応用数学

1

i を虚数単位とする．$f(z)$ を，K 個の整数ではない複素数 $a_1, a_2, \ldots, a_K$ を除いて正則な複素関数とする．$k = 1, \ldots, K$ に対して，a_k は $f(z)$ の一位の極で，その留数を A_k とし，$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ とする．$N > \max_{k=1,\ldots,K} |a_k|$ を満たす自然数 N に対し，Γ_N を $N+\frac{1}{2}+Ni, -N-\frac{1}{2}+Ni, -N-\frac{1}{2}-Ni, N+\frac{1}{2}-Ni$ をこの順に結んでできる長方形の経路とする．以下の問いに答えよ．

(i) N によらない実数 M が存在して，Γ_N 上の z に対して，

$$|\cot \pi z| < M$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\cot w = \dfrac{1}{\tan w}$ である．

(ii) 次式を示せ．

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma_N} f(z) \cot \pi z dz = 0.$$

(iii) 次式を示せ．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{K} A_k \cot \pi a_k.$$

(iv) c を 0 でない実数とする．次式を示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+c^2} = \frac{\pi}{2c} \frac{e^{\pi c}+e^{-\pi c}}{e^{\pi c}-e^{-\pi c}} - \frac{1}{2c^2}.$$

An English Translation:

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

Let i be the imaginary unit. Let $f(z)$ be a complex function which is holomorphic except at K non-integer, complex numbers $a_1, a_2, \ldots, a_K$. Assume that a_k is a pole of order one and the residue of $f(z)$ at a_k is A_k for $k = 1, \ldots, K$. Assume that $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. For a positive integer N satisfying $N > \max_{k=1,\ldots,K} |a_k|$, let Γ_N be the rectangular path connecting $N + \frac{1}{2} + Ni, -N - \frac{1}{2} + Ni, -N - \frac{1}{2} - Ni$ and $N + \frac{1}{2} - Ni$ in this order. Answer the following questions.

(i) Show that there is a real number M independent of N such that

$$|\cot \pi z| < M$$

holds for any z on Γ_N. Here $\cot w = \dfrac{1}{\tan w}$.

(ii) Show that

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma_N} f(z) \cot \pi z dz = 0.$$

(iii) Show that

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{K} A_k \cot \pi a_k.$$

(iv) Let c be a non-zero real number. Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + c^2} = \frac{\pi}{2c} \frac{e^{\pi c} + e^{-\pi c}}{e^{\pi c} - e^{-\pi c}} - \frac{1}{2c^2}.$$

グラフ理論

$\boxed{2}$

$G = (V, E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る連結な単純無向グラフとし，各枝 $e \in E$ には実数値の重み $w(e)$ が与えられているとする．G の全域木 $T \subseteqq E$ に対して，補木の枝 $a \in E \setminus T$ を含む T の基本閉路を $C_T(a)$，木の枝 $b \in T$ を含む T の基本カットセットを $K_T(b)$ と書く．以下の問いに答えよ．

(i) G の全域木 $T \subseteqq E$ が最小木であるとき，次の条件 (C) が成り立つことを証明せよ．
条件 (C): 補木の任意の枝 $a \in E \setminus T$ とその基本閉路の各枝 $b \in C_T(a)$ に対して

$$w(a) \geqq w(b)$$

が成り立つ．

(ii) 条件 (C) を満たす任意の全域木 T は次の条件 (K) を満たすことを証明せよ．

条件 (K): 全域木 T の任意の枝 $b \in T$ とその基本カットセットの各枝 $a \in K_T(b)$ に対して

$$w(a) \geqq w(b)$$

が成り立つ．

(iii) G の全域木 $T \subseteqq E$ に対して条件 (K) が成り立つとき，T は最小木であることを証明せよ．

(iv) 次の命題が真であれば証明を，偽であれば反例を与えよ．
「G が最小木を二つ持つとき，G には同じ重みを持つ枝が少なくとも２本存在する．」

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple and connected undirected graph with a vertex set V and an edge set E such that each edge $e \in E$ is weighted by a real value $w(e)$. For a spanning tree $T \subseteqq E$ of G, let $C_T(a)$ denote the fundamental cycle containing an edge $a \in E \setminus T$, and $K_T(b)$ denote the fundamental cut-set containing an edge $b \in T$. Answer the following questions.

(i) Prove that every minimum spanning tree $T \subseteqq E$ of G satisfies the next condition (C).

(C): For every edge $a \in E \setminus T$, each edge $b \in C_T(a)$ satisfies $w(a) \geqq w(b)$.

(ii) Prove that any spanning tree T satisfying condition (C) also satisfies the next condition (K).

(K): For every edge $b \in T$, each edge $a \in K_T(b)$ satisfies $w(a) \geqq w(b)$.

(iii) Prove that any spanning tree $T \subseteqq E$ of G satisfying condition (K) is a minimum spanning tree.

(iv) Prove or disprove the next proposition, giving a proof or a counterexample.
"When G has two minimum spanning trees, some two edges in G have the same weight."

オペレーションズ・リサーチ

3

以下の問 (i)，(ii) に答えよ．

(i) 次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{P}) & \text{Maximize} & \theta(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X\end{array}$$

ただし，(P) の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ であり，$\theta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と $X \subseteqq \mathbb{R}^n$ は以下のように定義された目的関数と実行可能領域である．

$$\theta(\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n}, \qquad X = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i = 1,\ x_i \geqq 0\ \ (i = 1, \ldots, n)\right\}$$

問題 (P) は唯一の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を持ち，関数 θ は $\mathbb{R}^n_{++}$ 上で凹関数 (すなわち，$-\theta$ は凸関数) であることが知られている．ただし，$\mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0\ (i = 1, \ldots, n)\}$ である．以下の (a)，(b)，(c) に答えよ．

(a) 問題 (P) のカルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) を書け．(問題 (P) が最大化問題であることに注意すること．)

(b) 問題 (P) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を求めよ．

(c) $\gamma_i \in \mathbb{R}$，$\gamma_i \geqq 0\ (i = 1, \ldots, n)$ とする．問題 (P) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を利用して，以下の算術幾何平均の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \gamma_i \geqq \left(\prod_{i=1}^n \gamma_i\right)^{1/n}$$

(ii) 正の整数 n に対して，$\mathcal{F}_n$ を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への非負の凸関数の集合とする．以下の (A)，(B) に答えよ．

(A) $f \in \mathcal{F}_n$ が与えられたとき，関数 $g_f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $g_f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})^2\ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ と定義する．そのとき，任意の $f \in \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$ に対して，g_f が凸関数であることを示せ．

(B) 正の数 $\alpha \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathcal{F}_n$ が与えられたとき，関数 $h_{f,\alpha}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $h_{f,\alpha}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})^\alpha\ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ と定義する．そのとき，すべての $\alpha \geqq \alpha^*$ と $f \in \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$ に対して，$h_{f,\alpha}$ が凸関数であるような最小な $\alpha^* \in \mathbb{R}$ を求めよ．その際，α^* が最小であることを示せ．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Answer the following questions (i) and (ii).

(i) Consider the following nonlinear programming problem:

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \theta(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X, \end{array}$$

where the decision variable is $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, the objective function $\theta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and the feasible set $X \subseteqq \mathbb{R}^n$ are defined by

$$\theta(\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \quad \text{and} \quad X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geqq 0\ (i = 1, \dots, n) \right\},$$

respectively. It is known that the optimal solution $\boldsymbol{x}^*$ of (P) is unique, and that the function θ is concave (that is, $-\theta$ is convex) on $\mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0\,(i = 1, \dots, n)\}$. Answer the following questions (a), (b) and (c).

(a) Write out the Karush-Kuhn-Tucker conditions of (P). (Note that (P) is a maximization problem.)

(b) Obtain the optimal solution $\boldsymbol{x}^*$ of (P).

(c) By using the solution $\boldsymbol{x}^*$ of (P), show that for all $\gamma_i \in \mathbb{R}$ with $\gamma_i \geqq 0$ $(i = 1, \dots, n)$, the inequality of arithmetic and geometric means holds, that is,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \geqq \left(\prod_{i=1}^{n} \gamma_i\right)^{1/n}.$$

(ii) Let n be a positive integer number and $\mathcal{F}_n$ be the set of all convex and nonnegative functions from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}$. Answer the following questions (A) and (B).

(A) For a given function $f \in \mathcal{F}_n$, define $g_f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ as $g_f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})^2$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$. Prove that g_f is convex for all $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$.

(B) For a given positive number $\alpha \in \mathbb{R}$ and a function $f \in \mathcal{F}_n$, define $h_{f,\alpha}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ as $h_{f,\alpha}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})^{\alpha}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$. Obtain the minimum value of $\alpha^* \in \mathbb{R}$ such that $h_{f,\alpha}$ is convex for all $\alpha \geqq \alpha^*$ and $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Justify your answer.

現代制御論

4

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0,\ y(t) = Cx(t)$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^3$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力，$x_0 \in \mathbb{R}^3$ は初期状態である．また，

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

とし，$\mathbb{R}^3$ の二つの線形部分空間を

$$\mathcal{O} = \{x_0 : \text{任意の } t \text{ に対して } u(t) = 0 \text{ ならば，任意の } t \text{ に対して } y(t) = 0\}$$

および

$$\mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} v : v \in \mathbb{R}^3\}$$

により定義する．以下の問いに理由とともに答えよ．

(i) $\mathcal{O}$ の基底および $\mathcal{C}$ の基底をそれぞれ一つ求めよ．

(ii) 線形独立なベクトルの組 $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$ で $e_1 \in \mathcal{O}$ かつ $e_2 \in \mathcal{C}$ を満たすものを一つ求めよ．また，$T = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ に対して，$Tz(t) = x(t)$ で与えられる $z(t)$ を状態変数としてもつ座標変換された状態方程式を求めよ．

(iii) $x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して，

$$J(u) = \int_0^\infty (y(t)^2 + u(t)^2)dt$$

を最小化する $u(t)$ を求めよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0,\ y(t) = Cx(t)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^3$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, $y(t) \in \mathbb{R}$ is an observation output, and $x_0 \in \mathbb{R}^3$ is an initial state. Let

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Define two linear subspaces of $\mathbb{R}^3$ by

$$\mathcal{O} = \{x_0 : y(t) = 0 \text{ for all } t \text{ if } u(t) = 0 \text{ for all } t\}$$

and

$$\mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} v : v \in \mathbb{R}^3\}.$$

Answer the following questions. Show the derivation process.

(i) Obtain a basis of $\mathcal{O}$ and a basis of $\mathcal{C}$.

(ii) Find a triplet of linearly independent vectors $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$ such that $e_1 \in \mathcal{O}$ and $e_2 \in \mathcal{C}$. Then, obtain the coordinate transformed state equation having the state vector $z(t)$ such that $Tz(t) = x(t)$ with $T = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(iii) For $x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, find $u(t)$ that minimizes

$$J(u) = \int_0^\infty (y(t)^2 + u(t)^2)dt.$$

物理統計学

5

時系列 $X_0, X_1, \ldots$ は区間 $(-1,1)$ 上の確率測度 $\mu(dx) = \dfrac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ を不変測度とするエルゴード的な力学系 $X_{n+1} = 2X_n^2 - 1$ により決定されるものとする．さらに

$$\int_{-1}^{1} |B(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

を満足する任意の観測関数 $B(x)$ に対して,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} B(X_i) = \int_{-1}^{1} B(X_0)\mu(dX_0) \quad \text{a.e.}$$

が成立するものとする．但し, $X_i \in (-1,1) \quad (i \geqq 0)$ である．$\langle B \rangle$ は初期値 $X_0 = \cos(\theta_0)$ が不変測度 $\mu(dx)$ に従って分布する時の積分 $\int_{-1}^{1} B(X_0)\mu(dX_0)$ と定義する．以下の問いに答えよ.

(i) $B(x) = x$ の時, $\langle B \rangle = 0$ 及び $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ.

(ii) $B(x) = 2x^2 - 1$ の時, $\langle B \rangle = 0$ 及び $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ.

(iii) $B(x) = (2x^2 - 1)x$ の時, $\langle B \rangle = 0$ であることを示せ.

(iv) X_n の一般解を与えよ.

(v) $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1)$ の時, $\langle B \rangle = a_0$ 及び $\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ であることを示せ.

(vi) $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1)$ に対して, 1 次元ランダムウォークを

$$r(N) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \{B(X_i) - \langle B \rangle\} \quad N = 1, 2, \ldots$$

で構成した時, その拡散係数 $D \equiv \displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{\langle r^2(N) \rangle}{2N}$ を求めよ.

An English Translation:

Physical Statistics

$\boxed{5}$

Let a time series $X_0, X_1, \ldots$ be determined by an ergodic dynamical system $X_{n+1} = 2X_n^2 - 1$ with a probability measure $\mu(dx) = \dfrac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ on the interval $(-1, 1)$ being the invariant measure and assume that

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} B(X_i) = \int_{-1}^{1} B(X_0)\mu(dX_0) \quad \text{a.e.}$$

for any function $B(x)$ satisfying

$$\int_{-1}^{1} |B(x)|^2 \mu(dx) < \infty,$$

where $X_i \in (-1, 1) \quad (i \geqq 0)$. $\langle B \rangle$ is defined as the integral $\int_{-1}^{1} B(X_0)\mu(dX_0)$ with an initial condition $X_0 = \cos(\theta_0)$ being distributed according to the invariant measure $\mu(dx)$. Answer the following questions:

(i) Show that $\langle B \rangle = 0$ and $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ for $B(x) = x$.

(ii) Show that $\langle B \rangle = 0$ and $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ for $B(x) = 2x^2 - 1$.

(iii) Show that $\langle B \rangle = 0$ for $B(x) = (2x^2 - 1)x$.

(iv) Give a general solution X_n.

(v) Show that $\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ for $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1)$.

(vi) Let us construct a one-dimensional random walk defined by

$$r(N) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \{B(X_i) - \langle B \rangle\} \quad N = 1, 2, \ldots$$

for $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1)$. Obtain the diffusion coefficient $D \equiv \displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{\langle r^2(N) \rangle}{2N}$.

力学系数学

6

$a, b \in \mathbb{R}$ を定数として次の実微分方程式を考える．

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + (at+b)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{1}$$

X を t の有理関数，式 (1) の解およびそれらの高階導関数の有理式全体からなる集合とする．特に，X は式 (1) の任意の解の 2 階導関数を含む．次の条件を満たす全単射写像 $\sigma : X \to X$ 全体の集合を G で表す．

(A1) 任意の $f, g \in X$ に対して $\sigma(f+g) = \sigma(f) + \sigma(g)$ および $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g)$ が成立

(A2) 任意の有理関数 f に対して $\sigma(f) = f$ が成立

(A3) 任意の $f \in X$ に対して $\dfrac{d}{dt}\sigma(f) = \sigma\left(\dfrac{df}{dt}\right)$ が成立

$x = e^t$ が式 (1) の解であるとき，以下の問いに答えよ．

(i) 定数 a, b を定めよ．

(ii) $x = e^t$ と 1 次独立な解 $x = \phi(t)$ を一つ求めよ．

(iii) $x(t)$ が解のとき $\sigma(x(t))$ も解であることを示せ．

(iv) $\phi(t)$ を (ii) で求めた解とする．(iii) により，任意の $\sigma \in G$ に対して，ある定数 $a_{ij}(\sigma) \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2)$ が存在して

$$\sigma(e^t) = a_{11}(\sigma)e^t + a_{12}(\sigma)\phi(t), \quad \sigma(\phi(t)) = a_{21}(\sigma)e^t + a_{22}(\sigma)\phi(t)$$

が成立する．各 $i, j = 1, 2$ に対して (i, j) 成分が $a_{ij}(\sigma)$ の 2 次正方行列を $A(\sigma)$ と表す．このとき，任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ に対して $A(\sigma_1)A(\sigma_2) = A(\sigma_2)A(\sigma_1)$ が成立することを示せ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $a, b \in \mathbb{R}$ be constants and consider the real differential equation

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + (at+b)\frac{dx}{dt} + x = 0. \tag{1}$$

Let X be the set of all rational expressions of rational functions of t, solutions to equation (1) and their derivatives of any order. In particular, X contains the second-order derivative of any solution to equation (1). Let $\sigma : X \to X$ be a bijective map satisfying the following conditions:

(A1) For any $f, g \in X$, $\sigma(f+g) = \sigma(f) + \sigma(g)$ and $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g)$;

(A2) For any rational function f, $\sigma(f) = f$;

(A3) For any $f \in X$, $\dfrac{d}{dt}\sigma(f) = \sigma\left(\dfrac{df}{dt}\right)$.

Let G denote the set of all such maps. Assume that $x = e^t$ is a solution to equation (1). Answer the following questions.

(i) Determine the constants a and b.

(ii) Obtain a solution $x = \phi(t)$ which is linearly independent of $x = e^t$.

(iii) Show that $\sigma(x(t))$ is a solution if $x(t)$ is so.

(iv) Let $\phi(t)$ be the solution obtained in (ii). From (iii) we see that for any $\sigma \in G$ there exist some constants $a_{ij}(\sigma) \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2)$ such that

$$\sigma(e^t) = a_{11}(\sigma)e^t + a_{12}(\sigma)\phi(t), \quad \sigma(\phi(t)) = a_{21}(\sigma)e^t + a_{22}(\sigma)\phi(t).$$

Let $A(\sigma)$ be a 2×2 matrix whose (i, j)-element is $a_{ij}(\sigma)$ for $i, j = 1, 2$. Then show that $A(\sigma_1)A(\sigma_2) = A(\sigma_2)A(\sigma_1)$ for any $\sigma_1, \sigma_2 \in G$.