

問題 1

I. 以下の手順 (1)-(3) に従って、一様な電界中に設置された導体球に誘導される電荷密度を求めよ。なお、真空の誘電率を ϵ_0 とする。以下の問に答えよ。

(1) 図 1 のように、直交座標系 (x, y, z) で表される真空中の点 $A(L, 0, 0)$ と点 $B(-L, 0, 0)$ ($L > 0$) にそれぞれ大きさが同じで符号の異なる電荷量を持つ点電荷が存在し、原点における電界の x 方向成分が E_0 (> 0)となっている。

(1-i) 点 A および点 B の点電荷の電荷量をそれぞれ求めよ。

(1-ii) 点 A の点電荷が点 $C(a, \sqrt{R^2 - a^2}, 0)$ に作る電位を求めよ。ただし、図 1 のように $|a| \leq R < L$ であり、電位は無限遠を基準点とする。

(2) 次に、点 A と点 B に置かれた二つの点電荷に加えて、図 2 のように原点を中心とした半径 R ($R < L$) の接地された導体球を置く。

(2-i) 点 A と点 B に置かれた点電荷によって、導体球には表面電荷が誘起される。導体に誘導される表面電荷を、導体球表面の電位がゼロになるという境界条件を満たす導体球内の仮想的な「影像電荷」で置き換えることによって、導体球外部の電界や電位を求めることができる。点 A、点 B に置かれた点電荷に対応する「影像電荷」の位置と電荷量を、それぞれについて求めよ。

(2-ii) 導体球に誘導される電荷の総量がゼロとなることを示せ。

(3) ここで、問(1)で与えられた電界が原点近傍で一様な電界 $\mathbf{E}_0 = (E_0, 0, 0)$ と近似できるように、 $L \gg R$ と仮定する。

(3-i) 問(2-i)で求めた影像電荷群は、双極子モーメント $\mathbf{P} = (4\pi\epsilon_0 R^3 E_0, 0, 0)$ を有し、原点に設置された単一の電気双極子として表されることを示せ。

(3-ii) 問(3-i)で与えられた影像電気双極子で導体球を置き換える。図 3 に示すような極座標 (r, θ, ϕ) を用いて、取り去った導体球の表面上の点 $D(R, \theta, \phi)$ における一様な電界 \mathbf{E}_0 の接線方向成分 $E_{0\theta}$ および法線方向成分 E_{0r} を求めよ。

(3-iii) 原点に設置された電気双極子が位置 \mathbf{r} に作る電位は

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3}$$

と表される。問(3-i)で与えられた電気双極子が作る電界と一様な電界 \mathbf{E}_0 との合成電界が、導体球の表面で電界の境界条件を満たしていることを示せ。必要ならば、以下に示すベクトル解析の公式を用いてもよい。

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

(3-iv) 導体球の表面に誘導される電荷の面密度を角度 θ の関数として求めよ。

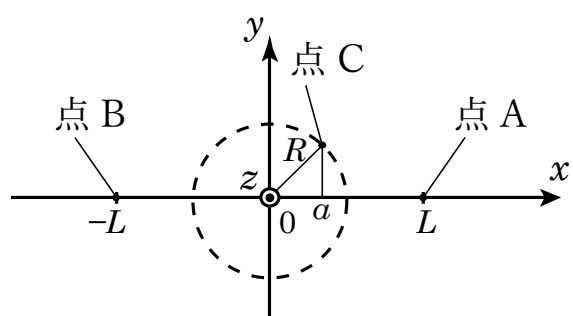


图 1

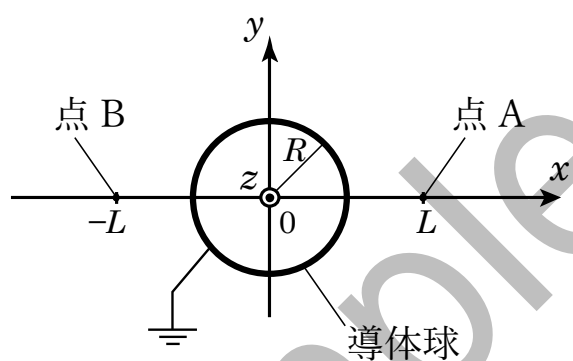


图 2

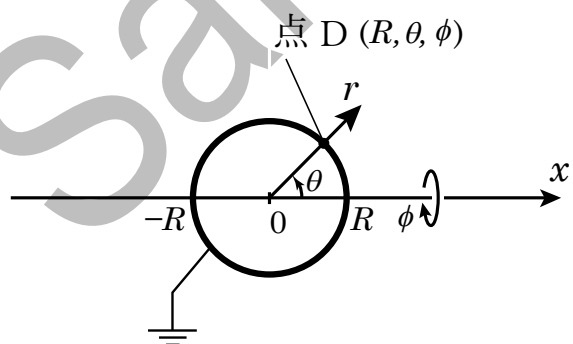


图 3

II. 図4のように、直交座標系 (x, y, z) で表される真空中の z 軸上に太さが無視できる無限長の直線導体があり、 z 軸の正方向に電流 I が流れている。辺の長さが $2a$ である正方形の1ターンコイルが、点 $(\sqrt{2}a, 0, 0)$ を中心とし、辺ABおよび辺CDが z 軸に平行となるように配置されている。図5に示すように、このコイルは x 軸とコイル平面の単位法線ベクトル \mathbf{n} とのなす角度が θ となるように傾けることができる。なお、図4に示したコイルでは $\theta = \pi/2$ となっている。コイルは太さの無視できる導線でできており、コイルには電流は流れていない。真空の透磁率を μ_0 とし、以下の問に答えよ。

- (1) 任意の点 $P(x, y, z)$ の磁束密度の x, y, z 方向成分をそれぞれ求めよ。
- (2) $\theta = 0$ および $\theta = \pi/2$ のときに、コイルに鎖交する磁束をそれぞれ求めよ。ただし、法線ベクトル \mathbf{n} の方向の磁束密度を正とせよ。
- (3) 電流 I が作るベクトルポテンシャル \mathbf{A} は、以下に示すベクトル \mathbf{A}_0 を用いて、 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla\varphi$ と表せることを示せ。ただし、 φ は x, y, z に関する任意のスカラー関数である。

$$\mathbf{A}_0 = (0, 0, -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2})$$

- (4) 直線導体とコイルとの間の相互インダクタンスを角度 θ の関数として表せ。導出の際に、問(3)で扱ったベクトルポテンシャルを用いてもよい。

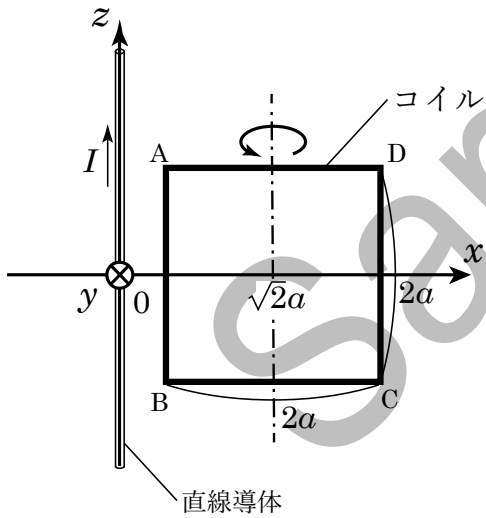


図4

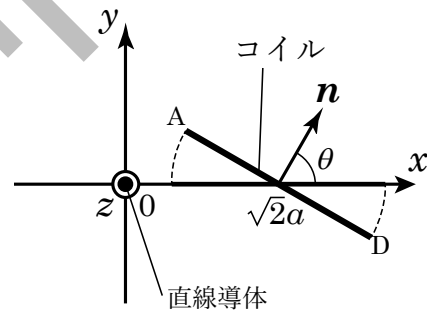


図5

問題 2

I. 図 1 に示す，外部端子 A と A' を持つ回路について，以下の間に答えよ．ここで，回路中の 3 つの抵抗は，等しい抵抗値 R をもつ． C はキャパシタンス， L はインダクタンスである．電圧を端子 A' に対して表す．

はじめスイッチ S は閉じられている．回路中の 2 つの電圧源は，振幅 E_0 ，角周波数 ω ，位相角 $\phi = 0$ の，等しい交流電圧を生じている． \dot{V}_p と \dot{V}_q はそれぞれ節点 p と q の複素電圧振幅(フェーザ)である．

- (1) \dot{V}_p と \dot{V}_q が満たす連立方程式を書け．
- (2) $R = 1 \, \Omega$ ， $L = 1 \, \text{H}$ ， $C = 1 \, \text{F}$ ， $E_0 = 1 \, \text{V}$ ， $\omega = 1 \, \text{rad/s}$ と仮定して， \dot{V}_p と \dot{V}_q を求めよ．
- (3) 問(2)で用いられた条件において，図 2 に示すように，図 1 の等価回路を複素電圧振幅 \dot{E}_1 の交流電圧源とインピーダンス \dot{Z} を用いて表現することができる． \dot{E}_1 と \dot{Z} を求めよ．

いま，図 1 の 2 つの電圧源は等しい直流電圧 $1 \, \text{V}$ を生じている．回路定数を $L = 1 \, \text{H}$ ， $R = 1 \, \Omega$ と仮定する．スイッチ S が十分に長い時間開かれ，その後にスイッチが閉じられる． V_p と V_q はそれぞれ節点 p と q の電圧である．

- (4) スイッチを閉じた後に V_p と V_q が満たす連立微分方程式を書け．
- (5) スイッチを閉じた後，回路の電圧は過渡的な変化を示す．節点 p の電圧に減衰振動を生じさせるための C の範囲を求めよ．

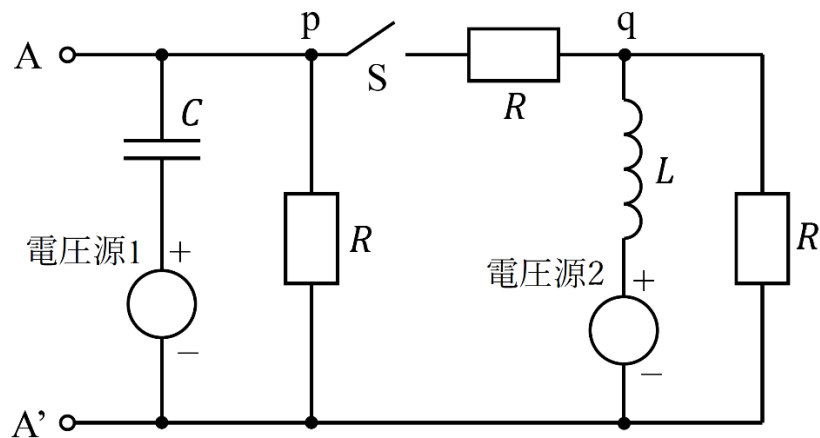


図 1

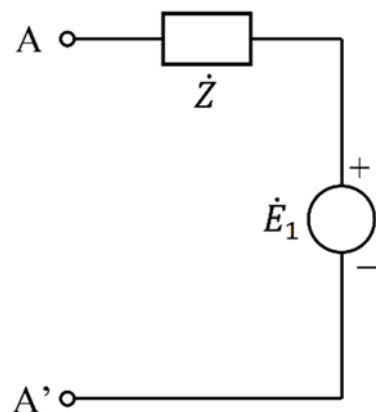


図 2

II. 図3に示す回路について以下の間に答えよ. n型MOSトランジスタ M_1 と M_2 は等しい特性を持ち, それぞれのトランジスタの小信号等価回路が図4で与えられる. ここで g_m , r_o , v はそれぞれ MOS トランジスタの相互コンダクタンス, ドレイン抵抗, 入力電圧である. R_D と R_S は回路中の抵抗である. V_{DD} は正の一定の電圧である. v_1, v_2, v_3, v_4 はそれぞれ V_1, V_2, V_3, V_4 の小信号成分を表すものとする.

- (1) 小信号成分 v_{in} と v_{out} はそれぞれ 2 つの入力信号の差 $v_1 - v_2$ と 2 つの出力信号の差 $v_3 - v_4$ を表す. 電圧増幅率 $A = v_{out}/v_{in}$ を求めよ.
- (2) 小信号成分 v'_{in} と v'_{out} はそれぞれ 2 つの入力信号の和 $v_1 + v_2$ と 2 つの出力信号の和 $v_3 + v_4$ を表す. 電圧増幅率 $A' = v'_{out}/v'_{in}$ を求めよ.
- (3) 図3の回路の機能を, 問(1)と(2)の結果をもとに数行で述べよ. $r_o \rightarrow \infty$ および $R_S \gg g_m^{-1}$ を仮定してよい.

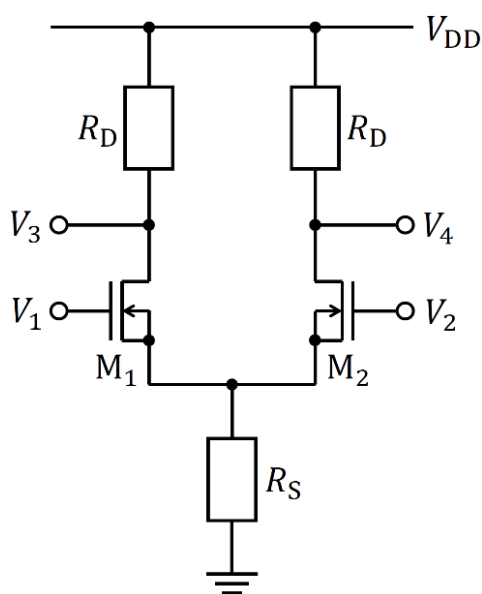


図3

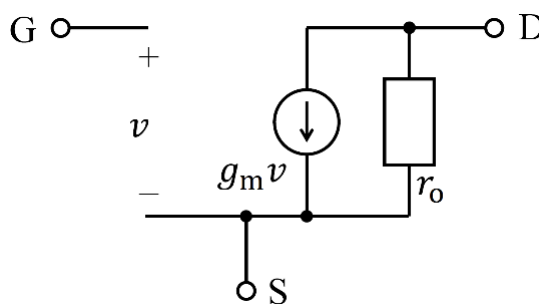
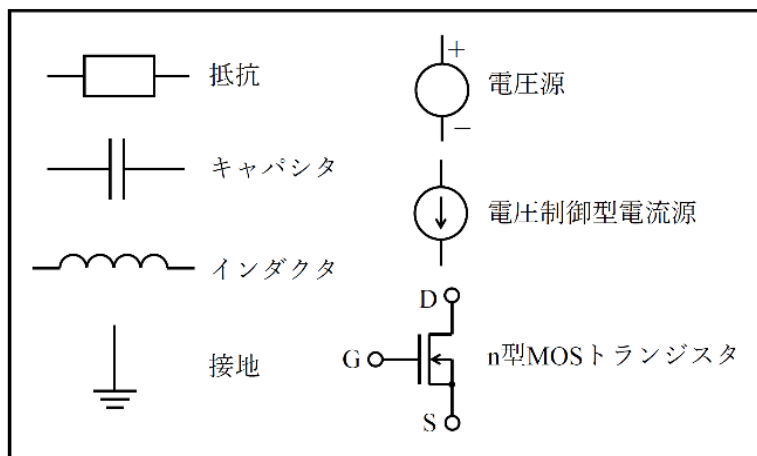


図4



凡例

問題 3

I. 情報理論に関する以下の問に答えよ. 3つの状態 $\{s_0, s_1, s_2\}$ を持つマルコフ情報源を S とする. 各試行で S は以下の式で与えられる遷移確率行列 T に従って次の状態に遷移する.

$$T = \begin{bmatrix} p(s_0|s_0) & p(s_1|s_0) & p(s_2|s_0) \\ p(s_0|s_1) & p(s_1|s_1) & p(s_2|s_1) \\ p(s_0|s_2) & p(s_1|s_2) & p(s_2|s_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

遷移の間, S は次の状態を出力する. 必要に応じて以下の近似を用いてよい:

$$\log_2 3 = 1.58, \log_2 5 = 2.32, \log_2 7 = 2.81$$

- (1) S の状態遷移図を描け.
- (2) 試行を十分な回数繰り返した後, それぞれ状態 s_0, s_1, s_2 になる確率 P_0, P_1, P_2 を求めよ.
- (3) S の全体のエントロピーを求めよ. (2)で定義される P_0, P_1, P_2 を用いて回答に示せ.
- (4) S の連続する2つの出力に対して符号語を割り当てることを考える.
 - (4-i) 最も効率の良い符号を設計せよ.
 - (4-ii) (4-i)で設計した符号の符号化効率について、定量化する方法について述べよ.

II. 信号処理に関する以下の問に答えよ．連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ は， t ($-\infty < t < \infty$) を時間， ω を角周波数， j を虚数単位とすると

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{i})$$

で与えられる．その逆フーリエ変換は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{ii})$$

で与えられる．単位インパルス関数 $\delta(t)$ は

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{iii})$$

で表される．周期 T の周期関数 $g(t)$ の複素フーリエ級数展開は

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt \quad (n: \text{整数}) \quad (\text{iv})$$

で表される．

- (1) 連続実時間信号 $x(t)$ (ただし実数) のフーリエ変換を $X(\omega)$ とする．その複素共役 $X^*(\omega)$ は $X(-\omega)$ と等価であることを示せ．
- (2) 単位インパルス関数のフーリエ変換を求めよ．
- (3) 信号 $x(t)$ をローパスフィルタに入力し，出力信号 $y(t)$ を得るものとし，ローパスフィルタは理想的な周波数応答 $H(\omega)$ を持ち， $\omega_c (> 0)$ を遮断周波数としたとき

$$G(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \quad (\text{iv})$$

であるとする． $x(t)$ が単位インパルスであると仮定したとき，出力信号 $y(t)$ を求めよ．さらに， $y(t)$ の波形を描き， $y(0)$ の値，および $y(t) = 0$ となる t の値を示すこと．

- (4) 周期 $T (> 0)$ の周期インパルス列 $d(t)$ は

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (\text{vi})$$

のように示すことができる．

- (4-i) $d(t)$ の複素フーリエ級数展開を表せ．

- (4-ii) $d(t)$ のフーリエ変換を $D(\omega)$ としたとき， $D(\omega)$ が周期インパルス列からなることを示せ．

- (5) 連続実時間信号 $x(t)$ を標本化することを考える．

- (5-i) 標本化された信号から $x(t)$ をどのように復元すればよいか，数行程度で説明せよ．必要に応じて Eq. (iv) から (vi) を用いてよい．

- (5-ii) 標本化された信号から $x(t)$ が復元できるときの条件を示せ．

問題 4

I. 論理回路に関する以下の問に答えよ. 2bit の正の値 $A = a_2a_1$ と $B = b_2b_1$ を入力とする 2bit 比較器 CMP を設計したい. 比較器 CMP は, 入力が $A \geq B$ の時 1 を, それ以外の時 0 を出力 c として出力する回路とする. 2bit 比較器 CMP は, 図 1 に示す記号で表される.

(1) a_1, b_1 を入力として, 以下に示す c_1 を出力する 1 bit 比較器 CMP_1 の真理値表を書け.

$$c_1 = \begin{cases} 1, & a_1 \geq b_1 \\ 0, & a_1 < b_1 \end{cases}$$

(2) 問(1) に示した c_1 と a_2, b_2 を入力として, 以下に示す c_2 を出力する 1 bit 比較器 CMP_2 の真理値表を書け.

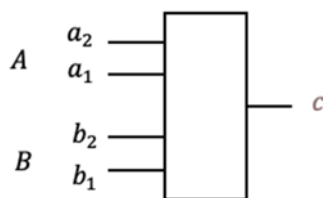
$$c_2 = \begin{cases} 1, & a_2 > b_2 \\ c_1, & a_2 = b_2 \\ 0, & a_2 < b_2 \end{cases}$$

(3) 問(1) および (2) で示した比較器 CMP_1, CMP_2 の回路を組合せることで 2bit 比較器 CMP を作成することができる. この回路を図 2 に示す記号を用いて図示せよ.

次に, 2bit 比較器 CMP を用いて順序回路 MAX を設計したい. MAX は, 2bit の正の値 X_1, X_2, \dots を順に入力すると, 入力値の最大値を出力する. 以下の手順で MAX の回路を設計せよ.

(4) 2bit 比較器 CMP と 2bit の D フリップフロップ (D-FF) を用いて, D-FF に $\max(A, B)$ を記録する回路を設計したい. この回路を図 1, 図 2 および 図 3 の記号を用いて図示せよ.

(5) 問(4)で設計した回路の入力 A に X_i を, B に $\max(X_1, X_2, \dots, X_{i-1})$ を配線することで, 順序回路 MAX を作成できる. 順序回路 MAX を図 1, 図 2 および図 3 の記号を用いて図示せよ. ここで, 入力 B の初期値は 00 であると仮定してよい.



2bit CMP

図 1



AND

OR

NOT

図 2



2bit D-FF

図 3

II. ハッシュテーブルを用いたデータの格納と管理に関する以下の問に答えよ。 N 個の要素を持つハッシュテーブル $\text{table}[N]$ により正の整数を管理する方法について考える。ここで、正の整数 x をハッシュテーブルに格納する位置を定める際に用いるハッシュ関数を $H(x) = \text{mod}(x, N)$ とする。正の整数が同じハッシュ値を持つ場合は、プログラム 1 に示すデータ構造 node の連結リストにより管理する。

- (1) 整数 $\{15, 53, 22, 59, 15, 41, 20\}$ をハッシュ関数を用いて順に $N = 11$ の $\text{table}[N]$ に格納した時、ハッシュテーブルの内容を示せ。
- (2) プログラム 2 は、正の整数 x を $\text{table}[N]$ に格納する関数 $\text{insert}(x)$ を示している。プログラム 2 の空欄を埋めて C 言語のプログラムを完成させよ。
- (3) $\text{search}(x)$ は、与えられた正の整数 x の値が $\text{table}[N]$ に格納されている場合に 1 を、そうでない場合は 0 を返す関数とする。関数 $\text{search}(x)$ を C 言語で記述せよ。
- (4) $\text{table}[N]$ に格納されている正の整数 x を削除する関数を記述する際に留意すべき点を数行で述べよ。

```
/* プログラム 1 */
struct node {
    int value;
    struct node *next;
};
struct node *table[N];

/* プログラム 2 */
int H(int x) { return(x % N); }
void insert(int x) {
    struct node *new, *check;
    new = (struct node *)malloc(sizeof (struct node));
    new -> value = x;
    new -> next = NULL;
    check = table[H(x)];
    
}
```

問題 5

I. 固体中の電子を考える．固体中の電子のシュレディンガー方程式は，

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \quad (\text{i})$$

と記述できるとする．ただし， t は時間， Ψ は電子の波動関数， H は電子に対するハミルトニアン， i は虚数単位， $\hbar = h/2\pi$ であり， h はプランク定数とする．以下の問に答えよ．ただし， E は電子のエネルギーであり， $\omega = E/\hbar$ ， k は電子の波数（実数）とする．

(1) ハミルトニアンが $H = -A \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ と表されるとする．ただし， A は正の実数の定数， x は位置

とする．波動関数が $\Psi = Ce^{i(kx - \omega t)}$ と記述できるとする．ただし， C は定数である．

(1-i) E と k の間の分散関係を求めよ．

(1-ii) 固体中の電子は有効質量 m を持った自由電子として表すことができる．このとき，有効質量 m を求めよ．ただし，電子の運動量は $\hbar k$ で与えられる．

(1-iii) 長さ L の1次元の固体を考える．このとき，この固体中で取りうる k を求めよ．ただし，周期 L の周期的境界条件を仮定してよい．

(1-iv) 問(1-iii)の結果を用いて，1次元の固体中でのエネルギー E における電子の状態密度を求めよ．

(2) ハミルトニアンが $H = -A \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ と表されるとする．ただし， A は正の実数の定

数， x ， y および z は位置とする．波動関数が $\Psi = Ce^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$ と記述できるとする．

ただし， C は定数， k_x ， k_y および k_z はそれぞれ x 方向， y 方向および z 方向の波数成分である．このとき，3次元の固体中でのエネルギー E における電子の状態密度を求めよ．

(3) ハミルトニアンが $H = \begin{pmatrix} 0 & Bk \\ Bk & 0 \end{pmatrix}$ と記述されると仮定する．ただし， B は正の実数とする．

このとき，電子のシュレディンガー方程式は，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = H|\Psi\rangle, \quad (\text{ii})$$

と記述できるとする．ただし， $|\Psi\rangle$ は電子の状態ベクトルとする．

(3-i) 状態ベクトルが $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$ と表される．ただし， φ_1 および φ_2 は時間に依

存しない値である．このとき， E と k の間の分散関係を求めよ．

(3-ii) 電子の伝搬する速さ（ $= dE/dk$ ）を求めよ．また，この電子と自由電子の差異について論ぜよ．

II. 図 1 に示すシリコン (Si) pn 接合に電圧 V を印加することを考える. n 型 Si および p 型 Si は均一にリン (P) およびボロン (B) が添加されており, それぞれの不純物密度を N_D , N_A とする. 不純物のイオン化率は 100% とする. x は位置であり, n 型 Si と p 型 Si の境界を $x = 0$ とする. 空乏層端の位置をそれぞれ $x = -l_n$, $x = l_p$ とする. また, k_B はボルツマン定数, q は素電荷, T は PN 接合の温度, ϵ_s は Si の誘電率, n_i は Si の真性キャリア密度とする.

以下の問に答えよ. ただし, T は室温とする.

- (1) $V = 0$ のときの pn 接合のバンド図を示せ. ただし, フェルミ準位 E_F と真性フェルミ準位 E_i を明記すること.
- (2) pn 接合の内蔵電位 V_{bi} を求めよ. ただし, 熱平衡状態における電子密度は $n_i e^{(E_F - E_i)/kT}$, ホール密度は $n_i e^{(E_i - E_F)/kT}$ と表せるとする.
- (3) $V = 0$ のときの空乏層内における静電ポテンシャルおよび電界の分布を l_n , l_p を使って求め, 図示せよ. ただし, n 型中性領域および p 型中性領域の電界はゼロと仮定してよい.
- (4) $V = 0$ のときの空乏層幅 $W = l_n + l_p$ を内蔵電位 V_{bi} を使って表せ.
- (5) 順バイアス ($V > 0$) 時のバンド図を示し, 電流が V に対して指数関数的に増加する理由を, 伝導帯中の電子のエネルギー分布を使い説明せよ.
- (6) 逆バイアス ($V \ll 0$) 時は, ゼロではない一定の電流が流れる. この理由を中性領域における少数キャリア分布から説明せよ.
- (7) Si 中に結晶欠陥が均一に存在する場合を考える. 結晶欠陥は電子とホールの生成・再結合中心となり, 単位体積当たりの実効再結合速度は $\frac{np - n_i^2}{n + p + 2n_i} \cdot \frac{1}{\tau}$ で与えられる. ただし, n は電子密度, p はホール密度, τ はキャリア寿命である. このとき, 逆バイアス印加時に流れる生成電流密度を空乏層幅 W を使って求めよ.

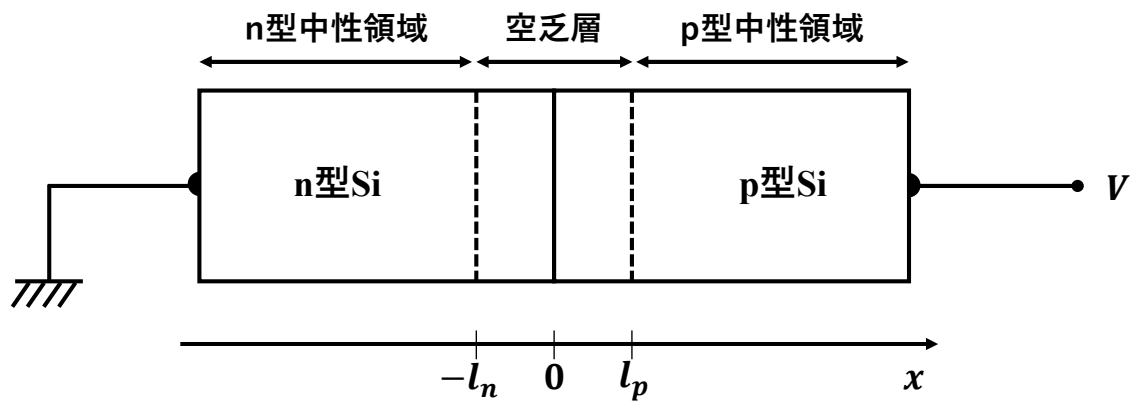


図 1

問題 6

I.

次の微分方程式で表される制御対象を考える．ただし， $u(t)$ は制御入力， $y(t)$ は出力とし，それぞれのラプラス変換を $U(s), Y(s)$ とする．以下の問に答えよ．

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} = u(t) - 2y(t)$$

- (1) 制御対象の伝達関数 $G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ を導出せよ．
- (2) 制御入力 $u(t)$ を単位ステップ関数としたときの出力の時間応答 $y(t)$ を求めよ．また，この応答の最終値を求めよ

次に，図 1 のフィードバック制御系を考える．制御器の伝達関数を $G_c(s) = 1$ ，制御対象の伝達関数を $G_p(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ ($K > 0, T > 0$)とする．ただし， $R(s)$ は基準入力， $C(s)$ は制御量であり，時間信号 $r(t), c(t)$ をそれぞれラプラス変換したものである．

- (3) 図 1 のフィードバック制御系全体の伝達関数 $G_1(s)$ を求めよ．
- (4) 問(3)で求めた伝達関数の固有角周波数 ω_n と減衰率 ζ を求めよ．
- (5) T の値が大きくなると，図 1 のフィードバック制御系の単位ステップ応答の挙動がどうなるかを説明せよ．
- (6) 図 2 のように図 1 の制御系にさらに内側にフィードバックループを加える．ここで， $H(s) = K_c s$ ただし $K_c > 0$ とする．このフィードバック制御系全体の伝達関数 $G_2(s)$ を求めよ
- (7) 問(6)のフィードバック制御系において， K_c を十分に大きくすると，制御系全体の安定性を改善できることを示せ．

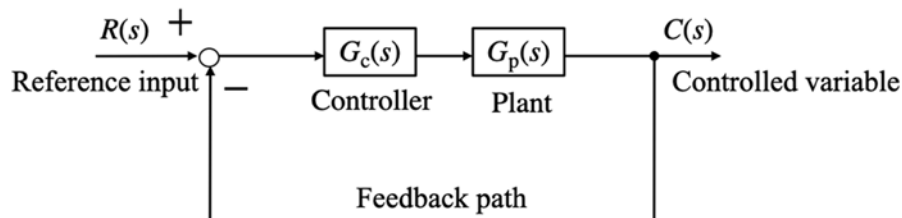


図 1

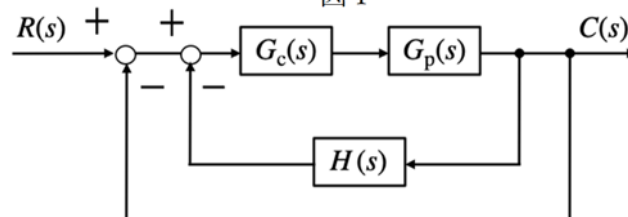


図 2

II.

図 3 に示す，電圧 V の直流電源に接続された直流分巻電動機の等価回路を考える．ここで， r_a は補償巻線抵抗を含む電機子抵抗， r_f は界磁抵抗， v_b はブラシ電圧降下， I は入力電流， I_a は電機子電流， I_f は界磁電流， E は誘導起電力である． $V=220$ [V]， $r_a = 0.1$ [Ω]， $r_f = 110$ [Ω]， $v_b = 3$ [V] とする．また，磁気飽和および電機子反作用は無視する．以下の問に答えよ．

- (1) $I=72$ [A] のときの I_a と E を求めよ．
- (2) $I=72$ [A] で電動機の回転速度が 1,200 rpm のときのトルク T_M を求めよ．
- (3) 問(2)で求めたトルク T_M を保ったまま，界磁抵抗 r_f を 2 倍にすると，電機子電流 I_a が 2 倍となることを示せ．

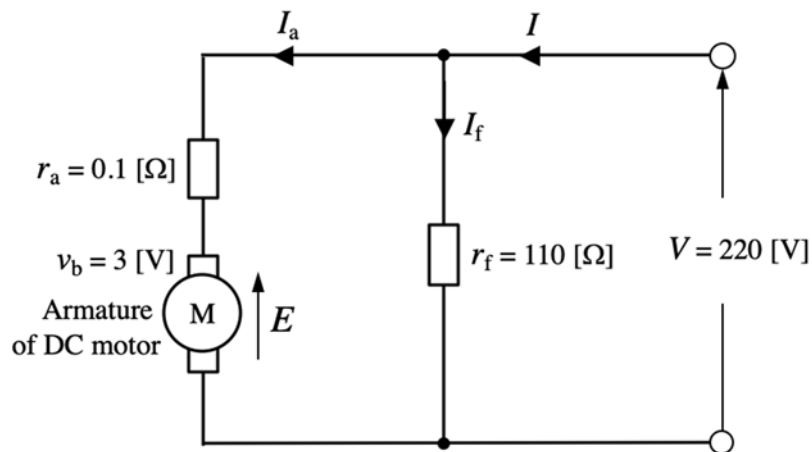


図 3

Problem 1

I.

Consider the following steps (1)–(3) for obtaining the charge density induced on a conducting sphere located in a uniform electric field. Let the vacuum permittivity be ϵ_0 . Answer the following questions.

- (1) Two point charges are located at point A($L, 0, 0$) and point B($-L, 0, 0$) ($L > 0$) in vacuum space described by a Cartesian coordinate system (x, y, z) as shown in Fig. 1. They have charges with equal magnitude but with opposite sign, creating an electric field whose x -direction component at the origin is E_0 (> 0).

(1-i) Find the amount of charge located at A and B, respectively.

(1-ii) Find the electric potential at point C($a, \sqrt{R^2 - a^2}, 0$) generated by the point charge located at A. Here, $|a| \leq R < L$ as shown in Fig. 1 and the electric potential at infinity is set to be zero.

- (2) Next, as shown in Fig. 2, a grounded conducting sphere with radius R ($R < L$) centered at the origin is placed together with the two point charges at A and B.

(2-i) The point charges located at A and B induce the surface charges on the conducting sphere. The electric field and the electric potential outside the conducting sphere can be obtained by replacing the surface charges induced on the conductor with virtual “image charges” inside the sphere that satisfy the boundary condition of zero electric potential on the surface of the conductor sphere. Find the location and the amount of the “image charge” corresponding to the point charge located at A and B, respectively.

(2-ii) Show that the total charge induced on the conducting sphere is zero.

- (3) Then, assume $L \gg R$ so that the electric field given in Question (1) can be approximated by a uniform electric field $\mathbf{E}_0 = (E_0, 0, 0)$ around the origin.

(3-i) Show that the “image charges” obtained in Question (2-i) can be expressed as a single electric dipole located at the origin with the dipole moment $\mathbf{P} = (4\pi\epsilon_0 R^3 E_0, 0, 0)$.

(3-ii) Suppose that the conducting sphere is removed and replaced by the “image dipole” given in Question (3-i). Employ a polar coordinate system (r, θ, ϕ) as shown in Fig. 3 and find the tangential component $E_{0\theta}$ and the normal component E_{0r} of the uniform electric field \mathbf{E}_0 at point D(R, θ, ϕ), which corresponds to the surface of the removed conducting sphere.

(3-iii) An electric dipole located at the origin creates an electric potential $V(\mathbf{r})$ at location \mathbf{r} as

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3}.$$

Show that the total electric field created by the electric dipole given in Question (3-i) and the uniform electric field \mathbf{E}_0 satisfies the boundary condition of electric field on the surface of the conducting sphere. You may use the following formula for vector analysis.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

(3-iv) Find the surface charge density induced on the surface of the conducting sphere as a function of angle θ .

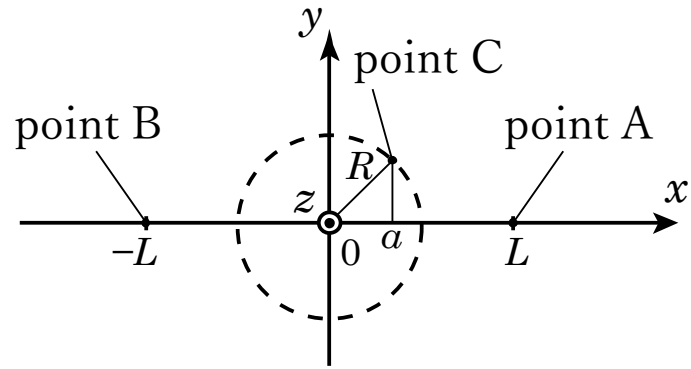


Fig. 1

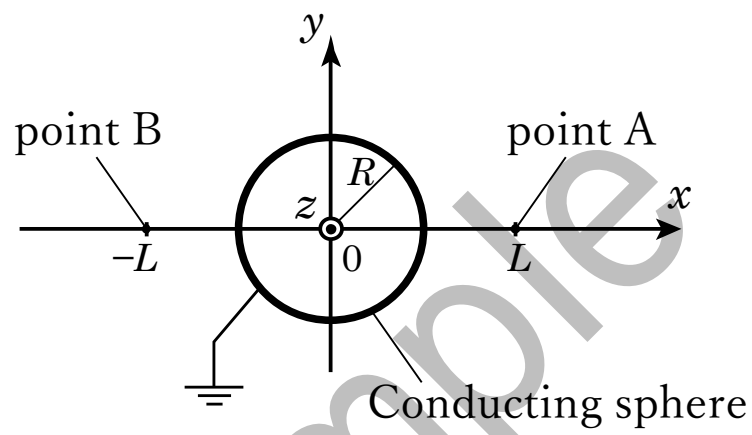


Fig. 2

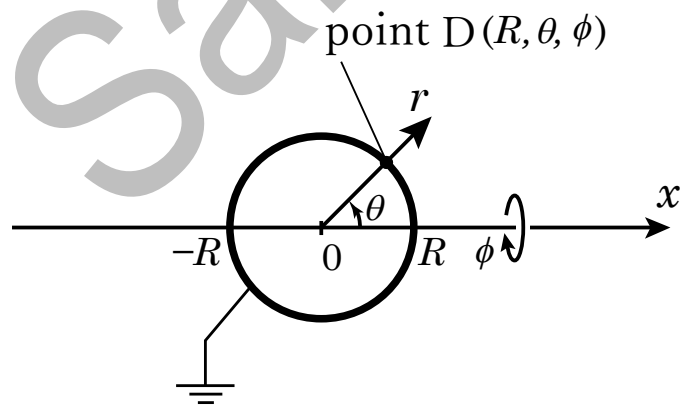


Fig. 3

II.

Consider that an infinitely long straight wire conductor with a negligible thickness is located on the z -axis in vacuum space described by a Cartesian coordinate system (x, y, z) as shown in Fig. 4. A current I flows in the straight wire conductor in the positive z -direction. A square-shaped one-turn coil with a side length of $2a$ is located with its center at $(\sqrt{2}a, 0, 0)$ and the side AB and side CD are aligned in parallel to the z -axis. As shown in Fig. 5, the coil can be tilted so that the angle between the x -axis and the unit normal vector \mathbf{n} of the coil plane is set to be θ . Note that the coil shown in Fig. 4 has the angle $\theta = \pi/2$. The coil consists of a wire with a negligible thickness and no current flows in the coil. Let the vacuum permeability be μ_0 . Answer the following questions.

- (1) Find the x -, y -, and z -components of the magnetic flux density at an arbitrary point $P(x, y, z)$.
- (2) Find the magnetic flux passing through the coil when the angle θ is 0 and $\pi/2$, respectively. Here, the magnetic flux density in the direction of the normal vector \mathbf{n} is defined to be positive.
- (3) Show that the vector potential \mathbf{A} generated by the current I is given as $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla\phi$, where
$$\mathbf{A}_0 = (0, 0, -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2})$$
and ϕ is an arbitrary scalar function of x , y and z .
- (4) Express the mutual inductance between the straight wire conductor and the coil as a function of θ . In derivation, you may use the vector potential considered in Question (3).

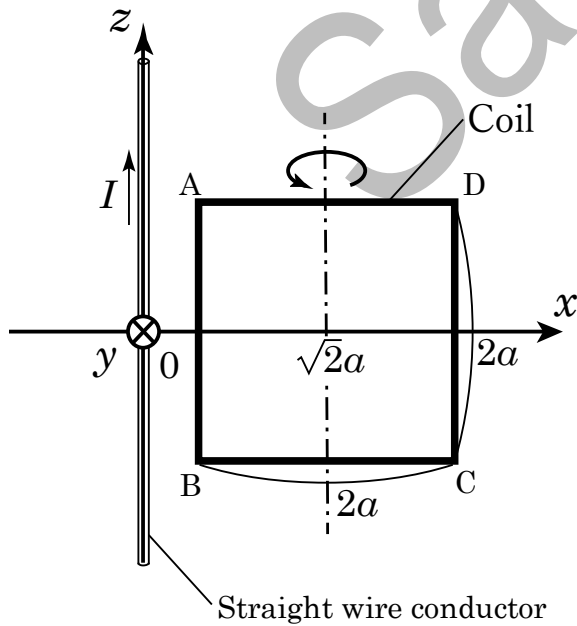


Fig. 4

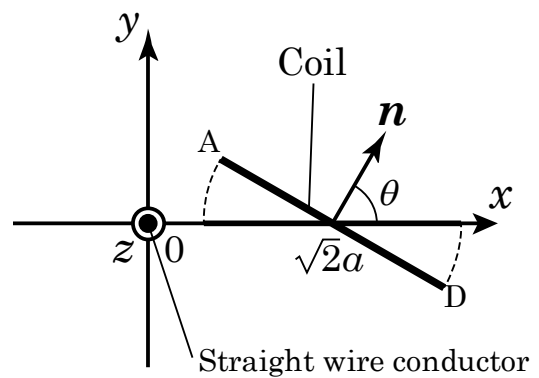


Fig. 5

Problem 2

I.

Answer the following questions on the circuit, with external terminals A and A', shown in Fig. 1. Here, the three resistors in the circuit have the same resistance R . C is a capacitance and L is an inductance. Voltages are represented with respect to the terminal A'.

At first, the switch S is closed. The two voltage sources in the circuit generate the same AC voltage with the amplitude E_0 , the angular frequency ω , and the phase angle $\phi = 0$. \dot{V}_p and \dot{V}_q are the complex voltage amplitudes (phasors) at the nodes p and q, respectively.

- (1) Write the simultaneous equations that \dot{V}_p and \dot{V}_q satisfy.
- (2) Assuming $R = 1\ \Omega$, $L = 1\ \text{H}$, $C = 1\ \text{F}$, $E_0 = 1\ \text{V}$, and $\omega = 1\ \text{rad/s}$, find \dot{V}_p and \dot{V}_q .
- (3) Under the conditions used in Question (2), an equivalent circuit of Fig. 1 can be represented by an AC voltage source with the complex voltage amplitude \dot{E}_1 and an impedance \dot{Z} , as shown in Fig. 2. Find \dot{E}_1 and \dot{Z} .

Now the two voltage sources in Fig. 1 generate the same DC voltage of 1 V. Assume the circuit parameters of $L = 1\ \text{H}$ and $R = 1\ \Omega$. The switch S has been open for a sufficiently long time and then the switch is closed. V_p and V_q are the voltages at the nodes p and q, respectively.

- (4) Write the simultaneous differential equations that V_p and V_q satisfy after closing the switch.
- (5) After closing the switch, voltages in the circuit exhibit transient variations. Find the range of C for making a damped oscillation occur in the voltage at the node p.

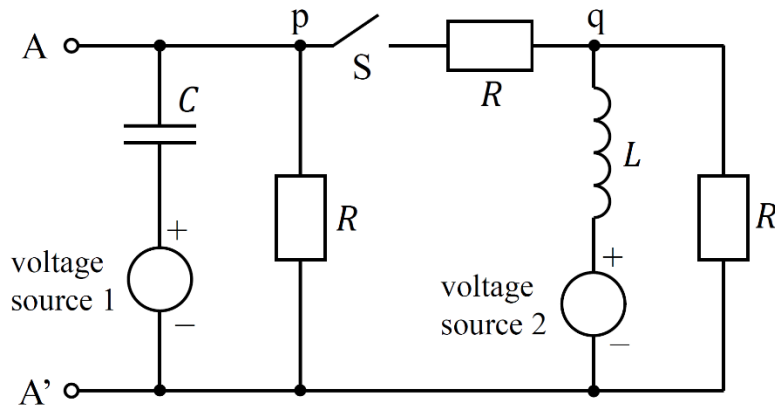


Fig. 1

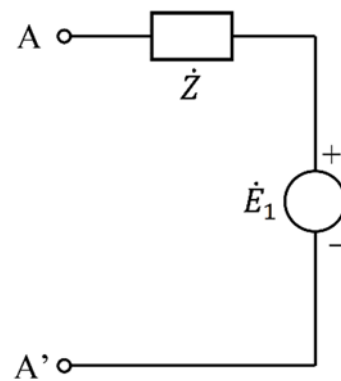


Fig. 2

II.

Answer the following questions on the circuit shown in Fig. 3. The n-type MOS transistors M_1 and M_2 have the same characteristics, and the small-signal equivalent circuit of each transistor is shown in Fig. 4. Here, g_m , r_o , and v are the transconductance, the drain resistance, and the input voltage of the MOS transistor, respectively. R_D and R_S are the resistances in the circuit. V_{DD} is a positive constant voltage. Note that v_1 , v_2 , v_3 , and v_4 represent small-signal components of the voltages V_1 , V_2 , V_3 , and V_4 , respectively.

- (1) The small-signal components v_{in} and v_{out} represent the difference of two input signals $v_1 - v_2$ and the difference of two output signals $v_3 - v_4$, respectively. Find the voltage amplification factor $A = v_{out}/v_{in}$.
- (2) The small-signal components v'_{in} and v'_{out} represent the sum of two input signals $v_1 + v_2$ and the sum of two output signals $v_3 + v_4$, respectively. Find the voltage amplification factor $A' = v'_{out}/v'_{in}$.
- (3) Describe in a few lines the function of the circuit in Fig. 3, based on the results of Questions (1) and (2). Assume $r_o \rightarrow \infty$ and $R_S \gg g_m^{-1}$.

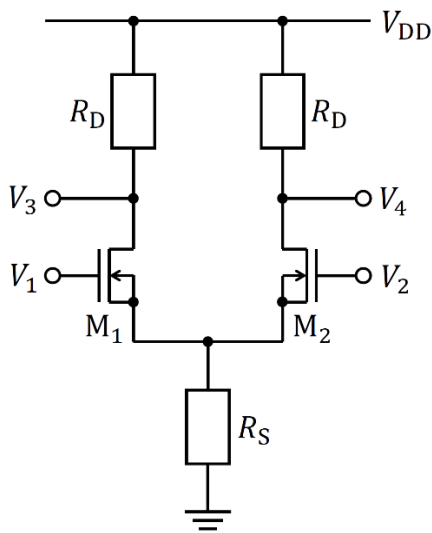


Fig. 3

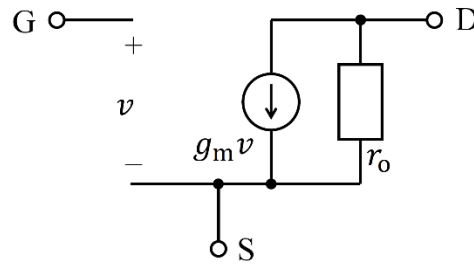
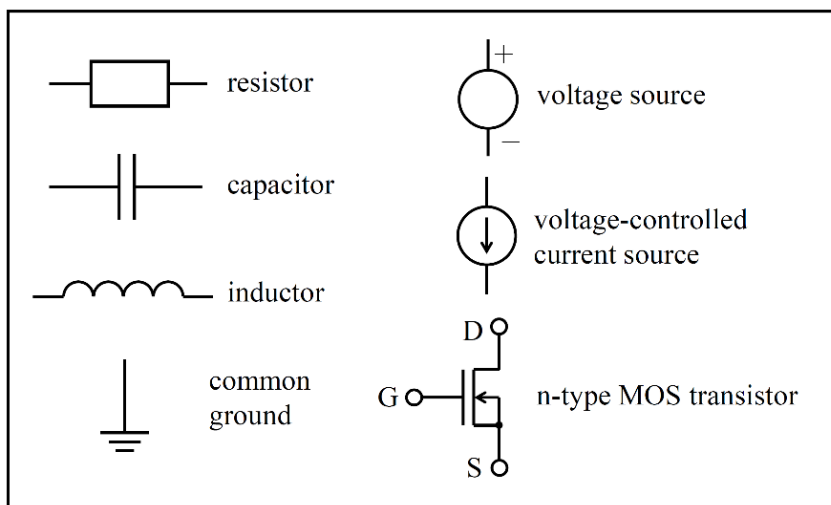


Fig. 4



Legend

Problem 3

I.

Answer the following questions on information theory. Let S be a Markov information source that has three states $\{s_0, s_1, s_2\}$. For each trial, S makes a transition to the next state according to the transition probability matrix T given by the following equation.

$$T = \begin{bmatrix} p(s_0|s_0) & p(s_1|s_0) & p(s_2|s_0) \\ p(s_0|s_1) & p(s_1|s_1) & p(s_2|s_1) \\ p(s_0|s_2) & p(s_1|s_2) & p(s_2|s_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

During each transition, S outputs the next state. You may use the following approximations when necessary:
 $\log_2 3 = 1.58$, $\log_2 5 = 2.32$, and $\log_2 7 = 2.81$.

- (1) Draw the state transition diagram of S .
- (2) Obtain the probabilities P_0 , P_1 , and P_2 of being in the states s_0 , s_1 , and s_2 , respectively, after a sufficient number of trials.
- (3) Obtain the overall entropy of S . Express the answer using P_0 , P_1 , and P_2 defined in Question (2).
- (4) Consider encoding two successive outputs of S into code words.
 - (4-i) Design a set of code words that maximizes the encoding efficiency.
 - (4-ii) Describe how to quantify the encoding efficiency of the set of code words designed in Question (4-i).

II.

Answer the following questions on signal processing. The Fourier transform $F(\omega)$ of a continuous-time signal $f(t)$ is given by

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (i)$$

where t ($-\infty < t < \infty$) is the time, ω is the angular frequency, and j is the imaginary unit. Its inverse Fourier transform is given by

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (ii)$$

The unit impulse function $\delta(t)$ is expressed as

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (iii)$$

The complex Fourier series of a periodic function $g(t)$ with a period T is expressed as

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, \quad \text{where } c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt \quad (n: \text{integer}). \quad (iv)$$

- (1) Let $X(\omega)$ be the Fourier transform of a real continuous-time signal $x(t)$. Show that its complex conjugate $X^*(\omega)$ is equal to $X(-\omega)$.
- (2) Obtain the Fourier transform of the unit impulse function.
- (3) Assume that a signal $x(t)$ is input to a low-pass filter and the output signal $y(t)$ is obtained, and that the low-pass filter has an ideal frequency response $H(\omega)$ defined by

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (v)$$

where ω_c (> 0) is the angular cutoff frequency. Obtain the output signal $y(t)$ assuming that $x(t)$ is the unit impulse. Also sketch an outline of $y(t)$, and indicate the value of $y(0)$ and value(s) of t where $y(t) = 0$.

- (4) A periodic impulse train $d(t)$ with a period of T (> 0) is expressed as

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (vi)$$

- (4-i) Express $d(t)$ in the form of the complex Fourier series.
- (4-ii) Show that $D(\omega)$ consists of a periodic impulse train, where $D(\omega)$ is the Fourier transform of $d(t)$.
- (5) Consider the sampling of a real continuous-time signal $x(t)$.
 - (5-i) Explain how to recover $x(t)$ from the sampled signals in a few lines. You may use Eqs. (iv) to (vi) if necessary.
 - (5-ii) Describe the condition to recover $x(t)$ from the sampled signals.

Problem 4

I.

Answer the following questions on logic circuits. Let us design a 2-bit comparator (CMP) that takes 2-bit positive input values $A = a_2a_1$ and $B = b_2b_1$. The CMP outputs c , where c is 1 when $A \geq B$, and 0 otherwise. The symbol of the 2-bit CMP is shown in Fig. 1.

- (1) Write the truth table of the 1-bit comparator CMP_1 that outputs c_1 as shown below, where a_1 and b_1 are the input values.

$$c_1 = \begin{cases} 1, & a_1 \geq b_1 \\ 0, & a_1 < b_1 \end{cases}$$

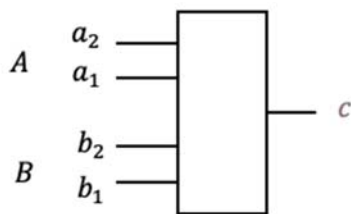
- (2) Write the truth table of the 1-bit comparator CMP_2 that outputs c_2 as shown below, where a_2 , b_2 , and c_1 are the input values. Note that c_1 is the output described in Question (1).

$$c_2 = \begin{cases} 1, & a_2 > b_2 \\ c_1, & a_2 = b_2 \\ 0, & a_2 < b_2 \end{cases}$$

- (3) You can design the 2-bit CMP by combining the circuits of CMP_1 and CMP_2 , described in Questions (1) and (2). Draw a circuit of the 2-bit CMP using the symbols shown in Fig. 2.

Next, let us design a sequential circuit MAX using the 2-bit CMP. When 2-bit positive values X_1, X_2, \dots are input sequentially, the MAX outputs the maximum value of the inputs. Design the MAX according to the following procedure.

- (4) Using the 2-bit CMP and a 2-bit D flip-flop (D-FF), design a circuit which stores $\max(A, B)$ in the 2-bit D-FF. Draw the circuit using the symbols shown in Figs. 1, 2, and 3.
- (5) You can construct the sequential circuit MAX by assigning X_i to the input A , and $\max(X_1, X_2, \dots, X_{i-1})$ to the input B of the circuit designed in Question (4). Draw the sequential circuit MAX using the symbols shown in Figs. 1, 2 and 3. You can assume that the initial input value of B is 00.



2-bit CMP

Fig. 1

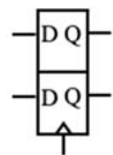


AND

OR

NOT

Fig. 2



2-bit D-FF

Fig. 3

II.

Answer the following questions on storage and management of data using hash tables. Let us consider a method of managing positive integers in a hash table `table[N]` with N elements. Here, a hash function $H(x) = \text{mod}(x, N)$ is used to indicate the index to store a positive integer x in the hash table. When positive integers have the same hash value, they are managed by the linked list of data structure node which is described in Program 1.

- (1) Show the contents of `table[N]`, when $N = 11$ and integers $\{15, 53, 22, 59, 15, 41, 20\}$ are stored using the hash function in sequence.
- (2) Program 2 describes `insert(x)` function that stores positive integer x in `table[N]`. Fill in the blanks of Program 2 to complete the program in C language.
- (3) Assume that `search(x)` function returns 1 if a given positive integer x is stored in `table[N]`, and it returns 0 otherwise. Write the `search(x)` function in C language.
- (4) Describe in a few lines the point(s) to pay attention to, when you write a function that deletes a positive integer x stored in `table[N]`.

```
/* Program 1 */
```

```
struct node {
    int value;
    struct node *next;
};
struct node *table[N];
```

```
/* Program 2 */
```

```
int H(int x) { return(x % N); }
void insert(int x) {
    struct node *new, *check;
```

```
    new = (struct node *)malloc(sizeof (struct node));
    new -> value = x;
    new -> next = NULL;
    check = table[H(x)];
```

```
}
```

Problem 5

I.

Consider an electron in a solid, for which the Schrödinger equation can be given by

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi, \quad (\text{i})$$

where t is the time, Ψ is the wave function of the electron, H is the Hamiltonian for the electron, i is the imaginary unit, and \hbar is the reduced Planck constant (given by the Planck constant divided by 2π). Answer the following questions. Here, $\omega = E/\hbar$, E is the energy of the electron, and k is the wavenumber of the electron (real number).

(1) Suppose $H = -A \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, where A is a real positive constant, and x is the position. Assume that the wave function is given by $\Psi = Ce^{i(kx - \omega t)}$, where C is a constant.

(1-i) Derive the dispersion relationship between E and k .

(1-ii) An electron in this solid can be expressed as a free electron with an effective mass m . Derive m . Note that the momentum of an electron can be given by $\hbar k$.

(1-iii) Consider a one-dimensional solid with a length L . Find the possible values of k in this solid. Here, assume a periodic boundary condition with a period L .

(1-iv) Using the result of Question (1-iii), derive the density of states of an electron at an energy E in this one-dimensional solid.

(2) Suppose $H = -A \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$, where A is a real positive constant, and x , y , and z are positions.

Assume that the wave function is given by $\Psi = Ce^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$, where C is a constant, and k_x , k_y , and k_z are the wavenumber components in the x -, y -, and z -direction, respectively. Derive the density of states of an electron at an energy E in this three-dimensional solid.

(3) Suppose $H = \begin{pmatrix} 0 & Bk \\ Bk & 0 \end{pmatrix}$, where B is a positive real number. In this case, the Schrödinger equation for an electron can be given by

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = H|\Psi\rangle, \quad (\text{ii})$$

where $|\Psi\rangle$ is the state vector of the electron.

(3-i) Suppose $|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$, where φ_1 and φ_2 are time-independent values. Derive the dispersion relationship between E and k .

(3-ii) Derive the propagation speed of this electron given by dE/dk , and discuss the difference between this electron and a free electron.

II.

Consider a silicon (Si) p-n junction biased with a voltage V as shown in Fig. 1. An n-type Si and a p-type Si are uniformly doped with phosphorus (P) and boron (B), respectively. The doping concentrations of the n-type Si and the p-type Si are N_D and N_A , respectively. The activation rate of the dopants is 100%. Here, x is the position, and the interface between the n-type Si and the p-type Si is located at $x = 0$. The edges of the depletion layer are at $x = -l_n$ and $x = l_p$. Here, k_B is the Boltzmann constant, q is the elementary charge, T is the temperature of the p-n junction, ϵ_s is the permittivity of Si, and n_i is the intrinsic carrier density of Si. Answer the following questions, assuming that T is at room temperature.

- (1) Draw the band diagram of the p-n junction when $V = 0$. The Fermi level E_F and the intrinsic Fermi level E_i must be indicated in the band diagram.
- (2) Derive the built-in potential of the p-n junction V_{bi} . Here, the electron density at the thermal equilibrium condition can be given by $n_i e^{(E_F - E_i)/k_B T}$, and the hole density by $n_i e^{(E_i - E_F)/k_B T}$.
- (3) Derive and sketch the electro-static potential and electric field in the depletion layer using l_n and l_p when $V = 0$. Here, the electric field can be assumed to be zero in the n-type and p-type neutral regions.
- (4) Derive the depletion layer width $W = l_n + l_p$ using V_{bi} when $V = 0$.
- (5) Draw the band diagram under a forward bias ($V > 0$), and explain the reason why a current increases exponentially with respect to V using the energy distribution of electrons in the conduction band.
- (6) Under a reverse bias ($V \ll 0$), there is a voltage range where a constant, non-zero current flows. Explain this reason using the distributions of minority carriers in the neutral regions.
- (7) Suppose crystal defects uniformly distribute in Si. Such crystal defects can be generation centers or recombination centers of electrons and holes. The effective recombination rate at the crystal defects per a unit volume is given by $\frac{np - n_i^2}{n + p + 2n_i} \cdot \frac{1}{\tau}$, where n is the electron density, p is the hole density, and τ is the carrier lifetime. Derive the generation current density using the depletion layer width W under a reverse bias.

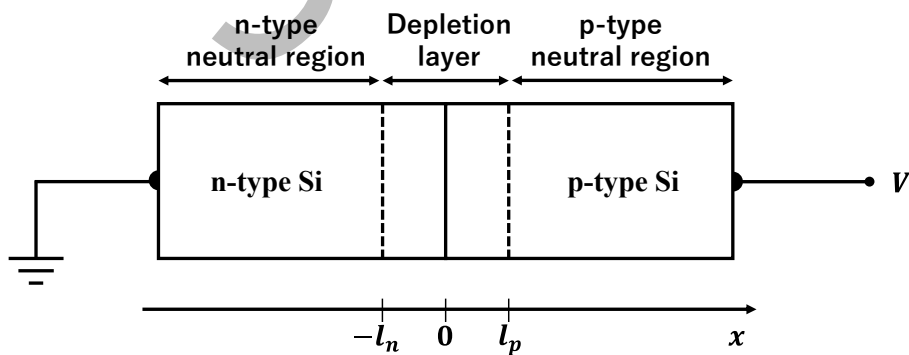


Fig. 1

Problem 6

I.

Consider a dynamic plant expressed by the following differential equation:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} = u(t) - 2y(t) ,$$

where $u(t)$ and $y(t)$ are the input and the output of the control system, respectively, and the corresponding Laplace transforms are denoted by $U(s)$ and $Y(s)$. Answer the following questions.

- (1) Find the transfer function of this plant $G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$.
- (2) Find the time response of $y(t)$ when the input $u(t)$ is a unit step function. Then find the final value of the output response.

Next, consider the feedback control system shown in Fig. 1. The transfer function of the controller is given by

$G_c(s) = 1$, and the transfer function of the plant is given by $G_p(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$, where $K > 0$, $T > 0$. Here

$R(s)$ and $C(s)$ denote the reference input and the controlled variable, respectively, which are expressed by the Laplace transformation of time signals $r(t)$ and $c(t)$.

- (3) Find the transfer function $G_1(s)$ of the whole control system in Fig. 1.
- (4) Find the natural angular frequency ω_n and the damping ratio ζ of the transfer function $G_1(s)$ obtained in Question (3).
- (5) Explain how the behavior of the system response to a unit step input changes as T is increased in the feedback control system in Fig. 1.
- (6) Figure 2 shows the control system where an inner feedback loop is added to the system in Fig. 1. Here, $H(s) = K_c s$, where $K_c > 0$. Find the transfer function $G_2(s)$ of the whole control system in Fig. 2.
- (7) Show that the stability of the system improves when K_c is sufficiently large in the feedback control system obtained in Question (6).

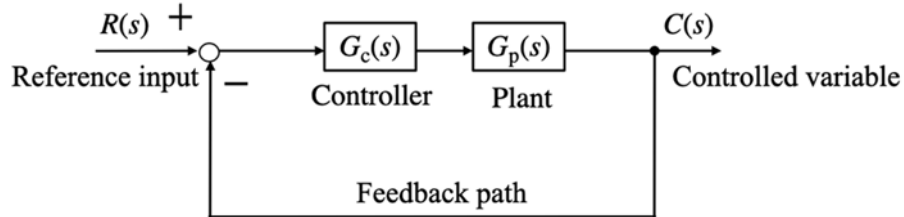


Fig. 1

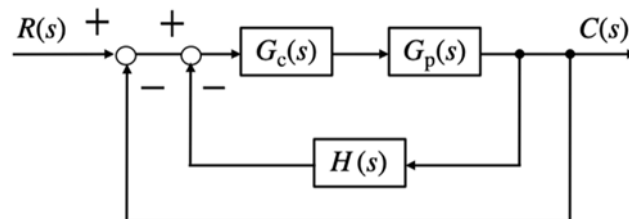


Fig. 2

II.

Consider an equivalent circuit of the DC shunt motor shown in Fig. 3 with a constant supply voltage V . Here, r_a is the armature resistance including the compensating winding resistance, r_f is the field resistance, v_b is the brush voltage drop, I is the input current, I_a is the armature current, I_f is the field current, and E is the induced electromotive force. We assume $V = 220$ [V], $r_a = 0.1$ [Ω], $r_f = 110$ [Ω], and $v_b = 3$ [V]. The magnetic saturation and the armature reaction are assumed to be negligible. Answer the following questions.

- (1) Find I_a and E when $I = 72$ [A].
- (2) Find the torque T_M of the motor, when $I = 72$ [A] and the rotation speed of the motor is 1,200 rpm.
- (3) Assume a case where r_f is doubled while keeping T_M obtained in Question (2). Show that I_a doubles.

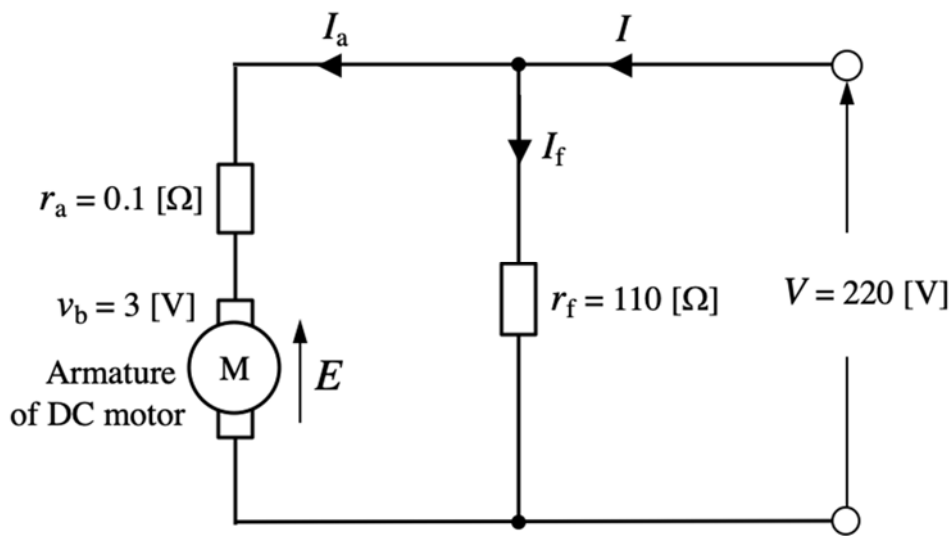


Fig. 3