S1.

n を自然数，x, y を実変数として，以下の設問に答えよ．

1) 式 (S1.1) を用いて，式 (S1.2) の広義積分 I を無限級数で表すことを考える．この無限級数の第 n 項 a_n を求めよ．

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (|x| < 1) \tag{S1.1}$$

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{S1.2}$$

2) 式 (S1.2) の I を $(x, y) = (u-v, u+v)$ で変数変換をしたうえで，式 (S1.3) のように I_1, I_2 に分解する．ただし，式 (S1.3) は式 (S1.4)，(S1.5)，(S1.6) を満たす．このとき，下式の $A_1, B_1, C_1(u), A_2, B_2, C_2(u), D$ にあてはまる定数または関数をそれぞれ答えよ．ただし，$A_1 < A_2$ とする．

$$I = I_1 + I_2 \tag{S1.3}$$

$$I_1 = \int_{A_1}^{B_1} \left(\int_0^{C_1(u)} g(u,v)dv \right) du \tag{S1.4}$$

$$I_2 = \int_{A_2}^{B_2} \left(\int_0^{C_2(u)} g(u,v)dv \right) du \tag{S1.5}$$

$$g(u,v) = \frac{D}{1-u^2+v^2} \tag{S1.6}$$

3) 問 2) の I_1 の値を求めよ．必要ならば，式 (S1.7)，(S1.8) を用いてよい．

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{S1.7}$$

$$\frac{1}{1-x^2+y^2} = \frac{1}{(1-x^2)\left(1+\frac{y^2}{1-x^2}\right)} \qquad (|x| < 1) \tag{S1.8}$$

4) 問 2) の I_2 の値を求めよ．必要ならば，式 (S1.7)，(S1.8)，(S1.9) を用いてよい．

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan\frac{x}{2} \qquad (\sin x \neq 0) \tag{S1.9}$$

5) 式 (S1.2) の無限級数の和を求めよ．

S2. 実行列 $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ について以下の問に答えよ．ただし，$\mathbb{R}^3$ の内積とノルムは，標準内積とユークリッドノルムで考えよ．

1) $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ．

2) $\boldsymbol{A}$ の相異なる固有値の各々に対応する固有空間の正規直交基底を求めよ．

3) $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルで張られたベクトル空間の正規直交基底を求めよ．

4) 連立 1 次方程式

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{S2.1}$$

は解を持たない．連立方程式 (S2.1) の右辺に何らかのベクトル $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ を加えることによって，修正された連立方程式

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbf{e} \tag{S2.2}$$

が解を持つようにしたい．以下では，連立方程式 (S2.2) が解を持つとき，$\mathbf{e}$ は方程式 (S2.1) の「修正ベクトル」であるといい，方程式 (S2.1) のすべての修正ベクトルの中で最小のノルムを持つ修正ベクトルを方程式 (S2.1) の「最小ノルム修正ベクトル」とよぶことにする．方程式 (S2.1) の最小ノルム修正ベクトル $\mathbf{e}_{\min} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ．

5) 方程式 (S2.1) の最小ノルム修正ベクトル $\mathbf{e}_{\min}$ を右辺に加えて修正された方程式

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbf{e}_{\min} \tag{S2.3}$$

の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ の中でノルムが最小となる解を求めよ．