/

2023 年度 10 月期入学 / 2024 年度 4 月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学コース 入学者選抜試験問題
(情報学基礎)

2023 年 8 月 7 日 9:00～11:00

【注意】
1. 問題冊子はこの表紙を含めて 13 枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は日本語と英語の両方で出題されている。すべて解答しなさい。
   - F1-1, F1-2　　線形代数、微分積分 ……………………… 1-4 ページ
   - F2-1, F2-2　　アルゴリズムとデータ構造 ……………… 5-12 ページ
5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

October 2023 Admissions / April 2024 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Intelligence Science and Technology Course
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Fundamentals of Informatics)

August 7, 2023
9:00 - 11:00

NOTES
1. This is the Question Booklet in 13 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. Questions are written in Japanese and English. **Answer all the questions.**
   - F1-1, F1-2　　Linear Algebra, Calculus ………………… Pages 1 to 4
   - F2-1, F2-2　　Algorithms and Data Structures ………… Pages 5 to 12
5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

以下の設問において i は虚数単位、$\mathbb{C}$ は複素数全体の集合を表す。また、行列 $\mathbf{A}$ に対して、$\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$ は $\mathbf{A}$ の共役転置（エルミート転置）を、$\mathbf{A}^{-1}$ は $\mathbf{A}$ の逆行列をそれぞれ表す。

設問 1　行列 $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{4\times4}$ を次で定義する。

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\mathbf{D}$ がユニタリ行列であることを示せ。

(2) 行列 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{4\times4}$ を

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

で定義するとき、$\mathbf{D}^{\mathsf{H}}\mathbf{G}\mathbf{D}$ の逆行列を導出せよ。

設問 2　n 次元ベクトル空間 V が 2 つの部分空間 W_1, W_2 の直和であるとする。ベクトル $\mathbf{x} \in V$ が

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1 \in W_1,\ \mathbf{x}_2 \in W_2$$

と分解されるとき、$\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}_1$ に写す一次変換を考える。この一次変換を表す V のある基底に関する行列を $\mathbf{B}$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}_2$ に写す一次変換を表す上述の基底に関する行列を導出せよ。

(2) $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$ が成り立つことを示せ。

(3) 適当な n 次正則行列 $\mathbf{P}$ をとれば

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\Large 0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

となることを示せ。

Master's Program	Fundamentals of Informatics	[Linear Algebra, Calculus]	Question Number	F1–1

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

In the questions below, i denotes the imaginary unit and $\mathbb{C}$ is the set of all complex numbers. Also, $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ stands for the conjugate transpose (Hermitian transpose) of a matrix $\mathbf{A}$, and $\mathbf{A}^{-1}$ is the inverse of $\mathbf{A}$.

Q.1 Let $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ be a matrix defined as

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

(1) Show that $\mathbf{D}$ is a unitary matrix.

(2) Let $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ be a matrix defined as

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Derive the inverse of $\mathbf{D}^{\mathrm{H}}\mathbf{G}\mathbf{D}$.

Q.2 Suppose that an n-dimensional vector space V is the direct sum of two subspaces W_1 and W_2. When a vector $\mathbf{x} \in V$ is decomposed as

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1 \in W_1,\ \mathbf{x}_2 \in W_2,$$

we consider the linear transformation that maps $\mathbf{x}$ to $\mathbf{x}_1$. Let $\mathbf{B}$ denote the matrix of the linear transformation with respect to some basis of V. Answer the following questions.

(1) Derive the matrix of the linear transformation that maps $\mathbf{x}$ to $\mathbf{x}_2$ with respect to the basis mentioned above.

(2) Show that $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$ holds.

(3) Show that

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

holds for some non-singular matrix $\mathbf{P}$ of size $n \times n$.

<u>F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。</u>

設問 1　以下の積分を求めよ。計算過程も明示すること。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

(2) $D = \left\{ (x,y) \mid x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ としたときに、

$$\int\!\!\int_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

設問 2　以下の問いに答えよ。計算過程も明示すること。

(1) $\log_e(1.02)$ の小数第 7 位を四捨五入し、小数第 6 位まで求めよ。

(2) $x > 0$ に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x - \frac{x^2}{2} < \log_e(1+x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

設問 3　$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ の条件の下で、xyz の最大値と最小値を求めよ。

Master's Program	Fundamentals of Informatics	[Linear Algebra, Calculus]	Question Number	F1–2

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Compute the following integrals. Derivations must be clearly shown.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, where $D = \left\{(x,y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$

Q.2 Answer the following questions. Derivations must be clearly shown.

(1) Compute $\log_e(1.02)$ up to the sixth decimal place by rounding the seventh decimal place.

(2) For $x > 0$, show that the following inequality holds.

$$x - \frac{x^2}{2} < \log_e(1+x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Q.3 Derive the maximum and minimum values of xyz, when $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$.

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 max ヒープは根以外のノードの値が必ず親ノードの値の大きさ以下になっている、おおよそ完全二分木である。max ヒープはインデックスが 1 から始まる配列として表現でき、インデックス i のノードの親ノード、左の子ノード、右の子ノードのインデックスはそれぞれ、Parent(i)=$\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$、Left(i)=2i、Right(i)=2i+1 として求められる。ただし、$\lfloor \cdot \rfloor$ は床関数である。

(1) インデックス i のノードを根とする部分木が max ヒープとなるように変換する再帰的関数 MaxHeapify を表す次の疑似コードをそれぞれの四角（(1-a)、(1-b)、(1-c)、(1-d)）を埋めることにより完成させよ。この疑似コードでは、インデックス i の左の子ノードと右の子ノードを根とする部分木はともに max ヒープであると仮定する。

Algorithm 1 MaxHeapify(A, i)

```
lft ← Left(i)
rgt ← Right(i)
largest ← i
if lft ≤ A.heapsize and [ (1-a) ] then
    largest ← lft
end if
if rgt ≤ A.heapsize and [ (1-b) ] then
    largest ← rgt
end if
if [ (1-c) ] then
    tmp ← A[i]; A[i] ← A[largest]; A[largest] ← tmp
    [ (1-d) ]
end if
```

ただし、A.heapsize は配列 A に格納されているヒープを構成する要素の数を表す。(3) で用いる A.length は配列 A そのものの大きさを表し、A.heapsize ≤ A.length である。

(2) (1) の MaxHeapify に長さ n の整数列を与えたときの最悪実行時間の漸近的上界をビッグオー記法を用いて答えよ。ただし、オーダーとして最も低いものを答えること。

(次のページに続く)

(3) (1) の `MaxHeapify` を用いて任意の整数列を昇順にソートするアルゴリズム `HeapSort` を表す次の疑似コードをそれぞれの四角（(3-a)、(3-b)、(3-c)、~~(3-d)~~）を埋めることにより完成させよ。ただし、(3-a) には考えうる最も小さい値を入れること。

Algorithm 2 `HeapSort(A)`

```
A.heapsize ← A.length
for i ← [(3-a)] ,...,1 do
    [(3-b)]
end for
for i ← A.length,...,2 do
    tmp ← A[1]; A[1] ← A[i]; A[i] ← tmp
    A.heapsize ← A.heapsize - 1
    [(3-c)]
end for
```

(4) (3) のアルゴリズムに長さ n の整列されていない整数列を与えたときの最悪実行時間の漸近的上界をビッグオー記法を用いて答えよ。ただし、オーダーとして最も低いものを答えること。

(5) (3) のアルゴリズムに長さ n の降順に整列された整数列を与えたときの実行時間の漸近的上界をビッグオー記法を用いて答えよ。ただし、オーダーとして最も低いものを答えること。

<u>Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.</u>

Q. A max-heap is a nearly complete binary tree in which, except for the root node, the value of each node is at most the value of its parent. A max-heap can be represented with an array with indices starting with 1, and the indices of the parent node, left child node, and right child node of a node with index `i` can be found with `Parent(i)=`$\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$, `Left(i)=2i`, `Right(i)=2i+1`, respectively, where $\lfloor \cdot \rfloor$ is the floor function.

(1) Complete the following pseudocode of a recursive function `MaxHeapify` for turning the subtree rooted at a node with index `i` into a max-heap by filling the blanks (`(1-a)`, `(1-b)`, `(1-c)`, and `(1-d)`). The code assumes that the subtrees rooted at the left child node and right child node of the node with index `i` are max-heaps.

Algorithm 1 `MaxHeapify(A, i)`

```
lft ← Left(i)
rgt ← Right(i)
largest ← i
if lft ≤ A.heapsize and [ (1-a) ] then
    largest ← lft
end if
if rgt ≤ A.heapsize and [ (1-b) ] then
    largest ← rgt
end if
if [ (1-c) ] then
    tmp ← A[i]; A[i] ← A[largest]; A[largest] ← tmp
    [ (1-d) ]
end if
```

In the pseudocode, `A.heapsize` denotes the number of elements of the max-heap in array `A`. Note that `A.length` used in (3) is the size of the array `A` itself and `A.heapsize` $\leq$ `A.length`.

(2) Answer the asymptotic upper bound of the worst-case running time of `MaxHeapify` in (1) when given an integer sequence of length n and answer it with the big-O notation. Answer with the smallest order.

(continued on the next page)

(3) Complete the following pseudocode of an algorithm `HeapSort` that uses `MaxHeapify` in (1) to sort an arbitrary integer sequence in ascending order by filling the blanks (`(3-a)`, `(3-b)`, `(3-c)`, and `(3-d)`). Note that the smallest possible value should be given for `(3-a)`.

Algorithm 2 `HeapSort(A)`

```
A.heapsize ← A.length
for i ← [ (3-a) ],...,1 do
    [ (3-b) ]
end for
for i ← A.length,...,2 do
    tmp ← A[1]; A[1] ← A[i]; A[i] ← tmp
    A.heapsize ← A.heapsize - 1
    [ (3-c) ]
end for
```

(4) Answer the asymptotic upper bound of the worst-case running time of the algorithm in (3) when given an unsorted integer sequence of length n and answer it with the big-O notation. Answer with the smallest order.

(5) Answer the asymptotic upper bound of the running time of the algorithm in (3) when given an integer sequence of length n sorted in descending order and answer it with the big-O notation. Answer with the smallest order.

F1-1, F1-2, F2-1, F2-2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問1　２つの文字列の編集コストは、文字の置換 (substitution)・削除 (deletion)・挿入 (insertion) により、一方を他方に変換するのに必要最小限の操作（置換・削除・挿入）の数で定義できる。なお、２つの文字列の長さ(N)は同じとする。

(1) 文字列"PARIS"を"PAIRS"に編集するコストを答えよ。

(2) 上記の編集コストは以下の２次元配列を左上から右下へ埋めていくことで求めることができる。なお、各要素はその位置までの編集コストを表す。以下の(a)～(e)に入る数を答えよ。

		P	A	R	I	S
	0	1	2	3	4	5
P	1	0	1	2	3	…
A	2	1	0	(a)	2	…
I	3	2	1	(b)	(d)	…
R	4	3	2	(c)	(e)	…
S	5	4	3	2	3	…

(3) 文字列 s と t（インデックスは 1, . . . , N）の編集コストは以下のプログラムで求めることができる。以下の(f)～(g)に入る要素を答えよ。

```
COST_DEL=1; COST_INS=1; COST_SUB=1; cost[0][0]=0
for i from 1 to N do:
  cost[i][0] = cost[i-1][0] + COST_DEL
for j from 1 to N do:
  cost[0][j] = cost[0][j-1] + COST_INS
for i from 1 to N do:
  for j from 1 to N do:
    c_del = cost[i][j-1] + COST_DEL
    c_ins = [ (f) ] + COST_INS
    c_subst = [ (g) ] + COST_SUB
    if s[i]==t[j]: c_match = cost[i-1][j-1] else: c_match = N
    cost[i][j] = min(c_del, c_ins, c_subst, c_match)
print cost[N][N]
```

(4) 上記のプログラムでは、置換・削除・挿入の各コストを１としていた。挿入のコスト (COST_INS) を 1/2 とした場合に、"PARIS"から"PAIRS"への編集コストをその内訳（置換・削除・挿入の各々の数）とともに答えよ。

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 2　すべての頂点の次数が 1 または 3 であり、辺に向きがない、根なし無順序木について考える。次数が 1 の頂点を葉と呼ぶ。すべての辺には正の値の長さが与えられ、葉 X, Y 間の最短路の長さを $d(X,Y)$ とする。

(1)　3 つの葉 A, B, C を持ち、それ以外には葉を持たない木を考える。$d(A,B) = 12$, $d(A,C) = 10$, $d(B,C) = 6$ を満たす木を重複なく全て導出して、各辺の長さとともに図示せよ。

(2)　4 つの葉 A, B, C, D を持ち、それ以外には葉を持たない木を考える。$d(A,B) = 12$, $d(A,C) = 10$, $d(A,D) = 7$, $d(B,C) = 6$, $d(B,D) = 9$, $d(C,D) = 7$ を満たす木を重複なく全て導出して、各辺の長さとともに図示せよ。

Use one answer sheet for each of F1-1, F1-2, F2-1, and F2-2.

Q.1 The edit cost of two strings can be defined by the minimum number of operations (substitutions, deletions, and insertions) necessary to make one into the other by substituting, deleting, and inserting characters. Here we assume the length (N) of the two strings is same.

(1) Answer the cost of editing the string of "PARIS" into "PAIRS".

(2) The edit cost can be computed by filling the following two-dimensional array from top left to bottom right. Each element represents the edit cost at that position. Give the number that falls in each of (a)-(e) below.

		P	A	R	I	S
	0	1	2	3	4	5
P	1	0	1	2	3	...
A	2	1	0	(a)	2	...
I	3	2	1	(b)	(d)	...
R	4	3	2	(c)	(e)	...
S	5	4	3	2	3	...

(3) The edit cost of two strings s and t (whose index is 1, . . . , N) can be computed with the following program. Answer the elements in (f)-(g) below.

```
COST_DEL=1; COST_INS=1; COST_SUB=1; cost[0][0]=0
for i from 1 to N do:
  cost[i][0] = cost[i-1][0] + COST_DEL
for j from 1 to N do:
  cost[0][j] = cost[0][j-1] + COST_INS
for i from 1 to N do:
  for j from 1 to N do:
    c_del = cost[i][j-1] + COST_DEL
    c_ins = [ (f) ] + COST_INS
    c_subst = [ (g) ] + COST_SUB
    if s[i]==t[j]: c_match = cost[i-1][j-1] else: c_match = N
    cost[i][j] = min(c_del, c_ins, c_subst, c_match)
print cost[N][N]
```

(4) In the above program, the cost of each substitution, deletion, and insertion was 1. If the cost of insertion (COST_INS) is set to 1/2, answer the cost of editing "PARIS" into "PAIRS" with its breakdown (the number of substitutions, deletions, and insertions).

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.2 Let us consider unrooted unordered trees where the degree of each node is 1 or 3, and each edge has no direction. A node with degree 1 is called a leaf. Each edge is given a length of a positive value. Let $d(X, Y)$ be the length of the shortest path between leaves X and Y.

(1) Let us consider all the trees with exactly three leaves A, B, and C satisfying $d(A, B) = 12$, $d(A, C) = 10$, and $d(B, C) = 6$. Without duplication, derive and draw such trees with the length of each edge.

(2) Let us consider all the trees with exactly four leaves A, B, C, and D satisfying $d(A, B) = 12$, $d(A, C) = 10$, $d(A, D) = 7$, $d(B, C) = 6$, $d(B, D) = 9$, and $d(C, D) = 7$. Without duplication, derive and draw such trees with the length of each edge.

問題訂正　Errata

情報学基礎【アルゴリズムとデータ構造】
問題番号：**F2-1**

P6：2-3 行目
【誤】(3–a)、(3-b)、(3-c)、(3-d)
【正】(3–a)、(3-b)、(3-c)

Fundamentals of Informatics [Algorithms and Data Structures]
Question Number: **F2-1**

P8：Line 2-3
[Original]　(3–a), (3-b), (3-c), and (3-d)
[Corrected] (3–a), (3-b), and (3-c)