応用数学

1

i を虚数単位とする．$f(x)$ を実解析的関数で $f(x+2\pi)=f(x)$ を満たし，

$$D_\xi = \{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, |y| \leqq \xi\}$$

を含む開集合まで解析接続できるとする．ここで，ξ は正の定数である．このとき，$f(x)$ はフーリエ級数展開可能で

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

が成り立つ．以下の問いに答えよ．

(i) 複素平面上の点 $0, 2\pi, 2\pi+i\xi, i\xi$ をこの順で結んでできる長方形の経路に沿った周回積分を考えることにより，任意の整数 k に対し，

$$a_k = \frac{e^{k\xi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+i\xi) e^{-ikx} dx$$

を示せ．また，

$$a_k = \frac{e^{-k\xi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-i\xi) e^{-ikx} dx$$

を示せ．

(ii) $L = \max\{|f(z)| \mid z \in D_\xi\}$ とする．任意の整数 k に対し，$a_k \leqq Le^{-\xi|k|}$ を示せ．

(iii) $c > 1$ を定数とし，

$$f(x) = \frac{1}{\cos x - c}$$

とする．任意の正の実数 $\eta < \log(c+\sqrt{c^2-1})$ に対し，ある $M > 0$ が存在し，すべての整数 k に対し $a_k \leqq Me^{-\eta|k|}$ が成り立つことを示せ．

An English Translation:

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

Let i denote the imaginary unit. Let $f(x)$ be a real analytic function satisfying $f(x+2\pi) = f(x)$ and having an analytic continuation on an open set including

$$D_\xi = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, |y| \leqq \xi\}$$

where $\xi > 0$ is a constant. Then the Fourier series of $f(x)$ converges to $f(x)$ and

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Answer the following questions.

(i) Considering the contour integration along the rectangular path connecting the points $0, 2\pi, 2\pi + i\xi$ and $i\xi$ in this order on the complex plane, show that for any integer k,

$$a_k = \frac{e^{k\xi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + i\xi)e^{-ikx}dx.$$

Moreover show that

$$a_k = \frac{e^{-k\xi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x - i\xi)e^{-ikx}dx.$$

(ii) Let $L = \max\{|f(z)| \mid z \in D_\xi\}$. Show that for any integer k, $a_k \leqq Le^{-\xi|k|}$.

(iii) Let $c > 1$ be a constant and let

$$f(x) = \frac{1}{\cos x - c}.$$

Show that for any positive real number $\eta < \log(c + \sqrt{c^2 - 1})$, there is a constant $M > 0$ such that for all integer k, $a_k \leqq Me^{-\eta|k|}$ holds.

グラフ理論

$\boxed{2}$

G を点集合 V，枝集合 E から成る単純連結無向グラフとし，各枝 $e \in E$ には実数値の重み $w(e)$ が付与されている．点の部分集合 $X \subsetneqq V$ に対し X と $V \setminus X$ の間の枝の集合を $E(X)$ と記す．枝の部分集合 $S \subseteqq E$ に対して $w(S) \triangleq \sum_{e \in S} w(e)$，$w_{\max}(S) \triangleq \max_{e \in S} w(e)$ と定める．以下の問いに答えよ．

(i) $(X, F), X \neq V$ を G の部分木とし，G の最小木には木 (X, F) を含むものが存在すると仮定する．$a_F = uv \in E(X)$ を $E(X)$ の中で重み最小の枝とする．このとき G の最小木には $(X \cup \{u, v\}, F \cup \{a_F\})$ を含むものが存在することを証明せよ．

(ii) 最小木を求めるプリム法を記述し，その正当性を証明せよ．

(iii) (V, T^*) を G の最小木とする．このとき G の任意の全域木 (V, T) に対して $w_{\max}(T^*) \leqq w_{\max}(T)$ が成り立つことを証明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let G be a simple and connected undirected graph with a vertex set V and an edge set E such that each edge $e \in E$ is weighted by a real value $w(e)$. For a subset $X \subsetneqq V$ of vertices, let $E(X)$ denote the set of edges between X and $V \setminus X$. For a subset $S \subsetneqq E$ of edges, define $w(S) \triangleq \sum_{e \in S} w(e)$ and $w_{\max}(S) \triangleq \max_{e \in S} w(e)$. Answer the following questions.

(i) Let $(X, F), X \neq V$ be a subtree of G and assume that one of the minimum spanning trees of G contains the tree (X, F). Let $a_F = uv \in E(X)$ be an edge with the minimum weight among the edges in $E(X)$. Prove that one of the minimum spanning trees of G contains $(X \cup \{u, v\}, F \cup \{a_F\})$.

(ii) Describe Prim's method for computing a minimum spanning tree and prove its correctness.

(iii) Let (V, T^*) be a minimum spanning tree of G. Prove that $w_{\max}(T^*) \leqq w_{\max}(T)$ holds for every spanning tree (V, T) of G.

オペレーションズ・リサーチ

3

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とする．パラメータ $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ をもつ次の非線形計画問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}(\boldsymbol{x}): & \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{z}^i)^\top \boldsymbol{z}^i + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \\
& \text{subject to} & \displaystyle \boldsymbol{y} - \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{z}^i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}
\end{array}
$$

ここで，$\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$ の決定変数は $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}^i \in \mathbb{R}^m$（$i = 1, \ldots, n$）である．また，$^\top$ は転置記号を表す．さらに，任意の $\boldsymbol{x}$ に対して，問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$ の最適値が定義されているとし，その最適値を $f(\boldsymbol{x})$ と表す．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$ のカルーシュ･キューン･タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) を書け．

(ii) 問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$ の目的関数が，$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}^i \in \mathbb{R}^m$（$i = 1, \ldots, n$）に対して凸であることを示せ．

(iii) $\boldsymbol{C}$ を正定値対称行列と仮定し，次の最適化問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P1}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n
\end{array}
$$

$\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ を問題 P1 の大域的最適解とするとき，以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$
(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{x}^* \leqq \frac{\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b}}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{C})}
$$

ただし，$\lambda_{\min}(\boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{C}$ の最小固有値を表す.

(iv) $\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 零行列，$\boldsymbol{b}$ を m 次元零ベクトルと仮定する．以下の最適化問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P2}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leqq \alpha
\end{array}
$$

ここで，$\alpha \in \mathbb{R}$ は正の定数である．$(\hat{\boldsymbol{x}}, \rho), (\bar{\boldsymbol{x}}, \rho) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ が共に問題 P2 のカルーシュ・キューン・タッカー条件を満たすとき，$f(\hat{\boldsymbol{x}}) = f(\bar{\boldsymbol{x}})$ が成り立つことを示せ．

An English Translation:

Operations Research

3

Let $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ and $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Consider the following nonlinear programming problem with parameter $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{x}): & \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{z}^i)^\top \boldsymbol{z}^i + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{y} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{z}^i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}, \end{array}$$

where the decision variables are $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}^i \in \mathbb{R}^m$ $(i = 1, \ldots, n)$, with $^\top$ denoting transposition. Moreover, denote by $f(\boldsymbol{x})$ the optimal value of problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$, assuming that it is well-defined for all $\boldsymbol{x}$.

Answer the following questions.

(i) Write out the Karush-Kuhn-Tucker conditions of $\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$.

(ii) Prove that the objective function of problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{x})$ is convex with respect to $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}^i \in \mathbb{R}^m$ $(i = 1, \ldots, n)$.

(iii) Assume that $\boldsymbol{C}$ is symmetric positive definite and consider the following optimization problem:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P1}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Show that the following inequality holds when $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ is a global optimal solution of problem P1:

$$(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{x}^* \leqq \frac{\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b}}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{C})},$$

where $\lambda_{\min}(\boldsymbol{C})$ denotes the smallest eigenvalue of $\boldsymbol{C}$.

(iv) Assume that $\boldsymbol{A}$ is the $m \times n$ zero matrix and $\boldsymbol{b}$ is the m-dimensional zero vector. Consider the following optimization problem:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P2}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leqq \alpha, \end{array}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$ is a positive constant. Show that $f(\hat{\boldsymbol{x}}) = f(\bar{\boldsymbol{x}})$ holds, when both $(\hat{\boldsymbol{x}}, \rho), (\bar{\boldsymbol{x}}, \rho) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ satisfy the Karush-Kuhn-Tucker conditions of problem P2.

現代制御論

4

線形状態方程式

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

で記述されるシステムを考える．ただし，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, x_0 \in \mathbb{R}^n$ とする．対称行列 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を未知変数とする行列代数方程式

$$A^\top P + PA - PBB^\top P + I = 0 \tag{1}$$

を導入する．ただし，行列 A の転置行列を $A^\top$，ベクトル x の転置ベクトルとノルムをそれぞれ $x^\top$，$\|x\| = \sqrt{x^\top x}$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．

(i) $ab \neq 0$ を満たす $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ に対して $n=2$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．このとき，システムが不可制御となる (a,b) に対して，(1) の正定解 P の個数を求めよ．

(ii) $B = 0$ とし，ある正定行列 P が (1) の解であるとする．このとき，任意の x_0 に対して $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ であることを示せ．

(iii) ある P が (1) の解であるとする．このとき，任意の x_0 および $\tau > 0$ に対して

$$\int_0^\tau (\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2)dt = x_0^\top P x_0 - x(\tau)^\top P x(\tau) + \int_0^\tau \|u(t) + B^\top P x(t)\|^2 dt$$

が成り立つことを示せ．

(iv) $H = \begin{bmatrix} A & -BB^\top \\ -I & -A^\top \end{bmatrix}$ とするとき，λ が H の固有値ならば $-\lambda$ も H の固有値であることを示せ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

A linear system is described by the state equation

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, x_0 \in \mathbb{R}^n$. A matrix algebraic equation

$$A^\top P + PA - PBB^\top P + I = 0 \tag{1}$$

with respect to a symmetric matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is introduced. The transpose of a matrix A is denoted by $A^\top$. The transpose and the norm of a vector x are denoted by and $x^\top$ and $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$, respectively. Answer the following questions.

(i) Let $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ with $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ such that $ab \neq 0$. Then, find the number of positive definite solution P to (1) for (a, b) which makes this system uncontrollable.

(ii) Suppose that $B = 0$ and that a positive defnite matrix P satisfies (1). Prove $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ holds for any x_0.

(iii) Suppose that P is a solution to (1). Prove that

$$\int_0^\tau (\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2)dt = x_0^\top Px_0 - x(\tau)^\top Px(\tau) + \int_0^\tau \|u(t) + B^\top Px(t)\|^2 dt$$

holds for any x_0 and $\tau > 0$.

(iv) Define $H = \begin{bmatrix} A & -BB^\top \\ -I & -A^\top \end{bmatrix}$. Prove that for any eigenvalue λ of H, $-\lambda$ is also an eigenvalue of H.

物理統計学

$\boxed{5}$

エネルギーレベルが

$$E_n = h\nu \left(\frac{1}{2} + n \right) \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

なる振動数 $\nu(>0)$ の振動子系を考える．ここで $h(>0)$ は定数であり, エネルギーレベルの縮退は無く, 同系の分配関数 Z は

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT} \right)$$

で与えられるとする．ただし, $k > 0$ をボルツマン定数, T を絶対温度とする．以下の問いに答えよ.

(i) 分配関数 Z を計算せよ.

(ii) エネルギー E の期待値 $\langle E \rangle$ を求めよ.

(iii) 比熱 $C = \dfrac{d\langle E \rangle}{dT}$ を求めよ.

(iv) 比熱 C の低温極限 $(T \to 0)$ を求めよ.

(v) 比熱 C の高温極限 $(T \to \infty)$ を求めよ.

An English Translation:

Physical Statistics

$\boxed{5}$

Consider an oscillator system of a frequency ν with the energy levels

$$E_n = h\nu\left(\frac{1}{2} + n\right) \quad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

where $h(> 0)$ is a constant and no energy level is degenerate. The distribution function Z of the system with the absolute temperature T is given by

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right),$$

where $k(> 0)$ is the Boltzmann constant. Answer the following questions.

(i) Compute the distribution function Z.

(ii) Obtain the average energy $\langle E \rangle$.

(iii) Obtain the specific heat $C = \dfrac{d\langle E \rangle}{dT}$.

(iv) Obtain the specific heat C in the low temperature limit $(T \to 0)$.

(v) Obtain the specific heat C in the high temperature limit $(T \to \infty)$.

力学系数学

$\boxed{6}$

$a(t), b(t)$ を t のある有理式として次の実微分方程式を考える．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0 \tag{1}$$

以下の問いに答えよ．

(i) $k \geqq 1$ をある整数として，$x = t^k$ が式 (1) の解であるための $a(t), b(t)$ に関する必要十分条件を求めよ．

以下では，ある整数 $k \geqq 1$ に対して (i) で求めた条件が成り立つものとし，$\phi(t)$ を t^k と線形独立な解として，

$$p(t) = t\frac{d\phi}{dt}(t) - k\phi(t)$$

とおく．

(ii) $a(t), b(t)$ を $p(t)$ を用いて表わせ．

(iii) $p(t) = t$ のとき $a(t), b(t)$ を定めよ．

(iv) 式 (1) のすべての解が定数でない多項式のとき，$a(t), b(t)$ は多項式でないことを示せ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $a(t)$ and $b(t)$ be rational functions of t. Consider the real ordinary differential equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0. \tag{1}$$

Answer the following questions.

(i) Obtain a necessary and sufficient condition on $a(t)$ and $b(t)$ for $x = t^k$ to be a solution to Eq. (1) for each integer $k \geqq 1$.

In the following, assume that the condition obtained in (i) holds for an integer $k \geqq 1$, and let

$$p(t) = t\frac{d\phi}{dt}(t) - k\phi(t),$$

where $\phi(t)$ is a solution which is linearly independent of t^k.

(ii) Write down $a(t)$ and $b(t)$ in terms of $p(t)$.

(iii) Determine $a(t)$ and $b(t)$ when $p(t) = t$.

(iv) Show that $a(t)$ and $b(t)$ are not polynomials if all solutions to Eq. (1) are nonconstant polynomials.