応用数学

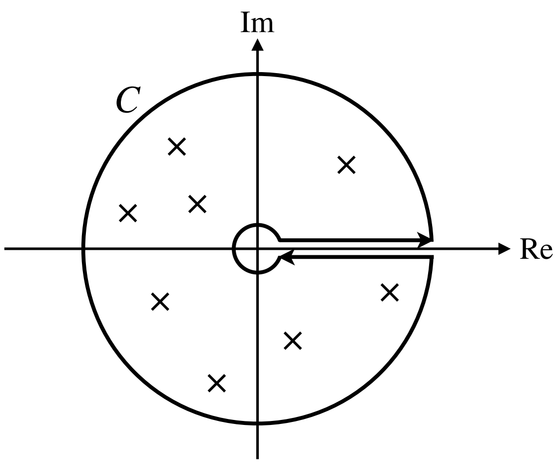
$\boxed{1}$

複素数平面上の有理関数 $f(z)$ の極を $a_1, a_2, \ldots, a_K$ とし，非負の実軸上にないものとする．ここで，関数 $f(z)$ は $|z| \to \infty$ で $|z^2 f(z)| \to 0$ をみたすとする．点 $z = a$ における関数 $g(z)$ の留数を $\operatorname*{Res}_{z=a}(g(z))$ で表す．以下の問いに答えよ．

(i) z の偏角の範囲を $I = [0, 2\pi)$ とすることで，$\log z$ の枝を定め，C を図のように極 $a_1, a_2, \ldots, a_K$ を囲む閉曲線とする．このとき，$\oint_C f(z) \log z \, dz$ を $\operatorname*{Res}_{z=a_k}(f(z)\log z)$ $(k = 1, 2, \ldots, K)$ を用いて表わせ．

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を $\operatorname*{Res}_{z=a_k}(f(z)\log z)$ $(k = 1, 2, \ldots, K)$ を用いて表わせ．

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^4+1)}$ を求めよ．



An English Translation:

Applied Mathematics

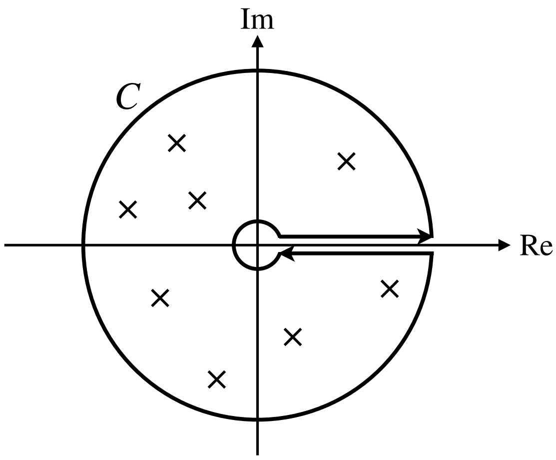
1

Let $a_1, a_2, \ldots, a_K$ be the poles of the rational function $f(z)$ on the complex plane. These points $a_1, a_2, \ldots, a_K$ do not lie on the non-negative real axis. The function $f(z)$ satisfies $|z^2 f(z)| \to 0$ as $|z| \to \infty$. Let $\operatorname*{Res}_{z=a}(g(z))$ denote the residue of a function $g(z)$ at a point $z = a$. Answer the following questions.

(i) Let us define the branch of $\log z$ by fixing the range $I = [0, 2\pi)$ of the argument of z, and let C be a closed curve enclosing $a_1, a_2, \ldots, a_K$ as shown in the figure. Write $\oint_C f(z) \log z \, dz$ in terms of $\operatorname*{Res}_{z=a_k}(f(z) \log z)$ $(k = 1, 2, \ldots, K)$.

(ii) Write $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ in terms of $\operatorname*{Res}_{z=a_k}(f(z) \log z)$ $(k = 1, 2, \ldots, K)$.

(iii) Obtain $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^4+1)}$.



グラフ理論

2

$G = (V, E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る単純有向グラフとし，$N = [G, c]$ を G の各枝 $e \in E$ に実数値の容量 $c(e) > 0$ を与えて得られるネットワークとする．節点の部分集合 $X, Y \subseteqq V$ に対し，X 内の点から Y 内の点へ向かう枝の集合を $E(X, Y)$ と記す．非負実数全体の集合を $\mathbb{R}_+$ で表す．指定された二点 $s, t \in V$ に対し，流量保存則 $\sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus \{v\}, \{v\})} f(e) = 0$, ${}^\forall v \in V \setminus \{s, t\}$ および容量制約 $f(e) \leqq c(e)$, ${}^\forall e \in E$ を満たす関数 $f : E \to \mathbb{R}_+$ を (s, t) フローと呼び，その流量 $\mathrm{val}(f)$ を

$$\sum_{e \in E(\{s\}, V \setminus \{s\})} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus \{s\}, \{s\})} f(e)$$

で定める．また，$s \in X$, $t \in V \setminus X$ を満たす節点の部分集合 $X \subseteqq V$ を (s, t) カットと呼び，その容量 $\mathrm{cap}(X)$ を

$$\sum_{e \in E(X, V \setminus X)} c(e)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の (s, t) フロー f と (s, t) カット X に対し，等式

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in E(X, V \setminus X)} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus X, X)} f(e)$$

が成り立つことを証明せよ．

(ii) 与えられた (s, t) フロー f に対して定められる残余ネットワーク $N_f = [G_f = (V, E_f), c_f]$ の作り方を説明せよ．

(iii) 残余ネットワーク N_f において，s から t への有向路が存在するとき，そのひとつを P とする．P 上の枝の N_f における容量の最小値を Δ とするとき，N には流量が $\mathrm{val}(f) + \Delta$ である (s, t) フローが存在することを証明せよ．

(iv) 残余ネットワーク N_f が s から t への有向路をもたないとき，N_f において s から到達可能な節点の集合を S とする．このとき，$s \in A$ である任意の集合 $A \subsetneqq S$ に対し $\mathrm{cap}(A) > \mathrm{cap}(S)$ が成り立つことを証明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ be a simple directed graph with a vertex set V and an edge set E, and let $N = [G, c]$ be a network obtained from G by assigning a real value $c(e) > 0$ to each edge $e \in E$ as its capacity. For vertex subsets $X, Y \subseteqq V$, let $E(X, Y)$ denote the set of edges that leave a vertex in X and enter a vertex in Y. Let $\mathbb{R}_+$ denote the set of nonnegative reals. For two designated vertices $s, t \in V$, an (s, t)-flow is defined to be a mapping $f : E \to \mathbb{R}_+$ which satisfies $\sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus \{v\}, \{v\})} f(e) = 0$, $^\forall v \in V \setminus \{s, t\}$ (flow conservation law) and $f(e) \leqq c(e)$, $^\forall e \in E$ (capacity constraint), and its flow value $\mathrm{val}(f)$ is defined to be

$$\sum_{e \in E(\{s\}, V \setminus \{s\})} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus \{s\}, \{s\})} f(e).$$

An (s, t)-cut is defined to be a vertex subset $X \subseteqq V$ such that $s \in X$ and $t \in V \setminus X$, and its capacity $\mathrm{cap}(X)$ is defined to be

$$\sum_{e \in E(X, V \setminus X)} c(e).$$

Answer the following questions.

(i) Prove that for any (s, t)-flow f and any (s, t)-cut X

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in E(X, V \setminus X)} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus X, X)} f(e)$$

holds.

(ii) For a given (s, t)-flow f, show how to construct its residual network $N_f = [G_f = (V, E_f), c_f]$.

(iii) For an (s, t)-flow f in N, assume that there is a directed path P from s to t in the residual network N_f. Let Δ denote the minimum capacity of an edge in P in N_f. Prove that N has an (s, t)-flow whose flow value is $\mathrm{val}(f) + \Delta$.

(iv) For an (s, t)-flow f in N, assume that there is no directed path from s to t in the residual network N_f. Let S denote the set of vertices that are reachable from s in N_f. Prove that $\mathrm{cap}(A) > \mathrm{cap}(S)$ holds for any set $A \subsetneqq S$ with $s \in A$.

オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

次の非線形計画問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P1)} & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\
& \text{subject to} & g_i(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\
& & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b
\end{array}
$$

ただし，(P1) の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ であり，$^\top$ は転置記号を表し，$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ は微分可能な凸関数，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$，$b \in \mathbb{R}$ である．この問題の最適解を $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ とする．また，$\boldsymbol{x}^*$ に対応する不等式制約および等式制約のラグランジュ乗数が存在し，それぞれを $\lambda_i^* \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ および $\mu^* \in \mathbb{R}$ とする．つまり，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mu^*)$ は問題 (P1) のカルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) を満たす．ここで，$\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)^\top \in \mathbb{R}^m$ である．

さらに，正のパラメータ $c \in \mathbb{R}$ を含むつぎの制約なし最適化問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P2)} & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) + c\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \max\{g_i(\boldsymbol{x}), 0\} + |\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b|\right) \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n
\end{array}
$$

ただし，(P2) の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ である．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 (P1) のカルーシュ・キューン・タッカー条件を書け．

(ii) 微分可能な関数のみを用いて，問題 (P2) と等価な非線形計画問題を書け．

(iii) つぎの条件を満たすとき，$\boldsymbol{x}^*$ は (P2) の最適解であることを示せ．

$$
c \geqq \max\left\{\max_{i \in I} \lambda_i^*, |\mu^*|\right\}
$$

ただし，$I = \{i \in \{1, \dots, m\}\colon g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0\}$ である．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Consider the following nonlinear programming problem:

$$\begin{array}{lll} \text{(P1)} & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & g_i(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \\ & & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b, \end{array}$$

where the decision variable is $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, the superscript $^\top$ denotes transposition, the functions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ are differentiable and convex, and $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. Let $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ be an optimal solution of (P1). Also, let $\lambda_i^* \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ and $\mu^* \in \mathbb{R}$ be the corresponding Lagrange multipliers associated to the inequality and the equality constraints, respectively, assuming that they exist. More precisely, $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mu^*)$ satisfies the Karush-Kuhn-Tucker conditions of (P1), with $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)^\top \in \mathbb{R}^m$.

Moreover, consider the following unconstrained optimization problem that includes a positive parameter $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} \text{(P2)} & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) + c\left(\displaystyle\sum_{i=1}^m \max\{g_i(\boldsymbol{x}), 0\} + |\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b|\right) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

where the decision variable is $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Answer the following questions.

(i) Write out the Karush-Kuhn-Tucker conditions of (P1).

(ii) Write out a nonlinear programming problem that is equivalent to (P2), using only differentiable functions.

(iii) Prove that $\boldsymbol{x}^*$ is a solution of (P2) when

$$c \geqq \max\left\{\max_{i \in I} \lambda_i^*, |\mu^*|\right\},$$

where $I = \big\{i \in \{1, \ldots, m\}\colon g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0\big\}$.

現代制御論

4

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t),\ x(0) = B$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，$C \in \mathbb{R}^{1\times n}$，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力である．また，$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ と定義し，$T > 0$ を定数とする．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の入力 $u(t),\ 0 \leqq t < T$ に対して，$M_c v = x(T)$ を満たす $v \in \mathbb{R}^n$ が存在することを証明せよ．

(ii) M_c が正則とする．このとき，任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して，$x(T) = v$ となる入力 $u(t),\ 0 \leqq t < T$ が存在することを証明せよ．

行列 $A,\ B,\ C$ が

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられ，$u(t) = -\sin t,\ 0 \leqq t < T$ とする．

(iii) コスト関数

$$\int_T^\infty u(t)^2 + y(t)^2 dt$$

を最小化する $u(t), t \geqq T$ を求めよ．

(iv) (iii) で得られた最小値を $V(T)$ とする．このとき，$\inf_{T>0} V(T)$ を求めよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t),\ x(0) = B,$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, and $y(t) \in \mathbb{R}$ is an output. Let $M_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ and $T > 0$ be a constant. Answer the following questions.

(i) Show that, for any input $u(t),\ 0 \leqq t < T$, there exists $v \in \mathbb{R}^n$ such that $M_c v = x(T)$.

(ii) Suppose that M_c is nonsingular. Then, show that, for any $v \in \mathbb{R}^n$, there exists an input $u(t),\ 0 \leqq t < T$ such that $x(T) = v$.

Let matrices $A,\ B,\ C$ be given by

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

and $u(t) = -\sin t$ for $0 \leqq t < T$.

(iii) Find $u(t), t \geqq T$ that minimizes the cost function

$$\int_T^\infty u(t)^2 + y(t)^2 dt.$$

(iv) Let $V(T)$ denote the minumum value obtained in (iii). Then, find $\inf_{T>0} V(T)$.

物理統計学

5

質量 m の単原子分子からなる古典理想気体の速度分布は, 熱平衡状態で

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{m|\vec{v}|^2}{2kT}\right\}$$

で与えられる．ただし, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ を速度ベクトル, k をボルツマン定数, T を絶対温度とする．以下の問いに答えよ.

(i) 速さ $u(\equiv |\vec{v}|)$ の分布を求めよ.

(ii) 最も出現確率が高い速さ u^* を求めよ.

(iii) 速さの平均値 $\langle u \rangle$ を求めよ.

(iv) 速さの 2 乗の平均 $\langle u^2 \rangle$ を求めよ.

(v) 次の関係式

$$u^* < \langle u \rangle < \sqrt{\langle u^2 \rangle}$$

が成立することを示せ.

An English Translation:

Physical Statistics

$\boxed{5}$

The velocity distribution of a particle in a classical ideal monatomic gas in thermal equilibrium is given by

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{m|\vec{v}|^2}{2kT}\right\},$$

where $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ is the velocity vector, k is the Boltzmann constant and T is the absolute temperature. Answer the following questions.

(i) Obtain the distribution for the speed $u = |\vec{v}|$.

(ii) Obtain the most probable speed u^*.

(iii) Obtain the average $\langle u \rangle$ of speed.

(iv) Obtain the average $\langle u^2 \rangle$ of squared speed.

(v) Show that the relation

$$u^* < \langle u \rangle < \sqrt{\langle u^2 \rangle}$$

holds.

力学系数学

$\boxed{6}$

$n>1$ を整数，$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を C^1 級関数として，$\mathbb{R}$ 上の微分方程式系

$$\frac{dx}{dt}=f(x),\quad x\in\mathbb{R}^n \tag{1}$$

を考える．$x=\phi(t)$ を $\mathbb{R}$ 上で有界な式 (1) の非定数解とする．次式を式 (1) の解 $x=\phi(t)$ のまわりの変分方程式という．

$$\frac{dy}{dt}=Df(\phi(t))y,\quad y\in\mathbb{R}^n \tag{2}$$

ここで，$Df(x)$ は $f(x)$ のヤコビ行列で，各 $j=1,2,\dots,n$ に対して，$f_j(x)$ と x_j を，それぞれ，$f(x)$ と x の第 j 成分として，

$$Df(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix}$$

で与えられる n 次正方行列である．以下の問いに答えよ．

(i) 極限 $a_+=\lim_{t\to+\infty}\phi(t)$ と $a_-=\lim_{t\to-\infty}\phi(t)$ が存在するとき，$x=a_+$ と a_- が式 (1) の定数解であることを示せ．また，変分方程式 (2) が $\lim_{t\to\pm\infty}\psi(t)=0$ かつ $\mathbb{R}$ 上で有界な解 $y=\psi(t)$ をもつことを示せ．

(ii) 次式を満たす C^1 級関数 $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ が存在するものとする．

$$Du(x)f(x)-Df(x)u(x)=0$$

2 個のベクトル $f(\phi(0))$ と $u(\phi(0))$ が線形独立であるとき，変分方程式 (2) の線形独立な解を 2 個求めよ．

(iii) 次式を満たす $n-1$ 個の C^1 級関数 $v_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ $(j=1,2,\dots,n-1)$ が存在するものとする．

$$Dv_j(x)f(x)-Df(x)v_j(x)=0\quad(j=1,2,\dots,n-1)$$

n 個のベクトル $f(\phi(0))$ と $v_j(\phi(0))$ $(j=1,2,\dots,n-1)$ が線形独立であるとき，変分方程式 (2) の一般解を求めよ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $n > 1$ be an integer and let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a C^1 function. Consider the system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

on $\mathbb{R}$. Let $x = \phi(t)$ be a bounded nonconstant solution to Eq. (1) on $\mathbb{R}$. The following equation is called the variational equation of Eq. (1) around the solution $x = \phi(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = Df(\phi(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Here $Df(x)$ is the Jacobian matrix of $f(x)$ and given by the $n \times n$ matrix

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix},$$

where $f_j(x)$ and x_j are the j-th elements of $f(x)$ and x, respectively, for $j = 1, 2, \ldots, n$. Answer the following questions.

(i) When there exist the limits $a_+ = \lim_{t \to +\infty} \phi(t)$ and $a_- = \lim_{t \to -\infty} \phi(t)$, show that $x = a_+$ and a_- are constant solutions to Eq. (1). In addition, show that the variational equation (2) has a bounded solution $y = \psi(t)$ on $\mathbb{R}$ such that $\lim_{t \to \pm\infty} \psi(t) = 0$.

(ii) Assume that there exists a C^1 function $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfying

$$Dv(x)f(x) - Df(x)v(x) = 0.$$

Obtain two linearly independent solutions to the variational equation (2) when the two vectors $f(\phi(0))$ and $v(\phi(0))$ are linearly independent.

(iii) Assume that there exist $n - 1$ C^1 functions $v_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ satisfying

$$Dv_j(x)f(x) - Df(x)v_j(x) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Obtain a general solution to the variational equation (2) when the n vectors $f(\phi(0))$ and $v_j(\phi(0))$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ are linearly independent.