2019年度10月期・2020年度4月期

# 京都大学大学院情報学研究科修士課程
# 先端数理科学専攻

# 入学者選抜試験問題

# 【基礎科目】

2019年7月13日 10:00 – 11:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。途中退室は認めない。

(4) 全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から3題選択して解答すること。4題以上選択した場合は、問題番号の若い順に3題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙4枚と下書用紙 (計算用紙) が配布される。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に受験番号と氏名を記入した上で、選択した問題番号を記入し、解答用紙1枚につき1題を解答すること。
解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 解答用紙3枚を提出すること。 2題以下しか選択していない場合でも、選択予定の問題番号を記入し、必ず3枚の解答用紙を提出 すること。

(8) 問題用紙・予備の解答用紙・下書用紙は持ち帰ること。

**1** 次の各問に答えよ.

(1) 整数 $n \geq 1$ に対して

$$a_n = n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2n|x|}\,\frac{x+3}{x^4+3x^2+1}\,dx$$

とおくとき, 極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

の値を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $A$ を

$$A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2+y^2 \leq 4-x^2-y^2,\ 2+y^2 \leq z \leq 4-x^2-y^2\right\}$$

によって定義する. 重積分

$$\iiint_A 1\,dxdydz$$

の値を求めよ.

**2** 次の各問に答えよ.

(1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

と定義する. $f$ が $(0,0)$ で連続かどうかを理由とともに答えよ.

(2) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$g(x,y) = x^3 - y^3 + 3x^2 - 6xy + 3y^2$$

と定義する. $g$ の極値を求めよ.

**3** 次の各問に答えよ.

(1) $n$ を正の整数, $A$, $B$, $C$, $D$ を $n$ 行 $n$ 列の実行列とし, $2n$ 行 $2n$ 列の実行列 $E$ を

$$E := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

で定義する. このとき, 行列 $D$ が正則ならば,

$$\det E = (\det D)\left(\det(A - BD^{-1}C)\right)$$

が成立することを示せ. ただし, $n$ 行 $n$ 列 の行列 $X$ に対して $\det X$ は $X$ の行列式を表す.

(2) 次の行列の行列式を計算せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

**4** 3 行 3 列の行列 $A$ を

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する. 次の各問に答えよ.

(1) $A$ の固有値を全て求めよ. さらに, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 行 3 列の正則な実行列 $P$ を一つ求めよ.

(2) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ を $t \geq 0$ で定義された実数値連続関数で, $t > 0$ では微分可能なものとする. いま, $x(0) = 2$, $y(0) = -3$, $z(0) = 1$ であり, 任意の $t > 0$ で

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

が成り立つとする. ただし, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$ はそれぞれ $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ の $t$ に関する導関数を表す. このとき, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ を求めよ.

5

質量 $m$ の質点の直線上の運動を考える．この直線に沿って $x$ 軸をとり，時刻 $t$ での質点の位置を $x(t)$，質点の速度を $\dot{x}(t)$ で表す．ここで，ドット $(\cdot)$ は時間微分を表す．$X_0$ を 0 でない実定数，$V_0$ を実定数として，質点の初期位置を $x(0)=X_0$，初速度を $\dot{x}(0)=V_0$ のように与える．$F$ を正定数として，質点には，位置 $x$ に依存する復元力 $-F\mathrm{sgn}(x)$ がはたらき，質点は周期運動を行う．ここで，$\mathrm{sgn}(y)$ は，実数 $y$ に対して，

$$\mathrm{sgn}(y)=\begin{cases}1 & (y>0)\\ 0 & (y=0)\\ -1 & (y<0)\end{cases}$$

で定義された関数である．$X, V$ をともに正定数として，位置 $x(t)$, 速度 $\dot{x}(t)$ は，それぞれ，$-X \le x(t) \le X$, $-V \le \dot{x}(t) \le V$ の範囲で周期的に変動する．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) $X$ を $m$, $F$, $X_0$, $V_0$ のうち必要なものを用いて表せ．

(2) $V$ を $m$, $F$, $X_0$, $V_0$ のうち必要なものを用いて表せ．

(3) $x/X$ を横軸，$\dot{x}/V$ を縦軸にとり，周期運動に伴って描かれる軌跡を図示せよ．

(4) この質点の周期運動の周期を $m$, $F$, $X_0$, $V_0$ のうち必要なものを用いて表せ．

(5) 振動の周期が初期条件に依存しない復元力の例を挙げよ．ただし，摩擦や空気抵抗のようなエネルギーの散逸はなく，エネルギーは一定に保たれるとする．