

京都大学大学院情報学研究科  
通信情報システム専攻 修士課程入学者選抜試験問題  
(2019年度10月期入学・2020年度4月期入学)

Admissions for October 2019 and for April 2020

Entrance Examination for Master's Program

Department of Communications and Computer Engineering

Graduate School of Informatics, Kyoto University

2019年8月5日 13:00 – 16:00

August 5, 2019 13:00 - 16:00

専門基礎A  
**Problem Set A**

**注意 (NOTES)**

1. 解答開始の合図があるまで中を見てはいけない。
2. これは「**専門基礎A**」の問題用紙で、表紙共に 16 枚 ある。解答開始の合図があった後、枚数を確認、落丁または不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
3. 問題は9問(A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, A-9)ある。**4問を選択して解答すること。**答案用紙の問題番号欄に問題番号を記入すること。
4. 解答は問題ごとに答案用紙1枚を使うこと。答案用紙1枚に2問以上の解答もしくは1問の解答を2枚以上の答案用紙に書いた場合は無効にすることがある。なお、必要な場合「裏に続く」と明記した上で裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙は4枚綴じたまま使用し、切り離さないこと。
6. 答案用紙の綴じ込みがはずれた場合は、直ちに申し出ること。
7. 解答は日本語または英語で行うこと。

1. Do not open the pages before a call for starting.
2. This is the “**Problem Set A**” in 16 pages including this front cover.  
After the call of starting, check all pages are in order and notify proctors (professors) immediately if missing pages or with unclear printings are found.
3. **Answer 4 of the following 9 questions;** A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, and A-9. State the Question Numbers you choose on the Answer Sheet.
4. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used, stating “Over” at the end of the page. Note that in case two or more questions are answered in one sheet or two or more sheets are used for one question, they may be regarded as no answers.
5. Do not separate the pages of answer sheets; keep them bound.
6. Notify proctors (professors) immediately if the pages are separated for some reason.
7. Answer the questions either in Japanese or English.

### 専門基礎 A

A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, A-9 の9問から4問を選択して解答せよ。

### Problem Set A

Choose and answer 4 questions out of A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, and A-9.

A-1

下記のすべての問に答えよ。(English translation is given on the next page.)

(1) 下記の問に答えよ。ただし、関数  $B(x, y)$  は次式で与えられる。

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x > 0, y > 0$$

(a) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$xB(x, y+1) = yB(x+1, y)$$

(b) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta$$

(c) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{a} B\left(1 - \frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right) = \int_0^\infty \frac{t^{b-1}}{1+t^a} dt$$

(2) 下記の問に答えよ。ただし、行列  $A$  は次式で与えられる。

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \quad 0 < p < 1, 0 < q < 1$$

(a)  $n$  を正整数とする。  $A^n$  を求めよ。

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$  を求めよ。

(c) 次式で定義される  $\exp(A)$  を求めよ。

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

ただし、 $A^0$  は単位行列である。

continued on next page  
次 頁 へ 続 く

Answer all the following questions.

(1) Answer the following questions. Note that function  $B(x, y)$  is defined as

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

(a) Show that

$$xB(x, y+1) = yB(x+1, y).$$

(b) Show that

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta.$$

(c) Show that

$$\frac{1}{a} B\left(1 - \frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right) = \int_0^\infty \frac{t^{b-1}}{1+t^a} dt.$$

(2) Answer the following questions. Note that matrix  $A$  is given as

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \quad 0 < p < 1, \quad 0 < q < 1.$$

(a) Let  $n$  be a positive integer. Find  $A^n$ .

(b) Find  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ .

(c) Find  $\exp(A)$  defined as

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n,$$

where  $A^0$  is an identity matrix.

**A-2**

下記の問 (1), (2), (3) から 2 つを選んで答えよ.

Answer two of the following questions (1), (2), and (3).

- (1) フーリエ変換に関する以下の問に答えよ. ただし, 関数  $f(t)$  のフーリエ変換は次式で定義される.

Answer the following questions related to a Fourier transform. Note that the Fourier transform of a function  $f(t)$  is defined in the following.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (i = \sqrt{-1})$$

また, その逆変換は次式で与えられる.

The inverse Fourier transform is given in the following.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

- (a) 次の関数  $f(t)$  のフーリエ変換を求めよ.

Find the Fourier transform of  $f(t)$  defined in the following.

$$f(t) = e^{-a|t|} \quad (a > 0)$$

- (b) 関数  $f(t)$  のフーリエ変換を  $F(\omega)$  とするとき,  $F(t)$  のフーリエ変換を求めよ.

Let the Fourier transform of a function  $f(t)$  be  $F(\omega)$ . Find the Fourier transform of  $F(t)$ .

- (c) 関数  $f(t)$ ,  $g(t)$  のフーリエ変換をそれぞれ  $F(\omega)$ ,  $G(\omega)$  とするとき, 次の関数  $h(t)$  のフーリエ変換を求めよ.

Let the Fourier transform of functions  $f(t)$  and  $g(t)$  be  $F(\omega)$  and  $G(\omega)$ , respectively. Find the Fourier transform of  $h(t)$  defined in the following.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du$$

- (d) 次の方程式を  $f(t)$  について解け.

Solve the following equation for  $f(t)$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2f(u)}{(t-u)^2 + 1} du = \frac{4}{t^2 + 4}$$

- (2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

Find the general solution of the following differential equation.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{x-1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y = xe^{-x}$$

- (3) 留数定理を用いて, 次の積分  $I$  を求めよ.

Evaluate the following integral  $I$  by using the residue theorem.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^4} dx$$

下記のすべての問に答えよ。ただし、極板、点電荷、導線等は全て真空中に置かれているものとし、真空中の誘電率は  $\epsilon_0$  とする。

Answer all the following questions. All materials in the questions such as plates, point charges, and conductive wire are placed in vacuum. The permittivity of vacuum is  $\epsilon_0$ .

- (1) 図 (a) のように、極板間隔  $d$ 、面積  $S$  の平行板コンデンサに、極板 A から極板 B に向かって誘電率が  $\epsilon_1$  から  $\epsilon_2$  ( $\epsilon_1 < \epsilon_2$ ) まで直線的に変化する誘電体で極板間が満たされている。面積  $S$  は十分に広く、端の影響は無視できるものとする。

Consider a parallel-plate capacitor with spacing  $d$  and area  $S$ . As shown in Figure (a), a dielectric material fills the space between the plates. The permittivity of the material linearly changes from the plate A ( $\epsilon_1$ ) to the plate B ( $\epsilon_2$ ;  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ ). The area  $S$  is sufficiently large so that the edge effect can be ignored.

- (a) 極板 A に電荷  $Q$ 、極板 B に電荷  $-Q$  を与えたとき、極板 A からの距離  $x$  ( $0 < x < d$ ) における電界を求めよ。

When charge  $Q$  is put on the plate A and charge  $-Q$  is put on the plate B, find the electric field at a distance  $x$  ( $0 < x < d$ ) from the plate A.

- (b) 極板間の電位差を求め、この平行板コンデンサの静電容量を求めよ。

Find the electric potential difference between the plates, then find the electrostatic capacity of the parallel-plate capacitor.

- (2) 点電荷  $2Q$  と  $-Q$  が距離  $r$  離して置かれている。このとき、電位が 0 となる等電位線を点電荷の位置と  $r$  との関係が分かるように図示せよ。

Two point charges  $2Q$  and  $-Q$  are placed with a distance  $r$ . Draw an equipotential line where the electric potential becomes 0, and indicate the relationship with positions of point charges and the distance  $r$ .

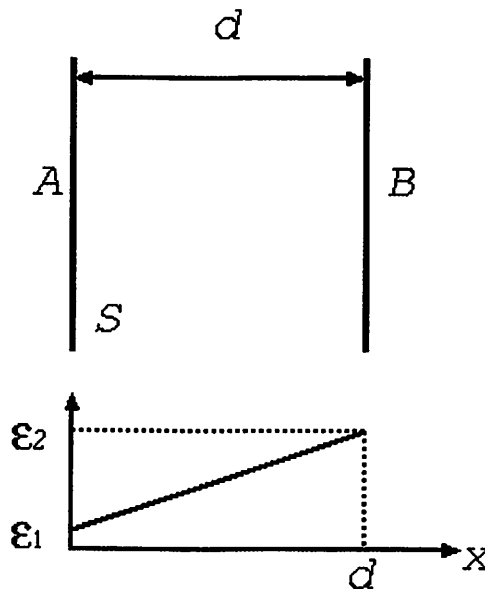


図 (a)  
Figure (a)

- (3) 図 (b) のように、半径  $r$  の円形コイルに中心点  $O$  から  $x$  軸方向を見たときに時計回りの方向に電流  $I$  が流れている。

As shown in Figure (b), electric current  $I$  flows along a circle of radius  $r$  in the clockwise direction when viewing the  $x$  axis from the origin.

- (a) コイルの微小区間  $ds$  を流れる電流要素  $I ds$  によって作られる、中心軸上で点  $O$  から距離  $x$  の位置にある点  $P$  の磁界  $dH$  を、ビオ・サバルの法則を用いて示せ。

Using Biot-Savart's law, show the magnetic field  $dH$  at the point  $P$  on the central axis due to the current segment  $I ds$  that flows the infinitesimal segment  $ds$ .

- (b) 円電流全体によって作られる、点  $P$  の磁界を求めよ。

Find the magnetic field at the point  $P$  due to the whole current that flows the circle.

- (c) 円電流全体によって作られる、点  $O$  の磁界を求めよ。

Find the magnetic field at the point  $O$  due to the whole current that flows the circle.

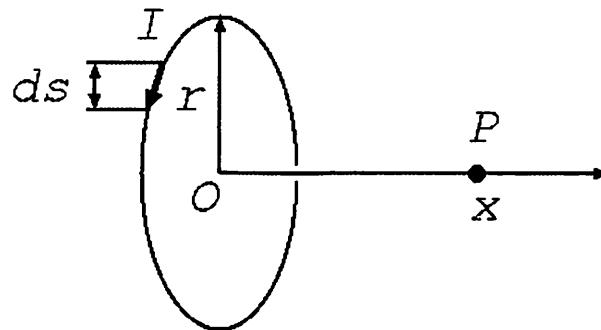


図 (b)  
Figure (b)

**A-4**

下記のすべての問に答えよ。

(English translation is given on the next page.)

- (1) 図(a)に示す2端子対回路が整合回路として働くための条件を述べよ。ここで、 $Z_S$ と $Z_L$ は、それぞれ信号源インピーダンスと負荷インピーダンスである。
- (2) 図(b)に示す T 型減衰器が入力および出力のインピーダンスが $50\ \Omega$ で電圧比が  $1/2$  となるための抵抗値 $R_1$ と $R_2$ を求めよ。
- (3) 図(c)に示す理想的な演算増幅器を用いた回路について、以下の問に答えよ。
  - (a)  $V_2/V_1$ を求めよ。
  - (b) この回路がどんな種類のフィルタか説明せよ。

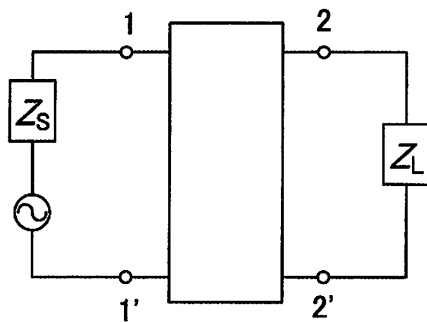


図 (a)

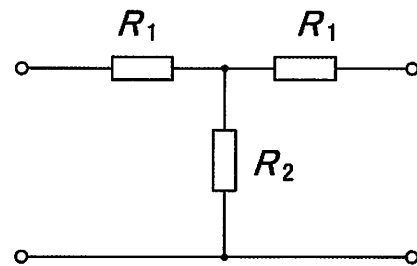


図 (b)

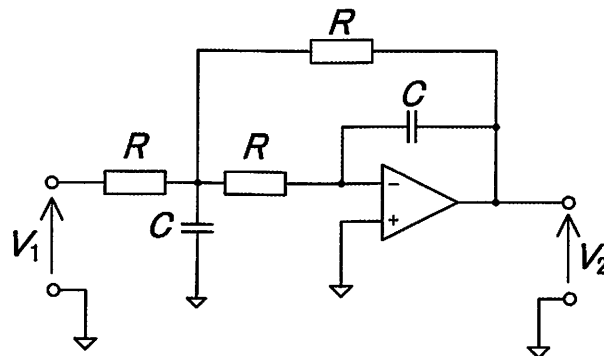


図 (c)

continued on next page  
次 頁 へ 続 く

Answer all the following questions.

- (1) Describe conditions that a two-port network (four-terminal network) shown in Figure (a) works as a matching circuit. Here,  $Z_S$  and  $Z_L$  are source impedance and load impedance, respectively.
- (2) T-type attenuator shown in Figure (b) has input and output impedance of  $50\ \Omega$  and voltage ratio of  $1/2$ . Find the resistance values  $R_1$  and  $R_2$ .
- (3) For the circuit with an ideal operational amplifier shown in Figure (c), answer the following questions.
  - (a) Find  $V_2/V_1$ .
  - (b) Explain what kind of filter this circuit is.

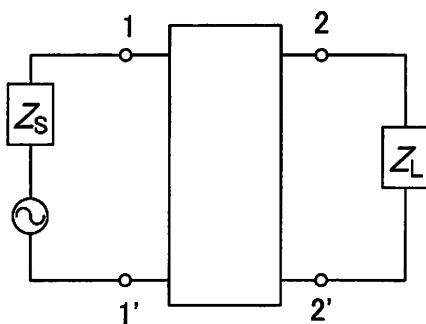


Figure (a)

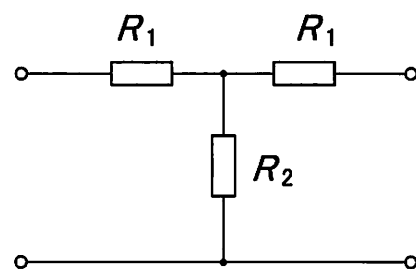


Figure (b)

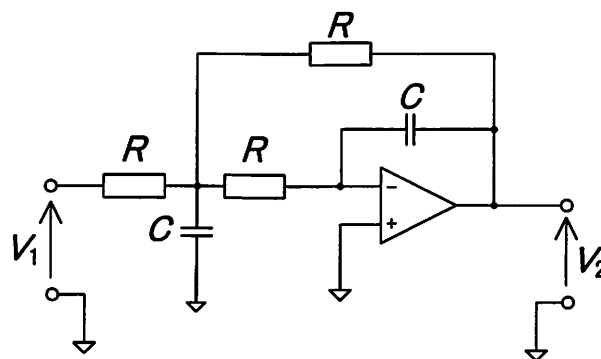


Figure (c)



下記のすべての問に答えよ。(English translation is given on the next page.)

- (1)  $S_A$  と  $S_B$  は記憶のない定常情報源であり,  $S_A$  は情報源記号 0, 1 をそれぞれ 0.75, 0.25 の確率で,  $S_B$  は 0, 1 をそれぞれ 0.8, 0.2 の確率で発生させる. 以下の問に答えよ. ただし,  $\log_2 3 = 1.6$ ,  $\log_2 5 = 2.3$  とせよ.
- (a)  $S_A$  のエントロピーを算出せよ.
  - (b)  $S_A$  の 2 次の拡大情報源に対し 2 元ハフマン符号化を施せ. また, そのときの情報源記号 1 つあたりの平均符号長を算出せよ.
  - (c) 情報源  $S_X$  は 2 つの状態をもち, 状態  $s_A$  では  $S_A$  に従い, 状態  $s_B$  では  $S_B$  に従って情報源記号を発生させる.  $S_X$  が 1 を発生させると, その状態が遷移する.  $S_X$  の状態遷移図を描け.
  - (d) 問 (c) の  $S_X$  の定常分布を求めよ.
  - (e) 問 (c) の  $S_X$  のエントロピーを算出せよ.
- (2) 下記の通信路符号化に関する問に答えよ. ただし, 符号  $C$  を生成多項式が  $G(x) = x^4 + x + 1$  である符号長 15 の 2 元巡回符号とする.
- (a) 多項式表現  $x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x + 1$  で表される符号語は, 符号  $C$  の符号語か否か判定せよ.
  - (b) 多項式表現  $x^3 + x + 1$  の情報ビット列が与えられた場合の符号語の多項式表現を組織符号の形で示せ.
  - (c) 符号  $C$  の最小距離を求めよ.
  - (d) 符号  $C$  によって訂正される最大誤りビット数を求めよ.
  - (e) ビット誤り率  $p$  である記憶のない 2 元対称通信路を介した, 符号  $C$  を用いた通信を考える. 訂正可能な誤りは全て訂正する場合の復号誤り率を求めよ.
  - (f) 符号長を 16 とした場合の最小距離を求めよ.

continued on next page				
次	頁	へ	続	く

Answer all the following questions.

- (1)  $S_A$  and  $S_B$  are stationary memoryless information sources.  $S_A$  generates information symbols 0 and 1 with probabilities 0.75 and 0.25, respectively, while  $S_B$  generates 0 and 1 with probabilities 0.8 and 0.2, respectively. Answer the following questions.  $\log_2 3 = 1.6$  and  $\log_2 5 = 2.3$  may be used.
  - (a) Find the value of the entropy of  $S_A$ .
  - (b) Find a binary Huffman code for the second extension of  $S_A$  and the expected code-word length per symbol.
  - (c) An information source  $S_X$  has two states and generates information symbols by following  $S_A$  and  $S_B$  when its state is  $s_A$  and  $s_B$ , respectively.  $S_X$  transits from a state to the other state when it generates 1. Draw the state diagram of  $S_X$ .
  - (d) Find the stationary distribution of  $S_X$  in Question (c).
  - (e) Find the value of the entropy of  $S_X$  in Question (c).
- (2) Answer the following questions related to channel coding. Let  $C$  be the binary cyclic code of length 15 that has generator polynomial  $G(x) = x^4 + x + 1$ .
  - (a) Determine whether  $x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x + 1$  is a codeword polynomial of  $C$  or not.
  - (b) Find the codeword polynomial for the message polynomial  $x^3 + x + 1$  in a systematic form.
  - (c) Find the minimum distance of  $C$ .
  - (d) Find the maximum number of error bits corrected by  $C$ .
  - (e) Consider communications with  $C$  through a memoryless binary symmetric channel with crossover probability  $p$ . Evaluate the probability of decoding failure assuming that any correctable errors are corrected.
  - (f) Find the minimum distance when the code length is 16.

# A-6

以下の問(1)~(4)に全て答えよ。

Answer all the following questions (1)-(4).

(1) 二分木構造に関して、問(a)~(d)に答えよ。

Answer the questions (a)~(d) on binary trees.

(a) 下図の二分木を行きがけ順(pre-order)でたどったときの節点番号順を示せ。

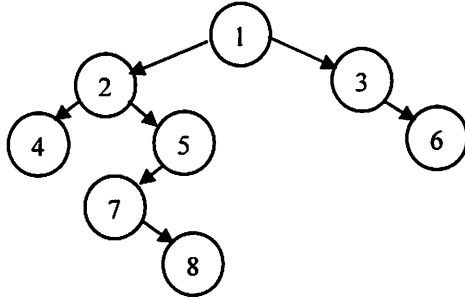
Show the node ID list by pre-order traversal for the following binary tree.

(b) 下図の二分木を通りがけ順(in-order)でたどったときの節点番号順を示せ。

Show the node ID list by in-order traversal for the following binary tree.

(c) 下図の二分木を帰りがけ順(post-order)でたどったときの節点番号順を示せ。

Show the node ID list by post-order traversal for the following binary tree.



(d) 以下の疑似コードは、行きがけ順に二分木をたどって節点番号を出力する手続き PreOrder を記述したものである。これにならって、通りがけ順に二分木をたどって出力する手続き InOrder の疑似コードを示せ。

The following pseudo code shows the procedure “PreOrder” to output the node IDs by pre-order traversal for the given binary tree. Write a similar style of pseudo codes for the procedure “InOrder” to output the node IDs by in-order traversal for the given binary tree.

```

PreOrder(v) {
  print v;
  if (v.LeftChild exists) call PreOrder(v.LeftChild);
  if (v.RightChild exists) call PreOrder(v.RightChild);
  return;
}
  
```

(2) 次の疑似コードが示す手続き something について、問(a)(b)に答えよ。

Answer the questions (a)(b) on the procedure “something” shown by the following pseudo code.

```

something(int n) {
  for(int i=0; i<n; i=i+1) call something(i);
  print “*” ;
  return;
}
  
```

(a) 引数  $n$  として 0, 1, -1 を与えて something を呼び出した場合に、それぞれ、\*印が何回出力されるか答えよ。

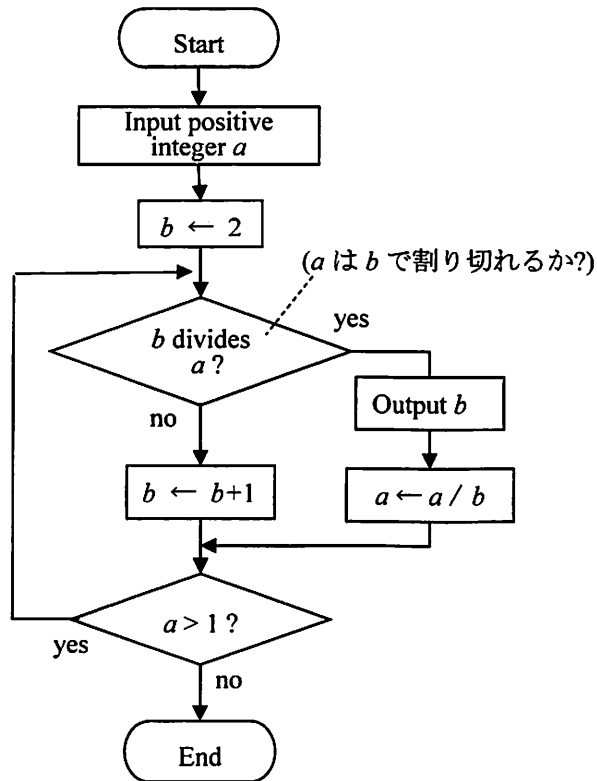
Answer how many times “\*” will be printed when “something” is invoked with  $n = 0$ ,  $n = 1$ , and  $n = -1$ , respectively.

(b) 一般の  $n$  に対して\*印が何回出力されるかを答えよ。さらに、それが正しいと考えた理由を説明せよ。

Answer how many times “\*” will be printed for any integer  $n$ , and explain why.

(3) 下記のフローチャートが表すアルゴリズムに関して、問(a)~(d)に答えよ。

Answer the questions (a)-(d) on the procedure shown by the following flowchart.



(a) 入力がそれぞれ  $a = 12$ ,  $a = 16$  の場合の出力を示せ。

Show the output for the inputs  $a = 12$  and  $a = 16$ , respectively.

(b) このアルゴリズムは何を出力するか説明せよ。

Explain what the algorithm computes.

(c) このアルゴリズムの入力ビット長  $n$  に対する時間計算量オーダーを見積もれ。ただし数値は2進数で計算し、 $n$  ビット整数除算の計算量を  $O(n^3)$  とする。

Estimate the order of time complexity for this algorithm in terms of input length  $n$ . Note that the calculations are performed in binary, and  $n$ -bit integer division can be performed in  $O(n^3)$  time.

(d) このアルゴリズムの計算時間を改善する方法を少なくとも2つ提案せよ。

Show at least two improvements to make the algorithm faster.

(4) 基数ソートのアルゴリズムの基本的手順を述べ、その時間計算量について説明せよ。

Describe the basic procedure of the radix sort algorithm, and explain its time complexity.

**A-7**

下記のすべての問に答えよ。

- (1) 2進表現について、以下の問に答えよ。
    - (a) 次の数を8ビットの2の補数表現で表せ。
      - (i) +76
      - (ii) -54
    - (b) 次の8ビットの2の補数表現の2進数を8ビット符号付き絶対値表現に変換せよ。
      - (i) 10111000
      - (ii) 11000111
    - (c) 次の8ビットの2の補数表現の2進数体系での加算および減算の結果を示せ。
      - (i) 10111000+10111000
      - (ii) 11000111+11000111
      - (iii) 10111000-11000111
      - (iv) 11000111-10111000
    - (d) 8ビットの2の補数表現の2進数体系で11000111を2ビット算術右シフトした結果を示せ。
  - (2) 桁上げ選択加算器について説明せよ。
  - (3) 以下の同じ命令セットアーキテクチャの三つのプロセッサにおいて、実行命令数が1,000,000で、そのうち20%が条件分岐命令であるプログラムを実行した場合の計算時間を求めよ。条件分岐命令の30%で条件が成立するものとする。
    - (a) クロック・サイクル時間が2nsの単一サイクル方式のプロセッサ。
    - (b) クロック・サイクル時間が500psの5段パイプライン方式のプロセッサ。ただし、条件分岐命令で条件が成立した場合、1サイクルストールする。
    - (c) クロック・サイクル時間が300psの10段パイプライン方式のプロセッサ。ただし、条件分岐命令で条件が成立した場合、2サイクルストールする。
- 

Answer all the following questions.

- (1) Answer the following questions on the binary number system.
  - (a) Express the following numbers in the 8-bit two's complement representation.
    - (i) +76
    - (ii) -54
  - (b) Convert the following 8-bit two's complement binary numbers into the 8-bit sign-and-magnitude representation.
    - (i) 10111000
    - (ii) 11000111
  - (c) Show the results of the following additions and subtractions in the 8-bit two's complement binary number system.
    - (i) 10111000+10111000
    - (ii) 11000111+11000111
    - (iii) 10111000-11000111
    - (iv) 11000111-10111000
  - (d) Show the result of the 2-bit arithmetic right shift operation on 11000111 in the 8-bit two's complement binary number system.
- (2) Explain 'Carry Select Adders'.
- (3) Show the execution time of a program of 1,000,000 executed instructions, 20% of which are conditional branch instructions, on the following three processors with the same instruction set architecture. The condition is taken for 30% of the conditional branch instructions.
  - (a) Single-cycle implementation with clock cycle time of 2 ns.
  - (b) 5-stage pipelined implementation with clock cycle time of 500 ps which stalls one cycle for a conditional branch instruction when the condition is taken.
  - (c) 10-stage pipelined implementation with clock cycle time of 300 ps which stalls two cycles for a conditional branch instruction when the condition is taken.

下記の全ての問に答えよ。

Answer all the following questions.

プログラムを記述する問題においては、使用するプログラミング言語を以下からひとつ選択し明示すること: C, C++, Java, Python, Scheme, Racket, OCaml, Standard ML, Haskell.

In questions where you are supposed to give a program, declare the programming language that you use from the following choices: C, C++, Java, Python, Scheme, Racket, OCaml, Standard ML, and Haskell.

- (1) プログラミング言語における型安全性について 200 字程度で説明せよ。

Explain type safety in programming languages in about 60 words.

- (2) フィボナッチ数列の項を計算する末尾再帰関数 (もしくはメソッド) の定義と、それを使い第40項を計算するプログラムを示せ。フィボナッチ数列とは漸化式  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  ( $n > 0$ ) で定義される数列  $\{a_i\}$  のことである。

Give a definition of a tail-recursive function (or method) that computes the  $n$ -th term of the Fibonacci sequence and show code to compute the 40th term of the Fibonacci sequence by using the defined function/method.

The Fibonacci sequence is the sequence  $\{a_i\}$  defined by the following recurrence relation:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  and  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  (for  $n > 0$ ).

- (3) (a) プログラミング言語処理系の実装において、整数定数、変数、加算と乗算のための二項演算子からなる式を表すための抽象構文木のデータ型を定義し、その定義を用いて式  $4 \times x + 3$  を表す抽象構文木をどのように構成するか具体的なプログラムを使って説明せよ。

Define a data type to represent abstract syntax trees for arithmetic expressions consisting of integer constants, variables, and binary operators for addition and multiplication used in a programming language implementation and explain how to use the definition through construction of a datum of an abstract syntax tree that represents  $4 \times x + 3$ .

- (b) (a) で定義された式の抽象構文木を入力とし、整数定数 0 を含む式を単純化し、結果として得られる式の抽象構文木を出力するプログラムを与えよ。

Give a program that takes a datum that represents an abstract syntax tree of an expression defined in (a) as an input, performs simplification of expressions containing nodes that represent integer constant 0, and outputs the resulting abstract syntax tree.

A-9

(English translation is given on the next page.)

本問題で扱うグラフはすべて無向グラフであるとし、自己ループを持たないとする。グラフ  $G$  の頂点集合を  $V(G)$ 、辺集合を  $E(G)$  と表記する。 $G$  の頂点集合  $S (\subseteq V(G))$  について、 $V(G) \setminus S$  を、 $G$  の頂点集合のうち、 $S$  に含まれない頂点の集合と定義する。 $G - S$  を、 $S$  に含まれるすべての頂点と、それらの頂点に接続する辺を、 $G$  から削除したグラフと定義する。 $X(G, S)$  を、 $G - S$  の連結成分のうち、頂点の個数が奇数個である連結成分の個数と定義する。頂点集合  $U, W (\subseteq V(G))$  について、 $E_G(U, W)$  を、一方の端が  $U$  に、他方の端が  $W$  に含まれる  $G$  の辺の集合と定義する。グラフ  $G_1$  を図 (a) で示すグラフとする。

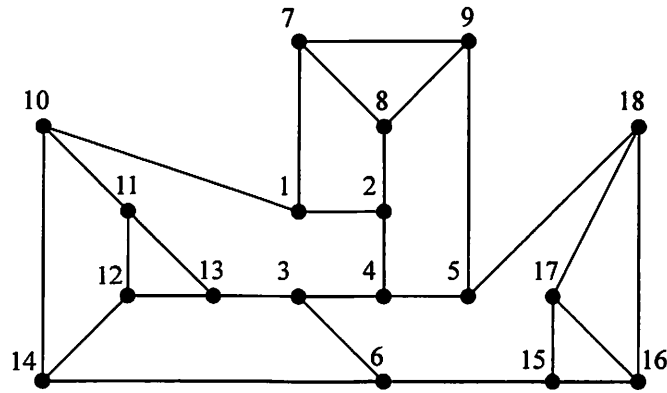


図 (a)

下記のすべての問に答えよ。

- (1) グラフ  $G$  の辺部分集合  $M (\subseteq E(G))$  の任意の 2 辺が共有する頂点を持たないとき、 $M$  をマッチングという。 $G$  上のすべての頂点が  $M$  のいずれかの辺の端点であるとき、 $M$  を  $G$  の完全マッチングという。 $G_1$  の、完全ではないマッチングと、完全マッチングの例をそれぞれ 1 つずつ挙げよ。解答はマッチングの辺集合の形で、例えば  $\{\{19, 20\}, \{21, 22\}\}$  のように書くこと。
- (2)  $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  とする。 $X(G_1, S_1)$  を求めよ。
- (3) 問 (2) の  $S_1$  について、 $E_{G_1}(S_1, V(G_1) \setminus S_1)$  の要素の個数を求めよ。
- (4) 任意のグラフ  $G$  と、 $G$  の任意の頂点集合  $S (\subseteq V(G))$  について、 $G$  に完全マッチングが存在するならば、 $X(G, S) \leq |S|$  が成り立つことを示せ。ここで、 $|S|$  は  $S$  の要素の個数であるとする。
- (5) 3-正則な任意のグラフ  $G$  と、 $G$  の任意の頂点集合  $S (\subseteq V(G))$  について、 $G - S$  のある 1 つの連結成分の頂点集合を  $C$  とする。ここで、3-正則なグラフとは、すべての頂点の次数が 3 であるグラフである。 $|C|$  が奇数ならば、 $E_G(S, C)$  の要素の個数は奇数個であることを示せ。
- (6) グラフ  $G$  が与えられたとき、 $G$  の任意の頂点集合  $S (\subseteq V(G))$  について  $X(G, S) \leq |S|$  が成り立つならば、 $G$  に完全マッチングが存在することが知られている。この事実を用いて、橋を持たない 3-正則な任意のグラフ  $G$  には完全マッチングが存在することを示せ。ここで、グラフ  $G$  の橋とは、削除することによって連結成分の個数が増える  $G$  の辺のことである。

continued on next page  
次 頁 へ 続 く

- (1) For a graph  $G$ , an edge subset  $M (\subseteq E(G))$  is a matching if any two edges in  $M$  have no common vertex. A matching  $M$  is a complete matching of  $G$  if every vertex of  $G$  is an endpoint of an edge in  $M$ . Show examples of a non-complete matching and a complete matching of  $G_1$ , respectively. Write the answer as  $\{\{19, 20\}, \{21, 22\}\}$ , for example.
- (2) Let  $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Calculate  $X(G_1, S_1)$ .
- (3) For  $S_1$  in Question (2), calculate the number of elements in  $E_{G_1}(S_1, V(G_1) \setminus S_1)$ .
- (4) For any graph  $G$  and any vertex set  $S (\subseteq V(G))$  of  $G$ , prove that  $X(G, S) \leq |S|$  holds if  $G$  has a complete matching, where  $|S|$  is the number of elements in  $S$ .
- (5) For any 3-regular graph  $G$  and any vertex set  $S (\subseteq V(G))$  of  $G$ , let  $C$  be the vertex set of a connected component of  $G - S$ , where a 3-regular graph is a graph such that the degrees of all the vertices of the graph are three. Prove that if  $|C|$  is odd, the number of elements in  $E_G(S, C)$  is odd.
- (6) Given a graph  $G$ , it is known that if  $X(G, S) \leq |S|$  holds for any vertex set  $S (\subseteq V(G))$  of  $G$ ,  $G$  has a complete matching. Using this fact, prove that any bridgeless 3-regular graph  $G$  has a complete matching, where a bridge of  $G$  is an edge of  $G$  such that removing the edge increases the number of connected components.