基礎数学 I

1

区間 $[0,1]$ 上の C^1 級関数 $\varphi(t)$ で $\varphi(0)=0, \varphi(1)=1$ を満たすもの全体の集合を Γ とする．$\varphi \in \Gamma$ に対して，

$$I(\varphi)=\int_0^1 (\dot{\varphi}(t))^2 dt, \qquad J(\varphi)=\int_0^1 (t\dot{\varphi}(t))^2 dt$$

とおく．ここで，$\dot{\varphi}(t)$ は $\varphi(t)$ の導関数 $\dfrac{d\varphi}{dt}(t)$ である．また，

$$A=\inf_{\varphi\in\Gamma} I(\varphi), \qquad B=\inf_{\varphi\in\Gamma} J(\varphi)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(i) A を求めよ．また，$I(\varphi)=A$ となる $\varphi \in \Gamma$ を求めよ．

(ii) 正の整数 n に対して，$\varphi_n(t)=1-(1-t)^n$ とおく．$J(\varphi_n)$ を求めよ．

(iii) B を求めよ．

(iv) $J(\varphi)=B$ となる $\varphi \in \Gamma$ は存在しないことを示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

Let Γ be the set of C^1 functions $\varphi(t)$ on the interval $[0,1]$ satisfying $\varphi(0)=0$ and $\varphi(1)=1$. For $\varphi \in \Gamma$, define

$$I(\varphi)=\int_0^1 (\dot{\varphi}(t))^2 dt, \qquad J(\varphi)=\int_0^1 (t\dot{\varphi}(t))^2 dt,$$

where $\dot{\varphi}(t)$ is the derivative $\dfrac{d\varphi}{dt}(t)$ of $\varphi(t)$. Let

$$A=\inf_{\varphi\in\Gamma} I(\varphi), \qquad B=\inf_{\varphi\in\Gamma} J(\varphi).$$

Answer the following questions.

(i) Find A. Moreover, find $\varphi \in \Gamma$ satisfying $I(\varphi)=A$.

(ii) For a positive integer n, define $\varphi_n(t)=1-(1-t)^n$. Find $J(\varphi_n)$.

(iii) Find B.

(iv) Show that there does not exist $\varphi \in \Gamma$ satisfying $J(\varphi)=B$.

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

$k \geqq 4$ 個の配列 $A_1,\, A_2, \ldots, A_k$ があり，各配列 A_i に $n_i \geqq 1$ 個の整数が小さい順に貯えられている．ここで，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ とし，k 個の配列全体の中で貯えられている n 個の整数は全て異なるとする．以下の問いに答えよ．

(i) 配列 A_1, A_2 内の $n_1 + n_2$ 個の整数を $O(n_1 + n_2)$ 時間で小さい順に整列できることを示せ．

(ii) 配列 A_1, A_2, A_3, A_4 に対し，各配列 A_i から要素 a_i を選んだ組 (a_1, a_2, a_3, a_4) のうち二要素の差の総和 $\sum_{1 \leqq h < j \leqq 4} |a_h - a_j|$ を最小にするものが $O(n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$ 時間で見つけられることを示せ．

(iii) k 個の配列 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 内の n 個の整数を $O(n \log k)$ 時間で小さい順に整列できることを示せ．

(iv) k 個の配列 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 内の n 個の整数の中で小さいものから k 個の整数を $O(k \log k)$ 時間で選び出せることを示せ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

For a given integer $k \geqq 4$, let $A_1, A_2, \ldots, A_k$ be given arrays, where each array A_i contains $n_i \geqq 1$ integers sorted in an ascending order. Let $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, and assume that all n integers contained in the k arrays are distinct. Answer the following questions.

(i) Prove that sorting in an ascending order the $n_1 + n_2$ integers in the arrays A_1 and A_2 can be executed in $O(n_1 + n_2)$ time.

(ii) For the arrays A_1, A_2, A_3 and A_4, prove that it takes $O(n_1+n_2+n_3+n_4)$ time to find a tuple that minimizes the sum of differences of every two elements $\sum_{1 \leqq h < j \leqq 4} |a_h - a_j|$ among all tuples (a_1, a_2, a_3, a_4) such that a_i is selected from A_i.

(iii) Prove that sorting in an ascending order the n integers in the arrays $A_1, A_2, \ldots, A_k$ can be executed in $O(n \log k)$ time.

(iv) Prove that selecting the k smallest integers out of the n integers in the arrays $A_1, A_2, \ldots, A_k$ can be executed in $O(k \log k)$ time.

線形計画

$\boxed{3}$

パラメータ $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ をもつ次の線形計画問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{y}): & \text{Maximize} & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i x_i = 1 \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，$\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ の決定変数は $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ であり，$^\top$ は転置記号を表す．

以下の問 (i) と (ii) に答えよ．

(i) 問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ の双対問題を書け．

(ii) 任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ が最適解をもつことを示せ．

与えられた $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ の最適値 (最大値) を $f(\boldsymbol{y})$ とする．

以下の問 (iii) と (iv) に答えよ．

(iii) 任意の $\alpha \in [0, 1]$ と $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$f(\alpha \boldsymbol{y} + (1 - \alpha)\boldsymbol{z}) \leqq \alpha f(\boldsymbol{y}) + (1 - \alpha) f(\boldsymbol{z})$$

(iv) 次の最適化問題 Q を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{y}) \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{i} = 1 \end{array}$$

ただし，Q の決定変数は $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ である．問題 Q の最適値 (最小値) は $\dfrac{1}{n}$ であることを示せ．

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Consider the following linear programming problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ with a vector of parameters $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{y}): & \text{Maximize} & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i x_i = 1 \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

where the decision variables of $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ are $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, and the superscript $^\top$ denotes transposition.

Answer the following questions (i) and (ii).

(i) Write out a dual problem of problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$.

(ii) Show that problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ has an optimal solution for any $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

For a given $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, let $f(\boldsymbol{y})$ be the optimal value (maximum value) of problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$. Answer the following questions (iii) and (iv).

(iii) Show that the following inequality holds for any $\alpha \in [0, 1]$ and $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$.

$$f(\alpha \boldsymbol{y} + (1 - \alpha)\boldsymbol{z}) \leqq \alpha f(\boldsymbol{y}) + (1 - \alpha) f(\boldsymbol{z}).$$

(iv) Consider the following optimization problem Q.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{y}) \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{i} = 1, \end{array}$$

where the decision variables of Q are $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Show that the optimal value (minimum value) of Q is $\dfrac{1}{n}$.

線形制御理論

4

図１はフィードバック制御系を示す．ここで $P(s)$ は制御対象，$k > 0$ はフィードバックゲイン，r は参照入力，e は偏差，y は出力である．制御対象 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

で与えられるとする．感度関数 $S(s)$ は r から e への伝達関数であり，閉ループ伝達関数 $T(s)$ は r から y への伝達関数である．以下の問いに答えよ．

(i) 感度関数 $S(s)$ は $\lim_{k\to\infty} S(0) = 0$ を満たすことを示せ．

(ii) $\lim_{\omega\to\infty} \angle T(j\omega)$ を求めよ．

(iii) $\lim_{k\to\infty} \max_{\omega\geqq 0} |T(j\omega)| = \infty$ であることを示せ．

(iv) r を単位階段関数とするとき，出力 y のピーク値の定常値に対する割合を $A(k)$ とする．$\lim_{k\to\infty} A(k)$ を求めよ．

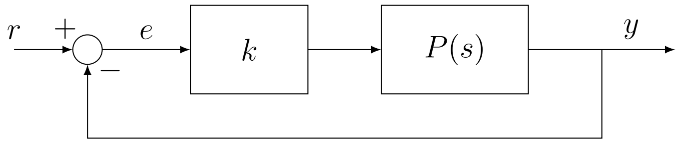

図 1 フィードバック制御系

An English Translation:

Linear Control Theory

$\boxed{4}$

A feedback control system is shown in Figure 1, where $P(s)$ is a plant, $k > 0$ is a feedback gain, r is a reference input, e is an error, and y is an output. The plant $P(s)$ is given by

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}.$$

The sensitivity function $S(s)$ is the transfer function from r to e, and the closed loop transfer function $T(s)$ is the transfer function from r to y. Answer the following questions.

(i) Show that the sensitivity function $S(s)$ satisfies $\lim_{k\to\infty} S(0) = 0$.

(ii) Calculate $\lim_{\omega\to\infty} \angle T(j\omega)$.

(iii) Show that $\lim_{k\to\infty} \max_{\omega\geqq 0} |T(j\omega)| = \infty$ holds.

(iv) Let $A(k)$ be the ratio of the peak value to the final value of the output y when r is the unit step function. Calculate $\lim_{k\to\infty} A(k)$.

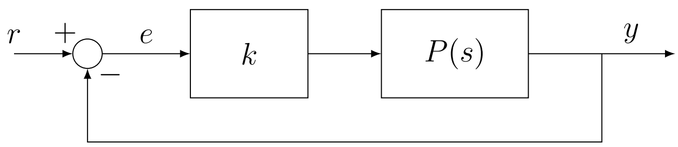

Figure 1 Feedback control system

基礎力学

$\boxed{5}$

質量 m の質点が平面内で中心力を受けて運動している．ここで (r,ϕ) を極座標とし, 軌道の位置は $(x,y)=(r\cos\phi, r\sin\phi)$ であらわす．力の中心を座標原点として, 以下の問いに答えよ．

(i) $r^2\dfrac{d\phi}{dt}$ が時刻 t に依らず, 一定値であることを示せ．

以下では, $r^2\dfrac{d\phi}{dt}=h$ とおく．

(ii) 軌道が極座標 (r,ϕ) によって, $r=\dfrac{l}{1+\epsilon\cos\phi}$ と表される時, 中心力 $f(r)$ を距離 r および h の関数として求めよ．ただし, l, ϵ は, 正の定数とする．

(iii) 軌道が極座標 (r,ϕ) によって, $r=\dfrac{A}{\cosh(\alpha\phi)}$ と表される時, 中心力 $f(r)$ を距離 r および h の関数として求めよ．ただし, A,α は, 正の定数とする．

An English Translation:

Basic Mechanics

$\boxed{5}$

Consider the planer motion of a particle with the mass m subject to a central force, where the center of force is the origin in the coordinate system. Let (r, ϕ) be the polar coordinates and the position of the particle be given by $(x, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$. Answer the following questions.

(i) Show that $r^2\dfrac{d\phi}{dt}$ is a constant of motion.

Let $r^2\dfrac{d\phi}{dt} = h$.

(ii) Suppose that the orbit is given by $r = \dfrac{l}{1+\epsilon\cos\phi}$ with the polar coordinates (r, ϕ) where ϵ and l are positive constants. Obtain the central force $f(r)$ as a function of r and h.

(iii) Suppose that the orbit is given by $r = \dfrac{A}{\cosh(\alpha\phi)}$ with the polar coordinates (r, ϕ), where A and α are positive constants. Obtain the central force $f(r)$ as a function of r and h.

基礎数学 II

$\boxed{6}$

A を零行列 O ではない $n \times n$ 実行列 $(A \neq O)$ とし，$\mathrm{rank}A$ を A のランク（階数）とし，$r = \mathrm{rank}A$ とおく．以下の問いに答えよ．ただし，同次連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $n-r$ 個の１次独立な解 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ をもち，$n-r$ 個を超える数の１次独立な解をもたないことは証明なしで使ってよい．

(i) $n \times n$ 実行列 B が $AB = O$ を満たすとする．このとき

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \leqq n$$

を示せ．

(ii) 行列 A に対して，$AB = O$ かつ

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B = n$$

なる $n \times n$ 実行列 B が存在することを示せ．

(iii) $n \times n$ 実行列 B に対して

$$\mathrm{rank}(A+B) \leqq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$$

を示せ．

(iv) $n \times n$ 実行列 B に対して

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \leqq \mathrm{rank}AB + n$$

を示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let A be an $n \times n$ nonzero real matrix ($A \neq O$) and $\mathrm{rank}A$ be the rank of A. Let $r = \mathrm{rank}A$. Answer the following questions. Use the fact without proof that the homogeneous linear equations $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ have $n - r$ linearly independent solutions $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ and do not have linearly independent solutions more than $n - r$, if necessary.

(i) Let B be an $n \times n$ real matrix B such that $AB = O$. Show that

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \leqq n.$$

(ii) Show that there is an $n \times n$ real matrix B such that $AB = O$ and

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B = n.$$

(iii) Show that

$$\mathrm{rank}(A + B) \leqq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$$

for any $n \times n$ real matrix B.

(iv) Show that

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \leqq \mathrm{rank}AB + n$$

for any $n \times n$ real matrix B.