基礎数学 I

1

以下の問いに答えよ.

(i) 2 項係数を ${}_mC_n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ とかく．2 項定理

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_nb^n$$

を用いて，$x > 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$$

であることを示せ.

さらに，$0 < x < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$$

であることを示せ.

(ii) $x_0 \neq 0$ とする．級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

が点 $x = x_0$ で収束すれば，$|x| < |x_0|$ なるすべての実数 x についてこの級数は収束することを示せ.

さらに，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}x^n$$

が収束するような実数 x の範囲を求めよ.

An English Translation:

Basic Mathematics I

1

Answer the following questions.

(i) Let ${}_mC_n$ be the binomial coefficients ${}_mC_n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$. Using the binomial theorem

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_nb^n,$$

show that

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$$

for $x > 1$.

Next show that

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$$

for $0 < x < 1$.

(ii) Let $x_0 \neq 0$. Show that the power series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converges for any real number x such that $|x| < |x_0|$, if the power series converges at the point $x = x_0$.

Next find the domain of the real number x such that the power series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

converges.

アルゴリズム基礎

2

$G=(V,E)$ を $n \geqq 2$ 個の節点の集合 V，枝集合 E から成る連結単純無向グラフとし，$T=(V,F)$ を節点 $s \in V$ を根とする G の全域木，$\ell: V \to \{1,2,\ldots,n\}$ を節点の番号付けとし，以下の条件 (a), (b) が成り立っていると仮定する．

(a) 各枝 $uv \in E$ に対し，節点 u は，節点 v の T における先祖，あるいは子孫である，

(b) 各節点 $v \in V \setminus \{s\}$ と T における v の親 u に対し，$\ell(u) < \ell(v)$.

L を T の葉節点の集合とし，各節点 $v \in V$ に対し，$N(v)$ を v の G における隣接点の集合，$D(v)$ を v および v の T における子孫から成る集合と定める．関数 $\mathrm{lowpt}: V \setminus (L \cup \{s\}) \to \{1,2,\ldots,n\}$ を

$$\mathrm{lowpt}(v) = \min\{\ell(y) \mid y \in \textstyle\bigcup_{x \in D(v)} N(x)\}, \quad v \in V \setminus (L \cup \{s\})$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(i) どの葉節点 $u \in L$ も G の関節点ではないことを証明せよ．

(ii) 根 s が G の関節点である必要十分条件は，T における s の子が 2 個以上であることを証明せよ．

(iii) 節点 $u \in V \setminus (L \cup \{s\})$ が G の関節点である必要十分条件は，u が $\mathrm{lowpt}(v) \geqq \ell(u)$ を満たす子 v を持つことであることを証明せよ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ be a connected simple undirected graph with a set V of $n \geqq 2$ vertices and a set E of edges, let $T = (V, F)$ be a spanning tree of G rooted at a vertex $s \in V$, and let $\ell : V \to \{1, 2, \ldots, n\}$ be a numbering on V, where we assume that the following conditions (a) and (b) hold.

(a) For each edge $uv \in E$, vertex u is either an ancestor or a descendant of v in T,

(b) For each vertex $v \in V \setminus \{s\}$ and the parent u of v in T, $\ell(u) < \ell(v)$.

Let L denote the set of leaves in T. For each vertex $v \in V$, let $N(v)$ denote the set of neighbors of v in G, and let $D(v)$ denote the set consisting of vertex v and the descendants of v in T. Define a function lowpt : $V \setminus (L \cup \{s\}) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ such that

$$\mathrm{lowpt}(v) = \min\{\ell(y) \mid y \in \textstyle\bigcup_{x \in D(v)} N(x)\}, \qquad v \in V \setminus (L \cup \{s\}).$$

Answer the following questions.

(i) Prove that no leaf $u \in L$ is a cut-vertex in G.

(ii) Prove that a necessary and sufficient condition for the root s to be a cut-vertex in G is that s has at least two children in T.

(iii) Prove that a necessary and sufficient condition for a vertex $u \in V \setminus (L \cup \{s\})$ to be a cut-vertex in G is that u has a child v in T such that $\mathrm{lowpt}(v) \geqq \ell(u)$.

線形計画

$\boxed{3}$

$\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{b}$ を m 次元ベクトルとする．$\boldsymbol{Az} = \boldsymbol{b}$ をみたす n 次元ベクトル $\boldsymbol{z}$ が存在するとする．このとき，次の線形計画問題 (P) を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\
& & y_i \geqq x_i \ \ (i = 1, \ldots, n) \\
& & y_i \geqq -x_i \ \ (i = 1, \ldots, n)
\end{array}
$$

ただし，決定変数は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ である．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 (P) の双対問題を書け．

(ii) 問題 (P) が最適解を持つことを示せ．

(iii) $m = 2, n = 3$ とし，

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}
$$

とする．このとき，問題 (P) の最適解を求めよ．

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Let $\boldsymbol{A}$ be an $m \times n$ matrix, and let $\boldsymbol{b}$ be an m dimensional vector. Suppose that there exists an n dimensional vector $\boldsymbol{z}$ such that $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$.

Consider the following linear programming problem (P):

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& & y_i \geqq x_i \quad (i = 1, \ldots, n) \\
& & y_i \geqq -x_i \quad (i = 1, \ldots, n),
\end{array}
$$

where the decision variables are $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Answer the following questions.

(i) Write out a dual problem of problem (P).

(ii) Show that problem (P) has an optimal solution.

(iii) Let $m = 2$, $n = 3$,

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}.
$$

Obtain an optimal solution of problem (P).

線形制御理論

4

図1で示されるフィードバックシステムを考える．ここで $P(s)$ は制御対象，$C(s)$ は補償器，y は出力，u は入力，u_c は制御指令値，e は偏差，d は外乱，r は参照入力である．以下の問いに答えよ．

(i) このフィードバック系が安定であることの定義を述べよ．

以下では，補償器 $C(s)$ は図2の構造をしているとする．ただし $G(s)$，$K(s)$ は適当な伝達関数であり，ここでは $G(s) = P(s)$ とおくものとする．

(ii) r から e，r から u，d から u，d から e への伝達関数をそれぞれ求めよ．

(iii) $P(s)$ は安定であるとする．図1のフィードバックシステムが安定となるためには，$K(s)$ が安定であることが必要十分であることを示せ．

(iv) 伝達関数 $P(s)$，$K(s)$ をそれぞれ

$$P(s) = \frac{1}{s^2+s+1}, \quad K(s) = \frac{b}{s+a}$$

とする．ただし a，b は実定数である．r を単位階段関数としたときに出力 y の定常値は 1，$r = \sin t$ を入力したとき，出力 y の定常振幅は $2\sqrt{5}/5$ になった．定数 a，b を求めよ．

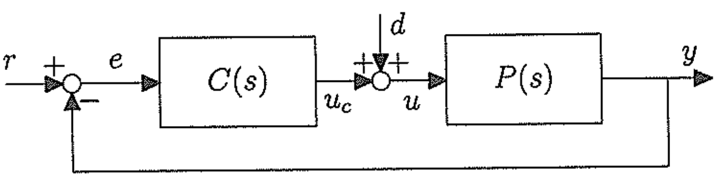

図 1: 制御系

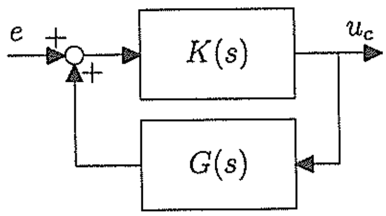

図 2: 補償器 $C(s)$ の構造

An English Translation:

Linear Control Theory

$\boxed{4}$

A feedback control system is given by the block diagram shown in Figure 1, where $P(s)$ is a control plant, $C(s)$ is a compensator, y is an output, u is an input, u_c is a control command, e is an error, d is a disturbance, and r is a reference input. Answer the following questions.

(i) State the definition of the stability of the feedback system.

In what follows, assume that the compensator $C(s)$ has the structure shown in Figure 2. Here, $G(s)$ and $K(s)$ are transfer functions, and we assume $G(s) = P(s)$.

(ii) Calculate the transfer functions from r to e, r to u, d to u, and d to e, respectively.

(iii) Assume that $P(s)$ is stable. Show that the feedback system in Figure 1 is stable if and only if $K(s)$ is stable.

(iv) Let $P(s)$ and $K(s)$ be given as

$$P(s) = \frac{1}{s^2+s+1}, \quad K(s) = \frac{b}{s+a},$$

where a and b are real constants. When r is the unit step function, the steady state value of the output y is 1. When $r = \sin t$, the steady state amplitude of the output y is $2\sqrt{5}/5$. Calculate a and b.

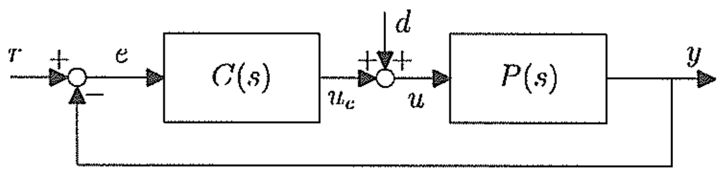

Figure 1 Feedback system.

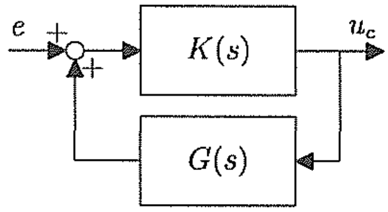

Figure 2 The structure of the conpensator $C(s)$.

基礎力学

$\boxed{5}$

質量 m の物体が空気中を鉛直方向上むきの初速度 $v_0(>0)$, 初期高度 0 の条件で運動している. 空気の抵抗力 R は速度 v の 2 乗に比例する $(R=\gamma v^2, \gamma>0)$ とし, 重力加速度を g とする. 以下の問いに答えよ.

(i) 物体の速度 v を時間 t の関数として求めよ. 但し, $v(t) \geqq 0$ の間のみで良い.

(ii) 物体の運動の最高点の高さを求めよ.

(iii) 物体が最高点に達するまでの時間 T を v_0 の関数として求め, $v_0 \to \infty$ の時と時間 T を求めよ.

(iv) $t \to \infty$ の時の物体の速度 (終端速度)v_∞ を求めよ.

An English Translation:

Basic Mechanics

$\boxed{5}$

A particle of mass m is moving through the air with the initial velocity being $v_0(> 0)$ in the vertically upward direction and the initial height of the particle being 0. Let the force of air resistance R be proportional to the square of the velocity v as $R = \gamma v^2, \gamma > 0$ and g be the acceleration of gravity. Answer the following questions.

(i) Obtain as a function of time t the velocity of the particle while $v(t) \geqq 0$.

(ii) Obtain the height of the highest point of the particle motion.

(iii) Obtain as a function of v_0 the time T when the particle reaches the highest point, and then obtain the limit of T when $v_0 \to \infty$.

(iv) Obtain the terminal velocity v_∞ of the particle when $t \to \infty$.

基礎数学 II

$\boxed{6}$

$n \times n$ 行列 A を用い，線形写像 f を

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$$

によって定める．このとき，f の核を

$$N = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{v}) = 0\}$$

で表し，ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ の非ゼロ要素数を

$$\sigma(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} \delta(v_j)$$

によって定める．ただし，記号 $^\top$ は転置を表し，$\delta(a) = \begin{cases} 0 & (a = 0) \\ 1 & (a \neq 0) \end{cases}$ とする．

d を n 以下の正の整数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $V = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\}$ の次元が

$$\dim V = n - \dim N$$

で与えられることを示せ．

(ii) 行列 A の適当な $d-1$ 個の列ベクトルの組が線形従属ならば，$\sigma(\boldsymbol{x}) < d$ を満たす非ゼロベクトル $\boldsymbol{x} \in N$ が存在することを示せ．

(iii) 任意の非ゼロベクトル $\boldsymbol{x} \in N$ に対して $\sigma(\boldsymbol{x}) \geqq d$ が成り立つための必要十分条件は，行列 A の任意の $d-1$ 個の列ベクトルの組が常に一次独立であることを示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let f be a linear mapping defined by

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$$

with an $n \times n$ matrix A. The kernel of f is defined by

$$N = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\},$$

and the number of non-zero elements of a vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ by

$$\sigma(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} \delta(v_j),$$

where $^\top$ denotes the transposition and $\delta(a) = \begin{cases} 0 & (a = 0) \\ 1 & (a \neq 0) \end{cases}$. Let d be a positive integer less than or equal to n. Answer the following questions.

(i) Show that the dimension of the subspace $V = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\}$ of $\mathbb{R}^n$ is given by

$$\dim V = n - \dim N.$$

(ii) Show that if some $d-1$ column vectors of the matrix A are linearly dependent, then there exists a non-zero vector $\boldsymbol{x} \in N$ such that $\sigma(\boldsymbol{x}) < d$.

(iii) Show that $\sigma(\boldsymbol{x}) \geqq d$ for any non-zero vector $\boldsymbol{x} \in N$ if and only if any $d-1$ column vectors of the matrix A are linearly independent.