2020 年度 10 月期・2021 年度 4 月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学専攻

入学者選抜試験問題

【基礎科目】

2020 年 7 月 11 日 10:00 - 11:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は 1 時間 30 分である。退室は認めない。

(4) 基礎科目は全部で 5 題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から 3 題選択して解答すること。4 題以上選択した場合は、問題番号の若い順に 3 題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙 3 枚と下書用紙 (計算用紙) が配布される。開始後、解答用紙の全てに受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答用紙 1 枚につき 1 題を解答すること。
解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 解答用紙 3 枚全てを提出すること。 2 題以下しか選択していない場合でも、選択予定の問題番号を記入し、必ず 3 枚の解答用紙を提出すること。

(8) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 次の各問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 $f(x,y)$ が $x\dfrac{\partial f}{\partial y} = y\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を満たすとする．このとき，$r \geq 0$ で定義される $g(r)$ が存在して

$$f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

を満たすことを示せ．

(2) $\mathbb{R}^3$ における曲面 $3x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 1$ の接平面で，平面 $x - y + z = 0$ に平行なものを全て求めよ．

2 次の積分の値を求めよ．

(1) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ を $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ とするとき，$\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\,dz$.
ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx$.

3 3 行 3 列の行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

で与える．次の各問に答えよ．

(1) 3 行 3 列の実正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ は対角行列となることを示せ．

(2) 3 行 3 列の実行列 B は $AB = BA$ を満たしているとする．このとき，3 行 3 列の実正則行列 Q が存在して，$Q^{-1}AQ$ と $Q^{-1}BQ$ は共に対角行列となることを示せ．

4　3 行 3 列の行列 C を

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

で与える．次の各問に答えよ．

(1) 行列 C の固有値を全て求めよ．

(2) 行列 C の固有ベクトルの組で $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を成すものを 1 組求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の閉単位球 F を

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

によって与える．さらに，$\mathbb{R}^3$ の部分集合 G を

$$G = \left\{ \big(2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 4z\big) \;\middle|\; (x, y, z) \in F \right\}$$

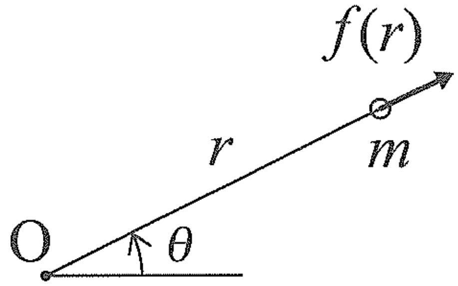
により定義する．このとき積分

$$\iiint_G 1 \, dxdydz$$

の値を求めよ．

5

質量 m の質点が，点Oを中心とする中心力を受けて2次元平面上を運動している．下図のように，この平面上での質点の位置を点Oを中心とする極座標 (r,θ) で表し，この中心力を点Oから遠ざかる方向を正として $f(r)$ と表す．この中心力のもとで，質点にある初期条件を与えたところ，質点が軌道 $r=\dfrac{1}{1+a\cos 3\theta}$ 上を運動した．ただし a は $0<a<1$ を満たす定数である．以下の問いに答えよ．



(1) この軌道の概略を図示せよ．

(2) この質点の運動方程式を極座標 (r,θ) を用いて書け．

(3) この質点の角運動量が，この運動に伴って保存することを示せ．

以下の問いでは，この保存する角運動量の大きさを L_0 として解答せよ．

(4) この運動に伴う動径の時間微分 $\dfrac{dr}{dt}$ を，動径の角度微分 $\dfrac{dr}{d\theta}$ を用いて表せ．

(5) $f(r)$ を求めよ．

次にこの中心力のもとで，この質点に別の初期条件を与えたところ，質点は点Oを中心とする半径 R の円運動を行った．このとき動径方向に瞬間的に力を加え質点の位置を微小量だけずらしたところ，質点は動径方向に振動を始めた．

(6) この振動を単振動とみなして，その周期を求めよ．