau) = -2x_0$ holds.

(iv) Determine whether there exists $k \in \mathbb{R}^3$ such that the state feedback control $u(t) = k^\top x(t)$ internally stabilizes the system.

物理統計学

5

質量 m の粒子が $-m\gamma V(t)$ の抵抗力を受けて 1 次元の自由なブラウン運動をしているとする．ここで，γ は正の定数，$V(t)$ は時刻 t における粒子の速度とする．$V(t)$ はオルンシュタイン・ウーレンベック過程で表される．$V(t_0) = v_0$ という条件付きの $V(t)$ の確率密度関数（遷移確率）は

$$p(v, t|v_0, t_0) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(v - v_0\exp(-\gamma(t-t_0)))^2}{2\rho(t-t_0)}\right)$$

となる．ここで，$t > t_0$，$\rho(t) := \dfrac{D}{\gamma}(1 - \exp(-2\gamma t))$，$D$ は正の定数である．$V(t)$ の関数 $f(V(t))$ に対して，$\langle f(V(t))\rangle_{v_0,t_0}$ は $f(V(t))$ の $V(t_0) = v_0$ という条件付きの平均とする．オルンシュタイン・ウーレンベック過程は定常マルコフ過程である．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp(-x^2) = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．以下の問いに答えよ．

(i) $t \to \infty$ のとき $p(v, t|v_0, t_0)$ が，温度 T の平衡状態での速度の分布であるマックスウェル分布と一致するときの D を定めよ．ここで，ボルツマン定数を k_{B} とする．

(ii) $V(t_0) = v_0$ の条件のもとでの粒子のエントロピー生成は

$$\sigma_{v_0,t_0}(t) := -\langle \ln p(V(t), t|v_0, t_0)\rangle_{v_0,t_0} - \frac{\gamma}{2D}\left\langle (V(t))^2 \right\rangle_{v_0,t_0}$$

と定義する．ここで，$t > t_0$，$\ln A$ は A の自然対数である．エントロピー生成率 $\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{v_0,t_0}(t)}{\mathrm{d}t}$ が正であることを示せ．

(iii) n を正の整数，τ を正として，$a_n(v_0, \tau)$ を

$$a_n(v_0, \tau) := \langle (V(t_0 + \tau) - v_0)^n \rangle_{v_0,t_0}$$

とし，$A_n(v) := \displaystyle\lim_{\tau\to+0} \frac{a_n(v, \tau)}{\tau}$ とすると，$t > t_0$ のとき

$$\frac{\partial p(v, t|v_0, t_0)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial v^j}(A_j(v)p(v, t|v_0, t_0))$$

となる．$A_n(v)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ．

An English Translation:

Physical Statistics

5

Consider a particle with mass m executing free Brownian motion under the influence of a friction force $-m\gamma V(t)$, where γ is a positive constant and $V(t)$ the velocity of the particle at time t. $V(t)$ is described by an Ornstein-Uhlenbeck process with the conditional probability density function, or the transition probability, of $V(t)$ given that $V(t_0) = v_0$,

$$p(v, t|v_0, t_0) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(v - v_0 \exp(-\gamma(t-t_0)))^2}{2\rho(t-t_0)}\right),$$

where $t > t_0$, $\rho(t) := \frac{D}{\gamma}(1 - \exp(-2\gamma t))$, and D is a positive constant. $\langle f(V(t))\rangle_{v_0,t_0}$ denotes the conditional average of $f(V(t))$ given that $V(t_0) = v_0$, where $f(V(t))$ is a function of $V(t)$. The Ornstein-Uhlenbeck process is a stationary Markov process. Let k_{B} be Boltzmann's constant. You may use the equality $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp(-x^2) = \sqrt{\pi}$ without proof. Answer the following questions.

(i) Determine D when, as $t \to \infty$, $p(v, t|v_0, t_0)$ tends to the Maxwell distribution, that is, the equilibrium distribution of the velocity at temperature T.

(ii) The entropy production of the particle under the initial condition that $V(t_0) = v_0$ is defined as

$$\sigma_{v_0,t_0}(t) := -\langle \ln p(V(t), t|v_0, t_0)\rangle_{v_0,t_0} - \frac{\gamma}{2D}\left\langle (V(t))^2 \right\rangle_{v_0,t_0},$$

where $t > t_0$, and $\ln A$ denotes the natural logarithm of A. Show that the entropy production rate $\frac{\mathrm{d}\sigma_{v_0,t_0}(t)}{\mathrm{d}t}$ is positive.

(iii) Let

$$a_n(v_0, \tau) := \langle (V(t_0 + \tau) - v_0)^n \rangle_{v_0,t_0},$$

where n is a positive integer and τ is positive, and let $A_n(v) := \lim_{\tau \to +0} \frac{a_n(v, \tau)}{\tau}$. For $t > t_0$, the following equation is satisfied:

$$\frac{\partial p(v, t|v_0, t_0)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial v^j}(A_j(v) p(v, t|v_0, t_0)).$$

Find A_n for $n = 1, 2, \cdots$.

力学系数学

$\boxed{6}$

$f(t), g(t), h(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の連続関数として，

$$A(t) = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ g(t) & h(t) \end{pmatrix}$$

とおき，$\mathbb{R}$ 上において２元連立線形微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

を考える．I を２次単位行列，

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds, \quad H(t) = \int_0^t h(s)ds$$

として，以下の問いに答えよ．ただし，$t \neq 0$ のとき $F(t) \neq H(t)$ が成立するものとする．

(i) $\Phi(0) = I$ を満たす式 (1) の基本行列 $\Phi(t)$ を求めよ．ここで，基本行列 $\Phi(t)$ とは，正則かつ $\dfrac{d}{dt}\Phi(t) = A(t)\Phi(t)$ を満たす２次正方行列のことをいう．

(ii) $t \neq 0$ のとき，行列 $\Psi(t) = \begin{pmatrix} F(t) & 0 \\ G(t) & H(t) \end{pmatrix}$ の対角化を行って，指数関数 $\exp \Psi(t)$ を求めよ．

(iii) $k \in \mathbb{R}$ をある定数として $\mathbb{R}$ 上で $G(t) = k(F(t) - H(t))$ が成立するとき，(ii) で求めた指数関数 $\exp \Psi(t)$ が式 (1) の基本行列となることを示せ．

(iv) (i) と (ii) を用いて，指数関数 $\exp \Psi(t)$ が式 (1) の基本行列とならない $f(t), g(t), h(t)$ の例をあげよ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $f(t)$, $g(t)$ and $h(t)$ be continuous functions on $\mathbb{R}$ and let

$$A(t) = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ g(t) & h(t) \end{pmatrix}.$$

Consider the two-dimensional linear system of differential equations

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

on $\mathbb{R}$. Let I be the 2×2 identity matrix, and let

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds, \quad H(t) = \int_0^t h(s)ds.$$

Assume that $F(t) \neq H(t)$ for $t \neq 0$. Answer the following questions.

(i) Obtain the fundamental matrix to equation (1) satisfying $\Phi(0) = I$. Here a 2×2 matrix $\Phi(t)$ is called a fundamental matrix if it is nonsingular and satisfies $\dfrac{d}{dt}\Phi(t) = A(t)\Phi(t)$.

(ii) When $t \neq 0$, obtain the exponential function $\exp \Psi(t)$ of $\Psi(t) = \begin{pmatrix} F(t) & 0 \\ G(t) & H(t) \end{pmatrix}$ by diagonalizing $\Psi(t)$.

(iii) Assume that $G(t) = k(F(t) - H(t))$ on $\mathbb{R}$ for some constant $k \in \mathbb{R}$. Show that the exponential function $\exp \Psi(t)$ obtained in (ii) becomes a fundamental matrix to equation (1).

(iv) Give an example of $f(t)$, $g(t)$ and $h(t)$ such that $\exp \Psi(t)$ is not a fundamental matrix to equation (1), using (i) and (ii).