平成30年度4月期入学

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学専攻

入学者選抜試験問題

【専門科目】

平成29年7月15日 13:00 – 14:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 専門科目は全部で5題の問題からなっており、全て選択問題である。この中から1題選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の若い順に1題のみ採点を行う。

(5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に選択した問題番号を記入し、解答に際して裏面を用いる場合は解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 次の各問のそれぞれに答えよ．なお $\mathbb{C}$ は複素数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体を表す．

問 1　X は $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間で，そのノルムを $\| \ \|_X$ と表す．また Y は $\mathbb{C}$ 上のノルム線型空間で，そのノルムを $\| \ \|_Y$ と表す．X を定義域とする線型作用素 $A : X \to Y$ が，ある正数 C_1, C_2 に対して

$$C_1 \|x\|_X \leq \|Ax\|_Y \leq C_2 \|x\|_X$$

を満たしているとき，次の設問に答えよ．

(1) 作用素 A の値域 $R(A)$ は Y の閉部分空間であることを示せ．

(2) $f \in R(A)$ に対して作用素方程式 $Ax = f$ の解 x は唯 1 つ存在し，さらに f から x への対応が連続であることを示せ．

問 2　i を虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ とする．$-\pi \leq x \leq \pi$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

により数列 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を定める．$f(x)$ が ($x = -\pi, \pi$ で) 周期境界条件を満たす実解析関数であるとき，ある正数 C と 1 よりも大きい正数 ρ が存在して

$$|c_n| \leq \frac{C}{\rho^{|n|}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

が成立することを示せ．なお $f(x)$ が $-\pi \leq x \leq \pi$ 上の周期境界条件を満たす実解析関数であるとは，$f(x)$ は $-\pi \leq x \leq \pi$ の各点において正の収束半径をもつ冪級数によって表され，さらに $x = -\pi, \pi$ における冪級数の係数が一致していることをいう．

2　次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　i を虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ とする．N を正の整数とし，区間 $[-\pi,\pi]$ 上で定義される $f(x)$ は $(2N+1)$ 個の定数 $\{c_n\}_{n=-N}^{N}$ を用いて

$$f(x)=\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

と表されている．この $f(x)$ の定積分に対して台形公式を適用する．すなわち $[-\pi,\pi]$ を $2N$ 等分して $h=\dfrac{\pi}{N}$, $x_n=nh$ $(-N\le n\le N)$ と定めて台形公式

$$I_N=h\sum_{n=-N}^{N-1} f(x_n)$$

を考える．このとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=I_N$$

が成立することを示せ．

問 2　常微分方程式の初期値問題

$$y''+xy'+y=1,\quad y(0)=y'(0)=0$$

を満たす未知関数 $y(x)$ を求めよ．

問 3　Γ は平面 $\mathbb{R}^2$ 上の滑らかな単純閉曲線で，Γ で囲まれる単連結領域を D とする．また平面上の点 (x_1,x_2) を x と表すことにする．Γ 上の連続関数 f を与えて，次の調和関数の Neumann 問題を考える：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0,\qquad x\in D,$$
$$\frac{\partial}{\partial n}u(x)=f(x),\qquad x\in\Gamma.$$

ここで $\dfrac{\partial}{\partial n}$ は Γ 上で定義される外向き法線微分である．この境界値問題の古典解 $u(x)$ $(x\in D\cup\Gamma)$ が存在するとき，次の設問に答えよ．なお $d\sigma$ は Γ 上の線素を表す．

(1) f は $\displaystyle\int_\Gamma f\,d\sigma=0$ を満たすことを示せ．

(2) $x=(x_1,x_2)\neq 0$ に対して $E(x)=\dfrac{1}{2\pi}\log\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ とする．このとき $x\in D$ に対して，

$$u(x)=-\int_\Gamma E(x-y)f(y)\,d\sigma_y+\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y}E(x-y)\,u(y)\,d\sigma_y$$

が成立することを示せ．

3

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1 $\mathbb{R}^3$ の点 $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標 $O-x_1,x_2,x_3$ を用いて $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$ と表す．このとき，積分

$$\int_{S^+} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\nabla f(\boldsymbol{x})}{|\nabla f(\boldsymbol{x})|}\, dS$$

の値を求めよ．ここに，$f(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2+x_3^2/4$，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(x_1,x_2,\sqrt{x_1^2+x_2^2}+2x_3)^T$，曲面 S^+ は $S^+=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \middle|\, f(\boldsymbol{x})=1,\, x_3>0\right\}$ であり，dS は S^+ の面素である．

問 2 C は反時計回りに向き付けられた複素平面内の滑らかな単純閉曲線で，C に囲まれた領域は内部に原点を含むものとする．このとき，次の積分の値を求めよ．

$$\int_C \left(\frac{1}{z}+\cos z+e^z\right)^3 dz$$

問 3 A を n 次の実正方行列，I を n 次の単位行列とする．$n\geq 2$ のとき，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ を与えて $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ を求める線形方程式

$$(I+A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \qquad (*)$$

を考える．$\mathbb{R}^n$ にあるノルムを定義したとき，対応する行列 A の作用素ノルム $||A||$ は $||A||<1$ を満たすものとする．このとき，次の問に答えよ．ただし，すべての計算は厳密に行われているものとする．

(1) 行列 $I+A$ は正則であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{x}^*\in\mathbb{R}^n$ を方程式 $(*)$ の唯一解であるとする．$\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$ を与え，さらに漸化式

$$\boldsymbol{x}_{i+1}=\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}_i \qquad i=0,1,2,\cdots \qquad (**)$$

を用いて $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}^n$ を定める．このとき，$\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}^*$ となることを示せ．

(3) (2) で定めた $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$ がある整数 $m\geq 0$ において初めて $\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{x}^*$ を満たすとき，$(**)$ は m 回の反復で解に至るということにする．行列 A が，$\boldsymbol{x}_0=0$ と全ての $\boldsymbol{b}$ に対して $(**)$ が有限回の反復で解に至るという性質を有しているとき，次の設問に答えよ．

(3-1) 行列 A の固有値の絶対値の最大の値 (A のスペクトル半径) を求めよ．

(3-2) 全ての $\boldsymbol{b}$ と全ての $\boldsymbol{x}_0$ に対して，$(**)$ は有限回の反復で解に至ることを示せ．

(3-3) ある固定した $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{x}_0$ に対して $(**)$ が m 回の反復で解に至るとき，$m\leq n$ であることを示せ．さらに，$m=n$ となるような A，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}_0$，および，この A に対して作用素ノルムが $||A||<1$ となるような $\mathbb{R}^n$ のノルムの例を 1 組示せ．

4　次の各問のそれぞれに答えよ．

問1

ある系が M 個の状態のどれか1つの状態にあるものとし，状態 i $(i = 1, 2, \cdots, M)$ をとる確率を p_i，状態 i のエネルギーを e_i とする．この系のエントロピー S は

$$S = -\sum_{j=1}^{M} p_j \log p_j$$

で与えられるものとする．この系の平均エネルギー E が与えられているとき，S を最大にする p_i を求めよ．

問2

相互作用がない N 個の分子からなる系が，絶対温度 T の熱平衡状態にある．各分子は3つの微視的状態のいずれかの状態にあり，その微視的状態のうち少なくとも2つの状態のエネルギーは縮退していると仮定する．縮退した微視的状態のエネルギーの値を0，残りの1つの微視的状態のエネルギーを ϵ とする．ボルツマン定数を k として，以下の問に答えよ．

(1) 内部エネルギーを E，分配関数を Z とすると，この系に限らず一般の系において

$$E = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\beta = \dfrac{1}{kT}$ とする．

(2) この系の内部エネルギー E を求めよ．また，絶対温度 T が0の極限における E を求めよ．

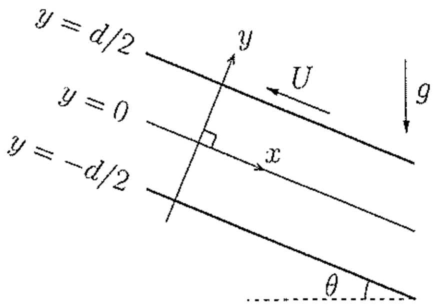
(3) この系のエントロピー S を求めよ．

(4) 絶対温度 T が0の極限における，この系のエントロピー S の値を求めよ．また，$\epsilon > 0$，$\epsilon = 0$ および $\epsilon < 0$ の場合に関する結果を比較して，それぞれの結果の物理的な意味を説明せよ．

5

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1



右図のように水平面から角度θだけ傾いた2枚の無限に広い平行平板（間隙d）の間を層状に流れる非圧縮性粘性流体を考える（$0 < \theta < \pi/2$）．図のように，x軸を平板に平行に，y軸を平板に垂直にとり，下側の平板を$y = -d/2$，上側の平板を$y = d/2$とする．下側の平板は静止しており，上側の平板は一定の速さ$U(> 0)$でx軸の負の方向に動いている．流体の運動はx軸方向に流れる2次元定常流で，流体の圧力はx方向に変化しないものとする．流体の密度をρ，粘性係数をμ，重力加速度の大きさをgとして以下の問に答えよ．

(1) 下の平板上での流体の圧力がp_0であるとき，上の平板の位置における流体の圧力を求めよ．

(2) 平板間の流体の流速分布を求めよ．

(3) 平板間を流れる流体の流量が0となるθが存在するために，U，d，μ，ρ，gが満たすべき条件を求めよ．

(4) 平板間を流れる流体の流量が0となるとき，上側の平板において流体が平板に及ぼす接線応力をU，d，μ，ρ，gのうち必要なものを用いて表わせ．

問 2

2次元デカルト座標系 O-xy において，原点$(x, y) = (0, 0)$を除く点(x, y)における流速場(u, v)が次式で与えられるような2次元定常流を考える．

$$u = \alpha\frac{3x^2y - y^3}{r^6}, \quad v = \alpha\frac{3xy^2 - x^3}{r^6}.$$

ここでαは定数，$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) xy平面上の点$(x, y) \neq (0, 0)$における流体粒子（流体の微小部分）の加速度のx方向成分を求めよ．

(2) xy平面上の点$(x, y) \neq (0, 0)$における渦度を求めよ．

(3) xy平面内において流線を表す式を求め，その概形を図に描け．ただし原点$(x, y) = (0, 0)$は除く．また，$\alpha > 0$のときの流速の向きを図中に示せ．