平成31年度4月期/平成30年度10月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学専攻

入学者選抜試験問題

【専門科目】

平成30年7月14日 13:00 – 14:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 専門科目は全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から1題選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の若い順に1題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答すること。解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 次の各問のそれぞれに答えよ.

問 1 D を複素平面の領域とし, ℓ を D に含まれる有限の長さの閉線分とする. 複素関数 $f(z)$ は D 上で連続であり, D から ℓ を除いた開集合 $D\setminus\ell$ 上で正則であるとする. このとき, $f(z)$ は D 上の正則関数であることを証明せよ.

問 2 H を複素 Hilbert 空間とし, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H の 1 組の完全正規直交系とする. また A は H 上の線型作用素で,

$$\left\| A\varphi_n - \varphi_n - \frac{1}{3}\varphi_{n+1} \right\| < \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を満たしている. このとき次の問に答えよ. ただしノルム $\|\ \|$ は H の内積から定められているものとする.

(1) A は H 上の有界線型作用素であることを証明せよ.

(2) 任意の $f \in H$ に対して $Au = f$ を満たす H の元 u は唯 1 つ存在し, f から この u への対応は H のノルムに関して連続であることを証明せよ.

2 次の各問のそれぞれに答えよ.

問 1 xz-平面上の曲線 $z=1-x^2$ $(-1 \leq x \leq 1)$ を z 軸について回転して得られる xyz-空間の曲面を Γ とし, $\vec{\nu}(x,y,z)$ は Γ 上の連続な単位法線ベクトルで $\vec{\nu}(0,0,1)=(0,0,1)$ を満たすものとする. このとき曲面積分

$$\int_\Gamma \left(x^2, y^2-xy, z(-x-2y)\right)\cdot \vec{\nu}(x,y,z)\,dS$$

の値を求めよ. ただし被積分関数中の · はユークリッド内積を表し, dS は曲面 Γ の面素を表す.

問 2 未知関数 $x(t)$, $y(t)$ の連立常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2+y^2)\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y(x^2+y^2)\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

の解を求めよ.

問 3 実数 a と正数 α, β に対して $R_{\alpha,\beta} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; |x| \leq \alpha, |y-a| \leq \beta \right\}$ とし, $f(x,y)$ は $R_{\alpha,\beta}$ 上の十分滑らかな実数値関数とする. また常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad y(0)=a$$

は α より小さいある正数 T に対して $|x| \leq T$ で唯 1 つの解 $y=y(x)$ を持つと仮定する. このとき解 $y(x)$ を近似的に求めるための陽的な 2 段 2 位 Runge-Kutta 型公式 (Heun 法など) を導出せよ.

3

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1 $S=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1^2+x_2^2+x_3^2=4,\ x_3>1\}$ とする．$\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ は S 上の単位法線ベクトルで，$n_3>0$ を満たすようにとられている．このとき

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

に対して，曲面積分

$$\int_S \nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

の値を求めよ．ここに，dS は S の面素とする．

問 2 C は複素平面内の円周 $|z|=2$ で，反時計回りに向き付けられているとする．次の 2 つの積分の値を求めよ．

$$\text{(a)}\quad \int_C \frac{\sin z}{z^2}dz \qquad\qquad \text{(b)}\quad \int_C \frac{z}{\sin z^2}dz$$

問 3 連立方程式に関する以下の設問に答えよ．ただし，行列はすべて n 次の実正方行列で，Q は直交行列，W は交代行列 (歪対称行列，あるいは反対称行列ともいう)，I は単位行列とする．

(1) λ を $\lambda\neq\pm1$ を満たす実数とする．このとき $I+\lambda Q$ は正則であることを示せ．

(2) 実数 λ が $\lambda\neq\pm1$ のとき，与えられた $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$(I+\lambda Q)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

を満たす $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{x}_*$ とする．$\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$ を任意に与えて

$$\boldsymbol{x}_{i+1}=\boldsymbol{b}-\lambda Q\boldsymbol{x}_i \qquad (i=0,1,2,\cdots)$$

によって $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$ を定めるとき，$\displaystyle\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_*$ となるために λ の満たすべき必要十分条件を求めよ．

(3) W の固有値は 0 か純虚数であることを示せ．さらに，$I+W$ は正則であることを示せ．

(4) 与えられた $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$(I+W)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

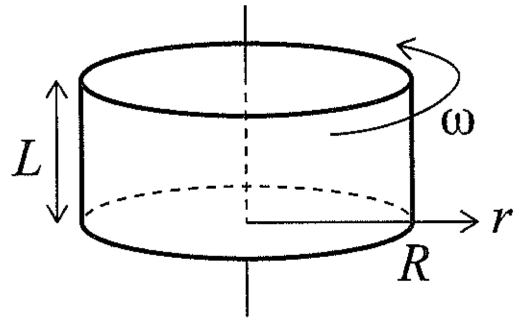
を満たす $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{x}'_*$ とする．$\boldsymbol{x}'_0\in\mathbb{R}^n$ を任意に与えて

$$\boldsymbol{x}'_{i+1}=\boldsymbol{b}-W\boldsymbol{x}'_i \qquad (i=0,1,2,\cdots)$$

によって $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{\boldsymbol{x}'_i\}_{i=0}^{\infty}$ を定めるとき，$\displaystyle\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}'_i=\boldsymbol{x}'_*$ となるための必要十分条件を W の適切なノルムを用いて表せ．

4

質量 m の同種粒子 N 個からなる理想気体が，下図のような，半径 R，高さ L の円柱容器に封じられ，円柱容器の中心軸まわりに容器と共に角速度 ω で回転している系を考える．この系を容器と共に回転する回転座標系で考え，以下の問に答えよ．ただし，系は絶対温度 T の熱平衡状態にあるものとし，ボルツマン定数を k，プランク定数を h とする．重力，コリオリ力，および粒子の内部自由度は無視する．また N は十分大きいものとする．



(1) この粒子1つが中心軸から距離 r に位置する時，この粒子の遠心力によるポテンシャルエネルギーを求めよ．ただし，$r=0$ をポテンシャルエネルギーの原点とせよ．

(2) この系の分配関数 Z を求めよ．

(3) この系のヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ．

(4) この系の内部エネルギー E を求めよ．さらに，高温極限および低温極限のそれぞれについて，この系の定積比熱を求めよ．ただし $\omega > 0$ とする．

(5) $X = \frac{1}{\pi R^2}\left(-\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{T,N}$ および $Y = \frac{1}{2\pi RL}\left(-\frac{\partial F}{\partial R}\right)_{T,N}$ を求めよ．さらに，ω が0に近づく極限での X と Y の関係を示し，そのような関係になる理由を，X および Y それぞれの物理的意味に基づいて述べよ．ただし $T > 0$ とする．

5

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1 (x,y) 平面上の 2 次元流の流速場 (u,v) が

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=\frac{y}{x^2+y^2},\quad (x^2+y^2\neq 0)$$

で与えられるとき，点 $(x,y)=(2,1)$ における流体粒子（流体の微小部分）の加速度の x 方向成分を求めよ．

問 2 (x,y,z) 空間において x 軸を中心軸とする半径 R_1，$R_2\ (>R_1)$ の静止した長い同心 2 円筒に挟まれた領域を Ω とし，この領域 Ω を占める非圧縮性粘性流体（密度 ρ，粘性係数 μ）を考える．x 軸を中心軸とする円筒座標系を (r,θ,x) とし，この流体の圧力を p，流速の動径方向成分を u_r，周方向成分を u_θ，x 軸方向成分を u_x とする．この流体に外力は働かず，流れは定常で，流速は x 軸まわりに回転対称であって x 軸方向に一様であるとする．すなわち，$p=p(r,\theta,x)$，$u_r=u_r(r)$，$u_\theta=u_\theta(r)$，$u_x=u_x(r)$ とする．このとき以下の設問に答えよ．

なお，この定常非圧縮性粘性流体の円筒座標系における連続の式とナビエ・ストークス方程式は次式で与えられる:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(ru_r)=0$$

$$u_r\frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}r}-\frac{{u_\theta}^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{u_r}{r^2}\right]$$

$$u_r\frac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}r}+\frac{u_ru_\theta}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{u_\theta}{r^2}\right]$$

$$u_r\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}r}\right)\right]$$

(1) 円筒の壁面 $r=R_1$ および $r=R_2$ において流速 (u_r,u_θ,u_x) の満たすべき条件を書け．

(2) 境界値問題を解いて圧力 p が $p=ax+b$ で与えられることを示せ．ここで，a，b は定数である．

(3) 境界値問題を解いて u_x を r と R_1，R_2，ρ，μ，a，b のうち必要なものを用いて表せ．