基礎数学 I

1

以下の問いに答えよ．

(i) 三角関数 $\tan x$, $\cot x$ についての加法公式

$$\frac{1}{2}\tan x = \frac{1}{2}\cot x - \cot 2x$$

を用いて $\dfrac{1}{2^k}\tan\dfrac{x}{2^k}$ の無限和と $\cot x$ に関する等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - \cot x$$

を示せ．

(ii) 双曲線関数 $\tanh x$, $\coth x$ についての加法公式を与えよ．さらにこれを利用して，$\dfrac{1}{2^k}\tanh\dfrac{x}{2^k}$ の無限和と $\coth x$ に関する等式を導出せよ．ただし，これらの双曲線関数は，実数 x について

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

によって定義される．

An English Translation:

Basic Mathematics I

1

Answer the following questions.

(i) Show the equality with respect to $\cot x$ and the infinite sum of $\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{1}{x}-\cot x,$$

by using the addition formula

$$\frac{1}{2}\tan x=\frac{1}{2}\cot x-\cot 2x$$

of the trigonometric functions $\tan x$ and $\cot x$.

(ii) Find an addition formula of the hyperbolic functions $\tanh x$ and $\coth x$. Then, derive an equality with respect to $\coth x$ and an infinite sum of $\frac{1}{2^k}\tanh\frac{x}{2^k}$ by using this addition formula, where these hyperbolic functions are defined by

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},\quad \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x},\quad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

for a real number x.

アルゴリズム基礎

2

連結単純無向グラフ $G=(V,E)$ と節点 $s \in V$ が与えられたとき，s を始点とする幅優先探索により得られる G の全域木を T とし，T 上で s からの距離が i である節点の集合を V_i と記す．以下の問いに答えよ．

(i) s を始点として G の全域木 T を構築する幅優先探索の記述を与えよ．

(ii) $j+2 \leqq k$ である V_j と V_k の間には枝が存在しないことを証明せよ．

(iii) どの V_i も隣接する 2 節点の対を含まないとき，G は二部グラフであることを証明せよ．

(iv) ある V_i が隣接する 2 節点の対を含むとき，G は奇数長の閉路を持つことを証明せよ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

Given a connected simple undirected graph $G = (V, E)$ and a vertex $s \in V$, let T be a spanning tree of G obtained by a breadth-first search starting from s, and let V_i denote the set of vertices whose distance from s in T is i. Answer the following questions.

(i) Give a description of the breadth-first search that starts from s and constructs a spanning tree of G.

(ii) Prove that there is no edge between V_j and V_k such that $j + 2 \leqq k$.

(iii) Prove that if no V_i contains a pair of adjacent vertices then G is a bipartite graph.

(iv) Prove that if some V_i contains a pair of adjacent vertices then G is not a bipartite graph.

線形計画

$\boxed{3}$

$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^\top \in \mathbb{R}^5$ をパラメータにもつ次の線形計画問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{c})$ を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{c}): & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 3 \\ & & x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ここで，決定変数は $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top \in \mathbb{R}^5$ であり，$^\top$ は転置記号を表す．

問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{c})$ の最適解の集合を $X(\boldsymbol{c})$ とする．さらに，$\emptyset$ を空集合，$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合，$\mathbb{Z}^5 = \{\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^\top \in \mathbb{R}^5 \mid z_i \in \mathbb{Z}\ (i = 1, 2, 3, 4, 5)\}$ とする．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{c})$ の双対問題を書け．

(ii) 任意の $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^5$ に対して $X(\boldsymbol{c}) \neq \emptyset$ であることを示せ．

(iii) 任意の $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^5$ に対して $X(\boldsymbol{c}) \cap \mathbb{Z}^5 \neq \emptyset$ であることを示せ．

(iv) 次の命題 (A) について，真であれば証明を，偽であれば反例を与えよ．

(A) 任意の $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^5$ に対して $X(\boldsymbol{c}) \subseteqq \mathbb{Z}^5$ である．

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Consider the following linear programming problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{c})$ with a vector $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^\top \in \mathbb{R}^5$ of parameters:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{c}): & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 3 \\ & & x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}, \end{array}$$

where $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top \in \mathbb{R}^5$ represents decision variables, and the superscript $^\top$ denotes the transposition of a vector.

Let $X(\boldsymbol{c})$ be the set of solutions to problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{c})$. Moreover, let $\emptyset$ denote the empty set, let $\mathbb{Z}$ denote the set of all integers, and $\mathbb{Z}^5 = \{\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^\top \in \mathbb{R}^5 \mid z_i \in \mathbb{Z}\ (i = 1, 2, 3, 4, 5)\}$.

Answer the following questions.

(i) Write out a dual problem of problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{c})$.

(ii) Show that $X(\boldsymbol{c}) \neq \emptyset$ for any $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^5$.

(iii) Show that $X(\boldsymbol{c}) \cap \mathbb{Z}^5 \neq \emptyset$ for any $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^5$.

(iv) Prove or disprove the following proposition (A), giving a proof or a counterexample.

(A) $X(\boldsymbol{c}) \subseteqq \mathbb{Z}^5$ for any $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^5$.

線形制御理論

4

フィードバック制御系が図 1 で与えられているとする．ここで $G(s)$ は伝達関数，r は参照入力，d は外乱，y は出力である．以下の問いに答えよ．

(i)
$$G(s) = \frac{2}{s+3}$$
とする．r を単位階段関数，$d = 0$ とするときの出力 y を計算せよ．

(ii) a, b, c を実定数として
$$G(s) = \frac{c}{s^2 + as + b}$$
とする．フィードバックループを安定化し，かつ $r = 0$, $d = \sin 4t$ に対して y の定常値が 0 となる値 (a, b, c) の集合を求めよ．

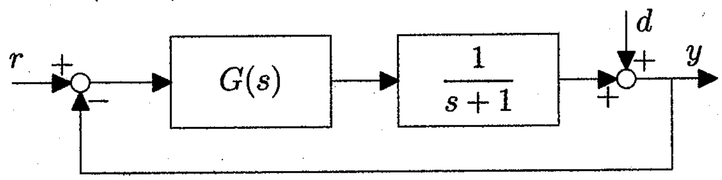

図 1: 制御系

An English Translation:

Linear Control Theory

$\boxed{4}$

A feedback control system is given by the block diagram shown in Figure 1, where $G(s)$ is a transfer function, r is the reference input, d is the disturbance, and y is the output. Answer the following questions.

(i) Let

$$G(s) = \frac{2}{s+3}.$$

Calculate the output y when r is the unit step function and $d = 0$.

(ii) Let

$$G(s) = \frac{c}{s^2 + as + b},$$

where a, b, and c are real constants. Determine the set of values of (a, b, c) for which the feedback loop is stable and the steady state value of y becomes zero when $r = 0$ and $d = \sin 4t$.

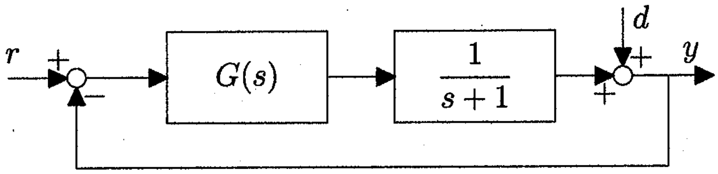

Figure 1: Control System

基礎力学

5

質量 m の粒子が力 $\boldsymbol{F} = -\frac{\mu m}{r^3}\boldsymbol{r}$ だけを受けて運動している．ここで，$\boldsymbol{r}$ は粒子の原点からの位置ベクトル，$r := |\boldsymbol{r}|$ は $\boldsymbol{r}$ の長さであり，$\mu > 0$ とする．粒子の位置が原点となることは決してないと仮定する．$\boldsymbol{p} := m\dot{\boldsymbol{r}}$ ($\dot{\boldsymbol{r}} := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$) は粒子の運動量とし，$\boldsymbol{L} := \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ は粒子の原点に関する角運動量とする．ここで，$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ のベクトル積(外積)であり，任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$, 及び $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ であり，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{c}$ のスカラー積(内積)とする．また $\boldsymbol{e} := \frac{1}{\mu m^2}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}) - \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ とする．以下の問いに答えよ．

(i) $\boldsymbol{L}$ が保存されることを証明せよ．

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \frac{(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\times\boldsymbol{r}}{r^3}$ が成立することを示せ．

(iii) $\boldsymbol{e}$ が保存されることを証明せよ．

(iv) $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{L} = 0$ を証明せよ．

(v) $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} + r = \frac{L^2}{m^2\mu}$ を証明せよ．ただし，$L := |\boldsymbol{L}|$ は $\boldsymbol{L}$ の長さとする．

An English Translation:

Basic Mechanics

$\boxed{5}$

A particle of mass m is moving under the action of a force $\boldsymbol{F} = -\frac{\mu m}{r^3}\boldsymbol{r}$, where $\boldsymbol{r}$ denotes the position vector of the particle from the origin, $r := |\boldsymbol{r}|$ stands for the length of $\boldsymbol{r}$ and $\mu > 0$. It is assumed that the particle is never at the origin. Let $\boldsymbol{p} := m\dot{\boldsymbol{r}}$ be the momentum of the particle where $\dot{\boldsymbol{r}} := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ and $\boldsymbol{L} := \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ be the angular momentum of the particle about the origin, where $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ denotes the vector or cross product of $\boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{p}$. Here $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$ and $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ hold for arbitrary vectors $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$, where $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ stands for the scalar or dot product of $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{c}$. Let $\boldsymbol{e}$ be defined as $\boldsymbol{e} := \frac{1}{\mu m^2}(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) - \frac{\boldsymbol{r}}{r}$. Answer the following questions.

(i) Prove that $\boldsymbol{L}$ is conserved.

(ii) Prove that $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \frac{(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{r}}{r^3}$.

(iii) Prove that $\boldsymbol{e}$ is conserved.

(iv) Prove that $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{L} = 0$.

(v) Prove that $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r} + r = \frac{L^2}{m^2\mu}$, where $L := |\boldsymbol{L}|$ stands for the length of $\boldsymbol{L}$.

基礎数学 II

6

複素数を成分とする $n\times n$ 行列 $A=(a_{i,j})_{1\leqq i,j\leqq n}$ と $B=(b_{i,j})_{1\leqq i,j\leqq n}$ は，それぞれ，非対角成分が全て非零の三重対角行列と対角行列である．すなわち，行列成分 $a_{i,j}, b_{i,j}\in\mathbb{C}$ は

$$a_{i,j}=0\ (|i-j|>1),\quad a_{i,j}\neq 0\ (|i-j|=1),\quad b_{i,j}=0\ (|i-j|\geqq 1)$$

を満たす．ここで，同一の正則行列 P を用いた相似変換 $A\mapsto P^{-1}AP, B\mapsto P^{-1}BP$ によって行列 A と B は，それぞれ，対角行列と非対角成分が全て非零の三重対角行列に変換されるものとする．行列 A の固有値を λ_i，単位行列を I，零行列を O で表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}$ を定数とする．

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k = O$$

が成立するのは $c_0=c_1=\cdots=c_{n-1}=0$ のときのみであることを示せ．

(ii) 行列 A の固有値は全て相異なることを示せ．

(iii) $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ とし，行列 E_i を

$$E_i=\prod_{1\leqq k\leqq n, k\neq i}\frac{1}{\lambda_i-\lambda_k}(A-\lambda_k I)$$

で定める．このとき，

$$\sum_{k=1}^{n} E_k = I,\qquad E_iE_j=\delta_{i,j}E_i$$
$$E_iBE_j=O\ (|i-j|>1),\quad E_iBE_j\neq O\ (|i-j|=1)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$ とする．

An English Translation:

Basic Mathematics II

6

Let $n \times n$ complex matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqq i,j \leqq n}$ and $B = (b_{i,j})_{1 \leqq i,j \leqq n}$ be a tri-diagonal matrix whose off-diagonal entries are non-zero and a diagonal matrix, respectively. Equivalently, the entries $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{C}$ of A and B satisfy

$$a_{i,j} = 0 \ (|i-j| > 1), \quad a_{i,j} \neq 0 \ (|i-j| = 1), \quad b_{i,j} = 0 \ (|i-j| \geqq 1).$$

Suppose that A and B can be converted into a diagonal matrix and a tri-diagonal matrix whose off-diagonal entries are non-zero, respectively, by a similarity transformation with a common regular matrix P: $A \mapsto P^{-1}AP, B \mapsto P^{-1}BP$.

Let λ_i be the eigenvalues of A. Hereafter, I denotes the identity matrix, and O denotes the zero matrix. Answer the following questions.

(i) Let $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ be constants. Show that

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k = O$$

holds only when $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$.

(ii) Show that all the eigenvalues of A are mutually distinct.

(iii) Let $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ and let E_i be the matrix defined by

$$E_i = \prod_{1 \leqq k \leqq n, k \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k}(A - \lambda_k I).$$

Show that

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} E_k = I, && E_i E_j = \delta_{i,j} E_i, \\ &E_i B E_j = O \ (|i-j| > 1), && E_i B E_j \neq O \ (|i-j| = 1), \end{aligned}$$

where $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$.