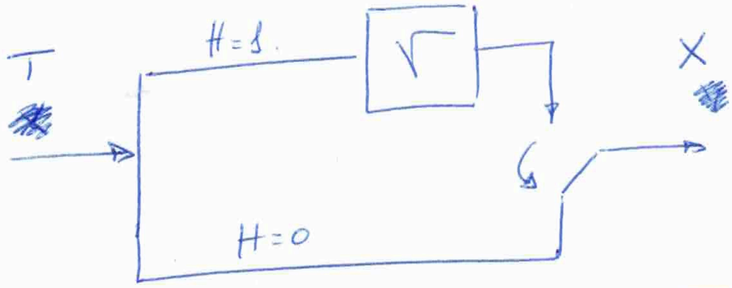


$X \sim U(0,1)$

a) Determine el decisor ML y la P_{FA}, P_M.

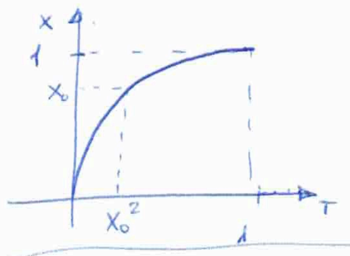
b) Considere un LRT genérico

$$\frac{p_{X|H}(x|1)}{p_{X|H}(x|0)} \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta$$

Calcule P_{FA}, P_M y P_D en función de η y dibuje P_D como función de P_{FA}.

(a) $p(x|0) = 1.$; $x \in [0,1]$

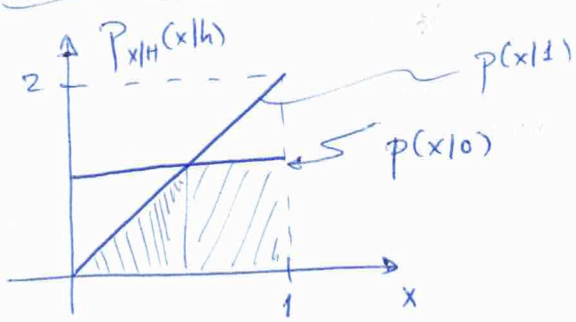
Para $X = \sqrt{T}$



$$F_X(x) \overset{H=1}{=} P(X \le x) = P(T \le x^2) = F_T(x^2)$$

$$p_X(x) \overset{H=1}{=} \frac{d}{dx} F_T(x^2) = p_T(x^2) \cdot \frac{dx^2}{dx} = 2x$$

$$p_{X|H}(x|1) = 2x \; ; \quad x \in [0,1]$$



Dec. ML:

$$\boxed{x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 0.5}$$

$$P_{FA} = P(D=1|H=0) = \int_{0.5}^{1} 1 \, dx = 0.5$$

$$P_M = P(D=0|H=1) = 0.5 \cdot 1/2 = 0.25$$

$$P_D = P(D=1|H=1) = 0.75$$

(b) $2x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta$; $\boxed{x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta'}$ ← Es un test de umbral.

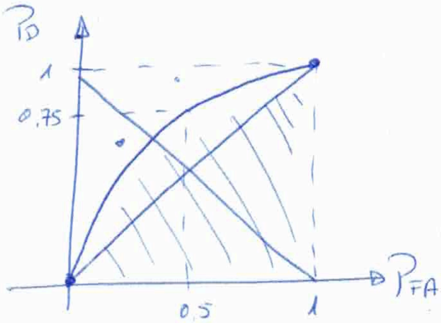
$$P_{FA} = \int_{\eta'}^{1} dx = 1-\eta'$$

$$P_M = \eta' \cdot \frac{2\eta'}{2} = \eta'^2$$

$$P_D = 1-\eta'^2$$

Como $\eta' = 1 - P_{FA}$, la ROC está dada por

$$P_D = 1-(1-P_{FA})^2 = 2P_{FA} - P_{FA}^2 = P_{FA}(2-P_{FA})$$



Calcule el AUC:

$$AUC = \int_0^1 2P_{FA} - P_{FA}^2 \, dP_{FA} = P_{FA}^2 - \frac{P_{FA}^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(c) Se define como decisor de N-P aquel que maximiza P_D para una P_{FA} determinada. Se puede demostrar q. dicho decisor es un LRT (demo no se incluye en el temario).

<u>Conclusión</u>: Ningún clasificador binario puede tener un punto de trabajo por encima de la ROC del LRT.

Determine η', P_{FA} y P_D para el N-P con $P_{FA} \leq 0.1$

- $P_{FA} = 1-\eta' = 0.1 \longrightarrow \eta' = 1-0.1 = 0.9$
- $P_{FA} = 0.1$
- $P_D = 0.1(2-0.1) = 0.1 \cdot (1.9) = 0,19$

(d) Exprese, para el LRT, la P_e como función de $P_H(0)$, y encuentre el valor de η' que minimiza la P_e para cada valor de $P_H(0)$.

$$P_e = P_{FA} \cdot P_H(0) + P_M \cdot P_H(1)$$
$$= (1-\eta')P_H(0) + \eta'^2 (1 - P_H(0))$$

Al ser un polinomio de grado 2, ~~con todos sus valores~~ existe un único máximo/mínimo global. Lo calculamos:

$$\frac{dP_e}{d\eta'} = -P_H(0) + 2\eta'(1-P_H(0))$$

$$-P_H(0) + 2\eta'^*(1-P_H(0)) = 0 \Rightarrow \eta'^* = \frac{1}{2}\,\frac{P_H(0)}{1-P_H(0)}$$

Como vemos, hemos llegado a la expresión del decisor MAP conocida:

$$\ell_x = \frac{p(x|1)}{p(x|0)} \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{P_H(0)}{P_H(1)}$$

Podemos comprobar que η'^* es siempre un mínimo ya que:

$$\frac{d^2P_e}{d\eta'^2} = 2(1-P_H(0)) \geq 0 \text{ para } P_H(0) \in [0,1].$$

e) Calcular y representar sobre la curva ROC el decisor de mínima P_e y de mínimo coste medio si $P_H(0) = 0.75$ y $C_{00} = C_{11} = 0$, $C_{01} = 2$ $C_{10} = 1$. Calcule la P_e y el Coste Medio de dichos decisores.