

京都大学大学院情報学研究科  
通信情報システム専攻 修士課程入学選抜試験問題  
(2020年度10月期入学・2021年度4月期入学)

Admissions for October 2020 and for April 2021

Entrance Examination for Master's Program

Department of Communications and Computer Engineering

Graduate School of Informatics, Kyoto University

2020年8月1日 13:00 – 16:00

August 1, 2020 13:00 - 16:00

専門基礎A

**Problem Set A**

注意 (NOTES)

1. 解答開始の合図があるまで中を見てはいけない。
2. これは「**専門基礎A**」の問題用紙で、表紙共に 16 枚 ある。解答開始の合図があった後、枚数を確認、落丁または不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
3. 問題は9問(A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, A-9)ある。**4問を選択して解答すること。** 答案用紙の問題番号欄に問題番号を記入すること。
4. 解答は問題ごとに答案用紙1枚を使うこと。答案用紙1枚に2問以上の解答もしくは1問の解答を2枚以上の答案用紙に書いた場合は無効にすることがある。なお、必要な場合「裏に続く」と明記した上で裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙は4枚綴じたまま使用し、切り離さないこと。
6. 答案用紙の綴じ込みがはずれた場合は、直ちに申し出ること。
7. 解答は日本語または英語で行うこと。

1. Do not open the pages before a call for starting.
2. This is the “**Problem Set A**” in 16 pages including this front cover.  
After the call of starting, check all pages are in order and notify proctors (professors) immediately if missing pages or with unclear printings are found.
3. **Answer 4 of the following 9 questions;** A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, and A-9. State the Question Numbers you choose on the Answer Sheet.
4. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used, stating “Over” at the end of the page. Note that in case two or more questions are answered in one sheet or two or more sheets are used for one question, they may be regarded as no answers.
5. Do not separate the pages of answer sheets; keep them bound.
6. Notify proctors (professors) immediately if the pages are separated for some reason.
7. Answer the questions either in Japanese or English.

## 専門基礎 A

**A-1**, **A-2**, **A-3**, **A-4**, **A-5**, **A-6**, **A-7**, **A-8**, **A-9** の9問から4問を選択して解答せよ。

### Problem Set A

Choose and answer 4 questions out of **A-1**, **A-2**, **A-3**, **A-4**, **A-5**, **A-6**, **A-7**, **A-8**, and **A-9**.

#### **A-1**

下記のすべての問に答えよ。

Answer all the following questions.

(1) 下記の問に答えよ。

Answer the following questions.

(a) 次の極限を求めよ。

Find the following limit.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

(b) 次の極限を求めよ。

Find the following limit.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

(c) 次の極方程式で表される直交座標系での曲線を図示せよ。

Sketch a graph of the following polar equation of a curve in an orthogonal coordinate system:

$$r = 1 + \cos \theta$$

(d) 問 (c) の曲線で囲まれる面積を求めよ。

Find the area enclosed by the curve in Question (c).

(2) 下記の問に答えよ。ただし、行列  $A_3$ ,  $A_4$  は次式で与えられる。

Answer the following questions. Matrices  $A_3$  and  $A_4$  are given as follows:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{bmatrix}$$

(a)  $A_3^{-1}$  を求めよ。

Find  $A_3^{-1}$ .

(b) 行列式  $\det(A_4)$  を求めよ。因数分解した形にすること。

Find determinant  $\det(A_4)$  in a factorized form.

**A-2**

下記のすべての問に答えよ。

Answer all the following questions.

- (1) フーリエ余弦変換は次式で定義される。

Note that the Fourier cosine transform of a function  $f(t)$  is defined as

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$$

また、その逆変換は次式で与えられる。

The inverse Fourier cosine transform is given by

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega t \, d\omega$$

次の方程式を満たす関数  $f(t)$  を求めよ。

Find a function  $f(t)$  that satisfies the following equation.

$$\int_0^{\infty} f(t) \cos xt \, dt = \begin{cases} 1-x & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

- (2) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

Find the general solution of the following differential equation.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x}$$

- (3) 留数定理を用いて次の積分  $I$  を求めよ。

Evaluate the following integral  $I$  by using the residue theorem.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(3 + \cos \theta)^2} d\theta$$

# A-3

下記のすべての問に答えよ。ただし、導体、電荷、コイル等は全て真空中に置かれているものとし、真空中の誘電率、透磁率はそれぞれ  $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$  とする。

Answer all the following questions. All materials in the questions such as conductors, charges, and coils are placed in vacuum. The permittivity and permeability of vacuum are  $\epsilon_0$  and  $\mu_0$ , respectively.

- (1) 半径  $a$ 、長さ  $2L$  の円筒状導体 X が図 (a) のように置かれている。導体 X の中点 O から距離  $r$  の位置の点を P とする。OP は導体 X に垂直である。

Consider a cylindrical conductor X with a radius of  $a$  and a length of  $2L$  placed as shown in Figure (a). The point P is located at a distance  $r$  from the middle point O of the conductor X. OP is orthogonal to the conductor X.

- (a) 導体 X の半径  $a$  は点 P までの距離  $r$  に比べて無視できるとし、一様な線密度  $\lambda$  の電荷を導体 X に分布させたとする。原点 O から距離  $s$  の位置にある微小区間  $ds$  上の電荷要素  $\lambda ds$  が作る、点 P における電位を求めよ。

Assume that the radius  $a$  of the conductor X can be ignored compared to the distance  $r$ . The electric charge is distributed to the conductor X with uniform charge density  $\lambda$  per unit length. Find the electric potential at the point P due to the electric charge segment  $\lambda ds$  at a distance  $s$  from the origin O.

- (b) 問 (a) の導体 X 全体が作る、点 P における電位を求めよ。

Find the electric potential at the point P due to the whole conductor X in Question (a).

- (c) 問 (a) の導体 X 全体が作る、点 P における電界を求めよ。

Find the electric field at the point P due to the whole conductor X in Question (a).

- (d)  $L$  が  $r$  に対して十分長く、 $r/L = 0$  と近似できる場合、問 (a) の導体 X 全体が作る、点 P における電界を求めよ。

Find the electric field at the point P due to the whole conductor X in Question (a) when  $L$  is sufficiently long compared to  $r$  so that  $r/L$  can be approximated to be 0.

- (e) 図 (b) のように、X と同じ形状の円筒状導体 Y を、その中点が点 P を通り X と平行となるように置いた。この 2 つの導体間の静電容量を求めよ。ただし、 $a \ll r$  であり、一方の導体の電荷はもう一方の導体の電荷分布に影響を与えないと仮定し、導体を作る電界は問 (d) で求めた式で与えられるとする。

A cylindrical conductor Y that has the same shape as the conductor X is placed parallel to the conductor X as shown in Figure (b), where the middle point of Y coincides with the point P. Find the electrostatic capacity between the two conductors. Assuming  $a \ll r$ , one conductor does not affect the charge distribution of the other conductor, so that the electric field due to the conductors can be given by the equation obtained in Question (d).

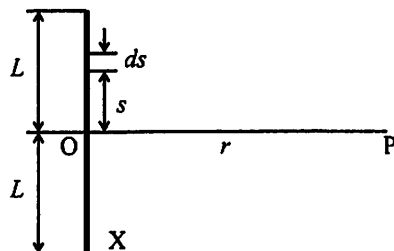


図 (a)  
Figure (a)

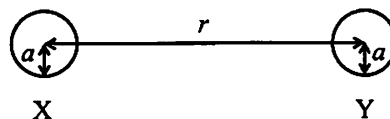


図 (b)  
Figure (b)

- (2) 断面の半径  $d$ 、単位長さ当たりの巻数  $n$  の無限に長いソレノイドがあり、電流  $I$  が流れている。  
Consider an infinite solenoid of radius  $d$  and  $n$  turns per unit length, where electric current  $I$  flows.

- (a) アンペールの周回積分の法則を用いてソレノイド内部の磁界の大きさを求め、ソレノイド内部の磁界の大きさが一様であることを示せ。ただし、ソレノイド外部の磁場が0であることは既知としてよい。

Using Ampère's circuital law, find the magnitude of the magnetic field in the solenoid and show that the magnitude of the magnetic field inside the solenoid is constant. Assume the fact that the magnetic field outside the solenoid is 0.

- (b) ソレノイドの単位長さ当たりの自己インダクタンスを求めよ。

Find the self-inductance of the solenoid per unit length.

- (c) ソレノイドの内部に、半径  $a$  ( $a < d$ )、巻数1の円形コイルを、中心軸が一致するように置いた。ソレノイドと円形コイルの相互インダクタンスを求めよ。

Put a circular one-turn coil of radius  $a$  ( $a < d$ ) inside the solenoid so that the central axis of the coil coincides with that of the solenoid. Find the mutual inductance between the solenoid and the coil.

**A-4**

下記のすべての問に答えよ。

(English translation is given on the next page.)

(1) 図(a)に示す交流回路について、以下の問に答えよ。

- (a) 回路の a-b から左側部分の等価回路を図(b)に示す。等価電圧源 $V_s$ とインピーダンス $Z_s$ を求めよ。
- (b)  $Z_s$ が純抵抗となる条件を求めよ。
- (c) 負荷抵抗 $R_L$ における消費電力を最大にさせるための条件を示せ。

(2) 図(c)に示す理想的な演算増幅器を用いた回路について、以下の問に答えよ。(回路の入力電圧と電流を、それぞれ $V_1, I_1$ とする。  $V_2, V_3, V_4, V_5$ は、それぞれ図中の節点電圧である。  $Z_3$ と $Z_5$ を流れる電流を、それぞれ $I_3, I_5$ とする。)

- (a)  $V_3$ と $V_5$ を求めよ。
- (b)  $I_3$ と $I_5$ を求めよ。
- (c)  $V_1/I_1$ を求めよ。
- (d)  $Z_1$ から $Z_5$ のひとつをキャパシタとしその他を抵抗とすれば、回路のインピーダンスが純インダクタンスとなる。どの素子をキャパシタとすべきか理由と共に示せ。

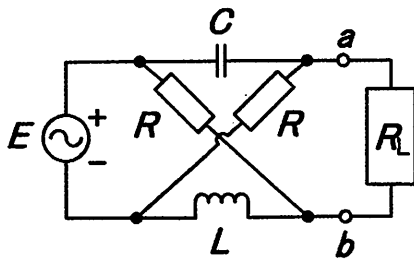


図 (a)

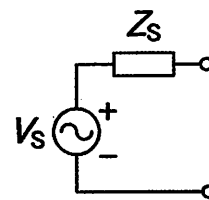


図 (b)

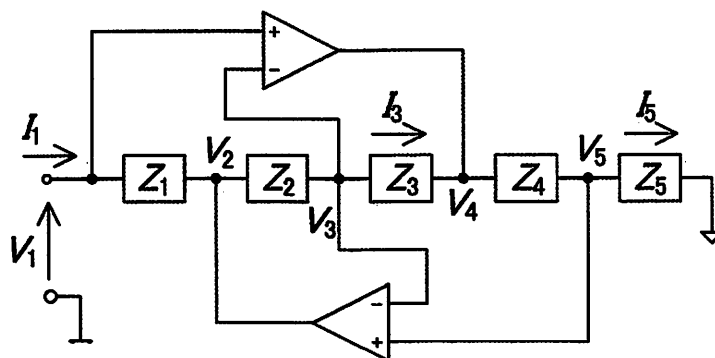


図 (c)

Answer all the following questions.

(1) For the AC circuit shown in Figure (a), answer the following questions.

- Equivalent circuit of left part of a-b of the circuit is shown in Figure (b). Find the equivalent voltage source  $V_s$  and impedance  $Z_s$ .
- Show the condition to make  $Z_s$  pure resistance.
- Show the condition to make power consumption at the load resistance  $R_L$  maximum.

(2) For the circuit with ideal operational amplifiers shown in Figure (c), answer the following questions. (Input voltage and current are  $V_1$  and  $I_1$ , respectively.  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$  and  $V_5$  are node voltages shown in the figure. Currents flowing through  $Z_3$  and  $Z_5$  are  $I_3$  and  $I_5$ , respectively.)

- Find  $V_3$  and  $V_5$ .
- Find  $I_3$  and  $I_5$ .
- Find  $V_1/I_1$ .
- By substituting one of elements  $Z_1—Z_5$  as a capacitor and the others as resistors, the impedance of the circuit becomes pure inductance. Show which element should be the capacitor. Also, explain the reason.

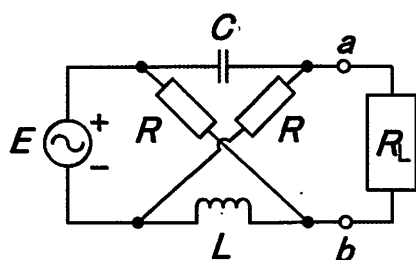


Figure (a)

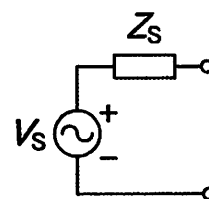


Figure (b)

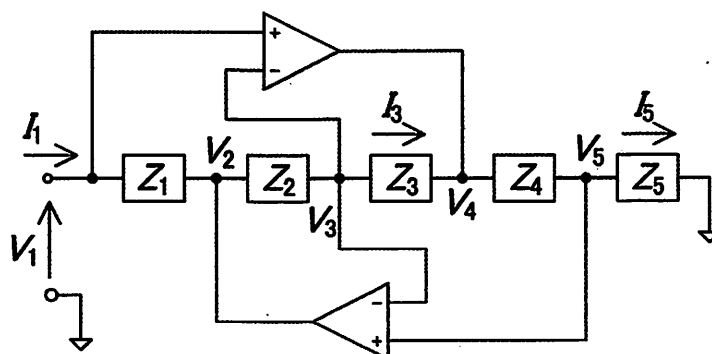


Figure (c)

**A-5**

下記のすべての問に答えよ。(English translation is given on the next page.)

- (1)  $S_A$  と  $S_B$  は独立で記憶のない定常情報源であり,  $S_A$  は情報源記号 0, 1 をそれぞれ 0.7, 0.3 の確率で,  $S_B$  は 0, 1 をそれぞれ 0.6, 0.4 の確率で発生させる. 以下の問に答えよ. ただし,  $\log_2 3 = 1.6$ ,  $\log_2 5 = 2.3$ ,  $\log_2 7 = 2.8$  とせよ.
- (a)  $S_A$  のエントロピーを算出せよ.
  - (b)  $S_A$  の  $n$  次の拡大情報源を考える.  $n = 2$  としたときの拡大情報源に対し 2 元ハフマン符号化を施せ. また, そのときの情報源記号 1 つあたりの平均符号長を算出せよ.
  - (c) 問 (a) のエントロピーと問 (b) の情報源記号 1 つあたりの平均符号長との大小関係がどうなるべきか, 理由とともに答えよ.
  - (d) 問 (b) の  $n$  を大きくするほど情報源記号 1 つあたりの平均符号長は増加するか, あるいは減少するか, 理由とともに答えよ.
  - (e) 情報源  $S_X$  は 2 つの状態をもち, 状態  $s_A$  では  $S_A$  に従い, 状態  $s_B$  では  $S_B$  に従って情報源記号を発生させる.  $S_X$  が 1 を発生させると, その状態が遷移する.  $S_X$  の状態遷移図を描け.
  - (f) 問 (e) の  $S_X$  の定常分布を求めよ.
  - (g) 問 (e) の  $S_X$  のエントロピーを算出せよ. 小数第 2 位を切り捨てること.
- (2) 下記の通信路符号化に関する問に答えよ. ただし,  $C$  を生成多項式が  $G(x) = x^4 + x + 1$  である符号長 15 の 2 元巡回符号とする.
- (a) 多項式表現  $x^{10} + x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  で表される符号語は,  $C$  の符号語か否か判定せよ.
  - (b) 多項式表現  $x^5 + x^3 + x$  の情報ビット列が与えられた場合の符号語の多項式表現を組織符号の形で示せ.
  - (c)  $C$  の最小距離を求めよ.
  - (d)  $C$  によって訂正される最大誤りビット数を求めよ.
  - (e) ビット誤り率  $p$  である記憶のない 2 元対称通信路を介した,  $C$  を用いた通信を考える. 訂正可能な誤りは全て訂正する場合の復号誤り率を求めよ.
  - (f) 通信路符号化定理を述べよ.



Answer all the following questions.

- (1)  $S_A$  and  $S_B$  are independent and stationary memoryless information sources.  $S_A$  generates information symbols 0 and 1 with probabilities 0.7 and 0.3, respectively, while  $S_B$  generates 0 and 1 with probabilities 0.6 and 0.4, respectively. Answer the following questions.  $\log_2 3 = 1.6$ ,  $\log_2 5 = 2.3$ , and  $\log_2 7 = 2.8$  may be used.
- (a) Find the value of the entropy of  $S_A$ .
  - (b) Consider the  $n$ th extension of  $S_A$ . Find a binary Huffman code for the second extension ( $n = 2$ ) of  $S_A$  and the expected codeword length per symbol.
  - (c) Compare the entropy in Question (a) and the expected codeword length per symbol in Question (b). Explain which should be larger and the reason.
  - (d) Explain whether the expected codeword length per symbol in Question (b) increases or decreases as  $n$  in Question (b) increases and the reason.
  - (e) An information source  $S_X$  has two states and generates information symbols by following  $S_A$  and  $S_B$  when its state is  $s_A$  and  $s_B$ , respectively.  $S_X$  transits from a state to the other state when it generates 1. Draw the state diagram of  $S_X$ .
  - (f) Find the stationary distribution of  $S_X$  in Question (e).
  - (g) Find the value of the entropy of  $S_X$  in Question (e). Round down to one decimal place.
- (2) Answer the following questions related to channel coding. Let  $C$  be the binary cyclic code of length 15 that has generator polynomial  $G(x) = x^4 + x + 1$ .
- (a) Determine whether  $x^{10} + x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  is a codeword polynomial of  $C$  or not.
  - (b) Find the codeword polynomial for the message polynomial  $x^5 + x^3 + x$  in a systematic form.
  - (c) Find the minimum distance of  $C$ .
  - (d) Find the maximum number of error bits corrected by  $C$ .
  - (e) Consider communications with  $C$  through a memoryless binary symmetric channel with crossover probability  $p$ . Evaluate the probability of decoding failure assuming that any correctable errors are corrected.
  - (f) Explain the channel coding theorem.

以下の問(1)~(4)に全て答えよ。

Answer all the following questions (1)-(4).

- (1) 整数値を格納する線形リスト構造をコンピュータの主記憶上で操作する場合に、配列を用いる実装方法と、ポインタによる片方向の連結リストを用いる実装方法の2通りを考える。両者についてそれぞれ、以下に示す操作に必要な計算ステップ数を  $O$ -記法で答えよ。リスト長を  $n$  とする。

For manipulating a linear list structure of integer numbers in the main memory of a computer, let us consider the two implementation methods: an array structure, and one-way linked list using pointers. For the two methods, answer the number of computation steps required for executing the following operations in  $O$ -notation. Let  $n$  be the length of the list.

INSERT( $x, p$ )

ポインタ  $p$  が指しているセルの直後に要素  $x$  を挿入する。

Insert an element  $x$  at just after the cell located by the pointer  $p$ .

DELETE( $p$ )

ポインタ  $p$  が指しているセルの次の要素を (もしあれば) 削除する。

Delete an element (if exists) at the next cell of the cell located by the pointer  $p$ .

FIND( $i$ )

先頭から  $i$  番目のセルの値を返す。

Return the value of the  $i$ -th cell from the head.

NEXT( $p$ )

ポインタ  $p$  が指しているセルの次のセルの位置を返す。(ない場合は null を返す。)

Return the location of the next cell of the cell located by the pointer  $p$ . (Return null if not exist.)

PREVIOUS( $p$ )

ポインタ  $p$  が指しているセルの前のセルの位置を返す。(ない場合は null を返す。)

Return the location of the previous cell of the cell located by the pointer  $p$ . (Return null if not exist.)

- (2) 次の疑似コードが示す手続き something について、以下の問に答えよ。

Answer the following questions on the procedure "something" shown by the following pseudo code.

```
something(int a, int b) {
    if(b == 0) return a;
    int r = a;
    while(r >= b) r = r - b;
    return something(b, r);
}
```

- (a)  $a = 12, b = 15$  を引数として与えたときに得られる返り値を求めよ。

Answer the return value of this procedure for the given arguments  $a = 12$  and  $b = 15$ .

- (b) この手続きは、正整数の組を入力したときに何を計算するものであるか、入力と出力との間の算術的な関係を述べよ。

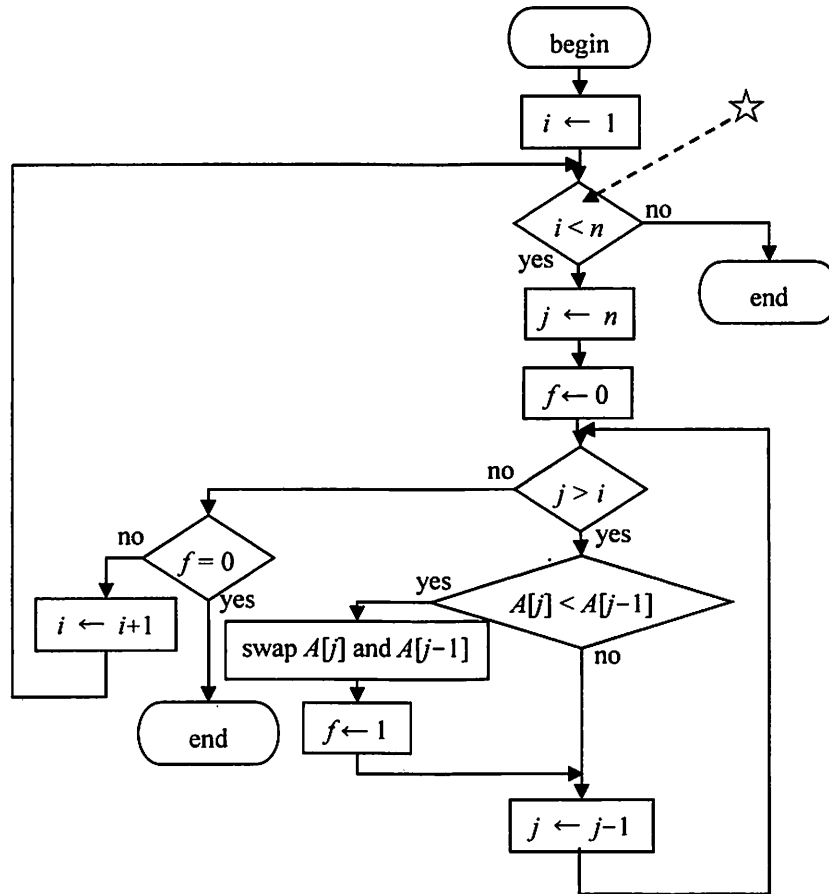
What is calculated by this procedure if a pair of positive integers is input? Answer the arithmetic relation between the input and the output.

- (c) 入力の少なくとも一方が 0 または負の整数であった場合、どんな動作が起こるかを説明せよ。

Explain the behavior of this procedure if at least one of the input integers is less than or equal to zero.

- (3) 下記のフローチャートは配列  $A[1] \sim A[n]$  に格納された数値データを操作するアルゴリズムを表している。以下の問に答えよ。

The following flowchart represents an algorithm manipulating a given array  $A[1] \dots A[n]$ , each of which stores a numerical data. Answer the following questions.



- (a) このアルゴリズムは配列  $A[1] \dots A[n]$  の内容を最終的にどのように変化させるかを説明せよ。  
 Explain how the contents of the array  $A[1] \dots A[n]$  will be changed eventually by this algorithm.
- (b)  $n = 10$  のとき、☆印で示したブロックは最大で何回通るか。  
 When  $n = 10$ , how many times will the ☆-marked block be visited at most?
- (c)  $n = 6$  で、 $A[1] \dots A[6]$  の初期値がそれぞれ 4, 1, 7, 5, 8, 9 のとき、☆印のブロックを通るたびに、 $A[1] \dots A[6]$  の値はどのように変化しているか。順を追って記せ。  
 When  $n = 6$  and the initial values of  $A[1] \dots A[6]$  are 4, 1, 7, 5, 8, 9, then how will the values of  $A[1] \dots A[6]$  be changed on each visit of the ☆-marked block during execution?  
 List up those values on each visit.
- (4) マージソートを用いて 1 本の数列データを整列するアルゴリズムの基本的手順を述べよ。さらに数列データの要素数を  $n$  として、その時間計算量について説明せよ。  
 Describe the basic procedure of an algorithm for sorting a sequence of numerical data using merge sort. Then, explain its time complexity using  $n$  as the length of the sequence.

**A-7**

下記のすべての問に答えよ。(English translation is given below.)

- (1) 2進表現について、以下の問に答えよ。
- (a) 次の10進数を8ビットの2の補数表現で表せ。
- |         |          |
|---------|----------|
| (i) +88 | (ii) -72 |
|---------|----------|
- (b) 次の8ビットの2の補数表現の2進数を8ビットの符号付き絶対値表現に変換せよ。
- |              |               |
|--------------|---------------|
| (i) 10101010 | (ii) 11010101 |
|--------------|---------------|
- (c) 次の8ビットの符号付き絶対値表現の2進数体系での加算および減算の結果を示せ。
- |                           |                          |
|---------------------------|--------------------------|
| (i) 00101010 + 10101011   | (ii) 10101010 + 10101010 |
| (iii) 11010101 - 01010101 | (iv) 10101011 - 10101010 |
- (d) 次の8ビットの2の補数表現の2進数の乗算結果を16ビットの2の補数表現の2進数で示せ。
- 01110111 × 10001000

(2) 浮動小数点数の加算の手順について説明せよ。

(3) プロセッサにおけるデータアドレッシングモードについて説明せよ。

---

Answer all the following questions.

- (1) Answer the following questions on the binary number representation.
- (a) Express the following decimal numbers in the 8-bit two's complement representation.
- |         |          |
|---------|----------|
| (i) +88 | (ii) -72 |
|---------|----------|
- (b) Convert the following 8-bit two's complement binary numbers into the 8-bit sign-and-magnitude binary representation.
- |              |               |
|--------------|---------------|
| (i) 10101010 | (ii) 11010101 |
|--------------|---------------|
- (c) Show the results of the following additions and subtractions in the 8-bit sign-and-magnitude binary number system.
- |                           |                          |
|---------------------------|--------------------------|
| (i) 00101010 + 10101011   | (ii) 10101010 + 10101010 |
| (iii) 11010101 - 01010101 | (iv) 10101011 - 10101010 |
- (d) Show the result of the following multiplication of 8-bit two's complement binary numbers in the 16-bit two's complement binary representation.
- 01110111 × 10001000

(2) Explain the procedure of addition of floating-point numbers

(3) Explain 'data addressing modes' in processors.

## A-8

下記の全ての問に答えよ。

Answer all the following questions.

プログラムを記述する問題においては、使用するプログラミング言語を以下からひとつ選択し明示すること: C, C++, Java, Python, Scheme, Racket, OCaml, Standard ML, Haskell.

In questions where you are supposed to give a program, declare the programming language that you use from the following choices: C, C++, Java, Python, Scheme, Racket, OCaml, Standard ML, and Haskell.

(1) プログラミング言語に関連する以下の用語について、プログラム例を使って説明せよ。

Explain the following terms related to programming languages, using program examples.

(a) 多相性 polymorphism

(b) モジュールと実装の隠蔽 modules and implementation hiding

(2) 以下の問に答えよ。

Answer the following questions.

(a) 1 変数整数係数多項式を表現するためのデータ型と多項式  $5x^3 + 4x - 10$  を表すデータを構成するプログラムを与えよ。

Give a data type to represent 1-variable polynomials with integer coefficients and a program to construct a datum that represents  $5x^3 + 4x - 10$ .

(b) 二つの多項式  $P_1(x), P_2(x)$  を入力として、 $P_1(x)$  と  $P_2(x)$  の和を出力するプログラムを示せ。

Give a program that takes two polynomials  $P_1(x)$  and  $P_2(x)$  as inputs, and outputs the sum of  $P_1(x)$  and  $P_2(x)$ .

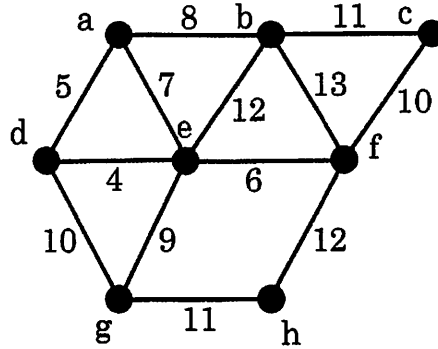
(c) 二つの多項式  $P_1(x), P_2(x)$  を入力として、 $P_1(x)$  と  $P_2(x)$  の積を出力するプログラムを示せ。

Give a program that takes two polynomials  $P_1(x)$  and  $P_2(x)$  as inputs, and outputs the product of  $P_1(x)$  and  $P_2(x)$ .

下記のすべての問に答えよ。(English translation is given on the next page.)

本問題で現れるグラフはすべて自己ループと多重枝を持たないと仮定する。

図(a) は枝重み付きグラフを表す。頂点のそばに書かれている文字は頂点ラベル、枝のそばに書かれている数字は枝の重みを表す。枝  $e$  の重みを  $w(e)$  と表記する。以下の問に答えよ。



図(a)

- (1) 図(a)のグラフについて、重みが最小の全域木を求めよ。ここで、木の重みとは、木を構成する枝の重みの総和のことである。答えは曖昧さのないように図で描くこと。
- (2) 図(a)のグラフについて、頂点  $c, d, h$  を含む重みが最小の木を求めよ。答えは曖昧さのないように図で描くこと。
- (3) 以下の疑似コードは、入力グラフに対し、重みが最小の全域木を求めるアルゴリズムである。以下の問に答えよ。
  - (a) 空欄  A を埋めよ。
  - (b) 空欄  A に書いた条件が成り立つかどうか判定する方法を具体的に書け。
  - (c) この疑似コードは入力グラフが連結な場合、重みが最小の全域木を必ず出力することを証明せよ。

入力グラフを  $G = (V, E)$  とする。

ステップ 1.  $T$  を空集合とする。 $E$  の枝を重みの小さい順に  $e_1, e_2, \dots, e_m$  とする。(すなわち、 $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$  が成り立つ。)

ステップ 2.  $i = 1$  とする。

ステップ 3. もし  A ならば、 $T$  に  $e_i$  を加える。

ステップ 4.  $i = m$  ならば  $T$  を出力する。そうでなければ、 $i$  を 1 増やしてステップ 3 に移る。

- (4) グラフ  $G = (V, E)$  と、 $G$  上の全域木  $T$  が与えられるとする。 $T$  に含まれない  $E$  の枝を 1 つとり、それを  $e$  とする。以下の問に答えよ。
  - (a)  $T$  に  $e$  を加えて構成されるグラフ  $(V, T \cup \{e\})$  には閉路(サイクル)がちょうど 1 つ存在することを証明せよ。
  - (b)  $(V, T \cup \{e\})$  上の閉路を  $F(T, e)$  と表記する。以下の命題(i), (ii) が同値であるかどうか答え、同値であるなら証明し、同値でなければ反例を与えよ。
    - (i)  $T$  は重みが最小の全域木である。
    - (ii)  $T$  に含まれない  $E$  の任意の枝  $f$  と、 $F(T, f)$  に含まれる任意の枝  $e'$  について  $w(e') \leq w(f)$  が成り立つ。

Answer all the following questions.

Assume that all graphs appearing in this question have no self-loops and parallel edges.

An edge-weighted graph is shown in Figure (a). The characters beside vertices are vertex labels and the numbers beside edges are weights of edges. For an edge  $e$ , let  $w(e)$  denote the weight of  $e$ . Answer all the questions.

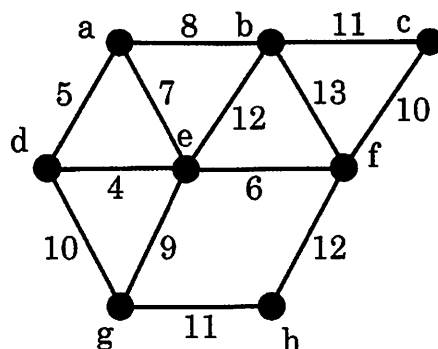


Figure (a)

(1) For the graph shown in Figure (a), find a spanning tree on the graph with minimum weight, where the weight of a tree is the sum of the weights of the edges in the tree. Draw the answer as a figure without ambiguity.

(2) For the graph shown in Figure (a), find a tree on the graph with minimum weight that includes vertices  $c$ ,  $d$ , and  $h$ . Draw the answer as a figure without ambiguity.

(3) The following pseudocode is an algorithm that computes a spanning tree with minimum weight for the input graph. Answer the following questions.

(a) Fill blank .

(b) Write a concrete way of deciding whether the condition you have written in  is satisfied or not.

(c) Prove that the pseudocode certainly outputs a spanning tree with minimum weight if the input graph is connected.

Let  $G = (V, E)$  be an input graph.

Step 1. Let  $T$  be the empty set. Let  $e_1, e_2, \dots, e_m$  be the edges in  $E$  in the ascending order of their weights. (That is,  $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$  holds.)

Step 2. Let  $i = 1$ .

Step 3. If , add  $e_i$  to  $T$ .

Step 4. If  $i = m$ , output  $T$ . Otherwise, increase  $i$  by 1 and go to Step 3.

(4) A graph  $G = (V, E)$  and a spanning tree  $T$  on  $G$  are given. Let  $e$  be an edge of  $E$  that is not included in  $T$ . Answer the following questions.

(a) Prove that the graph  $(V, T \cup \{e\})$ , which is constructed by adding  $e$  to  $T$ , has exactly one cycle.

(b) Let  $F(T, e)$  denote the cycle in  $(V, T \cup \{e\})$ . Answer whether the following propositions (i) and (ii) are equivalent or not. Prove if they are equivalent. Give a counterexample if they are not equivalent.

(i)  $T$  is a spanning tree with minimum weight.

(ii) For all edges  $f$  in  $E$  that is not included in  $T$  and all edges  $e'$  in  $F(T, f)$ ,  
 $w(e') \leq w(f)$  holds.