

2021 年度 10 月期・2022 年度 4 月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学専攻

入学者選抜試験問題

【基礎科目】

2021 年 7 月 17 日 10:00 – 11:30

- (1) 指示があるまで問題を見てはならない。
- (2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。
- (3) 解答時間は 1 時間 30 分である。退室は認めない。
- (4) 基礎科目は全部で 5 題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から 3 題選択して解答すること。4 題以上選択した場合は、問題番号の若い順に 3 題のみ採点を行う。
- (5) 各受験者に対し、解答用紙 3 枚と下書用紙 (計算用紙) が配布される。開始後、解答用紙の全てに受験番号と氏名を記入すること。
- (6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答用紙 1 枚につき 1 題を解答すること。
解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。
- (7) 解答用紙 3 枚全てを提出すること。2 題以下しか選択していない場合でも、選択予定の問題番号を記入し、必ず 3 枚の解答用紙を提出すること。
- (8) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 a を実数とする. 3 行 3 列の実行列 X を

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

によって与える. 次の各問に答えよ.

(1) X が正則行列にならないような a の値を求めよ.

(2) $a = 4$ のとき, X の逆行列を求めよ.

2 自然数 k に対して, E_k と O_k はそれぞれ k 行 k 列の単位行列と零行列を表わすものとする. また, k 行 k 列の実行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

に対して, A のトレース $\text{tr}(A)$ を

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^k a_{ii}$$

によって与える. 次の各問に答えよ.

(1) k 行 k 列の実行列 A は

$$A^2 + A - 2E_k = O_k$$

を満たしているとする. このとき A の固有値のとりうる値を全て求めよ.

(2) k 行 k 列の実行列 B と C に対して, $\text{tr}(BC) = \text{tr}(CB)$ が成立することを示せ.

(3) 2 行 2 列の実行列 D は

$$D^2 + D - 2E_2 = O_2$$

を満たしているとする. このとき $\text{tr}(D)$ のとりうる値を全て求めよ.

3 次の各問に答えよ.

(1) $0 < r < 1$ とする. 実数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が, 1 以上の任意の整数 n で

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq r|a_{n+1} - a_n|$$

を満たすとき, $\{a_n\}$ は収束することを示せ.

(2) $p > 0$ とする.

$$x_{n+1} = p + \frac{1}{x_n} \quad (n \geq 1), \quad x_1 = 1$$

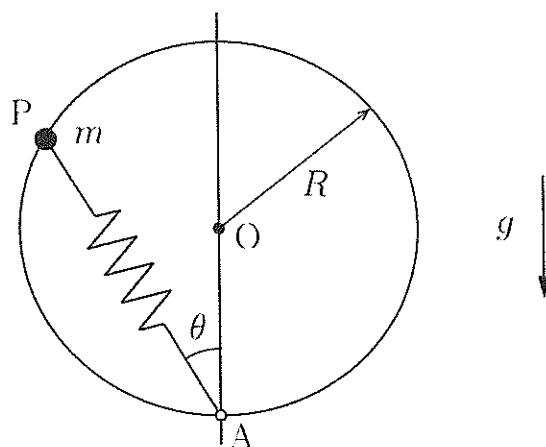
で定まる数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ は収束することを示せ.

4 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^3} dx.$$

5

下図のように鉛直面内に固定した円（半径 R ）に滑らかに拘束された質点（質量 m ）の運動を考える．円の中心を O ，円の最下点を A ，質点の位置を P で表す．質点には自然長が $2R$ の軽いバネ（バネ定数 k ）がつながれており，バネの他端は点 A につながれている．バネは線分 AP 上に常にあるものとし，線分 AP が線分 AO となす角を θ ，重力加速度の大きさを g とする．



- (1) 線分 AP が線分 AO と θ の角をなすとき，バネが質点におよぼす力の点 O まわりのモーメントを R, m, k, θ, g のうち必要なものを用いて表せ．
- (2) 質点を円の頂上からつりあいの位置を探しながら静かに下げると $\theta = \theta_0 (> 0)$ のとき平衡となった． θ_0 を R, m, k, g のうち必要なものを用いて表せ．
- (3) 質点を円の頂上から初速 v_0 ですべり出させるとき，質点が平衡の位置 $\theta = \theta_0$ を最初に通過するときの質点の速度を求め， v_0, R, m, k, g のうち必要なものを用いて表せ．
- (4) 質点を円の頂上から初速 v_0 ですべり出させるとき，質点が平衡の位置 $\theta = \theta_0$ を最初に通過するまでに要する時間が短いのは次の (a)，(b) の場合のいずれか．理由をつけて答えよ．

$$(a) \quad R = a, \quad v_0^2 = 4ag, \quad k = \frac{mg}{a}$$

$$(b) \quad R = 2a, \quad v_0^2 = 8ag, \quad k = \frac{mg}{2a}$$

ただし a は正の定数とする．