応用数学

1

i を虚数単位 $(i^2=-1)$ として，関数

$$g(t)=\frac{1}{t^2+4i},\quad t\in\mathbb{R},$$

とそのフーリエ変換

$$\widehat{g}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\xi t}dt,\quad \xi\in\mathbb{R},$$

を考える．また，関数 f を g と $\widehat{g}$ のたたみこみにより

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t-s)\,\widehat{g}(s)ds$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(i) フーリエ変換 $\widehat{g}(\xi)$ を求めよ．

(ii) $f(t)$ のフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ を求めよ．

(iii) $\widehat{f}(\xi)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級でないことを示せ．

(iv) $f(t)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^∞ 級であることを示せ．

An English Translation:

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

Consider

$$g(t) = \frac{1}{t^2 + 4i}, \quad t \in \mathbb{R},$$

and its Fourier transform

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\xi t} dt, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

where i represents the imaginary unit ($i^2 = -1$). Define a function f as the convolution of g and $\widehat{g}$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)\, \widehat{g}(s) ds.$$

Answer the following questions.

(i) Obtain the Fourier transform $\widehat{g}(\xi)$.

(ii) Obtain the Fourier transform $\widehat{f}(\xi)$ of $f(t)$,

(iii) Show that $\widehat{f}(\xi)$ is not of class C^1 on $\mathbb{R}$.

(iv) Show that $f(t)$ is of class C^∞ on $\mathbb{R}$.

グラフ理論

$\boxed{2}$

$G = (V, E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る単純強連結有向グラフ，$N = [G, w]$ を G の各枝 $e \in E$ に実数値の重み $w(e)$ を与えて得られるネットワークとする．節点 u から節点 v への有向枝は (u, v) と書き，その枝重みは $w(u, v)$ とも書く．節点 u から節点 v への距離 $\mathrm{dist}(u, v)$ を N における u から v への単純路上の枝重みの和の最小値と定める．枝重み和が負である有向閉路を負閉路と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(i) 次の条件を満たす節点の実数値重み $p(v)$, $v \in V$ が存在するとき，N に負閉路が存在しないことを証明せよ．

$$w(u, v) + p(u) - p(v) \geqq 0, \quad \forall (u, v) \in E.$$

(ii) 次を満たす節点 $s \in V$ と枝 $(u, v) \in E$ の組が存在するとき，N に負閉路が存在することを証明せよ．

$$\mathrm{dist}(s, u) + w(u, v) < \mathrm{dist}(s, v).$$

(iii) 各枝の重みが非負であると仮定する．ある部分集合 $S \subsetneqq V$ と節点 $s \in S$ に対して，S から $V \setminus S$ へ向かう枝 $(u, v) \in E$ の中で $\mathrm{dist}(s, u) + w(u, v)$ の値を最小とする枝を (u^*, v^*) とする．このとき，$\mathrm{dist}(s, v^*) = \mathrm{dist}(s, u^*) + w(u^*, v^*)$ が成り立つことを証明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple, strongly connected digraph with a vertex set V and an edge set E, and let $N = [G, w]$ denote a network obtained from G by assigning a real value $w(e)$ to each edge $e \in E$ as its weight. A directed edge from a vertex u to a vertex v is denoted by (u, v) and its weight is written as $w(u, v)$. Define the distance $\mathrm{dist}(u, v)$ from a vertex u to a vertex v to be the minimum summation of weights of edges in a simple path from u to v in N. A directed cycle is called a negative cycle if the sum of edge weights in the cycle is negative. Answer the following questions.

(i) Prove that N has no negative cycle if there is a set of real weights $p(v)$, $v \in V$ such that

$$w(u, v) + p(u) - p(v) \geqq 0, \quad \forall (u, v) \in E.$$

(ii) Prove that N has a negative cycle if there is a pair of a vertex $s \in V$ and an edge $(u, v) \in E$ such that

$$\mathrm{dist}(s, u) + w(u, v) < \mathrm{dist}(s, v).$$

(iii) Assume that the weight of each edge is non-negative. For a subset $S \subsetneqq V$ and a vertex $s \in S$, let (u^*, v^*) be an edge that minimizes $\mathrm{dist}(s, u) + w(u, v)$ among all edges $(u, v) \in E$ directed from S to $V \setminus S$. Prove that $\mathrm{dist}(s, v^*) = \mathrm{dist}(s, u^*) + w(u^*, v^*)$.

オペレーションズ・リサーチ

3

関数 $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を凸関数とする．さらに，関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$g(t)=2^t,\ \ f(\boldsymbol{x})=g(h(\boldsymbol{x}))$$

ベクトル $\boldsymbol{b}^i\in\mathbb{R}^n\ (i=1,\ldots,m)$ が与えられたとき，集合 $\Delta\subseteqq\mathbb{R}^n$，$\Gamma\subseteqq\mathbb{R}^m$，$\Omega\subseteqq\mathbb{R}^n$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left\{\boldsymbol{b}^1,\boldsymbol{b}^2,\ldots,\boldsymbol{b}^m\right\}\\
\Gamma &= \left\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^m \;\middle|\; \sum_{i=1}^m \alpha_i=1,\ \alpha_i\geqq 0\ (i=1,\ldots,m)\right\}\\
\Omega &= \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^m \alpha_i\boldsymbol{b}^i,\ \boldsymbol{\alpha}\in\Gamma\right\}
\end{aligned}$$

次の非線形計画問題 (P) を考える．

$$\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Maximize} & f(\boldsymbol{x})\\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in\Omega
\end{array}$$

以下の問いに答えよ．

(i) 任意の $\boldsymbol{\alpha}\in\Gamma$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$h\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i\boldsymbol{b}^i\right)\leqq\sum_{i=1}^m \alpha_i h(\boldsymbol{b}^i)$$

(ii) 関数 g と f が凸関数であることを示せ．

(iii) 次の線形計画問題のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を書け．

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^m f(\boldsymbol{b}^i)\alpha_i\\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^m \alpha_i=1\\
 & \alpha_i\geqq 0\ \ (i=1,\ldots,m)
\end{array}$$

ただし，決定変数は $\alpha_i\ (i=1,\ldots,m)$ である．

(iv) 問題 (P) の最適解の集合を X^* とする．このとき，$X^*\cap\Delta\neq\emptyset$ となることを示せ．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a convex function. Moreover, let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined as $g(t) = 2^t$ and $f(\boldsymbol{x}) = g(h(\boldsymbol{x}))$, respectively.

For given vectors $\boldsymbol{b}^i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, m)$, let sets $\Delta \subseteqq \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subseteqq \mathbb{R}^m$, and $\Omega \subseteqq \mathbb{R}^n$ be defined as

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left\{\boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2, \ldots, \boldsymbol{b}^m\right\}, \\
\Gamma &= \left\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqq 0\ (i = 1, \ldots, m)\right\}, \\
\Omega &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{b}^i,\ \boldsymbol{\alpha} \in \Gamma\right\},
\end{aligned}$$

respectively.

Consider the following nonlinear programming problem:

$$\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{Maximize} & f(\boldsymbol{x}) \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \Omega.
\end{array}$$

Answer the following questions.

(i) Show that the following inequality holds for all $\boldsymbol{\alpha} \in \Gamma$.

$$h\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{b}^i\right) \leqq \sum_{i=1}^m \alpha_i h(\boldsymbol{b}^i).$$

(ii) Show that functions g and f are convex.

(iii) Write out Karush-Kuhn-Tucker conditions of the following linear programming problem.

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^m f(\boldsymbol{b}^i)\alpha_i \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \\
 & \alpha_i \geqq 0\ \ (i = 1, \ldots, m),
\end{array}$$

where the decision variables are α_i $(i = 1, \ldots, m)$.

(iv) Let X^* be the set of optimal solutions of problem (P). Show that $X^* \cap \Delta \neq \emptyset$.

現代制御論

4

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + C^{\top}u(t),\ y(t) = Cx(t)$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$C \in \mathbb{R}^{1\times n}$，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力であり，$^{\top}$ は転置をあらわす．以下の問いに答えよ．

(i) システムの可観測性の定義を述べよ．

(ii) システムが可観測かつ A のすべての固有値の実部が負ならば

$$PA + A^{\top}P + C^{\top}C = 0$$

を満たす正定値行列 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在することを証明せよ．

(iii) k はある正の整数とし，$n = 2k+1$ とする．また，A の (i,j)-要素 $(A)_{ij}$ および C の i 番目の要素 $(C)_i$ は

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1, & |i-j| = 1, \\ 0, & |i-j| \neq 1, \end{cases} \quad (C)_i = \begin{cases} 1, & i = k+1, \\ 0, & i \neq k+1, \end{cases} \qquad i,j = 1,2,\ldots,n,$$

で与えられるとする．このとき，システムの可観測性を判定せよ．さらに，システムの最小実現の次元数を求めよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + C^\top u(t),\ y(t) = Cx(t),$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, $y(t) \in \mathbb{R}$ is an output, and $^\top$ denotes transposition. Answer the following questions.

(i) Describe the definition of the observability of the system.

(ii) Show that if the system is observable and the real parts of all the eigenvalues of A are negative, then there exists a positive definite matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ that satisfies

$$PA + A^\top P + C^\top C = 0.$$

(iii) Let k be a positive integer, and $n = 2k+1$. The (i, j)-entry $(A)_{ij}$ of A, and the i-th entry $(C)_i$ of C are given by

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1, & |i-j| = 1, \\ 0, & |i-j| \neq 1, \end{cases} \quad (C)_i = \begin{cases} 1, & i = k+1, \\ 0, & i \neq k+1, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Then, determine the observability of the system. Furthermore, find the dimension of a minimal realization of the system.

物理統計学

5

X を尺度母数 $\gamma(>0)$ のコーシー分布に従う無限区間 $(-\infty,\infty)$ 上の実数値確率変数とし，その確率密度関数は $\rho_\gamma(X)=\dfrac{\gamma}{\pi(X^2+\gamma^2)}$ で与えられるものとする．$X\neq 0$ で変換 $F(X)$ を $F(X)=\alpha X-\dfrac{\beta}{X}, 0<\alpha<1, \beta>0$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(i) 変換 $Y=\alpha\dfrac{1}{X}, \alpha>0$ で定義される確率変数 Y は，尺度母数 $\gamma'=\alpha\dfrac{1}{\gamma}$ のコーシー分布 $\rho_{\gamma'}(Y)$ に従うことを示せ．

(ii) 変換 $Z=F(X)$ で定義される確率変数 Z は，尺度母数 $\gamma''=\alpha\gamma+\dfrac{\beta}{\gamma}$ のコーシー分布 $\rho_{\gamma''}(Z)$ に従うことを示せ．

(iii) $p(X|Z)=\dfrac{\rho_\gamma(X)}{\rho_{\gamma''}(Z)\left|\frac{dF(X)}{dX}\right|}$ と定義する時，関係式

$$\sum_{X\in F^{-1}(\{Z\})} p(X|Z)=1,$$

$$0\leqq p(X|Z)\leqq 1 \quad \text{for} \quad X\in F^{-1}(\{Z\}).$$

を満足することを示せ．

(iv) $\gamma=\sqrt{\dfrac{\beta}{1-\alpha}}$ である時，エントロピー $S(Z)=-\displaystyle\sum_{X\in F^{-1}(\{Z\})} p(X|Z)\ln p(X|Z)$ の平均 $h=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(Z)\rho_{\gamma''}(Z)dZ$ が，次式

$$h=\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left|\frac{dF(X)}{dX}\right|\rho_\gamma(X)dX$$

を満足することを示せ．但し，変換 $F(X)$ があるコーシー分布の不変測度に関してエルゴード性を持つことは既知として良い．

An English Translation:

Physical Statistics

5

Let X be a real-valued random variable over the infinite interval $(-\infty, \infty)$ obeying the Cauchy distribution with a scale parameter $\gamma(>0)$ whose density function is given by $\rho_\gamma(X) = \dfrac{\gamma}{\pi(X^2+\gamma^2)}$. Define $F(X) = \alpha X - \dfrac{\beta}{X}, 0 < \alpha < 1, \beta > 0$ for $X \neq 0$. Answer the following questions.

(i) Show that a random variable Y given by the transformation $Y = \alpha \dfrac{1}{X}, \alpha > 0$ obeys the Cauchy distribution $\rho_{\gamma'}(Y)$ with the scale parameter $\gamma' = \alpha \dfrac{1}{\gamma}$.

(ii) Show that a random variable Z given by the transformation $Z = F(X)$ obeys the Cauchy distribution $\rho_{\gamma''}(Z)$ with the scale parameter $\gamma'' = \alpha\gamma + \dfrac{\beta}{\gamma}$.

(iii) Define $p(X|Z) = \dfrac{\rho_\gamma(X)}{\rho_{\gamma''}(Z)\left|\frac{dF(X)}{dX}\right|}$. Show that $p(X|Z)$ satisfies the relations

$$\sum_{X \in F^{-1}(\{Z\})} p(X|Z) = 1,$$

$$0 \leqq p(X|Z) \leqq 1 \quad \text{for} \quad X \in F^{-1}(\{Z\}).$$

(iv) Show that when $\gamma = \sqrt{\dfrac{\beta}{1-\alpha}}$, the average of entropy given by $h = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(Z)\rho_{\gamma''}(Z)dZ$ where $S(Z) = -\sum_{X \in F^{-1}(\{Z\})} p(X|Z) \ln p(X|Z)$ satisfies the relation

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left|\frac{dF(X)}{dX}\right| \rho_\gamma(X)dX.$$

Here, one can use the fact that the transformation $F(X)$ is ergodic with respect to a certain invariant measure given by a Cauchy distribution.

力学系数学

$\boxed{6}$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ を定数として次の微分方程式を考える．

$$t^2 \frac{dx}{dt} + (at + b)x = ct + d \tag{1}$$

以下の問いに答えよ．ただし，$b \neq 0$ とし，自然数 n に対して最高次の次数が n の t の多項式で表される解を n 次多項式解と呼ぶ．

(i) 式 (1) が１次多項式解をもつための必要十分条件を a, b, c, d を用いて表わせ．

(ii) 自然数 $n > 1$ に対して，式 (1) が n 次多項式解をもつための必要十分条件を a, b, c, d, n を用いて表わせ．

(iii) どんな自然数 n に対しても式 (1) が n 次多項式解をもたないための必要十分条件を a, b, c, d を用いて表わせ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ be constants and consider the differential equation

$$t^2 \frac{dx}{dt} + (at + b)x = ct + d, \tag{1}$$

where $b \neq 0$. For a positive integer n, a solution is called an nth-order polynomial solution if it is an nth-order polynomial of t containing a nonzero nth-order term. Answer the following questions.

(i) Obtain a necessary and sufficient condition for equation (1) to have a first-order polynomial solution, and express the condition with a, b, c and d.

(ii) Let $n > 1$ be an integer. Obtain a necessary and sufficient condition for equation (1) to have an nth-order polynomial solution, and express the condition with a, b, c, d and n.

(iii) Obtain a necessary and sufficient condition for equation (1) to have no nth-order polynomial solution for any positive integer n, and express the condition with a, b, c and d.