

京都大学大学院情報学研究科
通信情報システム専攻 修士課程入学者選抜試験問題
(2021年度10月期入学・2022年度4月期入学)

Admissions for October 2021 and for April 2022

Entrance Examination for Master's Program

Department of Communications and Computer Engineering

Graduate School of Informatics, Kyoto University

2021年7月31日 13:00 – 16:00

July 31, 2021 13:00 - 16:00

専門基礎A

Problem Set A

注意 (NOTES)

1. 解答開始の合図があるまで中を見てはいけない。
2. これは「**専門基礎A**」の問題用紙で、表紙共に15 枚 ある。解答開始の合図があった後、枚数を確認、落丁または不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
3. 問題は9問(A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, A-9)ある。**4問を選択して解答すること。**答案用紙の問題番号欄に問題番号を記入すること。
4. 解答は問題ごとに答案用紙1枚を使うこと。答案用紙1枚に2問以上の解答もしくは1問の解答を2枚以上の答案用紙に書いた場合は無効にすることがある。なお、必要な場合「裏に続く」と明記した上で裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙は4枚綴じたまま使用し、切り離さないこと。
6. 答案用紙の綴じ込みがはずれた場合は、直ちに申し出ること。
7. 解答は日本語または英語で行うこと。

1. Do not open the pages before a call for starting.
2. This is the “**Problem Set A**” in 15 pages including this front cover.
After the call of starting, check all pages are in order and notify proctors (professors) immediately if missing pages or with unclear printings are found.
3. **Answer 4 of the following 9 questions;** A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, and A-9. State the Question Numbers you choose on the Answer Sheet.
4. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used, stating “Over” at the end of the page. Note that in case two or more questions are answered in one sheet or two or more sheets are used for one question, they may be regarded as no answers.
5. Do not separate the pages of answer sheets; keep them bound.
6. Notify proctors (professors) immediately if the pages are separated for some reason.
7. Answer the questions either in Japanese or English.

専門基礎 A

A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, A-9 の9問から4問を選択して解答せよ。

Problem Set A

Choose and answer 4 questions out of A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, and A-9.

A-1

下記のすべての問に答えよ。
Answer all the following questions.

- (1) 次の関数 $f(x)$ について以下の問に答えよ。
Answer the following questions with respect to function $f(x)$.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

- (a) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。
Derive the derivative $f'(x)$.

- (b) $f'(1)$ の値を求めよ。
Find the value $f'(1)$.

- (c) $f(x)$ の概形を図示せよ。
Sketch $f(x)$.

- (2) $y = x$ と $y = x^2$ の2つの曲線で囲まれる領域を D として、次の積分 I を求めよ。
Let D be the region that is enclosed by the two curves $y = x$ and $y = x^2$.
Evaluate the following integral I .

$$I = \iint_D x^2 + y^2 \, dx dy$$

- (3) 次の行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ。ただし x は実数とする。
Find the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix A , where x is a real number.

$$A = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & e^x \end{pmatrix}$$

下記のすべての問に答えよ。

Answer all the following questions.

- (1) 関数 $f(t)$ のフーリエ余弦変換は次式で定義される。

Note that the Fourier cosine transform of a function $f(t)$ is defined as

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$$

また、その逆変換は次式で与えられる。

The inverse Fourier cosine transform is given by

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega t \, d\omega$$

- (a) 次の関数 $f(t)$ のフーリエ余弦変換を求めよ。

Find the Fourier cosine transform of $f(t)$ defined in the following.

$$f(t) = e^{-mt} \quad (m > 0)$$

- (b) 問 (a) の結果を用いて次の等式が成り立つことを示せ。

Prove the following equation taking the result of Question (a) into account.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos pv}{v^2 + \beta^2} \, dv = \frac{\pi}{2\beta} e^{-p\beta} \quad (p > 0, \beta > 0)$$

- (2) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

Find the general solution of the following differential equation.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 5)y = x e^{\frac{x^2}{2}}$$

- (3) 留数定理を用いて次の積分 I を求めよ。

Evaluate the following integral I by using the residue theorem.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin \theta} \, d\theta \quad (a > 1)$$

下記のすべての問に答えよ。ただし、導体、導線、電荷等は全て真空中に置かれているものとし、真空中の誘電率、透磁率はそれぞれ ϵ_0 、 μ_0 とする。

Answer all the following questions. All materials in the questions such as conductors, wires, and electric charges are placed in vacuum. The permittivity and permeability of vacuum are ϵ_0 and μ_0 , respectively.

- (1) 図 (a) のように、半径 a の導体球の外側に、半径 b の導体球殻が中心 O を共有するように置かれている。外側の球殻を接地し、内側の導体球に電荷 Q を与えた場合を考える。

As shown in Figure (a), a conducting sphere of radius a and a conducting spherical shell of radius b are placed at the common center O . The outer shell is grounded, and charge Q is given to the inner sphere.

- (a) 中心 O からの距離 r ($a \leq r \leq b$) における電界と電位を求めよ。

Find the electric field and the electric potential at a distance r ($a \leq r \leq b$) from the center O .

- (b) 中心 O からの距離 r ($r > b$) における電界と電位を求めよ。

Find the electric field and the electric potential at a distance r ($r > b$) from the center O .

- (c) 同心球導体間の静電容量 C を求めよ。

Find the electrostatic capacity C between the concentric conductors.

- (d) 問 (a)、問 (b) で求めた電位 V はラプラス方程式を満たすことを示せ。ただし、球座標のラプラス方程式は以下の式で表される。

Show that the electric potentials V obtained in Questions (a) and (b) satisfy Laplace equation. Laplace equation in spherical coordinates is given by the following equation.

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

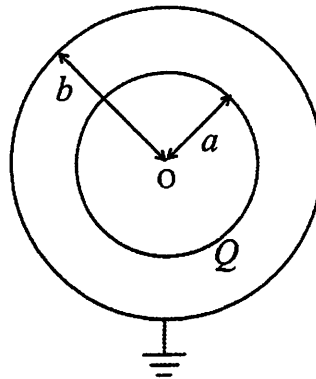


図 (a)
Figure (a)

- (2) 図 (b) のように、無限に長い 2 本の平行導線 A と B が間隔 d で置かれており、導線 A には電流 I が紙面の表から裏の向きに、導線 B には電流 I が紙面の裏から表の向きに流れている。図中の点 P の導線 A、B からの距離をそれぞれ a 、 b とする。

As shown in Figure (b), two infinitely long parallel wires A and B are placed with a distance d . The current I along A flows into the page, and the current I along B flows out of the page. The distance between the point P in the figure and the wires A and B are a and b , respectively.

- (a) 導線 A、B に対して単位長あたりに働く力の大きさをそれぞれ求め、向きを図示せよ。

Find the forces on the wires A and B per unit length, respectively, and draw the directions of the forces.

- (b) 導線 A、B に流れる電流が作る磁界をそれぞれ H_A 、 H_B とする。点 P における H_A 、 H_B の大きさをそれぞれ求め、向きを図示せよ。

Let H_A and H_B be the magnetic fields due to the currents that flow along A and B, respectively. Find the magnitudes of H_A and H_B at the point P, and draw the directions of H_A and H_B .

- (c) 点 P における H_A と H_B の合成磁界 H の大きさ H は次式で表せることを示せ。

Show that the magnitude H of the total magnetic field H at the point P, which is the vector sum of H_A and H_B , is given by the following equation.

$$H = \frac{Id}{2\pi ab}$$

- (d) 導線 A、B に流れる電流による点 P におけるベクトルポテンシャルは、紙面の裏から表に向かう成分 A_z のみを持ち、次式で与えられる。ベクトルポテンシャルから計算した点 P における磁界の大きさが、問 (c) の磁界の大きさ H に一致することを示せ。

The vector potential at the point P due to the currents that flow along A and B has a component A_z only, which is directed out of the page and given by the following equation. Show that the magnitude of the magnetic field at the point P calculated from the vector potential is equivalent to H given in Question (c).

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{a}{b}$$

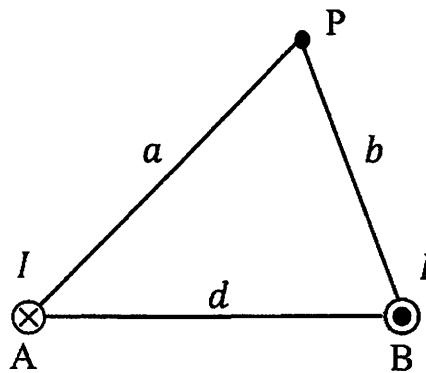


図 (b)
Figure (b)

A-4

下記のすべての問に答えよ。

Answer all the following questions.

- (1) 図(a)に示す交流回路について、以下の問に答えよ。なお電源の角周波数を ω とし、 $L_1 L_2 > M^2$ とする。

For the AC circuit shown in Figure (a), answer all the questions. Note that angle frequency of the voltage source is ω , and $L_1 L_2 > M^2$.

- (a) 電流 I_1 と I_2 を求めよ。

Find current I_1 and I_2 .

- (b) I_1 と I_2 について、 $|I_1| = |I_2|$ かつ位相差が $\pi/2$ となる条件を求めよ。

Find the condition at which $|I_1| = |I_2|$ and the phase difference between I_1 and I_2 becomes $\pi/2$.

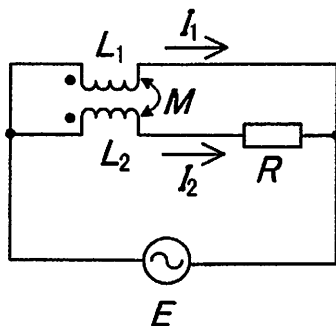


図 (a)
Figure (a)

- (2) 以下の項目について知るところを述べよ。

Explain the meanings of the terms below.

- (a) 負帰還

Negative feedback

- (b) インピーダンス整合

Impedance matching

- (c) 重ね合わせの原理

Principle of superposition

(3) 図(b)に示す理想的な演算増幅器を用いた回路について、以下の問に答えよ。

For the circuit with ideal operational amplifiers shown in Figure (b), answer the following questions.

(a) V_4/V_3 と V_3/V_2 を求めよ。

Find V_4/V_3 and V_3/V_2 .

(b) V_2/V_1 を求めよ。

Find V_2/V_1 .

(c) V_3/V_1 を求めよ。

Find V_3/V_1 .

(d) V_4/V_1 を求めよ。

Find V_4/V_1 .

(e) この回路はバンドパスフィルタ、ローパスフィルタ、ハイパスフィルタとしての機能を備えている。 V_2 , V_3 , V_4 の機能を述べよ。

This circuit works as band-pass filter, low-pass filter, and high-pass filter. Explain functions of V_2 , V_3 , and V_4 .

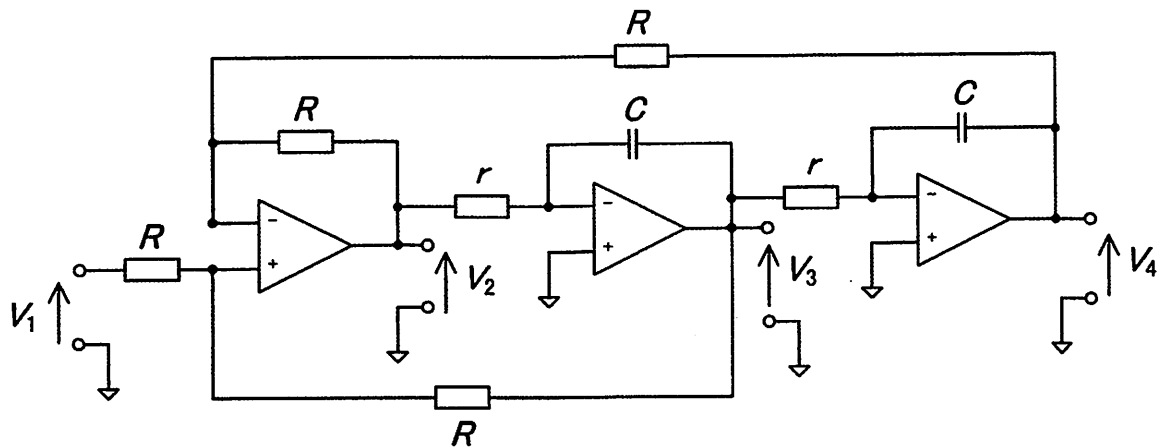


図 (b)
Figure (b)

下記のすべての問に答えよ。(English translation is given below.)

- (1) 記憶のない定常情報源 S は、情報源記号 A, B, C, D, E を、それぞれ確率 0.4, 0.2, 0.16, 0.16, 0.08 で発生させる。下記の問に答えよ。 $\log_2 3 = 1.6$, $\log_2 5 = 2.3$ を用いてよい。
 - (a) S に 2 元ハフマン符号化を施せ。
 - (b) 瞬時符号の定義を述べよ。
 - (c) 問 (a) の符号について、情報源記号 1 つあたりの平均符号長を求めよ。
 - (d) S のエントロピーを求めよ。
- (2) 下記の通信路符号化に関する問に答えよ。ただし、符号 C_1 及び C_2 は、生成多項式がそれぞれ $G_1(x) = x^4 + x + 1$, $G_2(x) = (x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ である符号長 15 の 2 元巡回符号とする。
 - (a) 多項式表現 $x^{10} + x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$ で表される符号語は、 C_1 の符号語か否か判定せよ。
 - (b) 多項式表現 $x^3 + x^2 + 1$ の情報ビット列が与えられた場合の C_1 の符号語の多項式表現を組織符号の形で示せ。
 - (c) C_1 の最小距離を求めよ。
 - (d) C_1 を用いる場合に、何 bit の誤りを訂正できるか求めよ。
 - (e) C_1 に対する C_2 の利害得失を説明せよ。
 - (f) C_2 を用いる場合に、誤りを訂正する方法について述べよ。

Answer all the following questions.

- (1) A stationary memoryless information source S generates information symbols A, B, C, D, and E with probabilities 0.4, 0.2, 0.16, 0.16, and 0.08, respectively. Answer the following questions. $\log_2 3 = 1.6$ and $\log_2 5 = 2.3$ may be used.
 - (a) Find a binary Huffman code of S .
 - (b) Describe the definition of instantaneous codes.
 - (c) Find the expected codeword length per symbol of the code in Question (a).
 - (d) Find the entropy of S .
- (2) Answer the following questions related to channel coding. Let C_1 and C_2 be binary cyclic codes of length 15 with generator polynomials $G_1(x) = x^4 + x + 1$ and $G_2(x) = (x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, respectively.
 - (a) Determine whether $x^{10} + x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$ is a codeword polynomial of C_1 or not.
 - (b) Find the codeword polynomial of C_1 for the message polynomial $x^3 + x^2 + 1$ in a systematic form.
 - (c) Find the minimum distance of C_1 .
 - (d) Find how many bit errors C_1 can correct.
 - (e) Explain the advantage(s) and disadvantage(s) of C_2 over C_1 .
 - (f) Explain how to correct errors with C_2 .

以下の問(1)~(3)に全て答えよ。

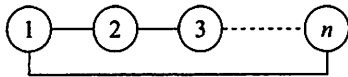
Answer all the following questions (1)-(3).

- (1) 無向グラフのデータ構造として、頂点同士の隣接関係を 0,1 で表す「隣接行列」と、頂点と辺の接続関係を 0,1 で表す「接続行列」がある。これらについて以下の問いに答えよ。(なお、自己ループや多重辺は考えないものとする。)

As the data structures for undirected graphs, we often use the *adjacency matrix* (representing adjacency relations between pairs of nodes) and the *incidence matrix* (representing connections between a node and an edge). Answer the following questions. (Here, we do not consider self-loop and multi-edges.)

- (a) 下図のような n 頂点のサイクルグラフに対して、隣接行列と接続行列がどのような行列で表されるかを説明せよ。

Explain how an adjacency matrix and an incidence matrix are structured for a cycle graph of n nodes as shown below.



- (b) n 頂点の完全グラフに対して、隣接行列と接続行列がどのような行列で表されるかを説明せよ。

Explain how an adjacency matrix and an incidence matrix are structured for a complete graph of n nodes.

- (c) 隣接行列で表された任意の無向グラフを与えられたときに、その補グラフの隣接行列を生成する手順を簡潔に述べよ。

Briefly describe a procedure to generate the adjacency matrix of the complement graph for any given undirected graph represented by an adjacency matrix.

- (d) 接続行列で表された任意の無向グラフを与えられたときに、その補グラフの接続行列を生成する手順を簡潔に述べよ。

Briefly describe a procedure to generate the incidence matrix of the complement graph for any given undirected graph represented by an incidence matrix.

- (2) 下記の疑似コード something について、以下の問に答えよ。なお整数除算では小数点以下切り捨てとする。

Answer the following questions about the procedure “something” shown in the pseudo code below. Here we assume that non-integers are rounded down in integer division.

```
something(int n) {
    if(n < 0) something(-n);
    else {
        int k = n / 3;
        if(k > 0) something(k);
        print (n - (k * 3));
    }
}
```

- (a) 引数 n が 5, 10, -25 のそれぞれの場合について、something が出力する数字列を示せ。What are the output sequences when “something” is invoked with $n = 5$, $n = 10$, and $n = -25$, respectively?

- (b) something は、引数 n に対してどのような数字列を出力するか、簡潔に説明せよ。Briefly explain what sequences will be printed for any given n .

- (c) something が呼出される回数と引数 n との関係について説明せよ。

How many times will “something” be called for any given value of n ?

- (3) クイックソートのアルゴリズムの基本的手順を述べ、その時間計算量について論ぜよ。Describe the quick sort algorithm, and discuss its time complexity.

下記のすべての問に答えよ。(English translation is given on the next page.)

(1) 2進表現について、以下の問に答えよ。

(a) 次の10進数を8ビットの2の補数表現で表せ。

(i) +80

(ii) -48

(b) 次の8ビットの2の補数表現の2進数を8ビットの符号付き絶対値表現に変換せよ。

(i) 10111000

(ii) 11000111

(c) 次の8ビットの符号付き絶対値表現の2進数体系での加算および減算の結果を示せ。

(i) 10111000 + 11000111

(ii) 10111000 - 11000111

(d) 次の8ビットの2の補数表現の2進数体系での加算および減算の結果を示せ。

(i) 10111000 + 11000111

(ii) 10111000 - 11000111

(e) 2の補数表現の2進数の符号拡張について説明せよ。

(2) 命令やデータのメモリ内での配置における整列化制約について説明せよ。

(3) 以下の同じ命令セットアーキテクチャの三つのプロセッサにおいて、実行命令数が10,000,000で、そのうち10%が条件分岐命令であるプログラムを実行した場合の計算時間を求めよ。条件分岐命令の60%で条件が成立するものとする。

(a) クロック・サイクル時間が2nsの単一サイクル方式のプロセッサ。

(b) クロック・サイクル時間が500psの5段パイプライン方式のプロセッサ。
ただし、条件分岐命令で条件が成立した場合、1サイクルストールする。

(c) クロック・サイクル時間が400psの8段パイプライン方式のプロセッサ。
ただし、条件分岐命令で条件が成立した場合、2サイクルストールする。

Answer all the following questions.

(1) Answer the following questions on binary number representations.

(a) Express the following decimal numbers in the 8-bit two's complement representation.

(i) +80

(ii) -48

(b) Convert the following 8-bit two's complement binary numbers into the 8-bit sign-and-magnitude binary representation.

(i) 10111000

(ii) 11000111

(c) Show the results of the following addition and subtraction in the 8-bit sign-and-magnitude binary number system.

(i) 10111000 + 11000111

(ii) 10111000 - 11000111

(d) Show the results of the following addition and subtraction in the 8-bit two's complement binary number system.

(i) 10111000 + 11000111

(ii) 10111000 - 11000111

(e) Explain 'sign extension' of a two's complement binary number.

(2) Explain 'alignment restriction' on the arrangement of instructions and data in memory.

(3) Show the execution time of a program of 10,000,000 executed instructions, 10% of which are conditional branch instructions, on the following three processors with the same instruction set architecture. The condition is taken for 60% of the conditional branch instructions.

(a) Single-cycle implementation with clock cycle time of 2 ns.

(b) 5-stage pipelined implementation with clock cycle time of 500 ps which stalls one cycle for a conditional branch instruction when the condition is taken.

(c) 8-stage pipelined implementation with clock cycle time of 400 ps which stalls two cycles for a conditional branch instruction when the condition is taken.

下記の全ての問に答えよ。(English translation is given on the next page.)

(1) プログラミング言語に関連する以下の用語について、プログラム例を使って説明せよ。

(a) 例外

(b) 末尾再帰

(2) 以下の空欄 [1]～[9] を選択肢 (i)～(xviii) を使って埋め、以下に示す (架空の) プログラミング言語 KAO の式についての説明を完成させよ。答案には各空欄に入る選択肢の記号を書くこと。

KAO 言語 における式の構文は以下の BNF の非終端記号 E で与えられる。終端記号は, T , $($, $)$, $_$, $*$, $;$, と (タイプライター体の) 英小文字である。

$$\begin{aligned} x &\in Ident = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\} \\ A &::= T \mid x \mid (E) \\ B &::= A \mid B A \\ C &::= B \mid B _ C \\ D &::= C \mid D * C \\ E &::= D \mid E ; \end{aligned}$$

$Ident$ は識別子の集合で、識別子は英小文字である。式を構成する要素には、定数記号 T 、識別子 x 、[1] 置演算子 $_$ と $*$ 、[2] 置演算子 $;$ がある。ふたつの式を並べたものは関数呼出しで、例えば fT は、関数 f を引数 T で呼び出す式である。 $()$ は部分式のまとまりを表すために使われる。演算子を結合の強い順に並べると、[3]、[4]、[5] で、 $_$ は [6] 結合、 $*$ は [7] 結合である。例えば、式 $f(T_T);$ と同じ意味を持つ式は [8] である。また、式 $i*x*iT_T;$ と同じ意味を持つ式は [9] である。

選択肢

- | | | |
|---------|--------------------|------------------------------|
| (i) 上 | (vii) 中 | (xiii) $(fT)_(T;)$ |
| (ii) 下 | (viii) $_$ | (xiv) $(i*x)*((iT)_(T;))$ |
| (iii) 左 | (ix) $*$ | (xv) $(i*(x*i))((T_T);)$ |
| (iv) 右 | (x) $;$ | (xvi) $((i*x)*((iT)_T));$ |
| (v) 前 | (xi) $(f(T_T));$ | (xvii) $((i*(x*i))T)_T;$ |
| (vi) 後 | (xii) $f((T_T);)$ | (xviii) $(i*x)*(i((T_T);))$ |

(3) 高階関数をオブジェクトを使って表現する方法について論ぜよ。

Answer all the following questions.

(1) Explain the following terms related to programming languages, using program examples.

- (a) exceptions
- (b) tail recursion

(2) Complete the following explanation about expressions in the (hypothetical) programming language called KAO, by filling each blank [1], ..., [9] with a choice from (i)–(xviii) below. Write down your choice for each blank on the answer sheet.

Expressions in KAO are given by the nonterminal symbol E of the following BNF. Terminal symbols are “T”, “(”, “)”, “_”, “*”, “;”, and lowercase letters (in the type-writer font).

$$\begin{aligned} x &\in Ident = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\} \\ A &::= T \mid x \mid (E) \\ B &::= A \mid B A \\ C &::= B \mid B _ C \\ D &::= C \mid D * C \\ E &::= D \mid E ; \end{aligned}$$

The set of identifiers $Ident$ is ranged over by x and consists of the lowercase letters. An expression is built from a constant symbol “T”; an identifier x ; [1] fix operators “_” and “*”; [2] fix operator “;”; and a function call, which is depicted by juxtaposition of two expressions (for example, “fT” calls function f with the argument T). A pair () of parentheses are used to delimit a subexpression explicitly. The operator “[3]” has higher precedence than “[4]”, which in turn has higher precedence than “[5]”. The operator “_” is [6]-associative and “*” is [7]-associative. Expression “f(T_T);” has the same meaning as “[8]” and “i*x*iT_T;” as “[9]”.

Choices

- | | | |
|------------|-----------------|---------------------------|
| (i) up | (vii) in | (xiii) (fT)_(T;) |
| (ii) down | (viii) _ | (xiv) (i*x)*((iT)_(T;)) |
| (iii) left | (ix) * | (xv) (i*(x*i))((T_T);) |
| (iv) right | (x) ; | (xvi) ((i*x)*((iT)_T)); |
| (v) pre | (xi) (f(T_T)); | (xvii) (((i*(x*i))T)_T); |
| (vi) post | (xii) f((T_T);) | (xviii) (i*x)*(i((T_T);)) |

(3) Discuss how higher-order functions can be represented by using objects.

(English translation is given on the next page.)

本問題で扱うグラフはすべて無向グラフであるとし、自己ループや多重辺を持たないとする。グラフ G の頂点集合を $V(G)$ と表記する。 $V(G)$ の要素数は有限であるとする。 G の頂点集合 $S (\subseteq V(G))$ について、 $G - S$ を、 S に含まれるすべての頂点と、それらの頂点に接続する辺を、 G から削除したグラフと定義する。 $c(G)$ を、 G の連結成分の個数と定義する。 G のハミルトン閉路とは、 $V(G)$ のすべての頂点をちょうど1回ずつ通る G 上の閉路である。グラフ G_a, G_b を図 (a) で示すグラフとする。

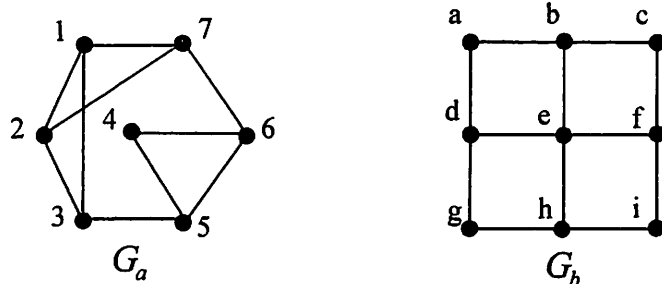


図 (a)

下記のすべての問に答えよ。

- (1) G_a と G_b 上のハミルトン閉路をそれぞれすべて求めよ。ハミルトン閉路が存在しない場合は「存在しない」と書くこと。答えは図で曖昧なく描くこと。
- (2) 「二部グラフ」の数学的な定義を述べよ。
- (3) G_a と G_b は二部グラフであるか否かをそれぞれ答えよ。
- (4) 頂点数が奇数の二部グラフにはハミルトン閉路が存在しないことを証明せよ。
- (5) グラフ G にハミルトン閉路が存在するならば、任意の空でない頂点集合 $S (\subseteq V(G))$ について、 $c(G - S) \leq |S|$ が成り立つことを証明せよ。ここで、 $|S|$ は S の要素数を表す。
- (6) 以下の定理を考える。「グラフ G について、 $|V(G)| \geq 3$ とする。隣接していない任意の2頂点 $v, w \in V(G)$ について $d(v) + d(w) \geq |V(G)|$ が成り立つならば、 G はハミルトン閉路をもつ。ここで $d(v)$ は v の次数である。」

この定理を背理法を用いて証明する。以下の条件を満たすグラフ G_1 が存在すると仮定する。 $|V(G_1)| \geq 3$ を満たし、隣接していない任意の2頂点 $v, w \in V(G_1)$ について $d(v) + d(w) \geq |V(G_1)|$ が成り立ち、 G_1 はハミルトン閉路をもたない。 $i = 1, 2, \dots$ について、ハミルトン閉路をもたないように、 G_i に任意に辺を1本追加したグラフを G_{i+1} とする。この構成により、グラフ G_1, G_2, \dots, G_k が得られる。ここで、 G_k はハミルトン閉路をもたず、 G_k にどのように辺を1本追加してもハミルトン閉路をもつグラフになるとする。

下記のすべての問に答えよ。

- (a) G_k にはすべての頂点をちょうど1度ずつ通るパス（経路）が存在する。その理由を述べよ。
- (b) G_k のすべての頂点をちょうど1度ずつ通るパスを（頂点を並べて） v_1, \dots, v_n とする。ここで、 $n = |V(G_k)|$ である。 $d(v_1) + d(v_n) \geq |V(G_k)|$ を導出せよ。
- (c) 定理の証明を完成させよ。

Assume that all graphs appearing in this problem are undirected and have neither self-loops nor parallel edges. For a graph G , let $V(G)$ denote the vertex set of G . Assume that the cardinality of $V(G)$ is finite. For a vertex subset $S (\subseteq V(G))$ of G , let $G - S$ be the graph obtained by removing all the vertices in S and all the edges incident to these vertices. Let $c(G)$ be the number of connected components of G . A Hamiltonian cycle of G is a cycle that visits every vertex in $V(G)$ exactly once. Let G_a and G_b be the graphs shown in Figure (a).

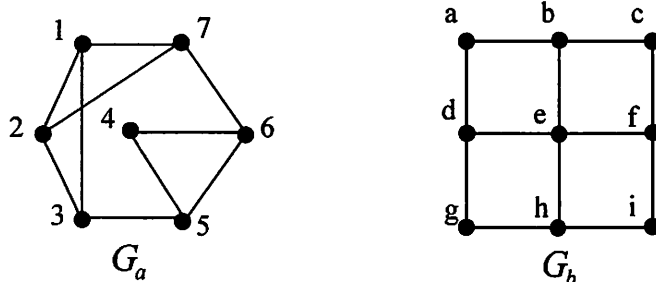


Figure (a)

Answer all the following questions.

- (1) Find all the Hamiltonian cycles in each of G_a and G_b . If a graph has no Hamiltonian cycle, write “no Hamiltonian cycle.” Illustrate your answer clearly.
- (2) Write a mathematical definition of a “bipartite graph.”
- (3) Is G_a a bipartite graph? Is G_b a bipartite graph?
- (4) Prove that every bipartite graph with an odd number of vertices has no Hamiltonian cycle.
- (5) Prove that if G has a Hamiltonian cycle then for any nonempty vertex set $S (\subseteq V(G))$, $c(G - S) \leq |S|$ holds, where $|S|$ is the number of elements in S .
- (6) Consider the following theorem. “For a graph G , suppose that $|V(G)| \geq 3$. If $d(v) + d(w) \geq |V(G)|$ holds for every pair of non-adjacent vertices $v, w \in V(G)$, then G has a Hamiltonian cycle, where $d(v)$ is the degree of v .”

Let us prove this theorem by contradiction. Suppose that there exists a graph G_1 with $|V(G_1)| \geq 3$ such that for any two non-adjacent vertices $v, w \in V(G_1)$, $d(v) + d(w) \geq |V(G_1)|$ holds, and such that G_1 has no Hamiltonian cycle. For $i = 1, 2, \dots$, let G_{i+1} be the graph obtained by arbitrarily adding an edge to G_i so that G_{i+1} still has no Hamiltonian cycle. By this process, we obtain graphs G_1, G_2, \dots, G_k , where G_k has no Hamiltonian cycle, and any graph obtained by arbitrarily adding an edge to G_k has a Hamiltonian cycle.

Answer all the following questions.

- (a) G_k has a path that visits every vertex exactly once. What is the reason?
- (b) Let v_1, \dots, v_n be the sequence of vertices on a path in G_k that visits every vertex exactly once, where $n = |V(G_k)|$. Derive $d(v_1) + d(v_n) \geq |V(G_k)|$.
- (c) Complete the proof of the theorem.