2019年度10月期・2020年度4月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学専攻

入学者選抜試験問題

【専門科目】

2019年 7月 13日 13:00 – 14:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。途中退室は認めない。

(4) 全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から1題のみを選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の最も若い1題のみを採点対象とする。

(5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙 (計算用紙) が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答に際して裏面を用いる場合は解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 次の各問のそれぞれに答えよ.

問1 X を Banach 空間とする. M を X の有界集合とし, X 上の線型作用素 K による M の像 $K(M)$ が X の相対コンパクト集合となるとき, K を X 上のコンパクト作用素という.

(1) X 上のコンパクト作用素は X 上の有界線型作用素であることを示せ.

(2) A を X 上の有界線型作用素とし, K を X 上のコンパクト作用素とする. このとき, 作用素の積 AK と KA はそれぞれ X 上のコンパクト作用素か. 理由をつけて答えよ.

問2 $a < b$ のとき, $\mathrm{Lip}[a,b]$ は閉区間 $[a,b]$ 上の Lipschitz 連続な実数値関数のなす線型空間とする. すなわち, $f \in \mathrm{Lip}[a,b]$ とは, f に対してある正数 L が存在し, $x, y \in [a,b]$ のとき, $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ が成立することをいう.

(1)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

とするとき, $f \in \mathrm{Lip}[0,1]$ か. 理由をつけて答えよ.

(2) $f \in \mathrm{Lip}[a,b]$ に対して,

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \sup_{x,y \in [a,b]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \qquad (*)$$

とする. このとき, $\|\cdot\|$ は線型空間 $\mathrm{Lip}[a,b]$ の 1 つのノルムであることを示せ.

(3) $(*)$ で与えたノルムにより, 線型空間 $\mathrm{Lip}[a,b]$ は Banach 空間であることを示せ.

2 次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　xy 平面上の曲線 $y = x^3 (0 \leq x \leq 1)$ を x 軸のまわりに回転して得られる曲面の面積を求めよ．

問 2　i を虚数単位とし，$-1 \leq x \leq 1$ とする．このとき，$f(x) = |(1+ix)^{(1+ix)}|$ のグラフの概形を描け．なお，複素数の偏角 θ が必要になるときは，$-\pi < \theta \leq \pi$ とする．

問 3　次の常微分方程式の初期値問題の解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2 \cos x}{x}, \quad y(\pi) = \pi.$$

問 4　$f(x) = 1 + \cos 2\pi x + \cos 3\pi x$, $I = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ とする．区間 $-1 \leq x \leq 1$ を $2N$ 等分して，$h = \frac{1}{N}$, $x_j = jh$ $(j = 0, \pm 1, \cdots, \pm N)$ とし，定積分 I に (複合型) 台形公式を適用した数値積分の値を I_N とする．このとき，$|I - I_N|$ の評価を与えよ．ただし，数値積分は厳密 (exact) に実行されるものとする．

3

次の各問のそれぞれに答えよ.

問 1 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^3 x}{x^2+1}\, dx$$

問 2 S を $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ 1 < z < \sqrt{3}\}$ で定義された $\mathbb{R}^3$ の曲面とする. $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は S 上の単位法線ベクトルで $n_z > 0$ を満たすようにとられている. また, $\boldsymbol{A} = (x^2yz,\ -xy^2z,\ xyz^2)$ とする. このとき, 積分

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

の値を求めよ. ここに, dS は S の面積要素である.

問 3 $n \times n$ 実行列 A, 及び $\mathbb{R}^n$ の元 $\boldsymbol{y}$ を区分けして

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1\mu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mu 1} & \cdots & A_{\mu\mu} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_\mu \end{pmatrix}$$

と書く. ここに, $A_{\alpha\beta}$ $(1 \le \alpha, \beta \le \mu)$ は $n_\alpha \times n_\beta$ 行列, $\boldsymbol{y}_\alpha \in \mathbb{R}^{n_\alpha}$ $(1 \le \alpha \le \mu)$ であり, 正の整数 n_α $(1 \le \alpha \le \mu)$ は $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{\mu} n_\alpha = n$ を満たす. A 及び $A_{\alpha\alpha}$ $(1 \le \alpha \le \mu)$ が正則のとき, 与えられた $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{x}_\alpha^{(N+1)} \in \mathbb{R}^{n_\alpha}$ $(1 \le \alpha \le \mu)$ に関する方程式

$$A_{\alpha\alpha}\boldsymbol{x}_\alpha^{(N+1)} = \boldsymbol{b}_\alpha - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{\mu} A_{\alpha\beta}\boldsymbol{x}_\beta^{(N)}, \qquad \alpha = 1, \cdots, \mu, \quad N = 0, 1, 2, \cdots \qquad (*)$$

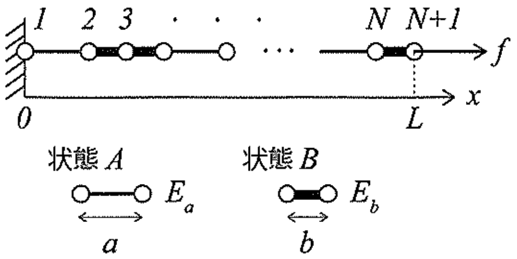
を逐次解くことにより $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めたい. このとき次の問に答えよ.

(1) $\|A_{\alpha\alpha}^{-1}\|_\infty \displaystyle\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{\mu} \|A_{\alpha\beta}\|_\infty < 1$ $(1 \le \alpha \le \mu)$ が成立するとき, 任意の $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(*)$ で求めた $\boldsymbol{x}^{(N)}$ は $N \to \infty$ のとき $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ に収束することを示せ. ここに, $\|\cdot\|_\infty$ は ∞ ノルムであり, $p \times q$ 実行列 C に対して $\|C\|_\infty = \displaystyle\max_{1\le i\le p} \sum_{j=1}^{q} |c_{ij}|$ である. ここに, c_{ij} $(1 \le i \le p,\ 1 \le j \le q)$ は C の (i, j) 成分である.

(2) $\displaystyle\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{\mu} \|A_{\alpha\beta}\|_\infty < \|A_{\alpha\alpha}\|_\infty$ $(1 \le \alpha \le \mu)$ が成立するが, $(*)$ で求めた $\boldsymbol{x}^{(N)}$ が $N \to \infty$ のとき $\boldsymbol{x}$ に収束しないような A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}^{(0)}$, n_α $(1 \le \alpha \le \mu)$ の例を一つ挙げよ.

4

質量の無視できる $N+1$ 個の粒子が x 軸上で結合した下図のような系を考える．粒子間の結合はそれぞれ独立に A または B の状態をとり，状態 A は粒子間距離 a，エネルギー E_a，状態 B は粒子間距離 b，エネルギー E_b を持つ．粒子に x 座標の小さい順に $1, 2, \cdots, N+1$ と番号を付けたとき，粒子 1 は $x=0$ の位置に固定されており，粒子 $N+1$ には x 軸正の方向に外力 f がかかっている．また粒子 $N+1$ の x 座標を L で表す．この系が絶対温度 T の熱平衡状態にあるとして，以下の問に答えよ．ただし，ボルツマン定数を k，$\beta = 1/(kT)$ とする．



(1) 外力 f によるこの系のポテンシャルエネルギーを L の関数として求めよ．ただし，$L=0$ をポテンシャルエネルギーの原点とする．

(2) この系の分配関数 Z を求めよ．

(3) L の平均値 $\langle L \rangle$ を求めよ．また，高温極限および低温極限のそれぞれについて $\langle L \rangle$ の値を求め，その値になる理由を物理的に考察せよ．

(4) $\mu = \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial f}$ を求め，その概形を f の関数としてグラフに描け．また，高温極限および低温極限のそれぞれについても，μ の概形を f の関数としてグラフに描け．ただし，$a \neq b$ とし，$(E_a - E_b)/(a-b) > 0$ する．

(5) L の分散 $\langle L^2 \rangle - \langle L \rangle^2$ を D と表す．D と前問 (4) の μ との関係を求めよ．

5

次の各問のそれぞれに答えよ.

問 1

(x, y) 平面上の 2 次元流に関する以下の設問に答えよ. なお a を 0 でない定数とし, t は時間を表す.

(1) 流速場を $(u, v) = (3ax, ay)$ とするとき, 物質微分（ラグランジュ微分）

$$\frac{D}{Dt}(x^2 y e^{-at})$$

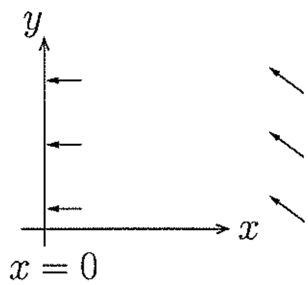
を計算せよ.

(2) 流速場を $(u, v) = (ay, 0)$ とするとき, $(x, y) = (0, 0)$ を中心とする半径 2 の円周に沿って循環 Γ を計算せよ.

(3) 流速場を $(u, v) = \left(\dfrac{2x+y}{1+t}, \dfrac{-y}{1+t}\right)$ とする. この流体の中に円形領域 $D_0 = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ を考え, 時刻 $t = 0$ に D_0 を占めた流体が時刻 $t > 0$ に領域 $D(t)$ を占めるものとする. このとき, 積分 $\displaystyle\int_{D(t)} dxdy$ を求めよ.

問 2

(x, y) 平面上の直線 $x = 0$ を境界とする半領域 $x > 0$ を占める非圧縮性粘性流体 (密度 ρ, 動粘性係数 ν) の 2 次元流を考える. この流体の速度の (x, y) 方向成分を (u, v), 圧力を p とする. 無限遠方（$x \to \infty$）において流体の状態は境界に向かう一様流であると仮定し, そこでの流速を $(-u_\infty, v_\infty)$ $(u_\infty > 0)$, 圧力を p_∞ と表す. 一方, 境界 $x = 0$ では流体の境界への定常な吸収が生じており, すなわち流速と圧力は境界条件



$$p - p_0 = -Cu, \quad v = 0, \quad (x = 0)$$

を満足するものとする. ただし p_0 および C は正の定数である. また, 流体に外力は働かず, 流れは定常でかつ y 方向に一様であるとする. このとき以下の設問に答えよ.

(1) この流体に対する連続の式を記せ. また, この流体に対する運動方程式を x 方向成分, y 方向成分についてそれぞれ記せ.

(2) p_∞, u_∞, p_0, C が満たす関係を導け.

(3) v を x, u_∞, v_∞, ν を用いて表せ.