Teoría de la Estimación: Problemas

Los problemas y ejercicios que se incluyen pertenecen en su mayoría a exámenes de asignaturas relacionadas con la Teoría de la Estimación. Los números entre paréntesis indican los temas tratados por cada problema, entre los siguientes:

1.1. Visión general de los problemas de estimación.

1.2. Teoría Bayesiana de la Estimación.

1.3. Estimadores Bayesianos de uso frequente: MSE, MAP, MAD.

1.4. Estimación de Máxima Verosimilitud.

1.5. Estimación con distribuciones gaussianas.

1.6. Estimación lineal de mínimo error cuadrático medio.

1.7. Caracterización de Estimadores (Sesgo y Varianza).

1.8. Diseño de Estimadores bajo enfoque máquina

Notación:

- $\hat{S}_{\text{MSE}}$: Estimador de mínimo error cuadrático medio.
- $\hat{S}_{\text{MAD}}$: Estimador de mínimo error absoluto medio.
- $\hat{S}_{\text{MAP}}$: Estimador de máximo a posteriori.
- $\hat{S}_{\text{ML}}$: Estimador de máxima verosimilitud.
- $\hat{S}_{\text{LMSE}}$: Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio.

Ejercicio 1 (1.6)

Se desea construir un estimador lineal de mínimo error cuadrático medio que permita estimar la variable aleatoria S a partir de las vv.aa. X_1 y X_2. Sabiendo que

$$\begin{array}{lll}
\mathbb{E}\{S\} = \frac{1}{2} & \mathbb{E}\{X_1\} = 1 & \mathbb{E}\{X_2\} = 0 \\
\mathbb{E}\{SX_1\} = 1 & \mathbb{E}\{SX_2\} = 2 & \mathbb{E}\{X_1X_2\} = \frac{1}{2} \\
\mathbb{E}\left\{S^2\right\} = 4 & \mathbb{E}\left\{X_1^2\right\} = \frac{3}{2} & \mathbb{E}\left\{X_2^2\right\} = 2
\end{array}$$

obténganse los pesos del estimador $\hat{S}_{\text{LMSE}} = w_0 + w_1 X_1 + w_2 X_2$ y calcúlese su error cuadrático medio $\mathbb{E}\left\{(S - \hat{S}_{\text{LMSE}})^2\right\}$.

Solution: La resolución de este problema puede encontrarse en

`http://decisionyestimacion.blogspot.com/2013/05/p1-estimacion.html`

$$w_0 = \frac{1}{2} \quad w_1 = 0 \quad w_2 = 1$$
$$\mathbb{E}\left\{(S - \hat{S}_{\text{LMSE}})^2\right\} = \frac{7}{4}$$

Ejercicio 2 (1.2; 1.3; 1.7)

Se desea estimar la variable aleatoria S a partir de la variable aleatoria X, conociendo la función de densidad de probabilidad conjunta de ambas, dada por:

$$p_{S,X}(s,x) = \frac{6}{7}\left(x+s\right)^2, \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1$$

(a) Determine $p_X(x)$.

(b) Determine $p_{S|X}(s|x)$.

(c) Calcule el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MSE}}$.

(d) Calcule el estimador MAP de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MAP}}$.

(e) Determine el sesgo y la varianza del estimador MAP.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_0^1 p_{S,X}(s,x)ds = \int_0^1 \frac{6}{7}\left(x+s\right)^2 ds \\ &= \frac{2}{7}\left(3x^2+3x+1\right), \qquad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

(b)

$$p_{S|X}(s|x) = \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_X(x)} = \frac{\left(x+s\right)^2}{x^2+x+\frac{1}{3}}, \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1$$

(c)

$$\begin{aligned} \hat{s}_{\text{MSE}} = \mathbb{E}\{S|x\} &= \int_0^1 s p_{S|X}(s|x)ds = \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{3}}\int_0^1 s\left(x+s\right)^2 ds \\ &= \frac{\frac{x^2}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}}{x^2+x+\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

(d) Dado que $p_{S|X}(s|x)$ es creciente con s para $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq s \leq 1$, $\hat{S}_{\text{MAP}} = 1$.

(e) Sabiendo que

$$\begin{aligned} p_S(s) &= \int_0^1 p_{S,X}(s,x)ds = \int_0^1 \frac{6}{7}\left(x+s\right)^2 dx \\ &= \frac{2}{7}\left(3s^2+3s+1\right), \quad 0 < s < 1 \end{aligned}$$

se tiene

$$\mathbb{E}\left\{S\right\} = \int_0^1 s p_S(s)ds = \frac{2}{7}\int_0^1 s\left(3s^2+3s+1\right)ds = \frac{9}{14},$$

y por tanto el sesgo es

$$\mathbb{E}\{S\} - \mathbb{E}\{\hat{S}_{\text{MAP}}\} = \frac{9}{14} - 1 = -\frac{5}{14}$$

Dado que $\hat{S}_{\text{MAP}} = 1$ (constante e independiente de X), su varianza es nula.

Ejercicio 3 (1.7)

Se desea estimar la media m de una v.a. X con varianza v, para lo que se dispone de un conjunto de $K+1$ observaciones independientes $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{K+1}$ de dicha v.a. Considérense los estimadores siguientes:

$$\hat{M}_1 = \frac{a}{K}\sum_{k=1}^{K} X^{(k)} \qquad \hat{M}_2 = X^{(K+1)} \qquad \hat{M}_3 = \lambda\hat{M}_1 + (1-\lambda)\,\hat{M}_2$$

siendo a una constante positiva y estrictamente menor que uno, y λ otra constante a determinar.

(a) Compárense los estimadores $\hat{M}_1$ y $\hat{M}_2$ en base a sus sesgos y varianzas.

(b) Obténgase el sesgo, la varianza, y el error cuadrático medio (MSE) del estimador $\hat{M}_3$, simplificando el resultado obtenido para $K \longrightarrow \infty$.

Solution:

(a) $\mathbb{E}\left\{m - \hat{M}_1\right\} = (1-a)m, \qquad \mathbb{E}\left\{m - \hat{M}_2\right\} = 0,$

$\text{Var}\left\{\hat{M}_1\right\} = \dfrac{a^2 v}{K} \qquad \text{Var}\left\{\hat{M}_2\right\} = v.$

(b) $\mathbb{E}\left\{m - \hat{M}_3\right\} = \lambda\,(1-a)\,m \qquad \text{Var}\left\{\hat{M}_3\right\} = \dfrac{\lambda^2 a^2 v}{K} + v\,(1-\lambda)^2$

$\mathbb{E}\left\{\left(\hat{M}_3 - m\right)^2\right\} = \dfrac{\lambda^2 a^2 v}{K} + v\,(1-\lambda)^2 + \lambda^2\,(a-1)^2\,m^2$

Si $K \longrightarrow \infty$, $\text{Var}\left\{\hat{M}_3\right\} = v\,(1-\lambda)^2$ y $\mathbb{E}\left\{\left(\hat{M}_3 - m\right)^2\right\} = v\,(1-\lambda)^2 + \lambda^2\,(a-1)^2\,m^2$.

Ejercicio 4 (1.7)

Considérense dos variables aleatorias unidimensionales S y X. La variable X está caracterizada por la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se sabe que el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X es

$$\hat{S}_{\text{MMSE}}(X) = -\frac{1}{2}\text{signo}\,(X) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & X \geq 0 \\ \frac{1}{2}, & X < 0 \end{cases}$$

También se sabe que el error cuadrático medio que comete este estimador es $\frac{1}{12}$. Sin embargo, se prefiere usar el siguiente estimador

$$\hat{S}_1 = -X$$

(a) Determínese el sesgo del estimador $\hat{S}_1$.

(b) Calcúlense las siguientes esperanzas matemáticas: $\mathbb{E}\{SX\}$ y $\mathbb{E}\left\{S^2\right\}$.

(c) Determínese el error cuadrático medio que comete el estimador $\hat{S}_1$.

Solution:

(a) Es insesgado.

(b) $\mathbb{E}\{SX\} = -\dfrac{1}{4}$ y $\mathbb{E}\left\{S^2\right\} = \dfrac{1}{3}$

(c) El MSE de $\hat{S}_1$ es $\dfrac{1}{6}$.

Ejercicio 5 (1.6; 1.8)

Se desea construir un modelo de regresión lineal de bajo coste computacional para una variable aleatoria S. Se sabe que esta variable depende de otras tres variables aleatorias X_1, X_2 y X_3, que constituyen las observaciones. La siguiente tabla muestra cuatro realizaciones independientes del proceso aleatorio.

X_1	X_2	X_3	S
3	-1	0	-1
-2	0	1	-2
0	-1	2	0
-1	2	-3	3

El objetivo del problema consiste en evaluar dos estrategias para construir el citado regresor de bajo coste computacional:

- Construir un regresor lineal exacto de mínimo error cuadrático medio usando únicamente dos de las variables disponibles.
- Construir una aproximación al estimador lineal de mínimo error cuadrático medio usando las tres variables. La aproximación consiste en suponer que la matriz de covarianzas de las observaciones es diagonal.

Para ello:

(a) Determínese cuáles de las tres variables observables se van a incluir en el regresor del primer diseño. La selección se realiza en dos pasos: en primer lugar se elige la variable cuya covarianza muestral (i.e., estimada a partir de los datos) con S presenta un mayor valor absoluto. La segunda variable será aquella cuya covarianza muestral con la seleccionada en el primer paso tenga menor valor absoluto.

(b) Constrúyase el regresor lineal de S de mínimo error cuadrático medio empleando las dos variables elegidas en el apartado anterior.

(c) Constrúyase el estimador lineal aproximado especificado en el segundo diseño. Para ello, estímense en primer lugar los elementos de la diagonal de la matriz de covarianzas de las observaciones y el vector de covarianzas de las observaciones con S a partir de las muestras disponibles.

(d) ¿Cuál de los dos diseños propuestos obtiene un menor error cuadrático promedio sobre los datos disponibles?

Solution:

(a) $\bar{v}_{X_1,S} = -0.5$, $\bar{v}_{X_2,S} = 1.75$, $\bar{v}_{X_3,S} = -2.75$. La primera variable elegida es X_3.

$\bar{v}_{X_1,X_3} = 0.25$, $\bar{v}_{X_2,X_3} = -2$. La segunda variable elegida es X_1.

(b) $\hat{S}_1 = -0.087X_1 - 0.7795X_3$

(c) $\hat{S}_2 = -0.1429X_1 + 1.1667X_2 - 0.7857X_3$

(d) El error promedio de $\hat{S}_1$ es 1.3128. El error promedio de $\hat{S}_2$ es 3.3656. Es menor el error del primer diseño.

Ejercicio 6 (1.4; 1.7)

Una variable aleatoria X sigue una distribución exponencial unilateral con parámetro $a > 0$:

$$p_X(x) = \frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right) \quad x > 0$$

Como se sabe, la media y varianza de X están dadas por a y a^2, respectivamente.

(a) Determínese el estimador de máxima verosimilitud de a, $\hat{A}_{\mathrm{ML}}$, basado en un conjunto de K observaciones independientes de la variable aleatoria X, $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$.

(b) Se propone un nuevo estimador basado en el anterior y que obedece a la expresión:

$$\hat{A} = c \cdot \hat{A}_{\mathrm{ML}},$$

donde $0 \leq c \leq 1$ es una constante que permite un reescalado del estimador ML. Obténganse el sesgo al cuadrado, la varianza y el error cuadrático medio (MSE) del nuevo estimador, y represéntense todos ellos en una misma figura en función del valor de c.

(c) Determínese el valor de c que minimiza el MSE, c^*, y discútase su evolución conforme el número de observaciones disponibles aumenta. Calcúlese el MSE del estimador asociado a c^*.

(d) Obténgase el intervalo de valores de c para los que el MSE de $\hat{A}$ es menor que el MSE del estimador ML, y explíquese cómo varía dicho intervalo cuando $K \longrightarrow \infty$. Discútase el resultado obtenido.

Solution: A video resolution of this problem (in Spanish) can be found in

`http://decisionyestimacion.blogspot.com/2013/05/problema-6-estimacion.html`

(a) $\hat{A}_{\mathrm{ML}} = \dfrac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} X^{(k)}$

(b) $\hat{A} = \frac{c}{K}\sum_{k=1}^{K} X^{(k)}$

$\mathbb{E}\left\{\hat{A} - a\right\}^2 = (c-1)^2 a^2, \qquad \mathrm{Var}\left\{\hat{A}\right\} = \dfrac{c^2a^2}{K}, \qquad \mathbb{E}\left\{\left(\hat{A} - a\right)^2\right\} = (c-1)^2 a^2 + \dfrac{c^2a^2}{K}$

(c) $c^* = \dfrac{K}{K+1}, \qquad c^* \longrightarrow 1\ (K \longrightarrow \infty), \qquad \mathbb{E}\left\{\left(\hat{A} - a\right)^2\right\} = \dfrac{a^2}{K+1}\ (c = c^*)$

(d) El intervalo de valores es: $c \in \left[\dfrac{K-1}{K+1}, 1\right]$, que se estrecha según aumenta K.

Ejercicio 7 (1.8)

La intensidad que atraviesa la rama de un circuito viene caracterizada por la ecuación

$$i(t) = A\cos(\omega_{\mathrm{o}}t)e^{-\alpha t} + B\sin(\omega_{\mathrm{o}}t)e^{-\alpha t} + C$$

donde ω_{o} y α son dos constantes conocidas. Para la determinación de los parámetros del modelo, A, B y C, se dispone un conjunto de medidas de $i(t)$ para K instantes de tiempo, es decir, un conjunto de pares $\{t^{(k)}, i(t^{(k)})\}_{k=1}^{K}$. Proporciónense las expresiones que permiten obtener los parámetros A, B y C que minimizan el error cuadrático del modelo promediado sobre el conjunto de muestras disponibles.

Solution: Si definimos $x_1^{(k)} = \cos(\omega_{\mathrm{o}}t^{(k)})e^{-\alpha t^{(k)}}$ y $x_2^{(k)} = \sin(\omega_{\mathrm{o}}t^{(k)})e^{-\alpha t^{(k)}}$. Siendo $\mathbf{X}_{\mathrm{e}}$ la matriz extendida de observaciones $\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\}_{k=1}^{K}$ e $\mathbf{i}$ un vector con los datos $\{i(t^{(k)})\}_{k=1}^{K}$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \left(\mathbf{X}_{\mathrm{e}}^T\mathbf{X}_{\mathrm{e}}\right)^{-1}\mathbf{X}_{\mathrm{e}}^T\mathbf{i}$$

Ejercicio 8 (1.7)

Se desea estimar la media de una v.a. X a partir de un conjunto de K observaciones independientes $\{X^{(k)}\}_{k=1}^{K}$, para lo que se construye el siguiente estimador:

$$\hat{M} = \frac{a}{K}\sum_{k=1}^{K} X^{(k)},$$

siendo a una constante a determinar.

(a) Calcúlense el sesgo y la varianza del estimador en función del valor de a.

(b) ¿Para qué valor de a se minimiza la varianza? ¿Existe algún valor de a para el que el estimador sea insesgado?

(c) Obténgase el error cuadrático medio del estimador y el valor de a que lo minimiza.

Solution:

(a) $\mathbb{E}\left\{m - \hat{M}\right\} = (1-a)m$; $\mathrm{Var}\left\{\hat{M}\right\} = \dfrac{a^2 v}{K}$.

(b) La varianza se minimiza para $a = 0$ y el sesgo es nulo para $a = 1$.

(c) $\mathbb{E}\left\{(\hat{M} - m)^2\right\} = (a-1)^2 m^2 + \dfrac{a^2 v}{K}$. El valor de a que lo minimiza es $a^* = \dfrac{m^2}{m^2 + v/K}$.

Ejercicio 9 (1.5)

Para la estimación de una variable aleatoria S se dispone de las dos siguientes observaciones:

$$X_1 = S + N_1$$
$$X_2 = \alpha S + N_2$$

donde α es una constante conocida y S, N_1 y N_2 son variables aleatorias gaussianas independientes, de media nula y varianzas v_s, v_n y v_n, respectivamente.

(a) Calcúlense los estimadores de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X_1 y X_2, $\hat{S}_1$ y $\hat{S}_2$, respectivamente.

(b) Calcúlese el error cuadrático medio de cada uno de los estimadores del apartado anterior. ¿Cuál de ellos propociona menor error cuadrático medio? Discuta su respuesta para los distintos valores que pueda tomar el parámetro α.

(c) Determínese el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista del vector de observaciones $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.

Solution:

(a) S y X_2 son conjuntamente gaussianos, con medias

$$\begin{aligned} m_S &= 0 \\ m_{X_2} &= \alpha m_S + \mathbb{E}\{N_2\} = 0, \end{aligned}$$

varianzas v_s y

$$\begin{aligned} v_{X_2} &= \mathbb{E}\{(X_2 - m_{X_2})^2\} = \mathbb{E}\{X_2^2\} = \mathbb{E}\left\{(\alpha S + N_2)^2\right\} \\ &= \alpha^2 \mathbb{E}\{S^2\} + 2\alpha \mathbb{E}\{SN_2\} + \mathbb{E}\{N_2^2\} \\ &= \alpha^2 v_s + v_n \end{aligned}$$

respectivamente, y covarianza

$$\begin{aligned} v_{SX_2} &= \mathbb{E}\{(S - m_S)(X_2 - m_{X_2})\} = \mathbb{E}\{SX_2\} = \mathbb{E}\{S(\alpha S + N_2)\} \\ &= \alpha v_S \end{aligned}$$

Por tanto, el estimador de S basado en X_2 será

$$\begin{aligned} \hat{s}_2 = m_{S|X_2} &= m_S + \frac{v_{SX_2}}{v_{X_2}}(x_2 - m_{X_2}) = \frac{v_{SX_2}}{v_{X_2}} x_2 \\ &= \frac{\alpha v_s}{\alpha^2 v_s + v_n} x_2 \end{aligned}$$

Por otra parte, dado que la relación entre X_1 y S es formalmente equivalente a la de X_2 y S para $\alpha = 1$ resulta inmediato comprobar que el estimador de S dado X_1 es equivalente al anterior, tomando $\alpha = 1$, es decir

$$\hat{s}_1 = \frac{v_s}{v_s + v_n} x_2$$

(b) El error cuadrático medio (MSE) del estimador $\hat{S}_2$ puede calcularse como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_2\right)^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{\left(S - \frac{\alpha v_S}{\alpha^2 v_s + v_n} X_2\right)^2\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{S^2\right\} - 2\frac{\alpha v_s}{\alpha^2 v_s + v_n}\mathbb{E}\{SX_2\} + \left(\frac{\alpha v_s}{\alpha^2 v_s + v_n}\right)^2 \mathbb{E}\{X_2^2\} \\ &= v_s - 2\frac{\alpha v_s}{\alpha^2 v_s + v_n} v_{SX_2} + \left(\frac{\alpha v_s}{\alpha^2 v_s + v_n}\right)^2 v_{X_2} \\ &= v_s - \frac{\alpha^2 v_s^2}{\alpha^2 v_s + v_n} \\ &= \frac{v_s v_n}{\alpha^2 v_s + v_n} \end{aligned}$$

(también puede calcularse de un modo más directo sabiendo que el MSE debe coincidir con la varianza a posteriori, $v_{S|X_2}$).

Analogamente, el MSE del estimador $\hat{S}_1$ es equivalente a tomar $\alpha = 1$ en la expresión anterior

$$\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_1\right)^2\right\} = \frac{v_s v_n}{v_s + v_n}$$

Para $|\alpha| > 1$ el error cuadrático medio de $\hat{S}_2$ es menor que el de $\hat{S}_1$.

(c) Definiendo los vectores $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$, podemos expresar la ecuación del modelo como

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} S + \mathbf{N}$$

S y $\mathbf{X}$ son conjuntamente gaussianos, con medias

$$m_S = 0$$
$$\mathbf{m}_\mathbf{X} = \begin{bmatrix} m_{X_1} \\ m_{X_2} \end{bmatrix} = 0$$

varianzas v_s y

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_\mathbf{X} &= \mathbb{E}\{(\mathbf{X} - \mathbf{m}_\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathbf{m}_\mathbf{X})^\intercal\} = \mathbb{E}\{\mathbf{X}\mathbf{X}^\intercal\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} S + \mathbf{N}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} S + \mathbf{N}\right)^\intercal\right\} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}^\intercal \mathbb{E}\{S^2\} + \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}\mathbb{E}\{S\mathbf{N}^\intercal\} + \mathbb{E}\{S\mathbf{N}\}\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}^\intercal + \mathbb{E}\{\mathbf{N}\mathbf{N}^\intercal\} \\
&= v_s \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} + v_n \mathbf{I} \\
&= \begin{bmatrix} v_s + v_n & v_s\alpha \\ v_s\alpha & v_s\alpha^2 + v_n \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

respectivamente, y covarianzas

$$\mathbf{V}_{S\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} v_{SX_1} \\ v_{SX_2} \end{bmatrix}^\intercal = \begin{bmatrix} v_s \\ \alpha v_s \end{bmatrix}^\intercal$$

Por tanto el estimador de S basado en $\mathbf{X}$ será

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{S|\mathbf{X}} &= m_S + \mathbf{V}_{S\mathbf{X}}\mathbf{V}_\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_\mathbf{X}) = \mathbf{V}_{S\mathbf{X}}\mathbf{V}_\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x} \\
&= v_s \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}^\intercal \begin{bmatrix} v_s + v_n & v_s\alpha \\ v_s\alpha & v_s\alpha^2 + v_n \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x} \\
&= \frac{v_s}{(1+\alpha^2)v_s + v_n}(x_1 + \alpha x_2)
\end{aligned}$$

Ejercicio 10 (1.6)

Sabiendo que la f.d.p. conjunta de las vv.aa. X y S viene dada por

$$p_{X,S}(x,s) = \begin{cases} x + s & 0 \le x \le 1 \text{ y } 0 \le s \le 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Obténgase el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{LMSE}} = w_0 + w_1 X$.

Solution: $\hat{S}_{\text{LMSE}} = \dfrac{7}{11} - \dfrac{X}{11}$

Ejercicio 11 (1.2; 1.3; 1.4; 1.7)

Se desea estimar el valor de la v.a. positiva S a partir de una observación aleatoria X, relacionada con S mediante

$$X = R/S$$

siendo R una v.a. independiente de S con distribución

$$p_R(r) = \exp(-r), \quad r > 0$$

(a) Calcúlese la verosimilitud, $p_{X|S}(x|s)$.

(b) Obténgase el estimador de máxima verosimilitud de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{ML}}$.

Sabiendo que la f.d.p. de S es $p_S(s) = \exp(-s), \quad s > 0$, calcúlense:

(c) La distribución conjunta de S y X, $p_{S,X}(s,x)$, y la distribución a posteriori de S, $p_{S|X}(s|x)$.

(d) El estimador de máximo a posteriori de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MAP}}$.

(e) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MSE}}$.

(f) El sesgo de los estimadores $\hat{S}_{\text{MAP}}$ y $\hat{S}_{\text{MSE}}$.

Solution:

(a) $p_{X|S}(x|s) = s\,\exp(-xs), \quad x > 0$.

(b) $\hat{S}_{\text{ML}} = \dfrac{1}{X}$.

(c) $p_{X,S}(x,s) = s\,\exp\left(-s(x+1)\right), \quad x, s > 0;$

$p_{S|X} = (x+1)^2 s\,\exp\left(-s(x+1)\right), \quad s > 0.$

(d) $\hat{S}_{\text{MAP}} = \dfrac{1}{X+1}$.

(e) $\hat{S}_{\text{MSE}} = \dfrac{2}{X+1}$.

(f) $\mathbb{E}\{S - \hat{S}_{\text{MAP}}\} = \dfrac{1}{2}; \quad \mathbb{E}\{S - \hat{S}_{\text{MSE}}\} = 0.$

Ejercicio 12 (1.6; 1.8)

Se desea construir un estimador de una variable aleatoria S con la siguiente forma analítica:

$$\hat{S} = w_0 + wX^3$$

(a) Si se define la v.a. $Y = X^3$, indíquese qué estadísticos son suficientes para determinar los pesos del modelo de estimación de mínimo error cuadrático medio.

(b) Un analista desea ajustar el modelo anterior, pero desconoce la estadística del problema, por lo que recurrre a estimaciones muestrales de los estadísticos suficientes, basadas en el conjunto disponible de pares etiquetados de las variables aleatorias:

$$\{x^{(k)}, s^{(k)}\}_{k=1}^{4} = \{(-1, -0.55), (0, 0.5), (1, 1.57), (2, 8.7)\}$$

Determínense los pesos w_0 y w obtenidos por el analista.

Solution:

(a) $\mathbb{E}\{X\}$, $\mathbb{E}\{Y\}$, v_y y v_{sy} (o algún otro conjunto que permita determinar los anteriores).

(b) $w = 1.0256$ y $w_0 = 0.5038$.

Ejercicio 13 (1.2; 1.3; 1.4)

Las variables aleatorias S y X se distribuyen conjuntamente según la ddp

$$p_{S,X}(s,x) = \alpha s x^2, \qquad 0 \le s \le 1-x, \quad 0 \le x \le 1$$

siendo α un parámetro a determinar.

(a) Establezca las expresiones de las ddp marginales $p_X(x)$ y $p_S(s)$.

(b) Calcule el estimador MAP de S dado X, $\hat{S}_{\mathrm{MAP}}(X)$.

(c) Calcule el estimador ML de S dado X, $\hat{S}_{\mathrm{ML}}(X)$.

(d) Calcule el estimador de S dado X de error cuadrático medio mínimo, $\hat{S}_{\mathrm{MSE}}(X)$.

(e) Compare los estimadores calculados según el error cuadrático medio dado X en que incurren cada uno de los estimadores.

Solution:

(a) El parámetro α debe tomar el valor que hace 1 la integral de la distribución. Dado que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{S,X}(s,x)dsdx &= \int_0^1\int_0^{1-x} \alpha s x^2 dsdx = \alpha \int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} sdsdx \\
&= \alpha \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^{1-x} dx = \frac{\alpha}{2}\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx \\
&= \frac{\alpha}{60}
\end{aligned}$$

luego $\alpha = 60$ y, por tanto

$$\begin{aligned}
p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{S,X}(s,x)ds = \int_0^{1-x} 60 s x^2 ds = 60x^2 \int_0^{1-x} sds \\
&= 30x^2(1-x)^2, \qquad 0 \le x \le 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_S(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{S,X}(s,x)dx = \int_0^{1-s} 60 s x^2 ds = 60s \int_0^{1-s} x^2 ds \\
&= 20s(1-s)^3, \qquad 0 \le s \le 1
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\hat{s}_{\mathrm{MAP}} &= \underset{s}{\operatorname{argmax}}\, p_{S|X}(s|x) = \underset{s}{\operatorname{argmax}} \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_X(x)} = \underset{s}{\operatorname{argmax}}\, p_{S,X}(s,x) \\
&= \underset{s\in[0,1-x]}{\operatorname{argmax}}\, 60sx^2 = \underset{s\in[0,1-x]}{\operatorname{argmax}}\, s \\
&= 1-x
\end{aligned}$$

(c) Dado que la verosimilitud es

$$p_{X|S}(x|s) = \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_S(s)} = \frac{60sx^2}{20s(1-s)^3} = \frac{3x^2}{(1-s)^3}, \qquad 0 \le s \le 1-x, \quad 0 \le x \le 1$$

el estimador ML será

$$\hat{s}_{\mathrm{ML}} = \underset{s}{\operatorname{argmax}}\, p_{X|S}(x|s) = \underset{s\in[0,1-x]}{\operatorname{argmax}} \frac{3x^2}{(1-s)^3} = \underset{s\in[0,1-x]}{\operatorname{argmax}} \frac{1}{(1-s)^3} = \underset{s\in[0,1-x]}{\operatorname{argmin}}\, (1-s)^3$$
$$= 1-x$$

(d) Dado que la distribución a posteriori es

$$p_{S|x}(s|x) = \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_X(x)} = \frac{60sx^2}{30x^2(1-x)^2} = \frac{2s}{(1-x)^2}, \qquad 0 \le s \le 1-x, \quad 0 \le x \le 1$$

el estimador de mínimo MSE será

$$\hat{s}_{\mathrm{MSE}} = \mathbb{E}\{S|x\} = \int_{-\infty}^{\infty} s p_{S|X}(s|x) ds = \frac{2}{(1-x)^2}\int_0^{1-x} s^2 ds$$
$$= \frac{2}{3}(1-x)$$

(e)

$$\mathbb{E}\left\{\left(S-\hat{S}_{\mathrm{MAP}}\right)^2 \mid x\right\} = \mathbb{E}\left\{(S-(1-x))^2 \mid x\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (s-(1-x))^2\, p_{S|X}(s|x) ds$$
$$= \frac{2}{(1-x)^2}\int_0^{1-x} s\,(s-(1-x))^2\, ds$$
$$= \frac{1}{6}(1-x)^2$$

Dado que $\hat{S}_{\mathrm{ML}} = \hat{S}_{\mathrm{MAP}}$, su MSE será idéntico

$$\mathbb{E}\left\{\left(S-\hat{S}_{\mathrm{ML}}\right)^2 \mid x\right\} = \frac{1}{6}(1-x)^2$$

Finalmente,

$$\mathbb{E}\left\{\left(S-\hat{S}_{\mathrm{MSE}}(X)\right)^2 \mid x\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(S-\frac{2}{3}(1-x)\right)^2 \mid x\right\} = \int_0^{1-x} \frac{2s\left(s-\frac{2}{3}(1-x)\right)^2}{(1-x)^2} ds$$
$$= \frac{2}{(1-x)^2}\int_0^{1-x} s\left(s-\frac{2}{3}(1-x)\right)^2 ds$$
$$= \frac{1}{18}(1-x)^2$$

Ejercicio 14 (1.8)

Se desea aproximar la función $f(x) = 2^x$ en el intervalo $[0,3]$ mediante polinomios sencillos, utilizando técnicas de regresión. Para ello, se toman los puntos $x^{(k)} = k-1$, con $1 \le k \le 4$, y se diseña una curva de regresión $y = g(x)$, donde $g(x)$ es un polinomio, siguiendo el criterio de minimizar el error cuadrático dado por

$$E = \sum_{k=1}^{4} \left[g\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k)}\right) \right]^2$$

(a) Suponiendo $g(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2$, determínese la ecuación matricial que debe verificar el vector de coeficientes $w = [w_0, w_1, w_2]^T$ de mínimo error.

(b) Suponiendo $g(x) = vx^2$, determínese el coeficiente v.

Solution:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 15 \\ 34 \\ 90 \end{pmatrix}$

(b) $v = \dfrac{90}{98}$

Ejercicio 15 (1.2; 1.3; 1.4; 1.7)

Se desea estimar la v.a. S a partir de la v.a. X, conociendo la función de densidad de probabilidad conjunta de ambas, dada por:

$$p_{X,S}(x,s) = \begin{cases} 6x, & 0 \le x \le s, \quad 0 \le s \le 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

(a) Calcúlese el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MSE}}$.

(b) Calcúlese el estimador de máxima verosimilitud de S dado X, $\hat{S}_{\text{ML}}$.

(c) Establézcanse las ddps de ambos estimadores, $p_{\hat{S}_{\text{MSE}}}(\hat{s})$ y $p_{\hat{S}_{\text{ML}}}(\hat{s})$, y represéntense gráficamente ambas.

(d) Calcúlense la media y la varianza del error de ambos estimadores.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\text{MSE}}(X) = \frac{1}{2}(1 + X)$

(b) $\hat{S}_{\text{ML}}(X) = X$

(c) $p_{\hat{S}_{\text{MSE}}}(\hat{s}) = 24(2\hat{s} - 1)(1 - \hat{s}), \qquad \frac{1}{2} \le \hat{s} \le 1$

$p_{\hat{S}_{\text{ML}}}(\hat{s}) = 6\hat{s}(1 - \hat{s}), \qquad 0 \le \hat{s} \le 1$

(d) $\mathbb{E}\{S - \hat{S}_{\text{ML}}\} = \dfrac{1}{4}, \qquad \mathbb{E}\{S - \hat{S}_{\text{MSE}}\} = 0$

$Var\{S - \hat{S}_{\text{ML}}\} = \dfrac{13}{80}, \qquad Var\{S - \hat{S}_{\text{MSE}}\} = \dfrac{1}{40}$

Ejercicio 16 (1.6)

Se desea construir un estimador lineal de mínimo error cuadrático (MSE) que permita estimar la variable aleatoria S a partir de la v.a. X_1. Se conoce la siguiente información estadística:

$$\mathbb{E}\{X_1\} = 0 \quad \mathbb{E}\{S\} = 1$$
$$\mathbb{E}\{X_1^2\} = 1 \quad \mathbb{E}\{X_1 S\} = 2$$

(a) Indíquese cuál de los siguientes diseños MSE proporcionará un error cuadrático medio menor:

$$\hat{S}_a = w_{0a} + w_{1a}X_1$$
$$\hat{S}_b = w_{1b}X_1$$

(b) Si se dispone ahora de una segunda v.a. X_2 de la que se sabe:

$$\mathbb{E}\{X_2\} = 1 \qquad \mathbb{E}\{X_2^2\} = 2$$
$$\mathbb{E}\{X_1X_2\} = \tfrac{1}{2} \qquad \mathbb{E}\{SX_2\} = 2$$

justifíquese si el estimador $\hat{S}_c = w_{0c} + w_{1c}X_1 + w_{2c}X_2$ presenta un error cuadrático medio menor que los estimadores propuestos en a).

Solution:

(a) Sean $\hat{S}_a^* = w_{0a}^* + w_{1a}^*X_1$ y $\hat{S}_b^* = w_{1b}^*X_1$ los estimadores de mínimo MSE para cada uno de los diseños. Dado que $\hat{S}_b^*$ se puede puede expresar como un estimador de la forma $w_{0a} + w_{1a}X_1$ (tomando $w_{0a} = 0$ y $w_{1a} = w_{1b}^*$), se puede afirmar que

$$\text{MSE}\{\hat{S}_a^*\} \leq \text{MSE}\{\hat{S}_b^*\}$$

Para determinar si el MSE de $\hat{S}_a^*$ es estrictamente menor que el de $\hat{S}_b^*$, calcularemos los pesos del estimador $\hat{S}_a^*$. Llamando

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_1 \end{bmatrix}$$

resulta

$$\mathbf{w}_a^* = \mathbf{R}_{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{r}_{S\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{E}\{X_1\} \\ \mathbb{E}\{X_1\} & \mathbb{E}\{X_1^2\} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{S\} \\ \mathbb{E}\{SX_1\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dado que el mínimo es único y $\mathbf{w}_a^* \neq \begin{bmatrix} 0 \\ w_{1b}^* \end{bmatrix}$, necesariamente se cumplirá que

$$\text{MSE}\{\hat{S}_a^*\} < \text{MSE}\{\hat{S}_b^*\}$$

(b) Llamando

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

el estimador $\hat{S}_c^*$ de mínimo MSE estará dado por el vector de pesos

$$\mathbf{w}_c^* = \mathbf{R}_{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{r}_{S\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{E}\{X_1\} & \mathbb{E}\{X_2\} \\ \mathbb{E}\{X_1\} & \mathbb{E}\{X_1^2\} & \mathbb{E}\{X_1X_2\} \\ \mathbb{E}\{X_2\} & \mathbb{E}\{X_1X_2\} & \mathbb{E}\{X_2^2\} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{S\} \\ \mathbb{E}\{SX_1\} \\ \mathbb{E}\{SX_2\} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto $\hat{S}_c^* = 1 + 2X_1 = \hat{S}_a^*$ y, en consecuencia,

$$\text{MSE}\{\hat{S}_a^*\} = \text{MSE}\{\hat{S}_c^*\}$$

Ejercicio 17 (1.7)

Se estima la varianza v de una v.a. X con media nula a partir de K observaciones $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$ de dicha variable tomadas independientemente, utilizando el estimador

$$\hat{V} = \frac{1}{K}\left[\sum_{k=1}^{K} X^{(k)}\right]^2$$

(a) Determínese el sesgo del estimador.

(b) Para $K = 2$ y suponiendo $\mathbb{E}\left\{X^4\right\} = \alpha$, determínese la varianza del estimador.

Solution:

(a) Es insesgado

(b) $\operatorname{Var}\left\{\hat{V}\right\} = \frac{1}{2}\left[\alpha + v^2\right]$

Ejercicio 18 (1.2; 1.3; 1.7)

La d.d.p. conjunta de dos variables aleatorias S y X es:

$$p_{S,X}(s,x) = \begin{cases} 6s, & 0 < s < x \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

obténganse:

(a) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.

(b) El sesgo de dicho estimador.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{2}{3}X$

(b) Es insesgado

Ejercicio 19 (1.2; 1.3)

La d.d.p. conjunta de las vv.aa. S y X sigue la forma:

$$p_{S,X}(s,x) = \alpha, \quad -1 < x < 1, \quad 0 < s < |x|$$

(a) Determine la d.d.p. de la v.a. X, $p_X(x)$, especificando el valor de α.

(b) Establezca las expresiones de los estimadores de S en función de X que minimizan los costes cuadrático medio ($\overline{C}_{\text{MSE}} = \mathbb{E}\left\{(S-\hat{S})^2\right\}$) y absoluto medio ($\overline{C}_{\text{MAD}} = \mathbb{E}\left\{|S-\hat{S}|\right\}$), $\hat{S}_{\text{MMSE}}$ y $\hat{S}_{\text{MAD}}$, respectivamente.

(c) Supuesto que se restringe la forma de los estimadores a cuadrático en X, determine el estimador $\hat{S}_{q,\text{MMSE}} = w_1 X^2$ que minimiza el error cuadrático medio.

Solution:

(a)

$$p_X(x) = \int_0^{|x|} \alpha dx = \alpha|x|, \quad -1 < x < 1$$

Dado que el área de la ddp debe ser unitaria,

$$\int_{-1}^{1} p_X(x)dx = \int_{-1}^{1} \alpha|x|dx = \alpha = 1$$

por tanto, $\alpha = 1$ y

$$p_X(x) = |x|, \quad -1 < x < 1$$

(b) La distribución a posteriori es

$$p_{S|X}(s|x) = \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_X(x)} = \frac{1}{|x|}, \quad 0 \le s \le |x|$$

que es una distribución uniforme, luego tanto la media como la mediana coinciden en el punto medio:

$$\hat{S}_{\text{MMSE}}(X) = \hat{S}_{\text{MAD}}(X) = |X|/2$$

(c)

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\mathbb{E}\{SX^2\}}{\mathbb{E}\{X^4\}} = \frac{\int_{-1}^{1} \mathbb{E}\{SX^2|x\}|x|dx}{\int_{-1}^{1} x^4|x|dx} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2\mathbb{E}\{S|x\}|x|dx}{\int_{-1}^{1} x^4|x|dx} \\ &= \frac{2\int_0^1 \frac{1}{2}x^4 dx}{2\int_0^1 x^5 dx} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\hat{S}_{q,\text{MMSE}}(X) = 3X^2/5$$

Ejercicio 20 (1.4)

Considérese la variable aleatoria X con ddp

$$p_X(x) = a\exp\left[-a(x-d)\right]u(x-d)$$

con parámetros $a > 0$ y d.

Establézcanse las expresiones de los estimadores de máxima verosimilitud de ambos parámetros, $\hat{a}_{\text{ML}}$ y $\hat{d}_{\text{ML}}$, en función de los valores de K muestras de X tomadas independientemente, $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$.

Solution: Los estimadores ML de a y d están dados por

$$(\hat{a}_{\text{ML}}, \hat{d}_{\text{ML}}) = \underset{a,d}{\text{argmax}} \prod_{k=1}^{K} \left(a\exp\left(-a(x^{(k)}-d)\right)u(x^{(k)}-d)\right)$$

Nótese que si $d > x^{(k)}$ para alguna muestra $x^{(k)}$, resulta $u(x^{(k)}-d) = 0$, en cuyo caso la verosimilitud total es 0. Por tanto $\hat{d}_{\text{ML}} \le x^{(k)}$, para todo k, o, equivalentemente $\hat{d}_{\text{ML}} \le \text{mín}_k \left\{x^{(k)}\right\}$, y podemos escribir

$$(\hat{a}_{\text{ML}}, \hat{d}_{\text{ML}}) = \underset{a,d|d\le x_{\text{mín}}}{\text{argmax}} \prod_{k=1}^{K} \left(a\exp\left(-a(x^{(k)}-d)\right)\right)$$

siendo $x_{\text{mín}} = \text{mín}_k \left\{x^{(k)}\right\}$.

Minimizando el logaritmo, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
(\hat{a}_{\mathrm{ML}}, \hat{d}_{\mathrm{ML}}) &= \underset{a,d|d\leq x_{\text{mín}}}{\operatorname{argmax}} \sum_{k=1}^{K} \Big(\log(a) - a(x^{(k)} - d)\Big) \\
&= \underset{a,d|d\leq x_{\text{mín}}}{\operatorname{argmax}} \left(K\log(a) - a\left(\sum_{k=1}^{K} x^{(k)} - Kd\right)\right) \\
&= \underset{a,d|d\leq x_{\text{mín}}}{\operatorname{argmax}} \left(K\log(a) + Kad - a\sum_{k=1}^{K} x^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

Dado que la función a maximizar es creciente con d, $\hat{d}_{\mathrm{ML}}$ será el mayor valor de d en el intervalo admisible, es decir,

$$
\hat{d}_{\mathrm{ML}} = x_{\text{mín}} = \min_{k}\{x^{(k)}\}
$$

y, por tanto

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_{\mathrm{ML}} &= \underset{a>0}{\operatorname{argmax}} \left(K\log(a) + Ka\cdot\hat{d}_{\mathrm{ML}} - a\sum_{k=1}^{K} x^{(k)}\right) \\
&= \frac{K}{\sum_{k=1}^{K}\left(x^{(k)} - \min_k\{x^{(k)}\}\right)}
\end{aligned}
$$

(donde el máximo se ha obtenido por derivación).

Ejercicio 21 (1.2; 1.7)

Las variables aleatorias S y X tienen una función de densidad de probabilidad conjunta

$$
p_{S,X}(s,x) = 10s, \qquad 0 \leq s \leq x^2, \quad 0 \leq x \leq 1
$$

Se desea estimar S a la vista de X minimizando el riesgo para la función de coste

$$
c(S,\hat{S}) = S^2\left(S - \hat{S}\right)^2
$$

Determine:

(a) el estimador óptimo de S, $\hat{S}_C$, que minimiza el coste medio a la vista de X, $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S})|x\right\}$.

(b) el estimador de la forma $\hat{S}_L = wX$ que minimiza el coste medio $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S})\right\}$.

(c) el coste medio global de ambos estimadores, $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S}_C)\right\}$ y $\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S}_L)\right\}$.

(d) el sesgo de ambos estimadores, $\mathbb{E}\left\{S - \hat{S}_C\right\}$ y $\mathbb{E}\left\{S - \hat{S}_L\right\}$.

(e) la varianza del error de ambos estimadores, $\mathrm{Var}\left\{S - \hat{S}_C\right\}$ y $\mathrm{Var}\left\{S - \hat{S}_L\right\}$.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned}
\hat{s}_c &= \underset{\hat{s}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}\{c(S,\hat{s})|x\} = \underset{\hat{s}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}\{S^2\left(S-\hat{s}\right)^2|x\} \\
&= \underset{\hat{s}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}\{S^4 - 2S^3\hat{s} + S^2\hat{s}^2|x\} \\
&= \underset{\hat{s}}{\operatorname{argmin}} \left\{\mathbb{E}\{S^4|x\} - 2\mathbb{E}\{S^3|x\}\hat{s} + \mathbb{E}\{S^2|x\}\hat{s}^2\right\} \\
&= \frac{\mathbb{E}\{S^3|x\}}{\mathbb{E}\{S^2|x\}}
\end{aligned}$$

Sabiendo que

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{S,X}(s,x)ds = 10\int_0^{x^2} sds = \frac{5x^4}{2}$$

resulta

$$p_{S|X}(s|x) = \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_X(x)} = \frac{4s}{x^4}, \qquad 0 \le s \le x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

Por tanto,

$$\hat{s}_c = \frac{\mathbb{E}\{S^3|x\}}{\mathbb{E}\{S^2|x\}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s^3 p_{S|X}(s|x)ds}{\int_{-\infty}^{\infty} s^2 p_{S|X}(s|x)ds} = \frac{\frac{4}{x^4}\int_0^{x^2} s^4 ds}{\frac{4}{x^4}\int_0^{x^2} s^3 ds} = \frac{\frac{x^{10}}{5}}{\frac{x^8}{4}} = \frac{4}{5}x^2$$

(b)

$$\begin{aligned}
w &= \underset{\hat{s}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}\{c(S,wX)\} = \underset{\hat{s}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}\{S^2\left(S-wX\right)^2\} \\
&= \underset{\hat{s}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}\{S^4 - 2S^3Xw + S^2X^2w\} \\
&= \underset{\hat{s}}{\operatorname{argmin}} \left\{\mathbb{E}\{S^4\} - 2\mathbb{E}\{S^3X\}w + \mathbb{E}\{S^2X^2\}w^2\right\} \\
&= \frac{\mathbb{E}\{S^3X\}}{\mathbb{E}\{S^2X^2\}}
\end{aligned}$$

Sabiendo que, para todo $m \le 0$, $n \le 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{S^mX^n\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s^m x^n p_{S,X}(s,x)dsdx \\
&= 10\int_0^1 x^n \int_0^{x^2} s^{m+1}dsdx = \frac{10}{m+2}\int_0^1 x^{2m+n+4}dx \\
&= \frac{10}{(m+2)(2m+n+5)}
\end{aligned}$$

podemos escribir

$$w = \frac{\mathbb{E}\{S^3X\}}{\mathbb{E}\{S^2X^2\}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{22}} = \frac{11}{15}$$

Por tanto, el estimador lineal que minimiza el riesgo es

$$\hat{S}_L = \frac{11}{15}X$$

(c) Para todo estimador $\hat{S}$, el riesgo global es

$$\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S})\right\} = \mathbb{E}\{S^2\left(S-\hat{S}\right)^2\} = \mathbb{E}\{S^4\} - 2\mathbb{E}\{S^3\hat{S}\} + \mathbb{E}\{S^2\hat{S}^2\} = \frac{5}{39} - 2\mathbb{E}\{S^3\hat{S}\} + \mathbb{E}\{S^2\hat{S}^2\}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S}_C)\right\} &= \frac{5}{39} - \frac{8}{5}\mathbb{E}\{S^3X^2\} + \frac{16}{25}\mathbb{E}\{S^2X^4\} \\
&= \frac{5}{39} - \frac{8}{5}\cdot\frac{2}{13} + \frac{16}{25}\cdot\frac{5}{26} = \frac{1}{195} \\
\mathbb{E}\left\{c(S,\hat{S}_L)\right\} &= \frac{5}{39} - \frac{22}{15}\mathbb{E}\{S^3X\} + \frac{11^2}{15^2}\mathbb{E}\{S^2X^2\} \\
&= \frac{5}{39} - \frac{22}{15}\cdot\frac{1}{6} + \frac{11^2}{15^2}\cdot\frac{5}{22} = \frac{7}{1170}
\end{aligned}$$

(d) El sesgo es

$$\begin{aligned}
B_C = \mathbb{E}\left\{S-\hat{S}_C\right\} &= \mathbb{E}\{S\} - \frac{4}{5}\mathbb{E}\left\{X^2\right\} = \frac{10}{21} - \frac{4}{7} = -\frac{2}{21} \\
B_L = \mathbb{E}\left\{S-\hat{S}_L\right\} &= \mathbb{E}\{S\} - \frac{11}{15}\mathbb{E}\left\{X\right\} = \frac{10}{21} - \frac{11}{18} = -\frac{17}{126}
\end{aligned}$$

(e) Utilizando la relación entre el sesgo y la varianza,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left\{S-\hat{S}_C\right\} &= \mathbb{E}\left\{\left(S-\hat{S}_C\right)^2\right\} - B_C^2 \\
&= \mathbb{E}\left\{S^2\right\} + \mathbb{E}\left\{\hat{S}_C^2\right\} - 2\mathbb{E}\left\{S\hat{S}_C\right\} - B_C^2 \\
&= \mathbb{E}\left\{S^2\right\} + \frac{16}{25}\mathbb{E}\left\{X^4\right\} - \frac{8}{5}\mathbb{E}\left\{SX^2\right\} - B_C^2 \\
&= \frac{5}{18} + \frac{16}{25}\cdot\frac{5}{9} - \frac{8}{5}\frac{10}{27} - \frac{4}{441} = \frac{419}{13230} \approx 0.03167
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left\{S-\hat{S}_L\right\} &= \mathbb{E}\left\{S^2\right\} + \mathbb{E}\left\{\hat{S}_L^2\right\} - 2\mathbb{E}\left\{S\hat{S}_L\right\} - B_L^2 \\
&= \mathbb{E}\left\{S^2\right\} + \frac{121}{225}\mathbb{E}\left\{X^2\right\} - \frac{22}{15}\mathbb{E}\left\{SX\right\} - B_L^2 \\
&= \frac{5}{18} + \frac{121}{225}\cdot\frac{5}{7} - \frac{22}{15}\frac{5}{12} - \frac{17^2}{126^2} = \frac{2587}{79380} \approx 0.03259
\end{aligned}$$

Ejercicio 22 (1.2; 1.3; 1.6)

Las vv.aa. S y X obedecen a la ddp conjunta

$$p_{S,X}(s,x) = c, \quad 0 < s < 1, \;\; s < x < 2s$$

siendo c una constante.

(a) Tras representar el soporte de la ddp, calcúlese el valor de c.

(b) Establézcanse las expresiones de las ddp marginales $p_S(s)$ y $p_X(x)$.

(c) Determínese analíticamente la forma del estimador de error cuadrático medio mínimo de S a la vista de X, $\hat{S}_{\mathrm{MSE}}(X)$. Trácese dicha forma sobre la representación del soporte de $p_{S,X}(s,x)$, y discútase si es posible determinarla directamente.

(d) Calcúlese el error cuadrático medio $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\mathrm{MSE}}(X)\right)^2\right\}$ que proporciona la aplicación del estimador anterior.

(e) Determínese la forma del estimador lineal de error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}}(X)$. Trácese dicha forma sobre la representación del soporte de $p_{S,X}(s,x)$, y coméntese su aspecto.

(f) Calcúlese el error cuadrático medio $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\mathrm{LMSE}}(X)\right)^2\right\}$ que proporciona la aplicación del estimador anterior, y compárese con $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\mathrm{MSE}}(X)\right)^2\right\}$.

(g) ¿Qué ocurre si se percibe (p.ej., visualizando muestras) que hay un comportamiento (estadístico) distinto para $0 < X < 1$ y $1 < X < 2$, y se diseña un estimador lineal óptimo diferente para cada uno de estos intervalos ($\hat{S}_{A,\mathrm{LMSE}}(X)$ y $\hat{S}_{B,\mathrm{LMSE}}(X)$, respectivamente)? Verifíquese analíticamente la solución que se proponga.

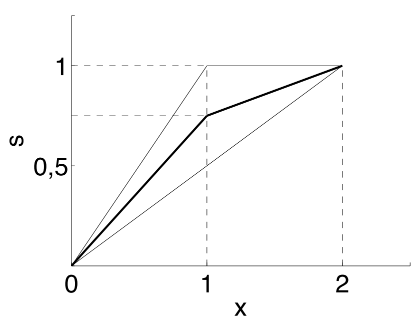
Solution:

(a) $c = 2$; que puede obtenerse considerando que el área del soporte es 1/2.

(b) $p_S(s) = 2s,\ 0 < s < 1;\qquad p_X(x) = \begin{cases} x & ,0 < x < 1 \\ 2 - x & ,1 < x < 2 \end{cases}$

(c)

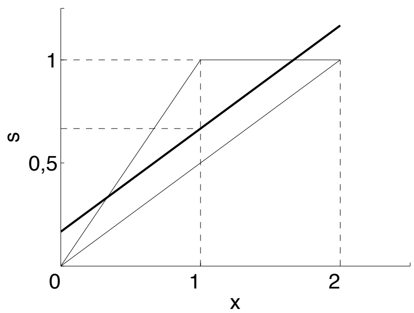
$$\hat{S}_{\mathrm{MSE}}(X) = \begin{cases} \dfrac{3X}{4}, & 0 < X < 1 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X}{2} + 1\right), & 1 < X < 2 \end{cases}$$



Como los cortes para cada valor de X se hacen sobre una ddp uniforme, resultan los segmentos promedio de los bordes.

(d) $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\mathrm{MSE}}(X)\right)^2\right\} = \dfrac{1}{96}$

(e) $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}}(X) = \dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{6}$



(f) $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\text{LMSE}}(X)\right)^2\right\} = \dfrac{11}{24}$; sensiblemente mayor que $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\text{MSE}}(X)\right)^2\right\}$

(g) $\hat{S}_{A,\text{LMSE}}(X) = \dfrac{3X}{4}$; $\hat{S}_{B,\text{LMSE}}(X) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X}{2} + 1\right)$ que componen $\hat{S}_{\text{MSE}}(X)$.
$p_A(s,x)$ y $p_B(s,x)$ son uniformes, y los estimadores óptimos lineales y de la forma anterior.

Ejercicio 23 (1.5; 1.7)

Se desea estimar un vector aleatorio $\mathbf{S}$ a partir de un vector de observaciones $\mathbf{X}$ relacionado con él:

$$\mathbf{X} = H\mathbf{S} + \mathbf{R}$$

donde H es una matriz conocida, $\mathbf{R}$ es un vector de ruido con distribución $G(\mathbf{0}, v_r I)$, y $\mathbf{S}$ es el vector aleatorio a estimar, cuya distribución es $G(\mathbb{E}\{\mathbf{S}\}, Vs)$. Sabiendo que $\mathbf{S}$ y $\mathbf{R}$ son vectores aleatorios independientes:

(a) Calcúlese el estimador ML de $\mathbf{S}$, $\hat{\mathbf{S}}_{\text{ML}}$.

(b) Determínese si dicho estimador es sesgado o no. Justifique su respuesta.

(c) Según se sabe, el estimador MSE de $\mathbf{S}$ viene dado por la expresión:

$$\hat{\mathbf{S}}_{\text{MSE}} = \left(H^T H + v_r V_s^{-1}\right)^{-1} H^T \mathbf{X}$$

Calcúlese el sesgo de $\hat{\mathbf{S}}_{\text{MSE}}$ e indíquese en qué condiciones dicho sesgo tiende a 0.

Solution:

(a) $\hat{\mathbf{S}}_{\text{ML}} = \left(H^T H\right)^{-1} H^T \mathbf{X}$

(b) Es insesgado

(c) $\mathbb{E}\left\{\hat{\mathbf{S}}_{\text{MSE}} - \mathbf{S}\right\} = \left(H^T H + v_r V_s^{-1}\right)^{-1} H^T H \mathbb{E}\{\mathbf{S}\} - \mathbb{E}\{\mathbf{S}\}$. El sesgo tiende a anularse cuando la potencia de ruido tiende a 0.

Ejercicio 24 (1.4; 1.7)

Se dispone de K muestras, $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$, tomadas independientemente, de una v.a. X cuya d.d.p. viene dada por

$$p_X(x) = \frac{1}{bx^2} \exp\left(-\frac{1}{bx}\right) u(x)$$

con $b > 0$.

(a) Determine $\hat{b}_{\text{ML}}$ en función de dichas muestras.

(b) Verifíque que la v.a. $Y = 1/X$ sigue una d.d.p. $p_Y(y)$ de tipo exponencial unilateral, y establézca el valor de la media de dicha distribución.

(c) Considerando todo lo que antecede, ¿es $\hat{B}_{\mathrm{ML}}$ un estimador insesgado?

Solution:

(a) Maximizando el logaritmo de la verosimilitud, podemos escribir (suponiendo que, de acuerdo con el modelo, todas las muestras son no negativas)

$$\begin{aligned}\hat{b}_{\mathrm{ML}} &= \underset{b}{\operatorname{argmax}} \sum_{k=1}^{K} \log\left(p_X(x^{(k)})\right)\\ &= \underset{b}{\operatorname{argmax}} \sum_{k=1}^{K} \log\left(\frac{1}{b(x^{(k)})^2}\exp\left(-\frac{1}{bx^{(k)}}\right)\right)\\ &= \underset{b}{\operatorname{argmax}} \left(-K\log(b) - 2\sum_{k=1}^{K}\log\left(x^{(k)}\right) - \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{x^{(k)}}\right)\\ &= \underset{b}{\operatorname{argmax}} \left(-K\log(b) - \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{x^{(k)}}\right)\\ &= \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{x^{(k)}}\end{aligned}$$

donde el último paso se ha resuelto por derivación.

(b)

$$\begin{aligned}p_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy}P\{Y \leq y\} = \frac{d}{dy}P\left\{\frac{1}{X} \leq y\right\}\\ &= \frac{d}{dy}P\left\{X \geq \frac{1}{y}\right\} = \frac{d}{dy}\left(1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)\right) = \frac{1}{y^2}p_X\left(\frac{1}{y}\right)\\ &= \frac{1}{b}\exp\left(-\frac{y}{b}\right), \qquad y \geq 0\end{aligned}$$

(c) Dado que

$$\hat{B}_{\mathrm{ML}} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{X^{(k)}}$$

la media del estimador es

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\hat{B}_{\mathrm{ML}}\} &= \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\mathbb{E}\left\{\frac{1}{X^{(k)}}\right\} = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{X}\right\}\\ &= \mathbb{E}\{Y\} = \int_0^\infty y\frac{1}{b}\exp\left(-\frac{y}{b}\right) = b\end{aligned}$$

Por tanto, $\hat{B}_{\mathrm{ML}}$ es insesgado

Ejercicio 25 (1.2)

Considere la familia de funciones de coste dadas por

$$c(S,\hat{S}) = \frac{1}{N+1}\hat{S}^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}S^{N+1} - \frac{1}{N}S\hat{S}^N$$

siendo N un número entero no negativo e impar. Suponga, asimismo, que

$$p_{S,X}(s,x) = \frac{1}{\lambda x}\exp\left(-\frac{s}{x} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad s \geq 0, \qquad x \geq 0, \qquad \lambda > 0$$

(a) Determine el estimador de mínimo coste medio de S a la vista de X.

(b) Determine el mínimo coste medio.

(c) Determine el coeficiente w que minimiza el coste medio del estimador de la forma

$$\hat{S}_L = wX^m$$

siendo m un entero positivo.

Indicación: $\int_0^\infty x^N \exp(-x)\, dx = N!$

Solution:

(a) El riesgo condicional está dado por

$$\begin{aligned} R_{\hat{s}} &= \mathbb{E}\{c(S,\hat{s})|\mathbf{x}\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\frac{1}{N+1}\hat{s}^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}S^{N+1} - \frac{1}{N}S\hat{s}^N \mid x\right\} \\ &= \frac{1}{N+1}\hat{s}^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}\mathbb{E}\left\{S^{N+1} \mid x\right\} - \frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{S \mid x\right\}\hat{s}^N \end{aligned}$$

Dado que este riesgo es una función derivable de $\hat{s}$, su mínimo debe estar en un punto estacionario

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\hat{s}}}{\partial \hat{s}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \hat{s}^N - \mathbb{E}\left\{S \mid x\right\}\hat{s}^{N-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \hat{s}^{N-1}\left(\hat{s} - \mathbb{E}\left\{S \mid x\right\}\right) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el minimizador del riesgo condicional es

$$\hat{s}^* = \mathbb{E}\{S \mid x\}.$$

Para calcularlo, necesitamos la distribución a posteriori de S. Sabiendo que

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{S,X}(s,x)ds = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda x}\exp\left(-\frac{s}{x} - \frac{x}{\lambda}\right)ds \\ &= \frac{1}{\lambda x}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{x}\right)ds = \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

resulta

$$p_{S|X}(s|x) = \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_X(x)} = \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{s}{x}\right)$$

y por tanto

$$\hat{s}^* = \mathbb{E}\{S \mid x\} = \int_{-\infty}^{\infty} s p_{S|X}(s|x)ds = \int_0^\infty \frac{s}{x}\exp\left(-\frac{s}{x}\right)ds = x$$

(b) El mínimo riesgo condicional será

$$\begin{aligned}
R_{\hat{s}} &= \frac{1}{N+1}\left(\hat{s}^*\right)^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}\mathbb{E}\left\{S^{N+1} \mid x\right\} - \frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{S \mid x\right\}\left(\hat{s}^*\right)^{N} \\
&= \frac{1}{N+1}x^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}\mathbb{E}\left\{S^{N+1} \mid x\right\} - \frac{1}{N}x^{N+1} \\
&= \frac{1}{N(N+1)}\left(\int_0^\infty \frac{s^{N+1}}{x}\exp\left(-\frac{s}{x}\right)ds - x^{N+1}\right) \\
&= \frac{(N+1)!-1}{N(N+1)}x^{N+1}
\end{aligned}$$

y, por tanto, el riesgo mínimo se puede calcular como

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{c(S,\hat{S}\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{E}\{c(S,\hat{s})|\mathbf{x}\}p_X(x)dx \\
&= \frac{(N+1)!-1}{\lambda N(N+1)}\int_0^\infty x^{N+1}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)dx \\
&= \frac{(N+1)!-1}{N(N+1)}(N+1)!\lambda^{N+1} \\
&= (N+1)!-1)(N-1)!\lambda^{N+1}
\end{aligned}$$

(c) Si $\hat{S} = wX^m$, el riesgo será

$$\begin{aligned}
R &= \mathbb{E}\{c(S,\hat{s})\} \\
&= \frac{1}{N+1}\mathbb{E}\left\{\hat{S}^{N+1}\right\} + \frac{1}{N(N+1)}\mathbb{E}\left\{S^{N+1}\right\} - \frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{S\hat{S}^{N}\right\} \\
&= \frac{1}{N+1}\mathbb{E}\left\{X^{m(N+1)}\right\}w^{N+1} + \frac{1}{N(N+1)}\mathbb{E}\left\{S^{N+1}\right\} - \frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{SX^{mN}\right\}w^{N}
\end{aligned}$$

Por derivación, esto es mínimo cuando

$$\mathbb{E}\left\{X^{m(N+1)}\right\}w^{N} - \mathbb{E}\left\{SX^{mN}\right\}w^{N-1} = 0$$

esto es

$$w = \frac{\mathbb{E}\left\{SX^{mN}\right\}}{\mathbb{E}\left\{X^{m(N+1)}\right\}}$$

El numerador se puede calcular como

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{SX^{mN}\right\} &= \int_0^\infty \mathbb{E}\left\{SX^{mN} \mid x\right\}p_X(x)dx \\
&= \int_0^\infty x^{mN}\mathbb{E}\left\{S \mid x\right\}p_X(x)dx \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x^{mN+1}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)dx = \lambda^{mN+1}(mN+1)!
\end{aligned}$$

y el denominador es

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{X^{m(N+1)}\right\} &= \int_0^\infty x^{m(N+1)}p_X(x)dx \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x^{m(N+1)}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)dx = \lambda^{m(N+1)}(m(N+1))!
\end{aligned}$$

Por tanto

$$w = \frac{(Nm+1)!}{(Nm+m)!\lambda^{m-1}}$$

Ejercicio 26 (1.4; 1.7)

La densidad de probabilidad tipo Erlang de orden N viene dada por la expresión

$$p_X(x) = \frac{a^N x^{N-1} \exp(-ax)}{(N-1)!} \quad x > 0, \quad a > 0$$

Supóngase que N es conocida. Considerando que la media viene dada por $m = N/a$, determínense:

(a) El estimador ML de la media, $\hat{M}_{\mathrm{ML}}$, a partir de K observaciones independientes de la variable.

(b) El sesgo de $\hat{M}_{\mathrm{ML}}$.

(c) ¿Es $\hat{M}_{\mathrm{ML}}$ un estimador consistente en varianza?

Solution:

(a) $\hat{M}_{\mathrm{ML}} = \dfrac{1}{K}\displaystyle\sum_{k=1}^{K} X^{(k)}$

(b) Es insesgado

(c) $\mathrm{Var}\left\{\hat{M}_{\mathrm{ML}}\right\} = \dfrac{v_x}{K}$, luego es consistente en varianza

Ejercicio 27 (1.6)

La variable $X = [X_1, X_2, X_3]^T$ se distribuye según una ddp de media $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ y matriz de covarianza

$$V_{XX} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule los coeficientes (w_0, w_1 y w_2) del estimador lineal de error cuadrático medio mínimo de X_3 a la vista de X_1 y X_2,

$$\hat{X}_{3,\mathrm{LMSE}} = w_0 + w_1 X_1 + w_2 X_2$$

(b) Calcule el error cuadrático medio $\mathbb{E}\left\{\left(X_3 - \hat{X}_{3,\mathrm{LMSE}}\right)^2\right\}$.

Solution:

(a) Llamando

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

el estimador LMMSE estará dado por el vector de coeficientes

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{R}_{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{r}_{X_3\mathbf{Z}} = \mathbb{E}\{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{\intercal}\}^{-1}\mathbb{E}\{X_3\mathbf{Z}\} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{E}\{X_1\} & \mathbb{E}\{X_2\} \\ \mathbb{E}\{X_1\} & \mathbb{E}\{X_1^2\} & \mathbb{E}\{X_1X_2\} \\ \mathbb{E}\{X_2\} & \mathbb{E}\{X_1X_2\} & \mathbb{E}\{X_2^2\} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{X_3\} \\ \mathbb{E}\{X_1X_3\} \\ \mathbb{E}\{X_2X_3\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por tanto

$$\hat{X}_{3,\mathrm{LMSE}} = -\frac{1}{5}X_1 + \frac{4}{5}X_2$$

(b)

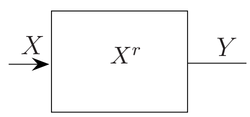
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{\left(X_3 - \hat{X}_{3,\mathrm{LMSE}}\right)^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{\left(X_3 + \frac{1}{5}X_1 - \frac{4}{5}X_2\right)^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{X_3^2\right\} + \frac{1}{25}\mathbb{E}\left\{X_1^2\right\} + \frac{16}{25}\mathbb{E}\left\{X_2^2\right\} + \frac{2}{5}\mathbb{E}\left\{X_3X_1\right\} - \frac{8}{5}\mathbb{E}\left\{X_3X_2\right\} - \frac{8}{25}\mathbb{E}\left\{X_1X_2\right\} \\
&= 3 + \frac{3}{25} + \frac{16}{25}\cdot 3 + \frac{2}{5}\cdot 1 - \frac{8}{5}\cdot 2 - \frac{8}{25}\cdot 2 \\
&= \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

Ejercicio 28 (1.4)

La v.a. X con ddp

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

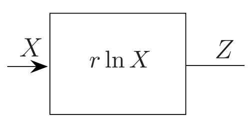
se transforma como indica en la figura, dando lugar a la v.a. observable Y.



$r > 0$

(a) Obténgase el estimador de máxima verosimilitud de r, $\hat{R}_{\mathrm{ML}}$, a partir de K observaciones de Y tomadas de forma independiente.

(b) Considérese la situación



$r > 0$

y obténgase $\hat{R}_{\mathrm{ML}}$ de K observaciones de Z tomadas independientemente. Coméntese el resultado.

Solution:

(a) $\hat{R}_{\mathrm{ML}} = -\dfrac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\ln Y^{(k)}$. Se está identificando el parámetro desconocido de la transformación.

(b) $\hat{R}_{\mathrm{ML}} = -\dfrac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}Z^{(k)}$. Coincide con el anterior: $Z = \ln Y$, ya que implica una transformación invertible de Y.

Ejercicio 29 (1.4)

Se mide el parámetro determinista desconocido s, $s > 0$, mediante dos sistemas, que proporcionan las observaciones

$$X_i = A_i s + N_i, \quad i = 1, 2$$

siendo $\{A_i\}, \{N_i\}$, vv.aa. gaussianas e independientes entre sí, con medias $\mathbb{E}\{A_i\} = 1, \mathbb{E}\{N_i\} = 0$, y varianzas $\{v_{Ai}\}$, $\{v_{Ni}\}$, respectivamente ($i = 1, 2$).

(a) Establézcase la expresión que proporciona el estimador ML de s, $\hat{S}_{\mathrm{ML}}$.

(b) Calcúlese $\hat{S}_{\mathrm{ML}}$ para el caso particular $v_{Ai} = 0, i = 1, 2$.

(c) Calcúlese $\hat{S}_{\mathrm{ML}}$ para el caso particular $v_{Ni} = 0, i = 1, 2$.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\mathrm{ML}} = \arg\ \text{mín}_s \left\{ \ln\left[(s^2 v_{A1} + v_{N1})(s^2 v_{A2} + v_{N2})\right] + \frac{(s - X_1)^2}{s^2 v_{A1} + v_{N1}} + \frac{(s - X_2)^2}{s^2 v_{A2} + v_{N2}} \right\}$

(b) $\hat{S}_{\mathrm{ML}} = \dfrac{v_{N2} X_1 + v_{N1} X_2}{v_{N1} + v_{N2}}$

(c) $\hat{S}_{\mathrm{ML}} = \dfrac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{X_1}{v_{A1}} + \frac{X_2}{v_{A2}}\right)^2 + 8\left(\frac{X_1^2}{v_{A1}} + \frac{X_2^2}{v_{A2}}\right)} - \left(\frac{X_1}{v_{A1}} + \frac{X_2}{v_{A2}}\right)$

Ejercicio 30 (1.3; 1.6)

Sean X y S dos variables aleatorias con d.d.p. conjunta

$$p_{X,S}(x, s) \begin{cases} \alpha & ; \quad 0 < x < 1,\ 0 < s < 2(1 - x) \\ 0 & ; \quad \text{en caso contrario} \end{cases}$$

siendo α una constante.

(a) Utilizando la representación del soporte de la d.d.p., determine el valor de α.

(b) Encuentre la función de densidad de probabilidad de S a la vista de X, $p_{S|X}(s|x)$.

(c) Calcule el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\mathrm{MSE}}$

(d) Calcule el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\mathrm{LMSE}}$.

Solution:

(a) $\alpha = 1$

(b) $p_{S|X}(s|x) = \dfrac{1}{2\,(1 - x)}$

(c) $\widehat{S}_{\mathrm{MSE}} = 1 - X$

(d) $\widehat{S}_{\mathrm{LMSE}} = 1 - X$

Ejercicio 31 (1.3; 1.4; 1.7)

Para la estimación de una variable aleatoria S se dispone de una observación de la v.a. X caracterizada por:

$$X = S + N$$

siendo la función de densidad de probabilidad de S

$$p_S(s) = s \exp(-s) \quad s \geq 0$$

y N un ruido aditivo, independiente de S, con distribución

$$p_N(n) = \exp(-n) \quad n \geq 0$$

.

(a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de S, $\widehat{S}_{\mathrm{ML}}$.

(b) Determine la función de densidad de probabilidad conjunta de X y S, $p_{X,S}(x,s)$, y la función de densidad de probabilidad de S a la vista de X, $p_{S|X}(s|x)$.

(c) Obtenga el estimador máximo a posteriori de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\mathrm{MAP}}$.

(d) Obtenga el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\mathrm{MSE}}$.

(e) Calcule el sesgo de los estimadores obtenidos anteriormente, $\widehat{S}_{\mathrm{ML}}$, $\widehat{S}_{\mathrm{MAP}}$ y $\widehat{S}_{\mathrm{MSE}}$.

(f) Indique qué estimador tiene una menor varianza. Razone la respuesta sin calcular las varianzas de los estimadores.

Nota: Para la resolución del ejercicio puede emplear la siguiente igualdad:

$$\int_0^\infty x^N \exp(-x)\, dx = N!$$

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\mathrm{ML}} = X$

(b) $p_{X,S}(x,s) = s\exp(-x) \quad x \geq s,\ s \geq 0$
$p_{S|X}(s|x) = \dfrac{2s}{x^2} \quad 0 \leq s \leq x,\ x \geq 0$

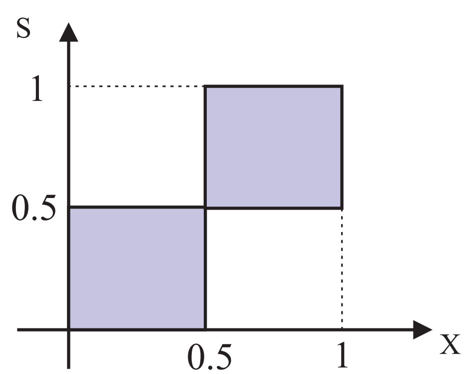
(c) $\widehat{S}_{\mathrm{MAP}} = X$

(d) $\widehat{S}_{\mathrm{MSE}} = \dfrac{2}{3}X$

(e) $\mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\mathrm{ML}}\right\} = \mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\mathrm{MAP}}\right\} = -1$
$\mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\mathrm{MSE}}\right\} = 0$
$\mathrm{Var}\left\{\widehat{S}_{\mathrm{MSE}}\right\} < \mathrm{Var}\left\{\widehat{S}_{\mathrm{MAP}}\right\} = \mathrm{Var}\left\{\widehat{S}_{\mathrm{ML}}\right\}$

Ejercicio 32 (1.3)

La región sombreada de la figura ilustra el dominio de la función de distribución conjunta de S y X, i.e., el conjunto de puntos para los que $p_{X,S}(x,s) \neq 0$.



Responda a las siguientes cuestiones justificando sus respuestas:

(a) Si se sabe que $p_{X,S}(x,s)$ es constante en el dominio de definición, ¿cuál es el estimador MSE de S a la vista de X? Represente gráficamente dicho estimador.

(b) ¿Existe alguna $p_{X,S}(x,s)$ con el dominio anterior para la cual el estimador MSE de S a la vista de X sea $\widehat{S}_{\text{MSE}} = X/2$?

(c) Justifique si existe alguna $p_{X,S}(x,s)$ con el dominio anterior tal que $\widehat{S} = 0.5$ sea:

- El estimador de mínimo error cuadrático de S a la vista de X.
- El estimador de mínimo error absoluto de S a la vista de X.
- El estimador de máximo a posteriori de S a la vista de X.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MSE}} = 0.25$ si $0 < x < 0.5$ y $\widehat{S}_{\text{MSE}} = 0.75$ si $0.5 < x < 1$

(b) Para $0.5 < x < 1$, $p_{S|X}(s|x)$ está definida entre $0.5 < s < 1$, por lo que $X/2$ no puede ser el valor medio de $p_{S|X}(s|x)$

(c) $\widehat{S} = 0.5$ no puede ser ni la media ni la mediana de $p_{S|X}(s|x)$, pero puede ser su máximo. Luego, $\widehat{S} = 0.5$ no puede ser ni $\widehat{S}_{\text{MSE}}$, ni $\widehat{S}_{\text{MAD}}$, pero puede ser $\widehat{S}_{\text{MAP}}$.

Ejercicio 33 (1.3; 1.4)

La variable aleatoria S sigue una distribución exponencial

$$p_S(s) = \lambda e^{-\lambda s}, \qquad s > 0$$

siendo $\lambda > 0$. La variable aleatoria discreta X está relacionada con S mediante una distribución de Poisson, es decir

$$P_{X|S}(x|s) = \frac{s^x e^{-s}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Determine el estimador ML de S a la vista de x

(b) Suponga que se observan K realizaciones independientes $\{(x^{(k)}, s^{(k)}), k = 1, \ldots, K\}$ de (X, S). Determine el estimador ML de λ basado en ellas.

(c) Determine el estimador MAP de S a la vista de $x = 1$.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{ML}} = X$

(b) $\widehat{\lambda}_{\text{ML}} = \dfrac{1}{\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} s^{(k)}}$

(c) $\widehat{S}_{\text{MAP}} = \dfrac{X}{1+\lambda}$

Ejercicio 34 (1.5; 1.7)

Se desea estimar la v.a. S a partir de la observación X dada por:

$$X = S + N_1 + N_2$$

donde S es una v.a. gaussiana de media m_s y varianza v_s, y donde N_1 y N_2 son dos variables de ruido, independientes de S, cuya d.d.p. conjunta viene dada por:

$$p_{N_1,N_2}(n_1, n_2) \sim G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 & v_{12} \\ v_{12} & v_2 \end{bmatrix} \right)$$

Obtenga:

(a) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$.

(b) El estimador de máximo a posteriori de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MAP}}$.

(c) Calcule el sesgo y varianza de ambos estimadores.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = \dfrac{v_s}{v_s + v_1 + v_2 + 2v_{12}} X + m_s \left(1 - \dfrac{v_s}{v_s + v_1 + v_2 + 2v_{12}}\right)$

(b) $\widehat{S}_{\text{MAP}} = \widehat{S}_{\text{MMSE}}$

(c) $\mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{MMSE}}\right\} = \mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{MAP}}\right\} = 0$

$\text{Var}\left\{\widehat{S}_{\text{MMSE}}\right\} = \text{Var}\left\{\widehat{S}_{\text{MAP}}\right\} = \dfrac{v_s^2}{v_s + v_1 + v_2 + 2v_{12}}$

Ejercicio 35 (1.4; 1.7)

Se dispone de una colección de observaciones $\{x^{(k)}, k = 1, \ldots, K\}$ independientes con distribución de Pareto de parámetros deterministas α y β, es decir,

$$p_{X|\alpha,\beta}(x|\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \qquad x \geq \beta$$

siendo $\alpha > 1$ y $\beta > 0$.

(a) Supuesto conocido el valor de β, determine el estimador ML de α, $\widehat{\alpha}_{\text{ML}}$.

(b) Suponiendo $K = 1$ (es decir, una sola observación), determine el estimador ML de β, $\widehat{\beta}_{\text{ML}}$.

(c) Suponiendo $K = 1$, determine el sesgo de $\widehat{\beta}_{\text{ML}}$.

Solution:

(a) $\widehat{\alpha}_{\text{ML}} = \dfrac{1}{\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \ln \frac{x^{(k)}}{\beta}}$

(b) $\widehat{\beta}_{\text{ML}} = x^{(1)}$

(c) $\text{Sesgo}\left\{\widehat{\beta}_{\text{ML}}\right\} = -\dfrac{1}{\alpha - 1}\beta$

Ejercicio 36 (1.3)

Construya el estimador de mínimo error cuadrático medio de la variable aleatoria S a partir de la observación de una variable aleatoria X en los siguientes casos:

(a)

$$p_{X,S}(x, s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

(b)

$$p_{X,S}(x, s) = \begin{cases} 2, & 0 \leq s \leq 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{1}{2}$

(b) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{1-X}{2}$

Ejercicio 37 (1.3; 1.7)

Se desea estimar la v.a. S a partir de la observación X y para ello se conoce la distribución conjunta de ambas:

$$p_{S,X}(s,x) = \begin{cases} 6s, & 0 < s < x-1, \; 1 < x < 2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Obtenga:

(a) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MMSE}}$.

(b) El estimador de máximo a posteriori de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MAP}}$.

(c) El estimador de mínimo error absoluto de S a la vista de X, $\widehat{S}_{\text{MAD}}$.

(d) Calcule el sesgo de los estimadores anteriores.

Solution:

Una resolucion en vídeo de este problema puede encontrarse en

`http://decisionyestimacion.blogspot.com/2013/05/p37-estimacion.html`

(a) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{2}{3}(X-1)$

(b) $\widehat{S}_{\text{MAP}} = X-1$

(c) $\widehat{S}_{\text{MAD}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)$

(d) $\mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{MMSE}}\right\} = 0 \quad \mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{MAP}}\right\} = -0.25 \quad \mathbb{E}\left\{S - \widehat{S}_{\text{MAD}}\right\} = -0.03$

Ejercicio 38 (1.4; 1.7)

Se dispone de una colección de observaciones $\{x^{(k)}, k = 1, \ldots, K\}$ independientes con distribución de Rayleigh de parámetro b, es decir,

$$p_{X|b}(x|b) = \frac{2}{b} x \exp\left(-\frac{x^2}{b}\right), \qquad x \geq 0$$

siendo $b > 0$.

(a) Determine el estimador ML de b, $\widehat{b}_{\text{ML}}$.

(b) Si el conjunto de valores observados es $\{2, 0, 1, 1\}$, ¿cuál sería el valor más verosímil del parámetro b?

(c) Determine el sesgo del estimador.

Solution:

(a) $\widehat{b}_{\text{ML}} = \dfrac{1}{K} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \left(x^{(k)}\right)^2$

(b) $\widehat{b}_{\text{ML}} = 1.5$

(c) Insesgado

Ejercicio 39 (1.3; 1.7)

Se dispone de tres variables aleatorias independientes S_1, S_2 y S_3, con idéntica fdp a priori. A partir de una observación de $X = S_1 + S_2 + S_3$ se desea estimar S_1.

(a) Justifique brevemente por qué el estimador de mínimo error cuadrático de S_1 dado x es $\hat{s}_1 = \frac{x}{3}$.

(b) Calcule el sesgo de dicho estimador. ¿Es sesgado o insesgado?

Asumiendo en los apartados siguientes que S_1, S_2 y S_3 tienen una fdp uniforme entre -1 y 1:

(c) Calcule la fdp de X dado s_1.

(d) Calcule la varianza del estimador $\hat{S}_1$.

Solution:

(a) Por la simetría del problema, todas las $\mathbb{E}\{S_i|x\}$ deben ser iguales y sumar x.

(b) 0, insesgado.

(c) $p_{X|S_1}(x|s_1) = 1/2 - |x - s_1|/4$ para $-2 < x < 2$, 0 en otro caso.

(d) 1/9

Ejercicio 40 (1.5)

Dos variables aleatorias Gaussianas independientes Z_1 y Z_2 tienen medias 2 y 1, respectivamente. Ambas tienen varianza unidad. Estamos interesados en su diferencia $S = Z_1 - Z_2$.

(a) Calcule $p_S(s)$, el estimador MMSE de S y el error cuadrático medio de dicho estimador, si no se dispone de ningún dato adicional.

(b) A continuación se observa $X = Z_1 + Z_2 = 3$. Calcule $p_{S|X}(s|x)$, el estimador MMSE de S a la vista de X y el error cuadrático medio de dicho estimador. Interprete el resultado obtenido en relación con el apartado anterior.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = 1$, con varianza 2.

(b) X es independiente de S, por lo que la respuesta es la misma que en a).

Ejercicio 41 (1.2;1.3)

Se desea estimar la variable aleatoria S a partir de la variable aleatoria X conociendo la función de densidad de probabilidad conjunta de ambas, dada por:

$$p_{S,X}(s,x) = 24xs, \quad 0 \leq s \leq 1 - x,\ 0 < x < 1$$

(a) Calcule el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.

(b) Calcule el estimador MAP de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MAP}}$.

(c) Calcule el estimador MAD de S a la vista de X, $\hat{S}_{\text{MAD}}$.

(d) El estimador de la forma $\hat{S}_{\text{CUAD}} = wX^2$ de mínimo error cuadrático medio.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{2}{3}(1 - X)$.

(b) Dado que $p_{S|X}(s|x)$ es creciente con s, $\hat{S}_{\text{MAP}} = 1 - X$.

(c) $\hat{S}_{\text{MAD}} = \frac{1-X}{\sqrt{2}}$.

(d) $w = 0.8$

Ejercicio 42 (LMSE)

Se sabe que la distribución conjunta de S con X viene dada por:

$$p_{S,X}(s,x) = \frac{1}{3}(x+s) \quad 0 < x < 2, \;\; 0 < s < 1.$$

(a) Obtenga el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio, $\hat{S}_{\text{LMSE}} = w_0 + w_1 X$.

(b) Calcule el error cuadrático medio del estimador.

Solution:

(a) $\hat{s}_{\text{LMSE}} = \frac{14}{23} - \frac{1}{23}x$.

(b) $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}_{\text{LMSE}}\right)^2\right\} = \frac{11}{138}$

Ejercicio 43 (ML, MSE)

El encargado de una empresa informática desea analizar la productividad de sus empleados mediante la estimación del tiempo, S, que les lleva desarrollar cierto programa informático. Para ello, a las 12:00 a.m. el encargado solicita a sus empleados la realización de este programa. Los empleados no atienden la petición hasta que finalicen la tarea que estén llevando a cabo en ese momento, lo que les lleva un tiempo adicional N. En consecuencia, el tiempo total transcurrido desde la petición del encargado hasta que el empleado termina el programa es $X = S + N$.

Se sabe que el tiempo N puede modelarse mediante la siguiente distribución exponencial:

$$p_N(n) = a \exp(-an) \quad n > 0,$$

mientras que S puede modelarse mediante una exponencial retardada, es decir:

$$p_S(s) = b \exp(-b(s-c)) \quad s > c.$$

(a) Antes de iniciar el análisis de productividad sobre los empleados, se ha simulado sobre un grupo de control, midiendo directamente sobre este grupo los tiempos que han tardado en acabar las tareas que están realizando y los tiempos que han tardado en desarrollar el programa informático. Como consecuencia se tienen los siguientes conjuntos de observaciones independientes: 6, 10, 12 y 20 minutos para el tiempo N y 6, 12, 18 y 36 minutos para el tiempo S. Estime por máxima verosimilitud los valores de las constantes a, b y c.

Considere de ahora en adelante que $a = 10$ minutos, $b = 10$ minutos y $c = 5$ minutos.

(b) Si cuando comienza el análisis de productividad, el encargado recibe la notificación de finalización del programa de tres empleados diferentes a las 12:25, a las 12:30 y a las 12:40 a.m., estime por máxima verosimilitud el tiempo que ha tardado cada uno de estos empleados en realizar el programa.

(c) ¿Qué tiempo estimaríamos que ha tardado cada uno de estos empleados si utilizásemos un estimador de mínimo error cuadrático medio?

Solution:

(a) $\hat{a}_{\mathrm{ML}} = \dfrac{K}{\sum_{k=1}^{K} n^{(k)}} = \dfrac{1}{12}$ minutos^{-1};
$\hat{c}_{\mathrm{ML}} = \text{mín}_k \left\{ s^{(k)} \right\} = 6$ minutos;
$\hat{b}_{\mathrm{ML}} = \dfrac{K}{\sum_{k=1}^{K} \left(s^{(k)} - \hat{c}_{\mathrm{ML}} \right)} = \dfrac{1}{12}$ minutos^{-1}.

(b) $\hat{s}_{\mathrm{ML}} = x$. $\hat{s}_{\mathrm{ML}}(x = 25) = 25$, $\hat{s}_{\mathrm{ML}}(x = 30) = 30$,$\hat{s}_{\mathrm{ML}}(x = 40) = 40$.

(c) $\hat{s}_{\mathrm{MMSE}} = \frac{x+5}{2}$. $\hat{s}_{\mathrm{MMSE}}(x = 25) = 15$, $\hat{s}_{\mathrm{MMSE}}(x = 30) = 17.5$,$\hat{s}_{\mathrm{MMSE}}(x = 40) = 22.5$.

Ejercicio 44 (MSE, MAD)

Se sabe que la distribución conjunta de S con X viene dada por:

$$p_{S,X}(s, x) = \left[\begin{array}{lll} \frac{4s}{x(1-x)}, & x(1-x) < s < 2x(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{resto} & \end{array} \right.$$

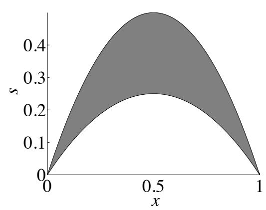
(a) Represente, de forma aproximada, la región de soporte de la distribución conjunta.

(b) Determine el estimador $\widehat{S}_{\mathrm{MMSE}}$.

(c) Determine el estimador $\widehat{S}_{\mathrm{MAD}}$.

Solution:

(a) La región de soporte es la zona sombreada de la figura



(b) $\hat{s}_{\mathrm{MMSE}} = \dfrac{14}{9} x(1 - x)$.

(c) $\hat{s}_{\mathrm{MAD}} = \sqrt{\dfrac{5}{2}} x(1 - x)$

Ejercicio 45 (ML)

Se toma una medida de la tensión intantánea X existente en un momento dado en un nodo de un circuito. En dicho nodo existe una componente de señal con valor S, contaminada por ruido gaussiano aditivo de media nula y varianza v, e independiente de la señal. A priori, el valor de S sigue una densidad de probabilidad gaussiana de media y varianza unitarias.

(a) Suponiendo conocida v, calcule el estimador de máxima verosimilitud de S, $\hat{s}_{\mathrm{ML}}(x)$.

(b) Calcule el error cuadrático medio en el que incurre el estimador $\hat{s}_{\mathrm{ML}}(x)$.

(c) Calcule la verosimilitud de v a la vista de x, $p_{X|v}(x|v)$.

(d) Calcule el estimador de máxima verosimilitud de v, $\hat{v}_{\mathrm{ML}}(x)$.

Solution:

(a) De acuerdo con el enunciado:

$$X = S + R$$

(donde R es el ruido). R es gaussiana de media 0 y varianza v, y S es gaussiana de media 1 y varianza 1. Por tanto, $X|S$ es gaussiana, de media

$$m_{X|s} = \mathbb{E}\{X|s\} = \mathbb{E}\{S+R|s\} = \mathbb{E}\{S|s\} + \mathbb{E}\{R|s\} = s + \mathbb{E}\{R\} = s.$$

y varianza

$$\mathbb{E}\{(X - m_{X|s})^2|s\} = \mathbb{E}\{(X-s)^2|s\} = \mathbb{E}\{R^2|s\} = v$$

luego

$$p_{X|S}(x|s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{2v}\right)$$

y, maximizando respecto a s

$$\hat{s}_{\mathrm{ML}}(x) = x$$

(b) El MSE del estimador s_{ML} es

$$\mathbb{E}\{(\hat{S}_{\mathrm{ML}} - S)^2\} = \mathbb{E}\{(X-S)^2\} = \mathbb{E}\{(S+R-S)2\} = \mathbb{E}\{R^2\} = v$$

(c) X es gausiana, de media

$$\mathbb{E}\{X\} = \mathbb{E}\{S\} + \mathbb{E}\{R\} = 1$$

y varianza

$$\mathbb{E}\{(X-1)^2\} = \mathbb{E}\{(S-1)\} + \mathbb{E}\{R^2\} = v + 1$$

por tanto

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(v+1)}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2(v+1)}\right)$$

(v es un parámetro determinista de la distribución de modo que $p_X(x) \equiv p_{X|v}(x|v)$

(d)

$$\begin{aligned}
\hat{v}_{\mathrm{ML}}(x) &= \arg\max_v p_{X|v}(x|v) = \arg\max_v \log(p_{X|v}(x|v)) \\
&= \arg\max_v \left\{-\frac{1}{2}\log(2\pi(v+1)) - \frac{(x-1)^2}{2(v+1)}\right\} \\
&= \arg\min_v \left\{\log(v+1) + \frac{(x-1)^2}{v+1}\right\}
\end{aligned}$$

Nótese que el valor de v debe ser no-negativo. El valor de v que anula la derivada es

$$v = (x-1)^2 - 1$$

que podría ser negativo. En tal caso, el estimador ML es el valor más próximo, es decir, 0. Por tanto,

$$\hat{v}_{\mathrm{ML}}(x) = \max[(x-1)^2 - 1, 0]$$

Ejercicio 46 (LMSE)

Se sabe que la distribución conjunta de S y X viene dada por:

$$p_{S,X}(s,x) = \frac{4}{(x+s)^3}, \qquad s \geq 1, \quad x \geq 1.$$

(a) Determine $p_{S|X}(s|x)$.

(b) Determine el estimador MAP de S dado X.

(c) Determine el estimador de mínima desviación absoluta (MAD) de S dado X.

Solution:

(a) $p_{S|X}(s|x) = \dfrac{2(x+1)^2}{(x+s)^3}, \qquad ,x \geq 1.$

(b) $\widehat{S}_{\text{MAP}} = 1.$

(c) $\widehat{S}_{\text{MAD}} = (\sqrt{2}-1)X + \sqrt{2}.$

Ejercicio 47 (ML)

Un estudiante puntual se levanta temprano cada mañana y alcanza la parada del autobús exactamente a las 8:00 am, que es la hora programada de llegada del único autobus que puede llevarle a la universidad. El bus suele retrasarse y nunca llega antes de su hora prevista. La densidad de probabilidad del retardo del autobús es

$$p_{T_\text{B}|\Lambda_\text{B}}(t_\text{B}|\lambda_\text{B}) = \lambda_\text{B} \exp(-\lambda_\text{B} t_\text{B}), \quad 0 < t_\text{B} \text{ min}$$

donde t_B son los minutos de retraso. Los retrasos de cada día son independientes e identicamente distribuidos (iid).

Un segundo estudiante, impuntual, utiliza el mismo autobús. El retraso en la llegada de este estudiante a la parada sigue la distribución

$$p_{T_\text{E}|\Lambda_\text{E}}(t_\text{E}|\lambda_\text{E}) = \lambda_\text{E} \exp(-\lambda_\text{E} t_\text{E}), \quad 0 < t_\text{E} \text{ min}$$

donde T_E es el retraso con respecto al estudiante puntual. Estos retrasos también son iid.

Por último, se sabe que T_B y T_E son independientes entre sí.

(a) Modelado: los primeros cinco días del curso el autobús llegó a la parada 0, 6, 15, 20 y 24 minutos tarde, mientras que el estudiante impuntual llegó a la parada 15, 10, 12, 5 y 3 minutos tarde. Estime λ_B y λ_E mediante ML a partir de estas observaciones. Especifique las unidades.

Considere estas estimaciones ML como los verdaderos valores de λ_B y λ_E durante el resto del ejercicio.

(b) Calcule el tiempo medio de espera en la parada del estudiante puntual.

(c) El sexto día, el estudiante impuntual llega a la parada a las 8.05 am. Encuentra allí al estudiante puntual y le pregunta cuanto tiempo más tendrán que esperar (en media) hasta que llegue el autobús. Calcule esta cantidad y contrástela con su respuesta a b).

Indicación: Observe que se está pidiendo calcular $\mathbb{E}[T_\text{B} - 5 \text{ min} | T_\text{B} > 5 \text{ min}]$.

(d) Si el estudiante impuntual pierde el autobús, no irá a la universidad ese día. Suponiendo que este proceso de llegadas del autobús y el estudiante impuntual se repite durante el resto del curso, determine el porcentaje de días que, en media, cada estudiante asiste a la universidad.

Solution:

(a) $\hat{\lambda}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{13}$ min^{-1}, $\hat{\lambda}_{\mathrm{V}} = \frac{1}{9}$ min^{-1}.

(b) $\mathbb{E}[t_{\mathrm{B}}] = 13$ min.

(c) $\mathbb{E}[t_{\mathrm{B}} - 5 \text{ min} | t_{\mathrm{B}} > 5 \text{ min}] = 13$ min. Llegar 5 min tarde no le ahorra tiempo de espera, debe esperar (en promedio) lo mismo que espera (en promedio) el alumno puntual los demás días. Esta aparente contradicción se debe a que para el sexto día tenemos un dato adicional: El autobús tendrá un retraso superior a 5 minutos.

(d) $P\{t_{\mathrm{V}} < t_{\mathrm{B}}\} = \frac{\lambda_{\mathrm{v}}}{\lambda_{\mathrm{v}}+\lambda_{\mathrm{B}}}$, en porcentaje $\frac{100\lambda_{\mathrm{v}}}{\lambda_{\mathrm{v}}+\lambda_{\mathrm{B}}}$ %. El alumno puntual va siempre.

Ejercicio 48 (MSE)

Las v.a. S, X_1 y X_2 son conjuntamente gaussianas. Se desconocen los parámetros de la distribución conjunta, pero se sabe que:

- La distribución marginal de X_1 y X_2 es
$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \sim G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right)$$
- El estimador de mínimo error cuadrático medio (MMSE) de S empleando solo X_1 es:
$$\widehat{S}_{\mathrm{MMSE},1} = \frac{1}{2}X_1,$$
- El estimador MMSE de S empleando solo X_2 es:
$$\widehat{S}_{\mathrm{MMSE},2} = X_2.$$

Se desea estimar S a la vista de una nueva v.a. X_3 dada por la siguiente combinación lineal entre X_1 y X_2:
$$X_3 = X_1 + X_2.$$

(a) Obtenga el valor medio de X_3, $\mathbb{E}[X_3]$, su varianza, v_{X_3}, y su covarianza con S, v_{S,X_3}.

(b) Obtenga el estimador de MMSE de S empleando solo X_3, $\widehat{S}_{\mathrm{MMSE},3}$.

(c) Sabiendo que $\mathbb{E}[S^2] = 1$, obtenga el error cuadrático medio del anterior estimador, $\mathbb{E}[(S - \widehat{S}_{\mathrm{MMSE},3})^2]$.

Solution:

(a) $\mathbb{E}[X_3] = 0$,$v_{X_3} = 3$, $v_{S,X_3} = 3/2$.

(b) $\widehat{S}_{\mathrm{MMSE},3} = 1/2X_3$.

(c) $\mathbb{E}[(S - \widehat{S}_{\mathrm{MMSE},3})^2] = 1/4$.

Ejercicio 49 (Change of variable, LMSE)

Dos variables aleatorias iid X y Y siguen una fdp uniforme entre 0 y 1. Se generan dos nuevas variables aleatorias $U = \max(X,Y)$ y $V = \min(X,Y)$, es decir, se definen U y V como el máximo y el mínimo, respectivamente, de las variables iid uniformes originales.

(a) Calcule $p_{U|X}(u|x)$ y $p_{V|X}(v|x)$.

(b) Calcule $p_U(u)$ y $p_V(v)$.

(c) Calcule $\mathbb{E}[U]$, $\mathbb{E}[U^2]$ y $\mathbb{E}[V]$.

(d) Obtenga el estimador LMMSE de V dado U, $\hat{v}_{\text{LMMSE}}(u)$.

Pista: Dese cuenta de que en apartado (a) está haciendo un cambio de variable. Puede resultarle útil dibujar $\text{mín}(x,y)$ y $\text{máx}(x,y)$ como funciones de y para un valor fijo de x. La parte plana que aparece en la gráfica producirá una delta de Dirac en el resultado.

Solution:

(a) $p_{U|X}(u|x) = x\delta(u-x) + 1$ en $x \leq u \leq 1$, y 0 en otro caso

$p_{V|X}(v|x) = (1-x)\delta(v-x) + 1$ en $0 \leq v \leq x$, y 0 en otro caso

(b) $p_U(u) = 2u$ en $0 \leq u \leq 1$, y 0 en otro caso

$p_V(v) = 2(1-v)$ en $0 \leq v \leq 1$, y 0 en otro caso

(c) $\mathbb{E}[U] = 2/3$, $\mathbb{E}[U^2] = 1/2$ and $\mathbb{E}[V] = 1/3$

(d) $\hat{v}_{\text{LMMSE}}(u) = u/2$.

Ejercicio 50 (ML)

Se sabe que la distribución conjunta de S y X viene dada por:

$$p_{X|s}(x|s) = s\exp(-s\exp(-x)+x), \qquad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine el estimador ML de S dado x.

(b) Determine el estimador ML de S basado en K observaciones independientes e idénticamente distribuidas, $\{x^{(k)}, k = 1, \ldots, K\}$.

(c) Suponga que $K = 2$ y se observa $x^{(1)} = 0$, $x^{(2)} = -\ln 2$. Determine el valor máximo de la verosimilitud para estas observaciones.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\text{ML}} = \exp(X)$.

$$\begin{aligned}
\hat{s}_{\text{ML}} &= \underset{s}{\operatorname{argmax}} \log p_{X|S}(x|s) \\
&= \underset{s}{\operatorname{argmax}} \log\left(s\exp\left(-s\exp(-x)+x\right)\right) \\
&= \underset{s}{\operatorname{argmax}} \left(\log s - s\exp(-x) + x\right) \\
&= \exp(x)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\hat{s}_{\text{ML}} &= \underset{s}{\operatorname{argmax}} \sum_{k=1}^{K} \log p_{X|S}(x^{(k)}|s) \\
&= \underset{s}{\operatorname{argmax}} \sum_{k=1}^{K} \log\left(s\exp\left(-s\exp\left(-x^{(k)}\right)+x^{(k)}\right)\right) \\
&= \underset{s}{\operatorname{argmax}} \left(K\log s - s\sum_{k=1}^{K}\exp\left(-x^{(k)}\right) + \sum_{k=1}^{K} x^{(k)}\right) \\
&= \frac{K}{\sum_{k=1}^{K}\exp(-x^{(k)})}
\end{aligned}$$

(c) $p_{X^{(1)},X^{(2)}|s}(0,-\ln(2)|\hat{s}_{\mathrm{ML}}) = \dfrac{2\exp(-2)}{9}$.

Ejercicio 51 (ML, MAP, MSE)

Se desea estimar el valor de la v.a. S a partir de la observación de otra variable aleatoria X, que se genera a partir de S mediante la siguiente relación

$$X = S - R$$

siendo R una v.a. independiente de S con distribución

$$p_R(r) = \exp(-r), \quad r > 0$$

(a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de S a la vista de X, $\hat{S}_{\mathrm{ML}}$.

Sabiendo que la f.d.p. de S es $p_S(s) = \exp(-s), \quad s > 0$, calcule:

(b) El estimador de máximo a posteriori de S a la vista de X, $\hat{S}_{\mathrm{MAP}}$.

(c) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\mathrm{MMSE}}$.

Solution:

(a) $p_{X|S}(x|s) = \exp(x-s), \quad x < s.$
$\hat{S}_{\mathrm{ML}} = X.$

(b) $p_{X,S}(x,s) = \exp\left(-x-2s\right), \quad s > 0;\ x < s;$
$$\hat{S}_{\mathrm{MAP}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(c) $$p_{S|X} = \begin{cases} 2\exp\left(-2s\right), \quad s > 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\exp\left(2x\right)\exp\left(-2s\right), \quad s > x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
$$\hat{S}_{\mathrm{MMSE}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 52 (ML)

La variable aleatoria X está dada por la función de verosimilitud

$$p_{X|S}(x|s) = \ln\left(\frac{1}{s}\right) s^x, \qquad x \geq 0, \qquad 0 \leq s \leq 1$$

siendo s un parámetro desconocido.

(a) Determine el estimador ML de s a la vista de x.

(b) Determine la verosimilitud máxima para $x = 1$.

(c) Determine el estimador ML de s a la vista de un conjunto $\mathcal{C} = \{(x^{(k)}), k = 1, \ldots, K\}$ de K realizaciones independientes de X.

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\mathrm{ML}} = \exp\left(-\dfrac{1}{X}\right)$

(b) $p_{X|S}(1|s_{\mathrm{ML}}) = \dfrac{1}{e}$

(c) $\widehat{S}_{\mathrm{ML}} = \exp\left(-\dfrac{K}{\sum_{k=1}^{K} x^{(k)}}\right)$

Ejercicio 53 (ML, MAP, MSE)

Se desea estimar el valor de la v.a. S a partir de la observación de otra variable aleatoria X, de las que se conoce su distribución conjunta

$$p_{S,X}(s,x) = 4x, \qquad 0 \leq s \leq x^2, \;\; 0 \leq x \leq 1$$

Obtenga:

(a) El estimador de máxima verosimilitud de S a la vista de X, $\hat{S}_{\mathrm{ML}}$.

(b) El estimador de máximo a posteriori de S a la vista de X, $\hat{S}_{\mathrm{MAP}}$.

(c) El estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\mathrm{MMSE}}$.

(d) El estimador lineal de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de X, $\hat{S}_{\mathrm{LMMSE}} = w_0 + w_1 x$.

Solution:

(a) The prior distribution is

$$p_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{S,X}(s,x)dx = \int_{\sqrt{s}}^{1} 4x dx = 2(1-s)$$

Therefore, the likelihood function is

$$p_{X|S}(x|s) = \frac{p_{X,S}(x,s)}{p_S(s)} = \frac{x}{1-s} \qquad 0 \leq s \leq x^2, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

which is an increasing function of s. Thus, the ML estimate is the maximum value of s in the domain of the likelihood function, that is

$$\hat{S}_{\mathrm{ML}} = X^2$$

(b)

$$\hat{S}_{\mathrm{MAP}} = \underset{s}{\operatorname{argmax}}\, p_{S|X}(s|x) = \underset{s}{\operatorname{argmax}} \frac{p_{S,X}(s,x)}{p_X(x)} = \underset{s}{\operatorname{argmax}}\, p_{S,X}(s,x) = \underset{s}{\operatorname{argmax}}\, 4x$$

Thus, $\hat{S}_{\mathrm{MAP}}$ is not unique: any value of $s \in [0, X^2]$ is a MAP estimate.

(c) Since the marginal distribution is

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{S,X}(s,x)ds = \int_{0}^{x^2} 4x ds = 4x^3$$

the posterior distribution is

$$p_{S|X}(s|x) = \frac{p_{X,S}(x,s)}{p_X(x)} = \frac{1}{x^2} \qquad 0 \leq s \leq x^2 \leq 1$$

Therefore

$$\hat{s}_{\mathrm{MMSE}} = \mathbb{E}\{S|x\} = \int_{-\infty}^{\infty} s p_{S|X}(s|x) ds = \int_{0}^{x^2} \frac{s}{x^2} ds = \frac{x^2}{2}$$

(d) $\hat{S}_{\mathrm{LMMSE}} = X - \frac{7}{15}$

Ejercicio 54 (ML)

La variable aleatoria X sigue la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$p_X(x) = a^2 x \exp(-ax), \qquad x \geq 0$$

siendo a un parámetro desconocido.

(a) Determine la expresión del estimador ML de a a la vista de un conjunto $\mathcal{C} = \{(x^{(k)}), k = 1, \ldots, K\}$ de K realizaciones independientes de X.

(b) Dado el conjunto de observaciones $\mathcal{C} = \{0.2, 0.5, 0.8, 1\}$, determine el valor de $\widehat{A}_{\mathrm{ML}}$.

Solution:

(a) $\widehat{A}_{\mathrm{ML}} = \dfrac{2K}{\sum_{k=1}^{K} x^{(k)}}$

(b) $\widehat{A}_{\mathrm{ML}} = 3.2$

Ejercicio 55 (LMSE)

Una compañía energética dispone de dos parques de generación eólica. La potencia total generada a partir de estos recursos puede modelarse como

$$S = 10(2X_1 + X_2),$$

donde S es la potencia generada, y $X_i,\ i = 1, 2$, es la velocidad del viento en cada instalación. Se sabe que la distribución conjunta de X_1 y X_2 es

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{a\, b} \exp\left(-\frac{x_1}{a}\right), \quad \text{para } 0 < x_1 < \infty \quad \text{y} \quad x_1 < x_2 < x_1 + b \tag{1}$$

con $b = a \ln 2$.

Se desea construir un estimador lineal de mínimo error cuadrático de S basado en la observación X_1. Para ello:

(a) Represente el dominio de la distribución conjunta de X_1 y X_2.

(b) Obtenga la distribución marginal de X_1. Calcule la media y el valor cuadrático medio de dicha variable.

(c) Calcule la media de X_2 y la correlación de X_1 y X_2: $\mathbb{E}\{X_1 X_2\}$.

(d) Obtenga los pesos óptimos del estimador LMSE de S buscado: $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}} = w_0^* + w_1^* X_1$

Solution:

(b) $p_{X_1}(x_1) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{x_1}{a}\right)$, for $x_1 > 0$
$\mathbb{E}\{X_1\} = a$ y $\mathbb{E}\{X_1^2\} = 2a^2$

(c) $\mathbb{E}\{X_2\} = a + \frac{b}{2}$
$\mathbb{E}\{X_1 X_2\} = 2a^2 + \frac{ba}{2}$

Ejercicio 56 (MSE)

La distribución conjunta de dos variables aleatorias S y X está dada por:

$$p_{S,X}(s, x) = \sqrt{\frac{x(1-x)}{2\pi}} \exp\left(-\frac{(s - x(1-x))^2}{2x(1-x)}\right), \qquad 0 < x < 1, \qquad s \in \mathbb{R}$$

(a) Determine el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a la vista de x.

(b) Determine el error cuadrático medio condicionado a la observación, $\mathbb{E}\{(S-\widehat{S}_{\text{MMSE}})^2|X=x\}$ para el estimador obtenido en el apartado a).

(c) Determine el error cuadrático medio del estimador obtenido en el apartado a).

Solution:

(a) $\widehat{S}_{\text{MMSE}} = X(1-X)$

(b) $\mathbb{E}\{(S-\widehat{S}_{\text{MMSE}})^2|X=x\} = x(1-x)$

(c) $\mathbb{E}\{(S-\widehat{S}_{\text{MMSE}})^2\} = \dfrac{1}{30}$

Ejercicio 57 (MSE)

Una empresa de investigación está trabajando en nuevo sistema de comunicaciones que le permite modelar la distribución de ruido antes de mezclarse con la señal. De este modo, al receptor le llega la siguiente observación

$$X = S + N_{\text{mod}}$$

donde la señal S es una v.a. gaussiana de media nula y varianza v_s, y N_{mod} es el nuevo ruido que viene dado por la siguiente expresión:

$$N_{\text{mod}} = \lambda N_1 + (1-\lambda)N_2$$

siendo N_1, N_2 v.a. gaussianas independientes entre sí, e independientes de S, con media nula y varianza v; mientras que λ es un parámetro de control del sistema que puede tomar valores en el rango de 0 a 1.

(a) Obtenga la distribución de N_{mod} en función de λ.

(b) Calcule el estimador MMSE de S a la vista de X para el nuevo sistema y obtenga el error cuadrático medio de dicho modelo en función de λ.

(c) Calcule el valor de λ, λ_{opt}, que proporcionaría el menor error cuadrático posible.

(d) Indique, en términos de reducción del MSE, la ventaja que proporcionaría este modelo cuando se configura con el valor λ_{opt} respecto al caso $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$. Obtenga esta reducción del error para el caso particular en el que $v_s = v = 1$.

El técnico encargado de diseñar el sistema que genera N_{mod} se ha ido de vacaciones, dejando el sistema funcionando pero sin indicar con qué valor de λ lo ha dejado configurado. Así que le piden al nuevo estudiante en prácticas que tome un conjunto de observaciones independientes del ruido a la salida del prototipo, $\{N_{\text{mod}}^{(k)}\}_{k=1}^{K}$, y estime por máxima verosimilitud el valor de λ, $\hat{\lambda}_{ML}$.

(e) Considerando $v = 3$ y que el conjunto de observaciones es $\{-1, 0, 2, 1\}$, obtenga el valor de $\hat{\lambda}_{ML}$.

Solution:

(a) N_{mod} es gaussiana de media nula y varianza $v_{MOD} = \lambda^2 v + (1-\lambda)^2 v$.

(b) $\hat{s}_{MSE} = \frac{v_s}{v_s + v_{MOD}} x \qquad MSE_{MOD} = \frac{(\lambda^2+(1-\lambda)^2)vv_s}{v_s+(\lambda^2+(1-\lambda)^2)v}$

(c) $\lambda_{\text{opt}} = 0.5$

(d) $\Delta MSE = \frac{1}{6}$

(e) $\hat{\lambda}_{ML} = 0.5$

Ejercicio 58 (MSE, MAP, MSE)

La distribución conjunta de las variables aleatorias S y X está dada por

$$p_{S,X}(s,x) = 15s, \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq s \leq x$$

Se desea estimar S a la vista de X.

(a) Determine el estimador de mínimo error cuadrático medio.

(b) Determine el estimador MAP.

(c) Determine el estimador de la forma $\widehat{S} = wX$ de mínimo error cuadrático medio.

Solution:

(a) $\hat{s}_{\text{MSE}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{x - x^4}{1 - x^2}$

(b) $\hat{s}_{\text{MAP}} = x$

(c) $w = \dfrac{7}{8}$

Ejercicio 59 (ML, LMSE)

Se desea estimar una variable aleatoria S a partir de otra X, siendo la relación entre ellas

$$X = S \cdot T$$

donde S y T son variables aleatorias e independientes, ambas uniformes entre 0 y 1.

(a) Calcule la media y la varianza de S.

(b) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de S a partir de X, $\hat{S}_{\text{ML}}$.

(c) Represente el dominio de la distribución conjunta de S y X. Obtenga asimismo la expresión de la densidad de probabilidad conjunta de S y X, $p_{S,X}(s,x)$.

(d) Calcule la media de X y su valor cuadrático medio. (Sugerencia: Puede resultarle más sencillo calcular dichos valores sin obtener $p_X(x)$ como resultado intermedio).

(e) Obtenga el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio, $\hat{S}_{\text{LMSE}} = w_0^* + w^* X$.

(f) Represente los estimadores obtenidos en este problema sobre unos mismos ejes coordenados X-S, y discuta cuál de ellos incurre en un menor error cuadrático medio.

Solution:

(a) $\mathbb{E}\{S\} = \frac{1}{2}$ y $v_x = \frac{1}{12}$

(b) Dado que $\hat{s}_{\text{ML}} = \text{argmax}_s\, p_{X|S}$, calcularemos en primer lugar la función de verosimilitud,

$$\begin{aligned}
p_{X|S}(x|s) &= \frac{d}{dx}F_{X|S}(x|s) = \frac{d}{dx}P\{X \leq x|S = s\} = \frac{d}{dx}P\{ST \leq x|S = s\} \\
&= \frac{d}{dx}P\left\{T \leq \frac{x}{s}\right\} = \frac{d}{dx}F_T\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s}p_T\left(\frac{x}{s}\right) \\
&= \frac{1}{s}, \qquad 0 \leq x \leq s \leq 1
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\hat{s}_{\mathrm{ML}} = \underset{s}{\operatorname{argmax}}\, p_{X|S}(x|s) = \underset{s\in[x,1]}{\operatorname{argmax}} \frac{1}{s} = x \tag{2}$$

(c)

$$p_{S,X}(s,x) = p_{X|S}(x|s)p_X(x) = \frac{1}{s}, \qquad 0 \le x \le s \le 1$$

(d)

$$\mathbb{E}\{X\} = \mathbb{E}\{ST\} = \mathbb{E}\{S\}\mathbb{E}\{T\} = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{E}\{X^2\} = \mathbb{E}\{S^2T^2\} = \mathbb{E}\{S^2\}\mathbb{E}\{T^2\} = \frac{1}{9}$$

(e) El estimador LMSE es $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}} = w_0^* + w^*X = \mathbf{w}^{*\intercal}\mathbf{Z}$ donde $\mathbf{Z} = (1, X)^\intercal$. Por tanto.

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{R}_{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{r}_{s\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{E}\{X\} \\ \mathbb{E}\{X\} & \mathbb{E}\{X^2\} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{E}\{S\} \\ \mathbb{E}\{SX\} \end{pmatrix}$$

Sabiendo que $\mathbb{E}\{SX\} = \mathbb{E}\{S^2\}\mathbb{E}\{T\} = \frac{1}{6}$, resulta

$$\mathbf{w}^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{3}$$

that is $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}} = \frac{2}{7} + \frac{6}{7}X$

(f) Dado que los dos estimadores son lineales, necesariamente $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}}$ es el de menor error cuadrático medio.

Ejercicio 60 (Bayesian)

La distribución conjunta de dos variables aleatorias S y X está dada por:

$$p_{S,X}(s,x) = 12s^2, \qquad 0 < s < x, \qquad 0 < x < 1$$

(a) Obtenga el estimador de S, $\widehat{S}_c$, que mínimiza el coste medio dado la observación de la siguiente función de coste:

$$c(s,\widehat{s}) = \frac{(s-\widehat{s})^2}{s}$$

(b) Determine el coste medio condicionado a la observación, $\mathbb{E}\{c(S,\widehat{S}_c)|X=x\}$ para el estimador obtenido en el apartado a).

Solution:

(a) $\widehat{S}_c = \frac{2X}{3}$

(b) $\mathbb{E}\{c(S,\widehat{S}_c)|X=x\} = \frac{x}{12}$

Ejercicio 61 (MSE, MSE)

Se han realizado dos medidas X_1 y X_2 del valor de cierta magnitud S. Se sabe que X_1 y X_2

están relacionadas con S mediante

$$X_1 = S + T_1$$
$$X_2 = S + T_2$$

siendo T_1 y T_2 variables aleatorias de ruido gaussiano independientes entre sí e independientes de S, de media 0 y varianzas 0.1 y 0.3, respectivamente.

Asimismo, se sabe que S es una v.a. gaussiana de media 4 y varianza 0.9.

(a) Determine el estimador MMSE de S a la vista de X_1. Llámelo $\hat{S}_1$.

(b) Determine el error cuadrático medio del estimador $\hat{S}_1$.

(c) Determine el estimador MMSE de S a la vista de $Z = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$. Llámelo $\hat{S}_z$.

(d) Determine la probabilidad de que $\hat{S}_1$ sea mayor que $\hat{S}_z$, es decir, $P\{\hat{S}_1 > \hat{S}_z\}$. En caso de que no pueda calcular analíticamente el resultado, expréselo utilizando la función

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Solution:

(a) $\hat{S}_1 = 0.9X_1 + 0.4$.

(b) $\text{MSE} = 0.09$

(c) $\hat{S}_z = 0.9Z + 0.4$.

(d) $P\{\hat{S}_1 > \hat{S}_z\} = \dfrac{1}{2}$.

Ejercicio 62 (Bayesian, MSE, MAP, MAD)

La distribución a posteriori de la variables aleatoria S dado X es

$$p_{S|X}(s|x) = \frac{1}{s\ln(x)}, \qquad 1 \le s \le x.$$

Se desea estimar S a la vista de X.

(a) Determine el estimador de mínimo error cuadrático medio, $\hat{s}_{\text{MMSE}}$

(b) Determine el estimador de máximo a posteriori (MAP).

(c) Determine el estimador de mínima desviación abosluta (MAD).

(d) Determine el estimador bayesiano, $\hat{s}_{\text{B}}$, para un coste $c(s, \hat{s}) = s(s - \hat{s})^2$.

Solution:

(a) $\hat{s}_{\text{MSE}} = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$

(b) $\hat{s}_{\text{MAP}} = 1$

(c) $\hat{s}_{\text{MAD}} = \sqrt{x}$

(d) $\hat{s}_{\text{B}} = \dfrac{1}{2}(1 + x)$

Ejercicio 63 (Gauss, MSE, ML)

Se tiene un sistema de comunicación donde la señal transmitida S viaja por dos canales diferentes generando así las señales, X_1 y X_2:

$$X_1 = \alpha(S + N_1)$$

$$X_2 = 2\alpha(S + N_2)$$

siendo α una constante de atenuación del canal.

Se sabe que N_1 y N_2, los ruidos asociados a cada canal, son v.a. gaussianas con media nula, varianza 0.5 e independientes entre sí. Además, la señal transmitida, S, es otra v.a. gaussiana de media nula, varianza unidad y es independiente de N_1 y N_2. Considerando que en el receptor se observa una suma de las señales a la salida de cada canal, es decir,

$$X = X_1 + X_2$$

(a) Obtenga el estimador de mínimo error cuadrático medio de S a partir de X, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.

(b) Calcule el error cuadrático medio del estimador $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.

(c) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de S a partir de X, $\hat{S}_{\text{ML}}$.

(d) Determine la distribución marginal, $p_X(x)$

(e) La distribución marginal depende del parámetro de atenuación, α, desconocido. Determine el estimador ML de α, $\hat{\alpha}_{\text{ML}}$, a partir de K realizaciones independientes, $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{K}$, de la distribución marginal.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\text{ML}} = \dfrac{x}{3\alpha}$

(b) $\hat{S}_{\text{MMSE}} = \dfrac{3\alpha}{11.5\alpha^2}x$

(c) $\hat{\alpha}_{\text{ML}} = \sqrt{\frac{2}{23}\sum_k {x^{(k)}}^2}$

(d) $\hat{\alpha}_{\text{ML}} = 2$

Ejercicio 64 (ML, MAP, MSE)

Las variables aleatorias S y X están relacionadas a través de la función de verosimilitud

$$p_{X|S}(x|s) = xs^2 \exp(-sx), \qquad x \geq 0,\, s \geq 0$$

y la distribución a priori

$$p_S(s) = \exp(-s), \qquad s \geq 0$$

(a) Determine el estimador ML de S dado X, $\hat{S}_{\text{ML}}$.

(b) Determine el estimador MAP de S dado X, $\hat{S}_{\text{MAP}}$.

(c) Determine el estimador de mínimo MSE, $\hat{S}_{\text{MSE}}$.

(d) Determine el estimador ML basado en el conjunto de observaciones i.i.d. $\{x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(K-1)}\}$.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned}
\hat{s}_{\mathrm{ML}} &= \operatorname*{argmax}_{s} p_{X|S}(x|s) \\
&= \operatorname*{argmax}_{s} xs^2 \exp(-sx) \\
&= \operatorname*{argmax}_{s} \{2\ln s - sx\} = \frac{2}{x}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\hat{s}_{\mathrm{MAP}} &= \operatorname*{argmax}_{s} p_{X|S}(x|s)p_S(s) \\
&= \operatorname*{argmax}_{s} xs^2 \exp(-s(1+x)) \\
&= \operatorname*{argmax}_{s} \{2\ln s - s(1+x)\} = \frac{2}{1+x}
\end{aligned}$$

(c) Noting that

$$\begin{aligned}
p_X(x) &= \int_0^\infty p_{X|S}(x|s)p_S(s)ds \\
&= \int_0^\infty xs^2 \exp(-s(1+x))\, ds
\end{aligned}$$

Applying the variable change $u = (1+x)s$, we get

$$\begin{aligned}
p_X(x) &= \frac{x}{(1+x)^3}\int_0^\infty u^2 \exp(-u)\, du \\
&= \frac{2x}{(1+x)^3}
\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}
p_{S|X}(s|x) &= \frac{p_{X|S}(x|s)p_S(s)}{p_X(x)} \\
&= \frac{xs^2\exp(-s(1+x))}{\frac{2x}{(1+x)^3}} \\
&= \frac{1}{2}(1+x)^3 s^2 \exp(-s(1+x))
\end{aligned}$$

and, thus

$$\begin{aligned}
\hat{s}_{\mathrm{MMSE}} &= \mathbb{E}\{S|x\} \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2}(1+x)^3 s^3 \exp(-s(1+x))\, ds \\
&= \frac{1}{2(1+x)}\int_0^\infty s^3 \exp(-u)\, du \\
&= \frac{3!}{2(1+x)} = \frac{3}{1+x}
\end{aligned}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\hat{s}_{\text{ML}} &= \underset{s}{\operatorname{argmax}} \prod_{k=0}^{K-1} p_{X|S}(x^{(k)}|s) \\
&= \underset{s}{\operatorname{argmax}} \left(\prod_{k=0}^{K-1} x^{(k)}\right) s^{2K} \exp\left(-s \sum_{k=0}^{K-1} x^{(k)}\right) \\
&= \underset{s}{\operatorname{argmax}} \left\{2 \ln s - s \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^{(k)}\right\} \\
&= \frac{2K}{\sum_{k=0}^{K-1} x^{(k)}}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 65 (Gauss, MSE)

Las variables aleatorias S y X están definidas por la ecuación

$$
\begin{aligned}
X &= \mathbf{v}^\intercal \mathbf{R} \\
S &= \mathbf{w}^\intercal \mathbf{R}
\end{aligned}
$$

donde $\mathbf{v} = (v_0, v_1)^\intercal$ y $\mathbf{w} = (w_0, w_1)^\intercal$ son vectores de parámetros conocidos y $\mathbf{R} = (R_0, R_1)^\intercal$ es un vector aleatorio. R_0 y R_1 son variables aleatorias independientes, gausianas, con media 0 y varianza σ_R^2.

(a) Determine $\mathbb{E}\{X\}$, $\mathbb{E}\{S\}$, $\mathbb{E}\{X^2\}$, $\mathbb{E}\{S^2\}$ and $\mathbb{E}\{SX\}$.

(b) Determine el estimador de mínimo MSE de S dado X, $\hat{S}_{\text{MSE}}$.

(c) Determine el MSE del estimador $\hat{S}_{\text{MSE}}$.

(d) El mínimo MSE puede depender de los vectores de parámetros $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Determine el valor de $\mathbf{v}$ que minimiza el MSE mínimo.

(e) Determine el estimador de mínimo MSE de S dado R_0, $\hat{S}'_{\text{MSE}}$.

Solution:

(a)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{X\} &= \mathbf{v}^\intercal \mathbb{E}\{\mathbf{R}\} = 0 \\
\mathbb{E}\{S\} &= \mathbf{w}^\intercal \mathbb{E}\{\mathbf{R}\} = 0 \\
\mathbb{E}\{X^2\} &= \mathbf{v}^\intercal \mathbb{E}\{\mathbf{R}\mathbf{R}^\intercal\} \mathbf{v} = \sigma_R^2 \|\mathbf{v}\|^2 \\
\mathbb{E}\{S^2\} &= \mathbf{w}^\intercal \mathbb{E}\{\mathbf{R}\mathbf{R}^\intercal\} \mathbf{w} = \sigma_R^2 \|\mathbf{w}\|^2 \\
\mathbb{E}\{SX\} &= \mathbf{v}^\intercal \mathbb{E}\{\mathbf{R}\mathbf{R}^\intercal\} \mathbf{w} = \sigma_R^2 \mathbf{v}^\intercal \mathbf{w}
\end{aligned}
$$

(b) Since

$$
\begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^\intercal \\ \mathbf{w}^\intercal \end{pmatrix} \mathbf{R} \tag{4}
$$

we can see that (X, S) is a linear function of two Gaussian random variables (R_0 and R_1). Thus, X and S are jointly Gaussian, and the minimum MSE estimate is given by

$$
\hat{S}_{\text{MSE}} = m_S + \frac{V_{SX}}{V_X}(X - m_X) = \frac{\mathbf{v}^\intercal \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2} X
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
MSE &= \mathbb{E}\{(S - \hat{S}_{\text{MSE}})^2\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left(S - \frac{\mathbf{v}^\intercal\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}X\right)^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{S^2\right\} - 2\frac{\mathbf{v}^\intercal\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbb{E}\left\{SX\right\} + \left(\frac{\mathbf{v}^\intercal\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)^2\mathbb{E}\left\{X^2\right\} \\
&= \sigma_R^2\|\mathbf{w}\|^2 - 2\frac{\mathbf{v}^\intercal\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\sigma_R^2\mathbf{v}^\intercal\mathbf{w} + \left(\frac{\mathbf{v}^\intercal\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)^2\sigma_R^2\|\mathbf{v}\|^2 \\
&= \sigma_R^2\|\mathbf{w}\|^2\left(1 - \frac{(\mathbf{v}^\intercal\mathbf{w})^2}{\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2}\right)
\end{aligned}
$$

(d) From the relations $X = \mathbf{v}^\intercal\mathbf{R}$ and $S = \mathbf{w}^\intercal\mathbf{R}$, we can see that, if $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, we have $S = X$. In that case the minimum MSE estimate is $\hat{S}_{\text{MSE}} = X$ with $MSE = 0$. Therefore, the minimum value of the minimum MSE is 0.

(e)

$$
\begin{aligned}
\hat{S}'_{\text{MSE}} &= \mathbb{E}\{S|R_0\} = \\
&= \mathbb{E}\{w_0R_0 + w_1R_1|R_0\} \\
&= w_0\mathbb{E}\{R_0|R_0\} + w_1\mathbb{E}\{R_1|R_0\} \\
&= w_0R_0
\end{aligned}
$$

Ejercicio 66 (1.7)

Las variables aleatorias S y X están relacionadas a través de la distribución a posteriori:

$$
p_{S|X}(s|x) = \frac{x + 4s - s^2}{x + \frac{5}{3}}, \qquad 0 \le s \le 1, \qquad x \ge 0
$$

(a) Determine el estimador de mínimo error cuadrático medio, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$.

(b) Determine el estimador de máximo a posteriori, $\hat{S}_{\text{MAP}}$.

Solution:

(a)

$$
\begin{aligned}
\hat{s}_{\text{MMSE}} &= \mathbb{E}\{S|X = x\} = \int_0^1 s\frac{x + 4s - s^2}{x + \frac{5}{3}}ds \\
&= \frac{6x + 13}{12x + 20}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\hat{s}_{\text{MAP}} &= \underset{s}{\operatorname{argmax}}\{p_{S|X}(s|x)\} = \underset{s\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\left\{\frac{x + 4s - s^2}{x + \frac{5}{3}}\right\} \\
&= \underset{s\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\left\{x + 4s - s^2\right\}
\end{aligned}
$$

La parábola $x + 4s - s^2$ tiene derivada

$$-2s + 4$$

que se anula en $s = 2$, que queda fuera del dominio de $p_{S|X}(s|x)$. Por tanto, $\hat{s}_{\text{MAP}}$ debe coincidir con uno de los extremos del intervalo $[0, 1]$. Dado que la derivada es positiva en ese intervalo, $p_{S|X}(s|x)$ es creciente en el dominio, y por tanto

$$\hat{s}_{\text{MAP}} = 1$$

A. Problemas adicionales

Ejercicio 3.E1 (1.2; 1.3)

Considérese la observación

$$X = S + N$$

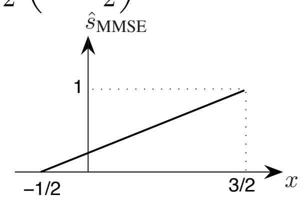
con la señal S inmersa en un ruido N independiente de ella, y siendo sus densidades de probabilidad

$$p_S(s) = \begin{cases} 1, & 0 < s < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} = \Pi(s - 1/2)$$

$$p_N(n) = \begin{cases} 1, & -1/2 < n < 1/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} = \Pi(n)$$

Establézcase el estimador de error cuadrático medio mínimo de S, $\hat{S}_{\text{MMSE}}$. Discútase el resultado.

Solution: $\hat{S}_{\text{MMSE}} = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{2}\right) \qquad (-1/2 < x < 1/2)$



Las variaciones entre los casos extremos ($\hat{s}_{\text{MMSE}}(-1/2) = 0, \hat{s}_{\text{MMSE}}(3/2) = 1$) se atribuyen linealmente al ruido

Ejercicio 3.E2 (1.4)

Se dispone de K muestras, tomadas independientemente, de una variable X laplaciana $L(m, v)$

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2v}} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{v}}|x - m|\right)$$

Obtener el estimador ML conjunto de m, v.

Solution:

$$\hat{M}_{\text{ML}} = \text{med}_K\{X^{(k)}\} \quad \text{(mediana muestral)}$$

$$\hat{V}_{\text{ML}} = \frac{2}{K^2}\left(\sum_k |X^{(k)} - \hat{M}_{\text{ML}}|\right)^2$$

Ejercicio 4.Q1 (1.5)

A partir de las variables aleatorias unidimensionales S y R, con densidad de probabilidad conjunta

$$G\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right),$$

se forma la observación $X = S + R$

(a) Determínese $\hat{S}_{\mathrm{MSE}}$.

(b) ¿Era previsible el resultado? (Considérese la relación que existe entre $\mathbb{E}\{R|x\}$ y $\mathbb{E}\{S|x\}$).

(c) Calcule el error cuadrático medio.

Solution:

(a) $\hat{S}_{\mathrm{MSE}} = X/2$

(b) $\mathbb{E}\{R|x\} = \mathbb{E}\{S|x\}$ (hay total simetría)
$\mathbb{E}\{X|x\} = x = \mathbb{E}\{S + R|x\} = \mathbb{E}\{S|x\} + \mathbb{E}\{R|x\}$

(c) $\mathbb{E}\left\{\left(S - \hat{S}\right)^2\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rho$

Ejercicio 6.E1 (1.6)

Sean S, X_1 y X_2 tres variables aleatorias de medias nulas tales que:

- la matriz de covarianzas de X_1 y X_2 es: $\mathbf{V}_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$
- el vector de covarianzas cruzadas de S con X tiene como expresión: $\mathbf{v}_{sx} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(a) Calcúlense los coeficientes w_1 y w_2 del estimador lineal de mínimo error cuadrático medio

$$\hat{S}_{\mathrm{LMSE}} = w_0 + w_1 X_1 + w_2 X_2$$

(b) Determínese el valor cuadrático medio del error de estimación, $\hat{E} = S - \hat{S}_{\mathrm{LMSE}}$.

(c) Discútase el papel de la variable X_2 , que, según se ve, está incorrelacionada con la variable S a estimar.

Solution:

(a) $w_1 = \frac{1}{1-\rho^2} \qquad w_2 = -\frac{\rho}{1-\rho^2}$

(b) $\mathbb{E}\{\hat{E}^2\} = \mathbb{E}\{S^2\} - \frac{1}{1-\rho^2}$

(c) Interviene combinándose con X_1 para conseguir una mayor proyección de S.

Ejercicio 6.E3 (1.8)

Se presentan en la tabla los valores observados de un índice s de rendimiento de un proceso químico en función de la medida x de una de las materias primas utilizadas, realizándose 7 observaciones por medida.

x	20	22	24	26
s	120	112	139	140
	106	134	121	152
	109	120	122	162
	103	119	121	133
	122	120	123	148
	105	112	135	148
	107	121	126	136

(a) Determínese la recta de regresión de s sobre x.

(b) Calcúlense los residuos.

Solution:

(a) $\hat{s} \simeq 1.2714 + 5.3857x$

(b)

x	20	22	24	26
residuo	11.02	-7.75	8.47	-1.30
	-2.98	14.25	-9.53	10.70
	0.02	0.25	-8.53	20.70
	-5.98	-0.75	-9.53	-8.30
	13.02	0.25	-7.53	6.70
	-3.98	-7.75	4.47	-5.30
	-1.98	1.25	-4.53	-5.30

Ejercicio 6.E5 (1.6)

Se desea estimar la v.a. S a partir de observaciones de las vv.aa. X_1 y X_2; es decir, obtener

$$\hat{S}_{\mathrm{LMSE}}(X_1, X_2) = w_0 + w_1 X_1 + w_2 X_2$$

Las medias de dichas variables son $\mathbb{E}\{S\} = 1$, $\mathbb{E}\{X_1\} = 1$ y $\mathbb{E}\{X_2\} = 0$, y sus correlaciones $\mathbb{E}\{S^2\} = 4$, $\mathbb{E}\{X_1^2\} = 3$, $\mathbb{E}\{X_2^2\} = 2$, $\mathbb{E}\{SX_1\} = 2$, $\mathbb{E}\{SX_2\} = 0$ y $\mathbb{E}\{X_1X_2\} = 1$.

(a) Calcúlense los coeficientes $\{w_i\}, i = 0, 1, 2$, de $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}}(X_1, X_2)$.

(b) Como se ha visto en a), $v_{SX_2} = 0$ ¿Por qué resulta $w_2 \neq 0$?

(c) Determínese el valor cuadrático medio del error de estimación cometido al usar $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}}(X_1, X_2)$.

(d) ¿Cómo y cuánto varía el error cuadrático medio si se utiliza $\hat{S}'_{\mathrm{LMSE}}(X_1) = w_0' + w_1' X_1$ en vez de $\hat{S}_{\mathrm{LMSE}}(X_1, X_2)$?

Solution:

(a) $w_0 = 1/3,\ w_1 = 2/3,\ w_2 = -1/3$

(b) Porque combinar X_1 y X_2 es mejor que utilizar únicamente X_1

(c) $\mathbb{E}\{E^2\} = 7/3$

(d) $(w_0' = 1/2;\ w_1' = 1/2)$
$\mathbb{E}\{E'^2\} = 3$
Aumenta 2/3 (lo que confirma lo dicho en b))