2020 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　　学

午後 1：00 ～ 3：30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 6 問のうち，任意の 3 問（社会基盤学専攻，システム創成学専攻，原子力国際専攻，および技術経営戦略学専攻の受験者は 2 問）を選んで解答すること。
4. 解答用紙 3 枚（社会基盤学専攻，システム創成学専攻，原子力国際専攻，および技術経営戦略学専攻の受験者は 2 枚）が渡される。1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。必要があれば，解答用紙の裏面を用いてもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。また，上方にある「くさび型マーク」のうち，記入した問題番号および修士課程と博士課程の区別に相当する箇所を，試験終了後に監督者の指示に従い，正しく切り取ること。したがって，解答用紙 1 枚につき 2 ヶ所切り取ることとなる。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

I. 以下の微分方程式に関する問いに答えよ。

$$\cos x \frac{d^2y}{dx^2} - \sin x \frac{dy}{dx} - \frac{y}{\cos x} = 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

1. 式(1)の特解の 1 つは，$y = (\cos x)^m$（mは定数）の形をしている。定数mを求めよ。

2. 問 I.1 の結果を用いて，式(1)の一般解を求めよ。

II. 以下の積分の値を求めよ。

$$I = \int_1^{\infty} x^5 e^{-x^4+2x^2-1} dx \tag{2}$$

ただし，正の定数αに対して，関係式$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ が成り立つ。

III. 以下の微分方程式の一般解を，適当な関数$f(x,y)$ を用いて $f(x,y) = C$ （Cは定数）の形で求めよ。ただし，nは任意の実定数とする。

$$(x^3 y^n + x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \qquad (x > 0, y > 0) \tag{3}$$

第 2 問

次の行列$\boldsymbol{A}$について考える。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & \alpha\end{pmatrix} \tag{1}$$

ただし，αは実数とする。以下ではベクトル$\boldsymbol{v}$の転置を$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$と書く。

I. 行列$\boldsymbol{A}$の 3 つの固有値の和が7であるとき，αを求めよ。

II. 行列$\boldsymbol{A}$の 3 つの固有値の積が-16であるとき，αを求めよ。

III. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$を満たす実数ベクトル$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$の集合に対する$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$の最大値を$\|\boldsymbol{A}\|$と書く。$\|\boldsymbol{A}\|=4$であるとき，$\alpha$を求めよ。

IV. 以下の問いでは，$\alpha=4$とする。

1. 行列$\boldsymbol{A}$の全ての固有値と，これらに対応する規格化された固有ベクトルを求めよ。
2. $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=1$および$y_1-y_2-2y_3=0$を満たす実数ベクトル$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$に対して，$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$の値域を求めよ。
3. $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}=1$および$z_1+z_2+z_3=0$を満たす実数ベクトル$\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}$に対して，$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$の値域を求めよ。

第 3 問

以下，zは複素数，xとεは実数である。また，虚数単位をiとする。

I. 関数$f_n(z) = 1/(z^n - 1)$について，以下の問いに答えよ。ただし，nは2以上の整数とする。

1. $n = 3$のとき，$f_n(z)$の特異点を全て求めよ。
2. $f_n(z)$の任意の特異点p_0における留数の値を計算し，nとp_0を用いてその結果を簡潔に表せ。
3. 閉曲線$|z| = 2$を反時計方向に回る積分路 C に対して，線積分 $\oint_C f_n(z)dz$を求めよ。

II. 以下の極限値を求めよ。

$$\lim_{\varepsilon \to +0}\left[\int_{-\infty}^{1-\varepsilon} \frac{1}{x^3 - 1} dx + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x^3 - 1} dx\right] \tag{1}$$

III. 以下の極限値を求めよ。

$$\lim_{\varepsilon \to +0}\left[\int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{\cos x}{x^4 - 1} dx + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 - 1} dx\right] \tag{2}$$

IV. 以下の極限値を求めよ。

$$\lim_{\varepsilon \to +0}\left[\int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{\sin\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)}{x^4 - 1} dx + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)}{x^4 - 1} dx\right] \tag{3}$$

第 4 問

3 次元直交座標系xyzにおいて，$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$はそれぞれx, y, z軸方向の単位ベクトルである。媒介変数$\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$によって表される 2 つの曲線を以下のベクトル関数$\mathbf{P}(\theta)$, $\mathbf{Q}(\theta)$によって定義する。

$$\mathbf{P}(\theta) = x(\theta)\mathbf{i} + y(\theta)\mathbf{j} \tag{1}$$

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{P}(\theta) + z(\theta)\mathbf{k} \tag{2}$$

ただし，

$$x(\theta) = \frac{3}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}\cos(3\theta) \tag{3}$$

$$y(\theta) = \frac{3}{2}\sin(\theta) - \frac{1}{2}\sin(3\theta) \tag{4}$$

である。$z(\theta)$は$z(0) > 0$かつ$z(\pi) < 0$を満たす連続関数であり，$\mathbf{Q}(\theta)$で表される曲線は座標系の原点$(0,0,0)$を中心とする半径 2 の球面上に存在する。曲線の正の方向は変数θが増加する方向に対応する。なお，曲率は曲率半径の逆数である。以下の問いに答えよ。

I. θが 0 からπまで変化するとき，$\mathbf{P}(\theta)$で表される曲線の弧長を求めよ。

II. $z(\theta)$を求めよ。

III. $\mathbf{Q}(\theta)$で表される曲線の接線ベクトルと単位ベクトル$\mathbf{k}$のなす角をαとするとき，$\cos(\alpha)$を求めよ。

IV. $\mathbf{P}(\theta)$で表される曲線の曲率$\kappa_P(\theta)$を求めよ。ただし，$\theta = 0$, $\theta = \pi$は除く。

V. $\mathbf{Q}(\theta)$で表される曲線の曲率を$\kappa_Q(\theta)$とする。$\kappa_P(\theta)$とαを用いて$\kappa_Q(\theta)$を表せ。ただし，$\theta = 0$, $\theta = \pi$は除く。

第 5 問

$t \geq 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ は，複素数 s を用いて，次式で定義される。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st)\, dt \qquad (1)$$

以下では，複素数全体を$\mathbb{C}$，実部が正の複素数全体を$\mathbb{C}^+$により表す。

I. $t \geq 0$ で定義された次の関数 $g(t)$ を考える。

$$g(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(tx)}{x^2} dx \qquad (2)$$

1. 関数$g(t)$ のラプラス変換 $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ $(s \in \mathbb{C}^+)$ を求めよ。
2. 問 I:1 の結果を用いて，以下の積分の値を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx \qquad (3)$$

II. 以下の偏微分方程式

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1, t > 0) \qquad (4)$$

を満たす関数 $u(x,t)$ について，境界条件

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad (t \geq 0) & (5) \\ u(1,t) = 1 \quad (t \geq 0) & (6) \\ u(x,0) = \dfrac{\cosh(x)}{\cosh(1)} \quad (0 < x < 1) & (7) \end{cases}$$

のもとで考える。

1. $u(x,t)$ のラプラス変換を $U(x,s)=\mathcal{L}[u(x,t)]$ $(s\in\mathbb{C}^{+})$ とする。変数 x を独立変数とする$U(x,s)$の常微分方程式および境界条件を求めよ。なお，$u(x,t)$ は有界であるとする。また，以下の関係を用いて良い。

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=\frac{\partial U(x,s)}{\partial x} \tag{8}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]=\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} \tag{9}$$

2. 解析関数 $Q(s)$ $(s\in\mathbb{C})$ を用いて，次の関数 $U_{\mathrm{c}}(x,s)$ が定義されている。

$$U_{\mathrm{c}}(x,s)=\frac{\cosh(x)}{(s-1)\cosh(1)}-\frac{\cosh(x\sqrt{s})}{Q(s)} \quad (0\le x\le 1) \tag{10}$$

$s\in\mathbb{C}^{+}$ において関数 $U(x,s)=U_{\mathrm{c}}(x,s)$ が問 II.1 で求めた微分方程式と境界条件を満たすとき，関数 $Q(s)$ を求めよ。

3. 問 II.2 で求めた $Q(s)$ について，$Q(s)=0$ $(s\in\mathbb{C})$ のすべての解を絶対値の小さい順に並べて，複素数列 $\{a_r\}$ $(r=1,2,\cdots)$ を定義する。このとき，$t\ge 0$, $0\le x\le 1$, $r\ge 1$ に対して，以下の極限 $R_r(x,t)$ は有限である。

$$R_r(x,t)=\lim_{s\to a_r}(s-a_r)U_{\mathrm{c}}(x,s)\exp(st) \tag{11}$$

また，偏微分方程式(4)の解は次式のように表される。

$$u(x,t)=\sum_{r=1}^{\infty}R_r(x,t) \tag{12}$$

$R_1(x,t)$, $R_2(x,t)$, および $r\ge 3$ に対する $R_r(x,t)$ を求めよ。

第 6 問

n回の独立試行で点数を獲得するゲームを考える。それぞれの試行では，$+1$または-1のどちらかを獲得し，この 2 つは同じ確率$1/2$で起こる。k回目$(1 \leq k \leq n)$の試行で獲得した点数をX_kとし，$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$とする。以下では，nは$n \geq 4$を満たす偶数とし，tは$2 \leq t \leq n$を満たす偶数とする。

I. $S_4 = 0$となる確率を求めよ。

II. $S_n = t$となる確率を$P_n(t)$とする。$P_n(t)$を求めよ。

III. $S_1 = 1$かつ$S_n = t$となる確率を$P_n^+(t)$とする。$P_n^+(t)$を求めよ。

IV. $S_1 = -1$かつ$S_n = t$となる確率を$P_n^-(t)$とする。$P_n^-(t)$を求めよ。

V. 変数$\{S_j\}$ $(j = 1, 2, \cdots, n-1)$のすべてが0より大きく，かつ$S_n = t$となる確率を$Q_n(t)$とする。$P_n^+(t)$と$P_n^-(t)$を用いて$Q_n(t)$を表せ。さらに，$P_n(t)$を用いて$Q_n(t)$を表せ。

VI. 変数$\{S_j\}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$のすべてが0より大きくなる確率を求めよ。