受験番号 Examinee number ________________

令和 4 年度 東京大学大学院工学系研究科 技術経営戦略学専攻 入学試験

専門試験（数理的及び論理的思考能力を見るための問題）
セッション 1

令和 3 年 8 月 30 日（月）13:30〜14:10

試験時間 40 分

2022 Entrance Examination, Department of Technology Management for Innovation,
Graduate School of Engineering, The University of Tokyo

Specialized Subjects (Problems designed to test mathematical and logical ability) Session 1

13:30 – 14:10, Monday, August 30, 2021

Answer Time: 40 minutes

配布物 Distributions

1. 本冊子（1 冊） This booklet (1 piece)
2. 解答用紙（4 枚） Answer Sheets (4 sheets)
3. 草稿用紙（4 枚） Draft Sheets (4 sheets)

注意事項 General instructions

○ 解答開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。Do not open this booklet until the start of the examination has been announced.

○ 上記配布物がすべて手元にあるか確認し，不足がある場合には申し出ること。Check that the distributions above are on your desktop. Notify us if any of them is missing.

○ 落丁，乱丁，印刷不鮮明があった場合には申し出ること。Notify us if there are missing, disordered or unclearly printed pages.

○ 解答用紙および草稿用紙の裏面の使用は禁止する。Do not use the back sides of the Answer Sheets or the Draft Sheets.

○ 問題冊子（本冊子），すべての解答用紙およびすべての草稿用紙の上方の指定された箇所に，受験番号を忘れず記入すること。また，各解答用紙および各草稿用紙の指定された箇所に，セッション番号と問題番号を忘れずに記入すること。Fill your examinee number in the designated places at the top of the booklet, all the Answer Sheets and the Draft Sheets. Also, Fill the session number and problem number in the designated places on each Answer Sheet and Draft Sheet.

○ 日本語または英語で解答すること。Answers must be written in Japanese or English.

○ 全ての配布物は持ち帰らないこと。Do not take home any distributed items.

I. 以下の微分方程式に関する問いに答えよ。

$$\frac{dy}{dx} - x^2 y + e^{-x^3} y^4 = 0 \qquad (1)$$

1. $u = y^{-3}$とおき，式(1)をuの一階線形微分方程式として表せ。

2. 問 I.1 の結果を用いて式(1)の一般解を求めよ。

I. Answer the following questions about the differential equation:

$$\frac{dy}{dx} - x^2 y + e^{-x^3} y^4 = 0 \qquad (1)$$

1. Using $u = y^{-3}$, express Eq. (1) as a linear first-order differential equation of u.

2. Find the general solution of Eq. (1), using the solution of Question I.1.

II.　以下の行列Aに関する問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

1.　行列Aの全ての固有値と，これらに対応する固有ベクトルを求めよ。

2.　問 II.1 の結果を用いて A^nを求めよ

II.　Answer the following questions about matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

1. Obtain all eigenvalues of the matrix A and their corresponding eigenvectors.

2. Calculate A^n, using the solution of Question II.1.

III.　以下の問いに答えよ。

1.　次の積分の値を求めよ。

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy \qquad (3)$$

ただし，実変数rとθを用いて，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\ (0 \le r < \infty, 0 \le \theta < 2\pi)$と置換してもよい。

2.　問 III.1 で得た結果を用いて，以下の積分の値を求めよ。

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-ax^2)\,dx \qquad (4)$$

ただし，aは正の定数とする。

III.　Answer the following questions.

1.　Find the value of the following integral:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy \qquad (3)$$

Note that you may substitute $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\ (0 \le r < \infty, 0 \le \theta < 2\pi)$ with real variables r and θ.

2.　Find the value of the following integral by using the solution of Question III.1:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-ax^2)\,dx \qquad (4)$$

Note that a is a positive constant.

IV. 人がウイルスに感染しているかどうかの検査を考える。当該ウイルスの市中の感染者の割合xについて，$x = 0.001$であると仮定し，市中のある人が当該ウイルスに感染している事前確率はxに等しいとする。また，感染者が陽性と判定される確率をy，感染していない人が陽性と誤判定される確率をzとする。以下の問いに答えよ。

1. $y = 0.8$, $\mathrm{z} = 0.001$とする。ある人がこの検査で陽性と判定された場合に，実際に当該ウイルスに感染している確率を求めよ。

2. yとzの間に，$z = 0.001y^2 + 0.0005\ \ (0 \leq y \leq 1)$の関係が成り立つものとする。このとき，ある人が検査で陽性と判定された場合，実際に当該ウイルスに感染している確率が最大となるyを求めよ。

IV. Consider a test whether a person is infected with a virus or not. Assume that a rate x of people infected with the virus in the community is $x = 0.001$ and a prior probability that a person in the community is infected with the virus is equal to x. In addition, y is a probability that an infected person tests positive and z is a probability that a non-infected person erroneously tests positive. Answer the following questions.

1. Assume that $y = 0.8$ and $\mathrm{z} = 0.001$. Find a probability that a person is actually infected with the virus when the person tests positive.

2. Let the relationship between y and z be $z = 0.001y^2 + 0.0005\ \ (0 \leq y \leq 1)$. Find y that maximizes the probability that a person is actually infected with the virus when the person tests positive.