Teoría de la Estimación: Problemas

Notación:

- $\hat{S}_{\text{MSE}}$: Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\hat{S}_{\text{MAD}}$: Estimador de mínimo error absoluto medio.
- $\hat{S}_{\text{MAP}}$: Estimador de máximo a posteriori.
- $\hat{S}_{\text{ML}}$: Estimador de máxima verosimilitud.
- $\hat{S}_{\text{LMSE}}$: Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.

Índice

1. Problemas

ET1

Se desea construir un estimador lineal de mínimo error cuadrático medio que permita estimar la variable aleatoria S a partir de las vv.aa. X_1 y X_2. Sabiendo que

$$\begin{array}{lll} \mathbb{E}\{S\} = \frac{1}{2} & \mathbb{E}\{X_1\} = 1 & \mathbb{E}\{X_2\} = 0 \\ \mathbb{E}\{SX_1\} = 1 & \mathbb{E}\{SX_2\} = 2 & \mathbb{E}\{X_1X_2\} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{E}\left\{S^2\right\} = 4 & \mathbb{E}\left\{X_1^2\right\} = \frac{3}{2} & \mathbb{E}\left\{X_2^2\right\} = 2 \end{array}$$

obténganse los pesos del estimador $\hat{S}_{\text{LMSE}} = w_0 + w_1X_1 + w_2X_2$ y calcúlese su error cuadrático medio $\mathbb{E}\left\{(S - \hat{S}_{\text{LMSE}})^2\right\}$.

Solution: La resolución de este problema puede encontrarse en
`http://decisionyestimacion.blogspot.com/2013/05/p1-estimacion.html`

$w_0 = \frac{1}{2} \quad w_1 = 0 \quad w_2 = 1$

$\mathbb{E}\left\{(S - \hat{S}_{\text{LMSE}})^2\right\} = \frac{7}{4}$

ET2

Se desea estimar la variable aleatoria S a partir de la variable aleatoria X, conociendo la función de densidad de probabilidad conjunta de ambas, dada por:

$$p_{S,X}(s,x) = \frac{6}{7}(x+s)^2, \qquad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le s \le 1$$

(a) Determine $p_X(x)$.

(b) Determine $p_{S|X}(s|x)$.

(c) Calcule el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MSE}}$.

(d) Calcule el estimador MAP de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MAP}}$.

(e) Determine el sesgo y la varianza del estimador MAP.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_0^1 p_{S,X}(s,x)ds = \int_0^1 \frac{6}{7}(x+s)^2 ds \\ &= \frac{2}{7}\left(3x^2 + 3x + 1\right), \qquad 0 \le x \le 1 \end{aligned}$$

(b)

$$p_{S|X}(s|x) = \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_X(x)} = \frac{(x+s)^2}{x^2 + x + \frac{1}{3}}, \qquad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le s \le 1$$

(c)

$$\hat{s}_{\text{MSE}} = \mathbb{E}\{S|x\} = \int_0^1 s p_{S|X}(s|x) ds = \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{3}} \int_0^1 s\,(x+s)^2\, ds$$
$$= \frac{\frac{x^2}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}}{x^2+x+\frac{1}{3}}.$$

(d) Dado que $p_{S|X}(s|x)$ es creciente con s para $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq s \leq 1$, $\hat{S}_{\text{MAP}} = 1$.

(e) Sabiendo que

$$p_S(s) = \int_0^1 p_{S,X}(s,x) ds = \int_0^1 \frac{6}{7}\,(x+s)^2\, dx$$
$$= \frac{2}{7}\left(3s^2+3s+1\right), \quad 0 < s < 1$$

se tiene

$$\mathbb{E}\left\{S\right\} = \int_0^1 s p_S(s) ds = \frac{2}{7}\int_0^1 s\left(3s^2+3s+1\right) ds = \frac{9}{14},$$

y por tanto el sesgo medio es

$$\mathbb{E}\{\hat{S}_{\text{MAP}}\} - \mathbb{E}\{S\} = 1 - \frac{9}{14} = \frac{5}{14}$$

Dado que $\hat{S}_{\text{MAP}} = 1$ (constante e independiente de X), su varianza es nula.

ET3

Una variable aleatoria X sigue una distribución exponencial unilateral con parámetro $a > 0$:

$$p_X(x) = \frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right) \quad x > 0$$

Como se sabe, la media y varianza de X están dadas por a y a^2, respectivamente.

(a) Determínese el estimador de máxima verosimilitud de a, $\hat{A}_{\text{ML}}$, basado en un conjunto de K observaciones independientes de la variable aleatoria X, $\{X_k\}_{k=0}^{K-1}$.

(b) Se propone un nuevo estimador basado en el anterior y que obedece a la expresión:

$$\hat{A} = c \cdot \hat{A}_{\text{ML}},$$

donde $0 \leq c \leq 1$ es una constante que permite un reescalado del estimador ML. Obténganse el sesgo al cuadrado, la varianza y el error cuadrático medio (MSE) del nuevo estimador, y represéntense todos ellos en una misma figura en función del valor de c.

(c) Determínese el valor de c que minimiza el MSE, c^*, y discútase su evolución conforme el número de observaciones disponibles aumenta. Calcúlese el MSE del estimador asociado a c^*.

(d) Obténgase el intervalo de valores de c para los que el MSE de $\hat{A}$ es menor que el MSE del estimador ML, y explíquese cómo varía dicho intervalo cuando $K \longrightarrow \infty$. Discútase el resultado obtenido.

Solution: A video resolution of this problem (in Spanish) can be found in
`http://decisionyestimacion.blogspot.com/2013/05/problema-6-estimacion.html`

(a) $\hat{A}_{\mathrm{ML}} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} X_k$

(b) $\hat{A} = \frac{c}{K}\sum_{k=1}^{K} X_k$

$\mathbb{E}\left\{\hat{A} - a\right\}^2 = (c-1)^2\, a^2,$

$\mathrm{var}\left\{\hat{A}\right\} = \frac{c^2 a^2}{K},$

$\mathbb{E}\left\{\left(\hat{A} - a\right)^2\right\} = (c-1)^2\, a^2 + \frac{c^2 a^2}{K}$

(c) $c^* = \frac{K}{K+1}$, $c^* \to 1\ (K \to \infty)$,

$\mathbb{E}\left\{\left(\hat{A} - a\right)^2\right\} = \frac{a^2}{K+1}\ (c = c^*)$

(d) El intervalo de valores es: $c \in \left[\frac{K-1}{K+1}, 1\right]$, que se estrecha según aumenta K.

ET4

Para la estimación de una variable aleatoria S se dispone de las dos siguientes observaciones:

$$X_1 = S + N_1$$
$$X_2 = \alpha S + N_2$$

donde α es una constante conocida y S, N_1 y N_2 son variables aleatorias gaussianas independientes, de media nula y varianzas v_s, v_n y v_n, respectivamente.

(a) Calcúlense los estimadores de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X_1 y X_2, $\hat{S}_1$ y $\hat{S}_2$, respectivamente.

(b) Calcúlese el error cuadrático medio de cada uno de los estimadores del apartado anterior. ¿Cuál de ellos propociona menor error cuadrático medio? Discuta su respuesta para los distintos valores que pueda tomar el parámetro α.

(c) Determínese el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista del vector de observaciones $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$, $\hat{S}_{\mathrm{MSE}}$.

Solution:

(a) S y X_2 son conjuntamente gaussianos, con medias

$$m_S = 0$$
$$m_{X_2} = \alpha m_S + \mathbb{E}\{N_2\} = 0,$$

varianzas v_s y

$$\begin{aligned} v_{X_2} &= \mathbb{E}\{(X_2 - m_{X_2})^2\} = \mathbb{E}\{X_2^2\} = \mathbb{E}\left\{(\alpha S + N_2)^2\right\} \\ &= \alpha^2 \mathbb{E}\{S^2\} + 2\alpha \mathbb{E}\{S N_2\} + \mathbb{E}\{N_2^2\} \\ &= \alpha^2 v_s + v_n \end{aligned}$$

respectivamente, y covarianza

$$\begin{aligned} v_{SX_2} &= \mathbb{E}\{(S - m_S)(X_2 - m_{X_2})\} = \mathbb{E}\{SX_2\} = \mathbb{E}\{S(\alpha S + N_2)\} \\ &= \alpha v_S \end{aligned}$$

Por tanto, el estimador de S basado en X_2 será

$$\begin{aligned} \hat{s}_2 = m_{S|X_2} &= m_S + \frac{v_{SX_2}}{v_{X_2}}(x_2 - m_{X_2}) = \frac{v_{SX_2}}{v_{X_2}} x_2 \\ &= \frac{\alpha v_s}{\alpha^2 v_s + v_n} x_2 \end{aligned}$$

Por otra parte, dado que la relación entre X_1 y S es formalmente equivalente a la de X_2 y S para $\alpha = 1$ resulta inmediato comprobar que el estimador de S dado X_1 es equivalente al anterior, tomando $\alpha = 1$, es decir

$$\hat{s}_1 = \frac{v_s}{v_s + v_n} x_2$$

(b) El error cuadrático medio (MSE) del estimador $\hat{S}_2$ puede calcularse como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_2\right)^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{\left(S - \frac{\alpha v_S}{\alpha^2 v_s + v_n} X_2\right)^2\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{S^2\right\} - 2\frac{\alpha v_s}{\alpha^2 v_s + v_n}\mathbb{E}\{SX_2\} + \left(\frac{\alpha v_s}{\alpha^2 v_s + v_n}\right)^2 \mathbb{E}\{X_2^2\} \\ &= v_s - 2\frac{\alpha v_s}{\alpha^2 v_s + v_n} v_{SX_2} + \left(\frac{\alpha v_s}{\alpha^2 v_s + v_n}\right)^2 v_{X_2} \\ &= v_s - \frac{\alpha^2 v_s^2}{\alpha^2 v_s + v_n} \\ &= \frac{v_s v_n}{\alpha^2 v_s + v_n} \end{aligned}$$

(también puede calcularse de un modo más directo sabiendo que el MSE debe coincidir con la varianza a posteriori, $v_{S|X_2}$).

Analogamente, el MSE del estimador $\hat{S}_1$ es equivalente a tomar $\alpha = 1$ en la expresión anterior

$$\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_1\right)^2\right\} = \frac{v_s v_n}{v_s + v_n}$$

Para $|\alpha| > 1$ el error cuadrático medio de $\hat{S}_2$ es menor que el de $\hat{S}_1$.

(c) Definiendo los vectores $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$, podemos expresar la ecuación del modelo como

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} S + \mathbf{N}$$

S y $\mathbf{X}$ son conjuntamente gaussianos, con medias

$$\begin{aligned} m_S &= 0 \\ \mathbf{m_X} &= \begin{bmatrix} m_{X_1} \\ m_{X_2} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

varianzas v_s y

$$\begin{aligned}
\mathbf{V_X} &= \mathbb{E}\{(\mathbf{X}-\mathbf{m_X})(\mathbf{X}-\mathbf{m_X})^\intercal\} = \mathbb{E}\{\mathbf{X}\mathbf{X}^\intercal\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left(\begin{bmatrix}1\\ \alpha\end{bmatrix} S + \mathbf{N}\right)\left(\begin{bmatrix}1\\ \alpha\end{bmatrix} S + \mathbf{N}\right)^\intercal\right\} \\
&= \begin{bmatrix}1\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \alpha\end{bmatrix}^\intercal \mathbb{E}\{S^2\} + \begin{bmatrix}1\\ \alpha\end{bmatrix}\mathbb{E}\{S\mathbf{N}^\intercal\} + \mathbb{E}\{S\mathbf{N}\}\begin{bmatrix}1\\ \alpha\end{bmatrix}^\intercal + \mathbb{E}\{\mathbf{N}\mathbf{N}^\intercal\} \\
&= v_s\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ \alpha & \alpha^2\end{bmatrix} + v_n\mathbf{I} \\
&= \begin{bmatrix}v_s+v_n & v_s\alpha\\ v_s\alpha & v_s\alpha^2+v_n\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

respectivamente, y covarianzas

$$\mathbf{V}_{S\mathbf{X}} = \begin{bmatrix}v_{SX_1}\\ v_{SX_2}\end{bmatrix}^\intercal = \begin{bmatrix}v_s\\ \alpha v_s\end{bmatrix}^\intercal$$

Por tanto el estimador de S basado en $\mathbf{X}$ será

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{S|\mathbf{X}} &= m_S + \mathbf{V}_{S\mathbf{X}}\mathbf{V_X}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m_X}) = \mathbf{V}_{S\mathbf{X}}\mathbf{V_X}^{-1}\mathbf{x} \\
&= v_s\begin{bmatrix}1\\ \alpha\end{bmatrix}^\intercal\begin{bmatrix}v_s+v_n & v_s\alpha\\ v_s\alpha & v_s\alpha^2+v_n\end{bmatrix}^{-1}\mathbf{x} \\
&= \frac{v_s}{(1+\alpha^2)v_s+v_n}(x_1+\alpha x_2)
\end{aligned}$$

ET5

Sabiendo que la f.d.p. conjunta de las vv.aa. X y S viene dada por

$$p_{X,S}(x,s) = \begin{cases} x+s & 0\le x\le 1 \text{ y } 0\le s\le 1\\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

Obténgase el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{LMSE}} = w_0 + w_1 X$.

Solution: $\hat{S}_{\text{LMSE}} = \dfrac{7}{11} - \dfrac{X}{11}$

ET6

Se desea estimar el valor de la v.a. positiva S a partir de una observación aleatoria X, relacionada con S mediante

$$X = R/S$$

siendo R una v.a. independiente de S con distribución

$$p_R(r) = \exp(-r), \quad r>0$$

(a) Calcúlese la verosimilitud, $p_{X|S}(x|s)$.

(b) Obténgase el estimador de máxima verosimilitud de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{ML}}$.

Sabiendo que la f.d.p. de S es $p_S(s) = \exp(-s), \quad s>0$, calcúlense:

(c) La distribución conjunta de S y X, $p_{S,X}(s,x)$, y la distribución a posteriori de S, $p_{S|X}(s|x)$.

(d) El estimador de máximo a posteriori de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MAP}}$.

(e) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MSE}}$.

(f) El sesgo de los estimadores $\hat{S}_{\text{MAP}}$ y $\hat{S}_{\text{MSE}}$.

Solution:

(a) $p_{X|S}(x|s) = s\ \exp(-xs), \quad x > 0.$

(b) $\hat{S}_{\text{ML}} = \dfrac{1}{X}.$

(c) $p_{X,S}(x,s) = s\ \exp\left(-s(x+1)\right), \quad x, s > 0;$

$$p_{S|X} = (x+1)^2 s\ \exp\left(-s(x+1)\right), \quad s > 0.$$

(d) $\hat{S}_{\text{MAP}} = \dfrac{1}{X+1}.$

(e) $\hat{S}_{\text{MSE}} = \dfrac{2}{X+1}.$

(f) $\mathbb{E}\{\hat{S}_{\text{MAP}}\} - S = -\dfrac{1}{2}; \quad \mathbb{E}\{\hat{S}_{\text{MSE}} - S\} = 0.$

ET7

Se desea construir un estimador de una variable aleatoria S con la siguiente forma analítica:

$$\hat{S} = w_0 + wX^3$$

(a) Si se define la v.a. $Y = X^3$, indíquese qué estadísticos son suficientes para determinar los pesos del modelo de estimación de mínimo error cuadrático medio.

(b) Un analista desea ajustar el modelo anterior, pero desconoce la estadística del problema, por lo que recurrre a estimaciones muestrales de los estadísticos suficientes, basadas en el conjunto disponible de pares etiquetados de las variables aleatorias:

$$\{x^{(k)}, s^{(k)}\}_{k=1}^{4} = \{(-1, -0.55), (0, 0.5), (1, 1.57), (2, 8.7)\}$$

Determínense los pesos w_0 y w obtenidos por el analista.

Solution:

(a) $\mathbb{E}\{X\}$, $\mathbb{E}\{Y\}$, v_y y v_{sy} (o algún otro conjunto que permita determinar los anteriores).

(b) $w = 1.0256$ y $w_0 = 0.5038$.

ET8

Las variables aleatorias S y X se distribuyen conjuntamente según la ddp

$$p_{S,X}(s,x) = \alpha s x^2, \qquad 0 \le s \le 1-x, \quad 0 \le x \le 1$$

siendo α un parámetro a determinar.

(a) Establezca las expresiones de las ddp marginales $p_X(x)$ y $p_S(s)$.

(b) Calcule el estimador MAP de S dado X, $\hat{S}_{\text{MAP}}(X)$.

(c) Calcule el estimador ML de S dado X, $\hat{S}_{\text{ML}}(X)$.

(d) Calcule el estimador de S dado X de error cuadrático medio mínimo, $\hat{S}_{\text{MSE}}(X)$.

(e) Compare los estimadores calculados según el error cuadrático medio dado X en que incurren cada uno de los estimadores.

Solution:

(a) El parámetro α debe tomar el valor que hace 1 la integral de la distribución. Dado que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{S,X}(s,x)dsdx &= \int_0^1\int_0^{1-x}\alpha s x^2 dsdx = \alpha\int_0^1 x^2\int_0^{1-x} sdsdx \\ &= \alpha\int_0^1 x^2\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^{1-x}dx = \frac{\alpha}{2}\int_0^1 x^2(1-x)^2dx \\ &= \frac{\alpha}{60}\end{aligned}$$

luego $\alpha = 60$ y, por tanto

$$\begin{aligned}p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{S,X}(s,x)ds = \int_0^{1-x} 60sx^2ds = 60x^2\int_0^{1-x} sds \\ &= 30x^2(1-x)^2, \qquad 0\le x\le 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_S(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{S,X}(s,x)dx = \int_0^{1-s} 60sx^2ds = 60s\int_0^{1-s} x^2ds \\ &= 20s(1-s)^3, \qquad 0\le s\le 1\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\hat{s}_{\text{MAP}} &= \underset{s}{\text{argmax}}\, p_{S|X}(s|x) = \underset{s}{\text{argmax}}\,\frac{p_{S,X}(s,x)}{p_X(x)} = \underset{s}{\text{argmax}}\, p_{S,X}(s,x) \\ &= \underset{s\in[0,1-x]}{\text{argmax}}\, 60sx^2 = \underset{s\in[0,1-x]}{\text{argmax}}\, s \\ &= 1-x\end{aligned}$$

(c) Dado que la verosimilitud es

$$p_{X|S}(x|s) = \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_S(s)} = \frac{60sx^2}{20s(1-s)^3} = \frac{3x^2}{(1-s)^3}, \qquad 0\le s\le 1-x, \quad 0\le x\le 1$$

el estimador ML será

$$\begin{aligned}\hat{s}_{\text{ML}} &= \underset{s}{\text{argmax}}\, p_{X|S}(x|s) = \underset{s\in[0,1-x]}{\text{argmax}}\,\frac{3x^2}{(1-s)^3} = \underset{s\in[0,1-x]}{\text{argmax}}\,\frac{1}{(1-s)^3} = \underset{s\in[0,1-x]}{\text{argmin}}\,(1-s)^3 \\ &= 1-x\end{aligned}$$

(d) Dado que la distribución a posteriori es

$$p_{S|x}(s|x) = \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_X(x)} = \frac{60sx^2}{30x^2(1-x)^2} = \frac{2s}{(1-x)^2}, \qquad 0\le s\le 1-x, \quad 0\le x\le 1$$

el estimador de mínimo MSE será

$$\begin{aligned}\hat{s}_{\text{MSE}} &= \mathbb{E}\{S|x\} = \int_{-\infty}^{\infty} s p_{S|X}(s|x)ds = \frac{2}{(1-x)^2}\int_0^{1-x} s^2ds \\ &= \frac{2}{3}(1-x)\end{aligned}$$

(e)

$$\mathbb{E}\left\{\left(S-\hat{S}_{\mathrm{MAP}}\right)^2 \mid x\right\} = \mathbb{E}\left\{(S-(1-x))^2 \mid x\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (s-(1-x))^2\, p_{S|X}(s|x)ds$$
$$= \frac{2}{(1-x)^2}\int_0^{1-x} s\,(s-(1-x))^2\, ds$$
$$= \frac{1}{6}(1-x)^2$$

Dado que $\hat{S}_{\mathrm{ML}} = \hat{S}_{\mathrm{MAP}}$, su MSE será idéntico

$$\mathbb{E}\left\{\left(S-\hat{S}_{\mathrm{ML}}\right)^2 \mid x\right\} = \frac{1}{6}(1-x)^2$$

Finalmente,

$$\mathbb{E}\left\{\left(S-\hat{S}_{\mathrm{MSE}}(X)\right)^2 \mid x\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(S-\frac{2}{3}(1-x)\right)^2 \mid x\right\} = \int_0^{1-x} \frac{2s\left(s-\frac{2}{3}(1-x)\right)^2}{(1-x)^2} ds$$
$$= \frac{2}{(1-x)^2}\int_0^{1-x} s\left(s-\frac{2}{3}(1-x)\right)^2 ds$$
$$= \frac{1}{18}(1-x)^2$$

ET9

Se desea estimar la v.a. S a partir de la v.a. X, conociendo la función de densidad de probabilidad conjunta de ambas, dada por:

$$p_{X,S}(x,s) = \begin{cases} 6x, & 0 \le x \le s, \quad 0 \le s \le 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

(a) Calcúlese el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\mathrm{MSE}}$.

(b) Calcúlese el estimador de máxima verosimilitud de S dado X, $\hat{S}_{\mathrm{ML}}$.

(c) Establézcanse las ddps de ambos estimadores, $p_{\hat{S}_{\mathrm{MSE}}}(\hat{s})$ y $p_{\hat{S}_{\mathrm{ML}}}(\hat{s})$, y represéntense gráficamente ambas.

(d) Calcúlense la media y la varianza del error de ambos estimadores.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\mathrm{MSE}}(X) = \frac{1}{2}(1+X)$

(b) $\hat{S}_{\mathrm{ML}}(X) = X$

(c) $p_{\hat{S}_{\mathrm{MSE}}}(\hat{s}) = 24(2\hat{s}-1)(1-\hat{s}), \qquad \frac{1}{2} \le \hat{s} \le 1$

$p_{\hat{S}_{\mathrm{ML}}}(\hat{s}) = 6\hat{s}(1-\hat{s}), \qquad 0 \le \hat{s} \le 1$

(d) $\mathbb{E}\{S-\hat{S}_{\mathrm{ML}}\} = \dfrac{1}{4}, \qquad \mathbb{E}\{S-\hat{S}_{\mathrm{MSE}}\} = 0$

$Var\{S-\hat{S}_{\mathrm{ML}}\} = \dfrac{13}{80}, \qquad Var\{S-\hat{S}_{\mathrm{MSE}}\} = \dfrac{1}{40}$

ET10

Se desea construir un estimador lineal de mínimo error cuadrático (MSE) que permita estimar la variable aleatoria S a partir de la v.a. X_1. Se conoce la siguiente información estadística:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{E}\{X_1\} = 0 & \mathbb{E}\{S\} = 1 \\ \mathbb{E}\{X_1^2\} = 1 & \mathbb{E}\{X_1 S\} = 2 \end{array}$$

(a) Indíquese cuál de los siguientes diseños MSE proporcionará un error cuadrático medio menor:

$$\hat{S}_a = w_{0a} + w_{1a}X_1$$
$$\hat{S}_b = w_{1b}X_1$$

(b) Si se dispone ahora de una segunda v.a. X_2 de la que se sabe:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{E}\{X_2\} = 1 & \mathbb{E}\{X_2^2\} = 2 \\ \mathbb{E}\{X_1X_2\} = \frac{1}{2} & \mathbb{E}\{SX_2\} = 2 \end{array}$$

justifíquese si el estimador $\hat{S}_c = w_{0c} + w_{1c}X_1 + w_{2c}X_2$ presenta un error cuadrático medio menor que los estimadores propuestos en a).

Solution:

(a) Sean $\hat{S}_a^* = w_{0a}^* + w_{1a}^*X_1$ y $\hat{S}_b^* = w_{1b}^*X_1$ los estimadores de mínimo MSE para cada uno de los diseños. Dado que $\hat{S}_b^*$ se puede puede expresar como un estimador de la forma $w_{0a} + w_{1a}X_1$ (tomando $w_{0a} = 0$ y $w_{1a} = w_{1b}^*$), se puede afirmar que

$$\mathrm{MSE}\{\hat{S}_a^*\} \leq \mathrm{MSE}\{\hat{S}_b^*\}$$

Para determinar si el MSE de $\hat{S}_a^*$ es estrictamente menor que el de $\hat{S}_b^*$, calcularemos los pesos del estimador $\hat{S}_a^*$. Llamando

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_1 \end{bmatrix}$$

resulta

$$\mathbf{w}_a^* = \mathbf{R}_{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{r}_{S\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{E}\{X_1\} \\ \mathbb{E}\{X_1\} & \mathbb{E}\{X_1^2\} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{S\} \\ \mathbb{E}\{SX_1\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dado que el mínimo es único y $\mathbf{w}_a^* \neq \begin{bmatrix} 0 \\ w_{1b}^* \end{bmatrix}$, necesariamente se cumplirá que

$$\mathrm{MSE}\{\hat{S}_a^*\} < \mathrm{MSE}\{\hat{S}_b^*\}$$

(b) Llamando

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

el estimador $\hat{S}_c^*$ de mínimo MSE estará dado por el vector de pesos

$$\mathbf{w}_c^* = \mathbf{R}_{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{r}_{S\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{E}\{X_1\} & \mathbb{E}\{X_2\} \\ \mathbb{E}\{X_1\} & \mathbb{E}\{X_1^2\} & \mathbb{E}\{X_1X_2\} \\ \mathbb{E}\{X_2\} & \mathbb{E}\{X_1X_2\} & \mathbb{E}\{X_2^2\} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{S\} \\ \mathbb{E}\{SX_1\} \\ \mathbb{E}\{SX_2\} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto $\hat{S}_c^* = 1 + 2X_1 = \hat{S}_a^*$ y, en consecuencia,

$$\mathrm{MSE}\{\hat{S}_a^*\} = \mathrm{MSE}\{\hat{S}_c^*\}$$

ET11

La d.d.p. conjunta de dos variables aleatorias S y X es:

$$p_{S,X}(s,x) = 6s, \qquad 0 < s < x, \qquad 0 < x < 1$$

Obtenga:

(a) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MSE}}$.
(b) El sesgo (no condicionado) de dicho estimador.
(c) El sesgo condicional.

Solution:

(a) Noting that

$$p_X(x) = \int_0^x 6sds = 3x^2, \qquad 0 < x < 1$$

we have

$$p_{S|X}(s|x) = \frac{2s}{x^2}, \qquad 0 < s < x, \qquad 0 < x < 1$$

therefore

$$\hat{s}_{\text{MSE}} = \mathbb{E}\{S|x\} = \int_0^x \frac{2s^2}{x^2} = \frac{2}{3}x$$

(b)

$$p_S(s) = \int p_{S,X}(s,x)dx = \int_s^1 6sdx = 6s(1-s), \qquad 0 < s < 1$$

we have

$$p_{X|S}(x|s) = \frac{1}{1-s}, \qquad 0 < s < x, \qquad 0 < x < 1$$

and

$$\mathbb{E}\{X|s\} = \int xp_{X|S}(x|s)dx = \frac{1}{1-s}\int_s^1 xdx = \frac{1}{2(1-s)}$$

Therefore

$$\mathbb{E}\{\hat{S}_{\text{MSE}}|s\} = \frac{2}{3}\mathbb{E}\{X|s\} = \frac{1}{3(1-s)}$$

and the conditional bias is

$$\text{bias}\{\hat{S}_{\text{MSE}}|s\} = \mathbb{E}\{\hat{S}_{\text{MSE}}|s\} - s = \frac{1}{3(1-s)} - s$$

(c) Since

$$\mathbb{E}\{S\} = \int_0^1 6s^2(1-s) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{E}\{\hat{S}_{\text{MSE}}\} = \frac{2}{3}\mathbb{E}\{X\} = \frac{2}{3}\int_0^1 3x^3dx = \frac{1}{2}$$

the estimator is unbiased

ET12

La d.d.p. conjunta de las vv.aa. S y X sigue la forma:

$$p_{S,X}(s,x) = \alpha, \quad -1 < x < 1, \quad 0 < s < |x|$$

(a) Determine la d.d.p. de la v.a. X, $p_X(x)$, especificando el valor de α.

(b) Establezca las expresiones de los estimadores de S en función de X que minimizan los costes cuadrático medio ($\overline{C}_{\text{MSE}} = \mathbb{E}\left\{(S-\hat{S})^2\right\}$) y absoluto medio ($\overline{C}_{\text{MAD}} = \mathbb{E}\left\{|S-\hat{S}|\right\}$), $\hat{S}_{\text{MMSE}}$ y $\hat{S}_{\text{MAD}}$, respectivamente.

(c) Supuesto que se restringe la forma de los estimadores a cuadrático en X, determine el estimador $\hat{S}_{q,\text{MMSE}} = w_1 X^2$ que minimiza el error cuadrático medio.

(d) (*Difícil*) Supuesto que se restringe la forma de los estimadores a cuadrático en X, determine el estimador $\hat{S}_{q,\text{MAD}} = w_2 X^2$ que minimiza el coste absoluto medio.

Solution:

(a)

$$p_X(x) = \int_0^{|x|} \alpha dx = \alpha|x|, \quad -1 < x < 1$$

Dado que el área de la ddp debe ser unitaria,

$$\int_{-1}^{1} p_X(x)dx = \int_{-1}^{1} \alpha|x|dx = \alpha = 1$$

por tanto, $\alpha = 1$ y

$$p_X(x) = |x|, \quad -1 < x < 1$$

(b) La distribución a posteriori es

$$p_{S|X}(s|x) = \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_X(x)} = \frac{1}{|x|}, \quad 0 \leq s \leq |x|$$

que es una distribución uniforme, luego tanto la media como la mediana coinciden en el punto medio:

$$\hat{S}_{\text{MSE}} = \hat{S}_{\text{MAD}} = |X|/2$$

(c)

$$w_1 = \frac{\mathbb{E}\{SX^2\}}{\mathbb{E}\{X^4\}} = \frac{\int_{-1}^{1}\mathbb{E}\{SX^2|x\}|x|dx}{\int_{-1}^{1}x^4|x|dx} = \frac{\int_{-1}^{1}x^2\mathbb{E}\{S|x\}|x|dx}{\int_{-1}^{1}x^4|x|dx}$$
$$= \frac{2\int_0^1 \frac{1}{2}x^4 dx}{2\int_0^1 x^5 dx} = \frac{3}{5}$$

Por tanto

$$\hat{S}_{q,\text{MSE}}(X) = 3X^2/5$$

(d) The MAD for any estimator in the form $w_2 X^2$ is given by

$$\overline{C}_{\text{MAD}} = \mathbb{E}\left\{|S-\hat{S}|\right\} = \int_{-1}^{1}\int_0^{|x|} |s - w_2 x^2| ds dx$$
$$= 2\int_0^1\int_0^x |s - w_2 x^2| ds dx$$

For $w_2 \leq 0$ we have

$$\begin{aligned}\overline{C}_{\text{MAD}} &= 2\int_0^1 \int_0^x (s - w_2x^2)dsdx = \int_0^1 \left[(x - w_2x^2)^2 - w_2^2x^4\right] dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2 - 2w_2x^3\right] dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}w_2\end{aligned}$$

and, for $w_2 > 0$,

$$\begin{aligned}\overline{C}_{\text{MAD}} &= 2\left(\int_0^1 \int_0^{\text{mín}(x,w_2x^2)} (w_2x^2 - s)dsdx + \int_0^1 \int_{\text{mín}(x,w_2x^2)}^x (s - w_2x^2)dsdx\right) \\ &= \int_0^1 \left[-(w_2x^2 - s)^2\right]_0^{\text{mín}(x,w_2x^2)} dx + \int_0^1 \left[(s - w_2x^2)^2\right]_{\text{mín}(x,w_2x^2)}^x dx \\ &= \int_0^1 \left[w_2^2x^4 - (w_2x^2 - \text{mín}(x, w_2x^2))^2\right] dx + \int_0^1 \left[(x - w_2x^2)^2 - (\text{mín}(x, w_2x^2) - w_2x^2)^2\right] dx\end{aligned}$$

Now, for $0 \leq w_2 \leq 1$, since $0 \leq x \leq 1$ we have $\text{mín}(x, w_2x^2) = w_2x^2$, so that

$$\begin{aligned}\overline{C}_{\text{MAD}} &= \int_0^1 w_2^2x^4dx + \int_0^1 (x - w_2x^2)^2dx \\ &= \frac{1}{5}w_2^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{5}w_2^2 = \frac{2}{5}w_2^2 - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Finally, for $w_2 > 1$, we get

$$\begin{aligned}\overline{C}_{\text{MAD}} &= \int_0^{\frac{1}{w_2}} w_2^2x^4dx + \int_0^{\frac{1}{w_2}} (x - w_2x^2)^2dx + \int_{\frac{1}{w_2}}^1 \left[w_2^2x^4 - (w_2x^2 - x)^2\right] dx \\ &= \int_0^1 w_2^2x^4dx + \int_0^{\frac{1}{w_2}} (x - w_2x^2)^2dx - \int_{\frac{1}{w_2}}^1 (w_2x^2 - x)^2dx \\ &= \frac{1}{5}w_2^2 + \int_0^{\frac{1}{w_2}} \left[x^2 - 2w_2x^3 + w_2^2x^4\right] dx - \int_{\frac{1}{w_2}}^1 \left[x^2 - 2w_2x^3 + w_2^2x^4\right] dx \\ &= \frac{1}{5}w_2^2 + 2\left[\frac{1}{3w_2^3} - \frac{2w_2}{4w_2^4} + \frac{w_2^2}{5w_2^5}\right] - \left[\frac{1}{3} - \frac{w_2}{2} + \frac{1}{5}w_2^2\right] \\ &= \frac{2}{3w_2^3} - \frac{1}{w_2^3} + \frac{2}{5w_2^3} - \frac{1}{3} + \frac{w_2}{2} \\ &= \frac{w_2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{15w_2^3}\end{aligned}$$

Since, for $w_2 > 1$,

$$\frac{d\overline{C}_{\text{MAD}}}{dw_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5w_2^4} > 0$$

the risk grows for $w_2 > 1$. Since it is also decreasing for $w_2 < 0$, the minimum is in $[0, 1]$. Therefore,

$$w_2^* = \underset{w_2\in[0,1]}{\text{argmin}} \left\{\frac{2}{5}w_2^2 - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{3}\right\} = \frac{5}{8}$$

ET13

Considérese la variable aleatoria X con ddp

$$p_X(x) = a \exp\left[-a(x-d)\right], \qquad x \geq d$$

con parámetros $a > 0$ y d.
Establézcanse las expresiones de los estimadores de máxima verosimilitud de ambos parámetros, $\hat{a}_{\mathrm{ML}}$ y $\hat{d}_{\mathrm{ML}}$, en función de los valores de K muestras de X tomadas independientemente, $\{x_k\}_{k=0}^{K-1}$.

Solution: Los estimadores ML de a y d están dados por

$$(\hat{a}_{\mathrm{ML}}, \hat{d}_{\mathrm{ML}}) = \underset{a,d}{\operatorname{argmax}} \prod_{k=0}^{K-1} \left(a \exp\left(-a(x_k - d)\right) u(x_k - d)\right)$$

Nótese que si $d > x_k$ para alguna muestra x_k, resulta $u(x_k - d) = 0$, en cuyo caso la verosimilitud total es 0. Por tanto $\hat{d}_{\mathrm{ML}} \leq x_k$, para todo k, o, equivalentemente $\hat{d}_{\mathrm{ML}} \leq \min_k \{x_k\}$, y podemos escribir

$$(\hat{a}_{\mathrm{ML}}, \hat{d}_{\mathrm{ML}}) = \underset{a,d|d\leq x_{\min}}{\operatorname{argmax}} \prod_{k=1}^{K} \left(a \exp\left(-a(x_k - d)\right)\right)$$

siendo $x_{\min} = \min_k \{x_k\}$.
Minimizando el logaritmo, podemos escribir

$$\begin{aligned}
(\hat{a}_{\mathrm{ML}}, \hat{d}_{\mathrm{ML}}) &= \underset{a,d|d\leq x_{\min}}{\operatorname{argmax}} \sum_{k=1}^{K} \left(\log(a) - a(x_k - d)\right) \\
&= \underset{a,d|d\leq x_{\min}}{\operatorname{argmax}} \left(K\log(a) - a\left(\sum_{k=1}^{K} x_k - Kd\right)\right) \\
&= \underset{a,d|d\leq x_{\min}}{\operatorname{argmax}} \left(K\log(a) + Kad - a\sum_{k=1}^{K} x_k\right)
\end{aligned}$$

Dado que la función a maximizar es creciente con d, $\hat{d}_{\mathrm{ML}}$ será el mayor valor de d en el intervalo admisible, es decir,

$$\hat{d}_{\mathrm{ML}} = x_{\min} = \min_k \{x_k\}$$

y, por tanto

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{\mathrm{ML}} &= \underset{a>0}{\operatorname{argmax}} \left(K\log(a) + Ka\cdot\hat{d}_{\mathrm{ML}} - a\sum_{k=1}^{K} x_k\right) \\
&= \frac{K}{\sum_{k=1}^{K} \left(x_k - \min_k\{x_k\}\right)}
\end{aligned}$$

(donde el máximo se ha obtenido por derivación).

ET14

Las variables aleatorias S y X tienen una función de densidad de probabilidad conjunta

$$p_{S,X}(s,x) = 10s, \qquad 0 \leq s \leq x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Se desea estimar S a la vista de X minimizando el riesgo para la función de coste

$$c(S,\hat{S}) = S^2\left(S-\hat{S}\right)^2$$

Determine:

(a) el estimador bayesiano, $\hat{S}_C$ para el coste dado.

(b) el estimador lineal $\hat{S}_L = wX$ que minimiza el riesgo $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S})\right\}$.

(c) el riesgo de ambos estimadores, $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S}_C)\right\}$ y $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S}_L)\right\}$.

(d) el sesgo no condicionado de ambos estimadores.

(e) la varianza del error de ambos estimadores, $\mathrm{Var}\left\{S-\hat{S}_C\right\}$ y $\mathrm{Var}\left\{S-\hat{S}_L\right\}$.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned}
\hat{s}_c &= \operatorname*{argmin}_{\hat{s}} \mathbb{E}\{c(S,\hat{s})|x\} = \operatorname*{argmin}_{\hat{s}} \mathbb{E}\{S^2\left(S-\hat{s}\right)^2|x\} \\
&= \operatorname*{argmin}_{\hat{s}} \mathbb{E}\{S^4 - 2S^3\hat{s} + S^2\hat{s}^2|x\} \\
&= \operatorname*{argmin}_{\hat{s}} \left\{\mathbb{E}\{S^4|x\} - 2\mathbb{E}\{S^3|x\}\hat{s} + \mathbb{E}\{S^2|x\}\hat{s}^2\right\} \\
&= \frac{\mathbb{E}\{S^3|x\}}{\mathbb{E}\{S^2|x\}}
\end{aligned}$$

Sabiendo que

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{S,X}(s,x)ds = 10\int_0^{x^2} sds = \frac{5x^4}{2}$$

resulta

$$p_{S|X}(s|x) = \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_X(x)} = \frac{4s}{x^4}, \qquad 0 \le s \le x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

Por tanto,

$$\hat{s}_c = \frac{\mathbb{E}\{S^3|x\}}{\mathbb{E}\{S^2|x\}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s^3 p_{S|X}(s|x)ds}{\int_{-\infty}^{\infty} s^2 p_{S|X}(s|x)ds} = \frac{\frac{4}{x^4}\int_0^{x^2} s^4 ds}{\frac{4}{x^4}\int_0^{x^2} s^3 ds} = \frac{\frac{x^{10}}{5}}{\frac{x^8}{4}} = \frac{4}{5}x^2$$

(b)

$$\begin{aligned}
w &= \operatorname*{argmin}_{\hat{s}} \mathbb{E}\{c(S,wX)\} = \operatorname*{argmin}_{\hat{s}} \mathbb{E}\{S^2\left(S-wX\right)^2\} \\
&= \operatorname*{argmin}_{\hat{s}} \mathbb{E}\{S^4 - 2S^3Xw + S^2X^2w\} \\
&= \operatorname*{argmin}_{\hat{s}} \left\{\mathbb{E}\{S^4\} - 2\mathbb{E}\{S^3X\}w + \mathbb{E}\{S^2X^2\}w^2\right\} \\
&= \frac{\mathbb{E}\{S^3X\}}{\mathbb{E}\{S^2X^2\}}
\end{aligned}$$

Sabiendo que, para todo $m \leq 0$, $n \leq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{S^m X^n\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s^m x^n p_{S,X}(s,x) ds dx \\
&= 10\int_0^1 x^n \int_0^{x^2} s^{m+1} ds dx = \frac{10}{m+2}\int_0^1 x^{2m+n+4} dx \\
&= \frac{10}{(m+2)(2m+n+5)}
\end{aligned}$$

podemos escribir

$$w = \frac{\mathbb{E}\{S^3 X\}}{\mathbb{E}\{S^2 X^2\}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{22}} = \frac{11}{15}$$

Por tanto, el estimador lineal que minimiza el riesgo es

$$\hat{S}_L = \frac{11}{15} X$$

(c) Para todo estimador $\hat{S}$, el riesgo global es

$$\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S})\right\} = \mathbb{E}\{S^2\left(S-\hat{S}\right)^2\} = \mathbb{E}\{S^4\} - 2\mathbb{E}\{S^3\hat{S}\} + \mathbb{E}\{S^2\hat{S}^2\} = \frac{5}{39} - 2\mathbb{E}\{S^3\hat{S}\} + \mathbb{E}\{S^2\hat{S}^2\}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S}_C)\right\} &= \frac{5}{39} - \frac{8}{5}\mathbb{E}\{S^3X^2\} + \frac{16}{25}\mathbb{E}\{S^2X^4\} \\
&= \frac{5}{39} - \frac{8}{5}\cdot\frac{2}{13} + \frac{16}{25}\cdot\frac{5}{26} = \frac{1}{195} \\
\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S}_L)\right\} &= \frac{5}{39} - \frac{22}{15}\mathbb{E}\{S^3X\} + \frac{11^2}{15^2}\mathbb{E}\{S^2X^2\} \\
&= \frac{5}{39} - \frac{22}{15}\cdot\frac{1}{6} + \frac{11^2}{15^2}\cdot\frac{5}{22} = \frac{7}{1170}
\end{aligned}$$

(d) El sesgo es

$$\begin{aligned}
B_C &= \mathbb{E}\left\{\hat{S}_C - S\right\} = \frac{4}{5}\mathbb{E}\left\{X^2\right\} - \mathbb{E}\{S\} = \frac{4}{7} - \frac{10}{21} = \frac{2}{21} \\
B_L &= \mathbb{E}\left\{\hat{S}_L - S\right\} = \frac{11}{15}\mathbb{E}\left\{X\right\} - \mathbb{E}\{S\} = \frac{11}{18} - \frac{10}{21} = \frac{17}{126}
\end{aligned}$$

(e) Utilizando la relación entre el sesgo y la varianza,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left\{S-\hat{S}_C\right\} &= \mathbb{E}\left\{\left(S-\hat{S}_C\right)^2\right\} - B_C^2 \\
&= \mathbb{E}\left\{S^2\right\} + \mathbb{E}\left\{\hat{S}_C^2\right\} - 2\mathbb{E}\left\{S\hat{S}_C\right\} - B_C^2 \\
&= \mathbb{E}\left\{S^2\right\} + \frac{16}{25}\mathbb{E}\left\{X^4\right\} - \frac{8}{5}\mathbb{E}\left\{SX^2\right\} - B_C^2 \\
&= \frac{5}{18} + \frac{16}{25}\cdot\frac{5}{9} - \frac{8}{5}\frac{10}{27} - \frac{4}{441} = \frac{419}{13230} \approx 0.03167
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left\{S-\hat{S}_L\right\} &= \mathbb{E}\left\{S^2\right\} + \mathbb{E}\left\{\hat{S}_L^2\right\} - 2\mathbb{E}\left\{S\hat{S}_L\right\} - B_L^2 \\
&= \mathbb{E}\left\{S^2\right\} + \frac{121}{225}\mathbb{E}\left\{X^2\right\} - \frac{22}{15}\mathbb{E}\left\{SX\right\} - B_L^2 \\
&= \frac{5}{18} + \frac{121}{225}\cdot\frac{5}{7} - \frac{22}{15}\frac{5}{12} - \frac{17^2}{126^2} = \frac{2587}{79380} \approx 0.03259
\end{aligned}$$

ET15

Las vv.aa. S y X obedecen a la ddp conjunta

$$p_{S,X}(s,x) = c, \quad 0 < s < 1, \;\; s < x < 2s$$

siendo c una constante.

(a) Tras representar el soporte de la ddp, calcúlese el valor de c.

(b) Establézcanse las expresiones de las ddp marginales $p_S(s)$ y $p_X(x)$.

(c) Determínese analíticamente la forma del estimador de error cuadrático medio mínimo de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MSE}}(X)$. Trácese dicha forma sobre la representación del soporte de $p_{S,X}(s,x)$, y discútase si es posible determinarla directamente.

(d) Calcúlese el error cuadrático medio $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\text{MSE}}(X)\right)^2\right\}$ que proporciona la aplicación del estimador anterior.

(e) Determínese la forma del estimador lineal de error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{LMSE}}(X)$. Trácese dicha forma sobre la representación del soporte de $p_{S,X}(s,x)$, y coméntese su aspecto.

(f) Calcúlese el error cuadrático medio $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\text{LMSE}}(X)\right)^2\right\}$ que proporciona la aplicación del estimador anterior, y compárese con $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\text{MSE}}(X)\right)^2\right\}$.

(g) ¿Qué ocurre si se percibe (p.ej., visualizando muestras) que hay un comportamiento (estadístico) distinto para $0 < X < 1$ y $1 < X < 2$, y se diseña un estimador lineal óptimo diferente para cada uno de estos intervalos ($\hat{S}_{A,\text{LMSE}}(X)$ y $\hat{S}_{B,\text{LMSE}}(X)$, respectivamente)? Verifíquese analíticamente la solución que se proponga.

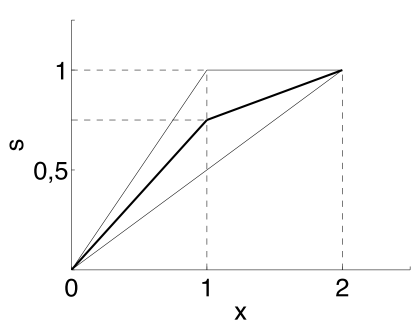
Solution:

(a) $c = 2$; que puede obtenerse considerando que el área del soporte es $1/2$.

(b) $p_S(s) = 2s, \; 0 < s < 1; \qquad p_X(x) = \begin{cases} x & ,0 < x < 1 \\ 2 - x & ,1 < x < 2 \end{cases}$

(c)

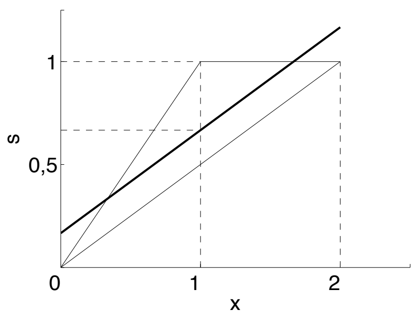
$$\hat{S}_{\text{MSE}}(X) = \begin{cases} \dfrac{3X}{4}, & 0 < X < 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X}{2} + 1\right), & 1 < X < 2 \end{cases}$$



Como los cortes para cada valor de X se hacen sobre una ddp uniforme, resultan los segmentos promedio de los bordes.

(d) $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\text{MSE}}(X)\right)^2\right\} = \dfrac{1}{96}$

(e) $\hat{S}_{\text{LMSE}}(X) = \dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{6}$



(f) $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\text{LMSE}}(X)\right)^2\right\} = \dfrac{11}{24}$; sensiblemente mayor que $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\text{MSE}}(X)\right)^2\right\}$

(g) $\hat{S}_{A,\text{LMSE}}(X) = \dfrac{3X}{4}$; $\hat{S}_{B,\text{LMSE}}(X) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X}{2}+1\right)$ que componen $\hat{S}_{\text{MSE}}(X)$.
$p_A(s,x)$ y $p_B(s,x)$ son uniformes, y los estimadores óptimos lineales y de la forma anterior.

ET16

Se desea estimar un vector aleatorio $\mathbf{S}$ a partir de un vector de observaciones $\mathbf{X}$ relacionado con él:

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{R}$$

donde H es una matriz conocida, $\mathbf{R}$ es un vector de ruido con distribución $\mathcal{N}(\mathbf{0}, v_r\mathbf{I})$, y $\mathbf{S}$ es el vector aleatorio a estimar, cuya distribución es $\mathcal{N}(\mathbf{m_S}, \mathbf{V_S})$. Sabiendo que $\mathbf{S}$ y $\mathbf{R}$ son vectores aleatorios independientes:

(a) Calcúlese el estimador ML de $\mathbf{S}$, $\hat{\mathbf{S}}_{\text{ML}}$.

(b) Determínese si dicho estimador es sesgado o no. Justifique su respuesta.

(c) Según se sabe, el estimador MSE de $\mathbf{S}$ viene dado por la expresión:

$$\hat{\mathbf{S}}_{\text{MSE}} = \left(\mathbf{H}^\top\mathbf{H} + v_r V_s^{-1}\right)^{-1}\mathbf{H}^\top\mathbf{X}$$

Calcúlese el sesgo de $\hat{\mathbf{S}}_{\text{MSE}}$ e indíquese en qué condiciones dicho sesgo tiende a 0.

Solution:

(a) $\hat{\mathbf{S}}_{\text{ML}} = \left(H^T H\right)^{-1} H^T\mathbf{X}$

(b) Es insesgado

(c) $\mathbb{E}\left\{\hat{\mathbf{S}}_{\text{MSE}} - \mathbf{S}\right\} = \left(\mathbf{H}^\top\mathbf{H} + v_r V_s^{-1}\right)^{-1}\mathbf{H}^\top\mathbf{H}\mathbf{m_S} - \mathbf{m_S}$. El sesgo tiende a anularse cuando la potencia de ruido tiende a 0.

ET17

Se dispone de K muestras, $\{x_k\}_{k=0}^{K-1}$, tomadas independientemente, de una v.a. X cuya d.d.p.

viene dada por

$$p_X(x) = \frac{1}{bx^2} \exp\left(-\frac{1}{bx}\right), \qquad x \geq 0$$

con $b > 0$.

(a) Determine $\hat{b}_{\mathrm{ML}}$ en función de dichas muestras.

(b) Verifíque que la v.a. $Y = 1/X$ sigue una d.d.p. $p_Y(y)$ de tipo exponencial unilateral, y establézca el valor de la media de dicha distribución.

(c) Considerando todo lo que antecede, ¿es $\hat{B}_{\mathrm{ML}}$ un estimador insesgado?

Solution:

(a) Maximizando el logaritmo de la verosimilitud, podemos escribir (suponiendo que, de acuerdo con el modelo, todas las muestras son no negativas)

$$\begin{aligned}
\hat{b}_{\mathrm{ML}} &= \underset{b}{\operatorname{argmax}} \sum_{k=0}^{K-1} \log\left(p_X(x_k)\right) \\
&= \underset{b}{\operatorname{argmax}} \sum_{k=0}^{K-1} \log\left(\frac{1}{bx_k^2} \exp\left(-\frac{1}{bx_k}\right)\right) \\
&= \underset{b}{\operatorname{argmax}} \left(-K\log(b) - 2\sum_{k=0}^{K-1} \log\left(x_k\right) - \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{x_k}\right) \\
&= \underset{b}{\operatorname{argmax}} \left(-K\log(b) - \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{x_k}\right) \\
&= \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{x_k}
\end{aligned}$$

donde el último paso se ha resuelto por derivación.

(b)

$$\begin{aligned}
p_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy}P\{Y \leq y\} = \frac{d}{dy}P\left\{\frac{1}{X} \leq y\right\} \\
&= \frac{d}{dy}P\left\{X \geq \frac{1}{y}\right\} = \frac{d}{dy}\left(1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)\right) = \frac{1}{y^2}p_X\left(\frac{1}{y}\right) \\
&= \frac{1}{b}\exp\left(-\frac{y}{b}\right), \qquad y \geq 0
\end{aligned}$$

(c) Dado que

$$\hat{B}_{\mathrm{ML}} = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{X_k}$$

la media del estimador es

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\hat{B}_{\mathrm{ML}}\} &= \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{E}\left\{\frac{1}{X_k}\right\} = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{X}\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{Y\right\} = \int_0^\infty y\frac{1}{b}\exp\left(-\frac{y}{b}\right) = b
\end{aligned}$$

Por tanto, $\hat{B}_{\mathrm{ML}}$ es insesgado

ET18

Considere la familia de funciones de coste dadas por

$$c(S,\hat{S}) = \frac{1}{N+1}\hat{S}^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}S^{N+1} - \frac{1}{N}S\hat{S}^N$$

siendo N un número entero no negativo e impar. Suponga, asimismo, que

$$p_{S,X}(s,x) = \frac{1}{\lambda x}\exp\left(-\frac{s}{x} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad s \geq 0, \qquad x \geq 0, \qquad \lambda > 0$$

(a) Determine el estimador bayesiano de S a la vista de X para los costes dados.

(b) Determine el riesgo mínimo.

(c) Determine el coeficiente w que minimiza el coste medio del estimador de la forma

$$\hat{S}_L = wX^m$$

siendo m un entero positivo.

Indicación: $\int_0^\infty x^N \exp(-x)\, dx = N!$

Solution:

(a) El riesgo condicional está dado por

$$\begin{aligned} R_{\hat{s}} &= \mathbb{E}\{c(S,\hat{s})|\mathbf{x}\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\frac{1}{N+1}\hat{s}^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}S^{N+1} - \frac{1}{N}S\hat{s}^N \mid x\right\} \\ &= \frac{1}{N+1}\hat{s}^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}\mathbb{E}\left\{S^{N+1} \mid x\right\} - \frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{S \mid x\right\}\hat{s}^N \end{aligned}$$

Dado que este riesgo es una función derivable de $\hat{s}$, su mínimo debe estar en un punto estacionario

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\hat{s}}}{\partial \hat{s}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \hat{s}^N - \mathbb{E}\left\{S \mid x\right\}\hat{s}^{N-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \hat{s}^{N-1}\left(\hat{s} - \mathbb{E}\left\{S \mid x\right\}\right) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el minimizador del riesgo condicional es

$$\hat{s}^* = \mathbb{E}\{S \mid x\}.$$

Para calcularlo, necesitamos la distribución a posteriori de S. Sabiendo que

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{S,X}(s,x)ds = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda x}\exp\left(-\frac{s}{x} - \frac{x}{\lambda}\right)ds \\ &= \frac{1}{\lambda x}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{x}\right)ds = \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

resulta

$$p_{S|X}(s|x) = \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_X(x)} = \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{s}{x}\right)$$

y por tanto

$$\hat{s}^* = \mathbb{E}\{S \mid x\} = \int_{-\infty}^{\infty} s p_{S|X}(s|x)ds = \int_0^\infty \frac{s}{x}\exp\left(-\frac{s}{x}\right)ds = x$$

(b) El mínimo riesgo condicional será

$$\begin{aligned}
R_{\hat{s}} &= \frac{1}{N+1}\left(\hat{s}^*\right)^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}\mathbb{E}\left\{S^{N+1} \mid x\right\} - \frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{S \mid x\right\}\left(\hat{s}^*\right)^N \\
&= \frac{1}{N+1}x^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}\mathbb{E}\left\{S^{N+1} \mid x\right\} - \frac{1}{N}x^{N+1} \\
&= \frac{1}{N(N+1)}\left(\int_0^\infty \frac{s^{N+1}}{x}\exp\left(-\frac{s}{x}\right)ds - x^{N+1}\right) \\
&= \frac{(N+1)!-1}{N(N+1)}x^{N+1}
\end{aligned}$$

y, por tanto, el riesgo mínimo se puede calcular como

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{c(S,\hat{S}\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{E}\{c(S,\hat{s})|\mathbf{x}\}p_X(x)dx \\
&= \frac{(N+1)!-1}{\lambda N(N+1)}\int_0^\infty x^{N+1}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)dx \\
&= \frac{(N+1)!-1}{N(N+1)}(N+1)!\lambda^{N+1} \\
&= (N+1)!-1)(N-1)!\lambda^{N+1}
\end{aligned}$$

(c) Si $\hat{S} = wX^m$, el riesgo será

$$\begin{aligned}
R &= \mathbb{E}\{c(S,\hat{s})\} \\
&= \frac{1}{N+1}\mathbb{E}\left\{\hat{S}^{N+1}\right\} + \frac{1}{N(N+1)}\mathbb{E}\left\{S^{N+1}\right\} - \frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{S\hat{S}^N\right\} \\
&= \frac{1}{N+1}\mathbb{E}\left\{X^{m(N+1)}\right\}w^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}\mathbb{E}\left\{S^{N+1}\right\} - \frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{SX^{mN}\right\}w^N
\end{aligned}$$

Por derivación, esto es mínimo cuando

$$\mathbb{E}\left\{X^{m(N+1)}\right\}w^N - \mathbb{E}\left\{SX^{mN}\right\}w^{N-1} = 0$$

esto es

$$w = \frac{\mathbb{E}\left\{SX^{mN}\right\}}{\mathbb{E}\left\{X^{m(N+1)}\right\}}$$

El numerador se puede calcular como

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{SX^{mN}\right\} &= \int_0^\infty \mathbb{E}\left\{SX^{mN} \mid x\right\}p_X(x)dx \\
&= \int_0^\infty x^{mN}\mathbb{E}\left\{S \mid x\right\}p_X(x)dx \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x^{mN+1}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)dx = \lambda^{mN+1}(mN+1)!
\end{aligned}$$

y el denominador es

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{X^{m(N+1)}\right\} &= \int_0^\infty x^{m(N+1)}p_X(x)dx \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x^{m(N+1)}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)dx = \lambda^{m(N+1)}(m(N+1))!
\end{aligned}$$

Por tanto

$$w = \frac{(Nm+1)!}{(Nm+m)!\lambda^{m-1}}$$

ET19

La densidad de probabilidad tipo Erlang de orden N viene dada por la expresión

$$p_X(x) = \frac{a^N x^{N-1} \exp(-ax)}{(N-1)!} \quad x > 0, \quad a > 0$$

Supóngase que N es conocida. Considerando que la media viene dada por $m = N/a$, determine:

(a) El estimador ML de la media, $\hat{M}_{\mathrm{ML}}$, a partir de K observaciones independientes de la variable.

(b) El sesgo condicional de $\hat{M}_{\mathrm{ML}}$.

(c) ¿Es $\hat{M}_{\mathrm{ML}}$ un estimador consistente en MSE?

Solution:

(a) $\hat{M}_{\mathrm{ML}} = \dfrac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} X_k$

(b) Es insesgado

(c) $\mathrm{var}\left\{\hat{M}_{\mathrm{ML}}\right\} = \dfrac{v_x}{K}$, luego es consistente en MSE

ET20

La variable $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^T$ se distribuye según una ddp de media $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ y matriz de covarianza

$$V_{XX} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule los coeficientes (w_0, w_1 y w_2) del estimador lineal de error cuadrático medio mínimo de X_3 a la vista de X_1 y X_2,

$$\hat{X}_{3,\mathrm{LMSE}} = w_0 + w_1 X_1 + w_2 X_2$$

(b) Calcule el error cuadrático medio $\mathbb{E}\left\{\left(X_3 - \hat{X}_{3,\mathrm{LMSE}}\right)^2\right\}$.

Solution:

(a) Llamando

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

el estimador LMMSE estará dado por el vector de coeficientes

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{R}_{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{r}_{X_3\mathbf{Z}} = \mathbb{E}\{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\intercal\}^{-1} \mathbb{E}\{X_3 \mathbf{Z}\} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{E}\{X_1\} & \mathbb{E}\{X_2\} \\ \mathbb{E}\{X_1\} & \mathbb{E}\{X_1^2\} & \mathbb{E}\{X_1X_2\} \\ \mathbb{E}\{X_2\} & \mathbb{E}\{X_1X_2\} & \mathbb{E}\{X_2^2\} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{X_3\} \\ \mathbb{E}\{X_1X_3\} \\ \mathbb{E}\{X_2X_3\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por tanto

$$\hat{X}_{3,\text{LMSE}} = -\frac{1}{5}X_1 + \frac{4}{5}X_2$$

(b)

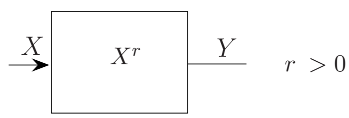
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{\left(X_3 - \hat{X}_{3,\text{LMSE}}\right)^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{\left(X_3 + \frac{1}{5}X_1 - \frac{4}{5}X_2\right)^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{X_3^2\right\} + \frac{1}{25}\mathbb{E}\left\{X_1^2\right\} + \frac{16}{25}\mathbb{E}\left\{X_2^2\right\} + \frac{2}{5}\mathbb{E}\left\{X_3X_1\right\} - \frac{8}{5}\mathbb{E}\left\{X_3X_2\right\} - \frac{8}{25}\mathbb{E}\left\{X_1X_2\right\} \\
&= 3 + \frac{3}{25} + \frac{16}{25}\cdot 3 + \frac{2}{5}\cdot 1 - \frac{8}{5}\cdot 2 - \frac{8}{25}\cdot 2 \\
&= \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

ET21

La v.a. X con ddp

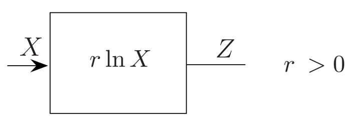
$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se transforma como indica en la figura, dando lugar a la v.a. observable Y.



(a) Obténgase el estimador de máxima verosimilitud de r, $\hat{R}_{\text{ML}}$, a partir de K observaciones de Y tomadas de forma independiente.

(b) Considere la situación



y obtenga $\hat{R}_{\text{ML}}$ de K observaciones de Z tomadas independientemente. Comente el resultado.

Solution:

(a) $\hat{R}_{\text{ML}} = -\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\ln Y_k$. Se está identificando el parámetro desconocido de la transformación.

(b) $\hat{R}_{\text{ML}} = -\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}Z_k$. Coincide con el anterior: $Z = \ln Y$, ya que implica una transformación invertible de Y.

ET22

Se mide el parámetro determinista desconocido s, $s > 0$, mediante dos sistemas, que proporcionan las observaciones

$$X_i = A_i s + N_i, \quad i = 1, 2$$

siendo $\{A_i\}, \{N_i\}$, vv.aa. gaussianas e independientes entre sí, con medias $\mathbb{E}\{A_i\} = 1, \mathbb{E}\{N_i\} = 0$, y varianzas $\{v_{Ai}\}$, $\{v_{Ni}\}$, respectivamente $(i = 1, 2)$.

(a) Establézcase la expresión que proporciona el estimador ML de s, $\hat{S}_{\mathrm{ML}}$.

(b) Calcule $\hat{S}_{\mathrm{ML}}$ para el caso particular $v_{Ai} = 0, i = 1, 2$.

(c) Calcule $\hat{S}_{\mathrm{ML}}$ para el caso particular $v_{Ni} = 0, i = 1, 2$.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\mathrm{ML}} = \mathrm{argmin}_s \left\{ \ln\left[(s^2 v_{A1} + v_{N1})(s^2 v_{A2} + v_{N2})\right] + \frac{(s - X_1)^2}{s^2 v_{A1} + v_{N1}} + \frac{(s - X_2)^2}{s^2 v_{A2} + v_{N2}} \right\}$

(b) $\hat{S}_{\mathrm{ML}} = \frac{v_{N2} X_1 + v_{N1} X_2}{v_{N1} + v_{N2}}$

(c) $\hat{S}_{\mathrm{ML}} = \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{X_1}{v_{A1}} + \frac{X_2}{v_{A2}}\right)^2 + 8\left(\frac{X_1^2}{v_{A1}} + \frac{X_2^2}{v_{A2}}\right)} - \left(\frac{X_1}{v_{A1}} + \frac{X_2}{v_{A2}}\right)$

ET23

Sean X y S dos variables aleatorias con d.d.p. conjunta

$$p_{X,S}(x, s) = \begin{cases} \alpha & ; \quad 0 < x < 1,\ 0 < s < 2(1 - x) \\ 0 & ; \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

siendo α una constante.

(a) Utilizando la representación del soporte de la d.d.p., determine el valor de α.

(b) Encuentre la función de densidad de probabilidad de S a la vista de X, $p_{S|X}(s|x)$.

(c) Calcule el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\mathrm{MSE}}$

(d) Calcule el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}}$.

Solution:

(a) $\alpha = 1$

(b) $p_{S|X}(s|x) = \frac{1}{2(1-x)}$

(c) $\hat{S}_{\mathrm{MSE}} = 1 - X$

(d) $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}} = 1 - X$

ET24

Las variables aleatorias S y X están relacionadas por la ecuación estocástica

$$X = S + N$$

siendo la función de densidad de probabilidad de S

$$p_S(s) = s \exp(-s) \quad s \geq 0$$

y N un ruido aditivo, independiente de S, con distribución

$$p_N(n) = \exp(-n) \quad n \geq 0$$

.

(a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de S, $\widehat{S}_{\mathrm{ML}}$.

(b) Determine la función de densidad de probabilidad conjunta de X y S, $p_{X,S}(x,s)$, y la función de densidad de probabilidad de S a la vista de X, $p_{S|X}(s|x)$.

(c) Obtenga el estimador máximo a posteriori de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\mathrm{MAP}}$.

(d) Obtenga el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\mathrm{MSE}}$.

(e) Calcule el sesgo de los estimadores obtenidos anteriormente, $\widehat{S}_{\mathrm{ML}}$, $\widehat{S}_{\mathrm{MAP}}$ y $\widehat{S}_{\mathrm{MSE}}$.

(f) Indique qué estimador tiene una menor varianza. Razone la respuesta sin calcular las varianzas de los estimadores.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\mathrm{ML}} = X$

(b) $p_{X,S}(x,s) = s\exp(-x), \qquad 0 \le s \le x$

$p_{S|X}(s|x) = \dfrac{2s}{x^2}, \qquad 0 \le s \le x$

(c) $\hat{S}_{\mathrm{MAP}} = X$

(d) $\hat{S}_{\mathrm{MSE}} = \dfrac{2}{3}X$

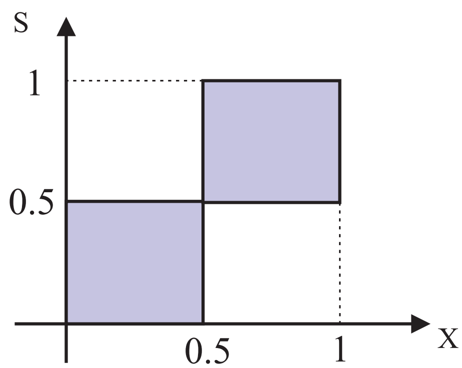
(e) $\mathbb{E}\left\{\hat{S}_{\mathrm{ML}} - S\right\} = \mathbb{E}\left\{\hat{S}_{\mathrm{MAP}} - S\right\} = 1$

$\mathbb{E}\left\{\hat{S}_{\mathrm{MSE}} - S\right\} = 0$

$\mathrm{var}\left\{\hat{S}_{\mathrm{MSE}}\right\} < \mathrm{var}\left\{\hat{S}_{\mathrm{MAP}}\right\} = \mathrm{var}\left\{\hat{S}_{\mathrm{ML}}\right\}$

ET25

La región sombreada de la figura ilustra el dominio de la función de distribución conjunta de S y X, i.e., el conjunto de puntos para los que $p_{X,S}(x,s) \neq 0$.



Responda a las siguientes cuestiones justificando sus respuestas:

(a) Si se sabe que $p_{X,S}(x,s)$ es constante en el dominio de definición, ¿cuál es el estimador MSE de S a la vista de X? Represente gráficamente dicho estimador.

(b) ¿Existe alguna $p_{X,S}(x,s)$ con el dominio anterior para la cual el estimador MSE de S a la vista de X sea $\widehat{S}_{\mathrm{MSE}} = X/2$?

(c) Justifique si existe alguna $p_{X,S}(x,s)$ con el dominio anterior tal que $\widehat{S} = 0.5$ sea:

- El estimador de mínimo error cuadrático de S a la vista de X.
- El estimador de mínimo error absoluto de S a la vista de X.

- El estimador de máximo a posteriori de S a la vista de X.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MSE}} = 0.25$ si $0 < x < 0.5$ y $\widehat{S}_{\text{MSE}} = 0.75$ si $0.5 < x < 1$

(b) Para $0.5 < x < 1$, $p_{S|X}(s|x)$ está definida entre $0.5 < s < 1$, por lo que $X/2$ no puede ser el valor medio de $p_{S|X}(s|x)$

(c) $\widehat{S} = 0.5$ no puede ser ni la media ni la mediana de $p_{S|X}(s|x)$, pero puede ser su máximo. Luego, $\widehat{S} = 0.5$ no puede ser ni $\widehat{S}_{\text{MSE}}$, ni $\widehat{S}_{\text{MAD}}$, pero puede ser $\widehat{S}_{\text{MAP}}$.

ET26

La variable aleatoria S sigue una distribución exponencial

$$p_S(s) = \lambda e^{-\lambda s}, \qquad s > 0$$

siendo $\lambda > 0$. La variable aleatoria discreta X está relacionada con S mediante una distribución de Poisson, es decir

$$P_{X|S}(x|s) = \frac{s^x e^{-s}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Determine el estimador ML de S a la vista de x

(b) Suponga que se observan K realizaciones independientes $\{(x_k, s_k), k = 0, \ldots, K-1\}$ de (X, S). Determine el estimador ML de λ basado en ellas.

(c) Determine el estimador MAP de S a la vista de $x = 1$.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\text{ML}} = X$

(b) $\hat{\lambda}_{\text{ML}} = \dfrac{K}{\sum_{k=0}^{K-1} s_k}$

(c) $\hat{S}_{\text{MAP}} = \dfrac{X}{1+\lambda}$

ET27

N.A.

ET28

N.A.

ET29

N.A.

ET30

N.A.

ET31

N.A.

2. Problemas adicionales

ET32

Considérese la observación

$$X = S + N$$

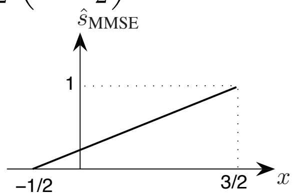
con la señal S inmersa en un ruido N independiente de ella, y siendo sus densidades de probabilidad

$$p_S(s) = \begin{cases} 1, & 0 < s < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} = \Pi(s - 1/2)$$

$$p_N(n) = \begin{cases} 1, & -1/2 < n < 1/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} = \Pi(n)$$

Establézcase el estimador de error cuadrático medio mínimo de S, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$. Discútase el resultado.

Solution: $\hat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{2}\right) \qquad (-1/2 < x < 1/2)$



Las variaciones entre los casos extremos ($\hat{s}_{\text{MMSE}}(-1/2) = 0$, $\hat{s}_{\text{MMSE}}(3/2) = 1$) se atribuyen linealmente al ruido

ET33

Se dispone de K muestras, tomadas independientemente, de una variable X laplaciana $L(m, v)$

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2v}} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{v}}|x - m|\right)$$

Obtener el estimador ML conjunto de m, v.

Solution:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\text{ML}} &= \text{med}_K\{X^{(k)}\} \quad \text{(mediana muestral)} \\ \hat{V}_{\text{ML}} &= \frac{2}{K^2}\left(\sum_k |X^{(k)} - \hat{M}_{\text{ML}}|\right)^2 \end{aligned}$$

ET34

A partir de las variables aleatorias unidimensionales S y R, con densidad de probabilidad conjunta

$$G\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right),$$

se forma la observación $X = S + R$

(a) Determínese $\hat{S}_{\text{MSE}}$.

(b) ¿Era previsible el resultado? (Considérese la relación que existe entre $\mathbb{E}\{R|x\}$ y $\mathbb{E}\{S|x\}$).

(c) Calcule el error cuadrático medio.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\mathrm{MSE}} = X/2$

(b) $\mathbb{E}\{R|x\} = \mathbb{E}\{S|x\}$ (hay total simetría)
$\mathbb{E}\{X|x\} = x = \mathbb{E}\{S + R|x\} = \mathbb{E}\{S|x\} + \mathbb{E}\{R|x\}$

(c) $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}\right)^2\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rho$

ET35

Sean S, X_1 y X_2 tres variables aleatorias de medias nulas tales que:

- la matriz de covarianzas de X_1 y X_2 es: $\mathbf{V}_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$
- el vector de covarianzas cruzadas de S con X tiene como expresión: $\mathbf{v}_{sx} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(a) Calcúlense los coeficientes w_1 y w_2 del estimador lineal de mínimo error cuadrático medio

$$\hat{S}_{\mathrm{LMSE}} = w_0 + w_1 X_1 + w_2 X_2$$

(b) Determínese el valor cuadrático medio del error de estimación, $\hat{E} = S - \hat{S}_{\mathrm{LMSE}}$.

(c) Discútase el papel de la variable X_2 , que, según se ve, está incorrelacionada con la variable S a estimar.

Solution:

(a) $w_1 = \dfrac{1}{1-\rho^2} \qquad w_2 = -\dfrac{\rho}{1-\rho^2}$

(b) $\mathbb{E}\{\hat{E}^2\} = \mathbb{E}\{S^2\} - \dfrac{1}{1-\rho^2}$

(c) Interviene combinándose con X_1 para conseguir una mayor proyección de S.

ET36

Se desea estimar la v.a. S a partir de observaciones de las vv.aa. X_1 y X_2; es decir, obtener

$$\hat{S}_{\mathrm{LMSE}}(X_1, X_2) = w_0 + w_1 X_1 + w_2 X_2$$

Las medias de dichas variables son $\mathbb{E}\{S\} = 1$, $\mathbb{E}\{X_1\} = 1$ y $\mathbb{E}\{X_2\} = 0$, y sus correlaciones $\mathbb{E}\{S^2\} = 4$, $\mathbb{E}\{X_1^2\} = 3$, $\mathbb{E}\{X_2^2\} = 2$, $\mathbb{E}\{SX_1\} = 2$, $\mathbb{E}\{SX_2\} = 0$ y $\mathbb{E}\{X_1X_2\} = 1$.

(a) Calcúlense los coeficientes $\{w_i\}, i = 0, 1, 2$, de $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}}(X_1, X_2)$.

(b) Como se ha visto en a), $v_{SX_2} = 0$ ¿Por qué resulta $w_2 \neq 0$?

(c) Determínese el valor cuadrático medio del error de estimación cometido al usar $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}}(X_1, X_2)$.

(d) ¿Cómo y cuánto varía el error cuadrático medio si se utiliza $\hat{S}'_{\mathrm{LMSE}}(X_1) = w'_0 + w'_1 X_1$ en vez de $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}}(X_1, X_2)$?

Solution:

(a) $w_0 = 1/3,\ w_1 = 2/3,\ w_2 = -1/3$

(b) Porque combinar X_1 y X_2 es mejor que utilizar únicamente X_1

(c) $\mathbb{E}\{E^2\} = 7/3$

(d) $(w_0^{'} = 1/2;\ w_1^{'} = 1/2)$
$\mathbb{E}\{E^{'2}\} = 3$
Aumenta 2/3 (lo que confirma lo dicho en b))

ET37

N.A.