Exercice 2

On appelle c1,c2,c3 les nombres respectifs de barils des composants bruts 1,2 et 3 ; e1 et e2 les nombres de barils de l'essence SP95 et SP98 . On part du principe que les deux types d'essence sont produits uniquement à partir des composantes c1,c2 et c3 et qu'aucun autre composant n'intervient.

Donc e1,e2 = une certaine quantité de c1 + une certaine quantité de c2 + une certaine quantité de c3.
On appelle x_i le nombre de barils du composant c_i dans la production de l'essence e1 et y_i le nombre de barils du composant c_i dans la production de l'essence e2.

$$e_1 = \sum x_i,$$
$$e_2 = \sum y_i,$$ avec i = 1,2,3
$$et\ c_i = x_i + y_i$$

Les contraintes sur les limitations de production journalière des composants bruts donnent les inéquations suivantes :

$$x_1 + y_1 = \leq 30000$$
$$x_2 + y_2 = \leq 20000$$
$$x_3 + y_3 = \leq 10000$$

Les contraintes sur les proportions des composants bruts dans la production des essences .
Dans e1 :
la proportion de c1 est d'au plus 50 %

$$\frac{c_1\ dans\ e_1}{e_1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} \leq \frac{1}{2}$$

la proportion de c2 est d'au moins 10 %

$$\frac{c_2\ dans\ e_1}{e_1} \geq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} \geq \frac{1}{10}$$

Dans e2 :
la proportion de c1 est d'au plus 30 %

$$\frac{c_1\ dans\ e_2}{e_2} \leq \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{y_1}{y_1 + y_2 + y_3} \leq \frac{3}{10}$$

la proportion de c2 est d'au moins 40 %

$$\frac{c_2\ dans\ e_2}{e_2} \geq \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1 + y_2 + y_3} \geq \frac{2}{5}$$

la proportion de c1 est d'au moins 50 %

$$\frac{c_3\ dans\ e_2}{e_2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y_3}{y_1 + y_2 + y_3} \geq \frac{1}{2}$$

Les contraintes de demande de e1 et e2 sont :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15000$$
$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 35000$$

En y rajoutant les contraintes de positivité , on obtient le système (s) suivant en $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$:

$$
\begin{aligned}
x_1+0\,x_2+0\,x_3+y_1+0\,y_2+0\,y_3 &\le 30000\\
0\,x_1+x_2+0\,x_3+0\,y_1+y_2+0\,y_3 &\le 20000\\
0\,x_1+0\,x_2+x_3+0\,y_1+0\,y_2+y_3 &\le 10000\\
x_1-x_2-x_3+0\,y_1+0\,y_2+0\,y_3 &\le 0\\
x_1-9\,x_2+x_3+0\,y_1+0\,y_2+0\,y_3 &\le 30000\\
0\,x_1+0\,x_2+0\,x_3+7\,y_1-3\,y_2-3\,y_3 &\le 0\\
0\,x_1+0\,x_2+0\,x_3+2\,y_1-3\,y_2+2\,y_3 &\le 0\\
0\,x_1+0\,x_2+0\,x_3+y_1+y_2-y_3 &\le 0\\
x_1+x_2+x_3+0\,y_1+0\,y_2+0\,y_3 &\le 15000\\
0\,x_1+0\,x_2+0\,x_3+y_1+y_2+y_3 &\le 35000\\
-x_1+0\,x_2+0\,x_3+0\,y_1+0\,y_2+0\,y_3 &\le 0\\
0\,x_1-x_2+0\,x_3+0\,y_1+0\,y_2+0\,y_3 &\le 0\\
0\,x_1+0\,x_2-x_3+0\,y_1+0\,y_2+0\,y_3 &\le 0\\
0\,x_1+0\,x_2+0\,x_3-y_1+0\,y_2+0\,y_3 &\le 0\\
0\,x_1+0\,x_2+0\,x_3+0\,y_1-y_2+0\,y_3 &\le 0\\
0\,x_1+0\,x_2+0\,x_3+0\,y_1+0\,y_2-y_3 &\le 0
\end{aligned}
$$

On a ainsi le polyèdre des contraintes défini par le système d’inéquations (s).

$$dépenses = 36(x_1+y_1)+48(x_2+y_2)+60(x_3+y_3)$$
$$récettes = 54(x_1+x_2+x_3)+66(y_1+y_2+y_3)$$

Maximiser la marge de production revient donc à maximiser (recettes – dépenses) , ce qui équivaut à minimiser la fonction f = (dépenses – recettes).

$$f(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) = -18\,x_1-6\,x_2+6\,x_3-30\,y_1-18\,y_2-6\,y_3$$

1.
La première question revient donc à minimiser la fonction f dans le polyèdre (s)
À l’aide de la fonction optimize.linprog du module scipy donne la structure de production suivante :

```
X: [7.49999974e+03 7.49999982e+03 1.03635387e-05 1.99999983e+03
 7.99999988e+03 9.99999971e+03]
```

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 7500\\
x_2 &= 7500\\
x_3 &= 0\\
y_1 &= 2000\\
y_2 &= 8000\\
y_3 &= 10000
\end{aligned}
\quad ====> \quad
\begin{aligned}
c_1 &= x_1+y_1 = 7500+2000 = 9500\\
c_2 &= x_2+y_2 = 7500+8000 = 15500\\
c_3 &= x_3+y_3 = 0+10000 = 10000\\
e_1 &= x_1+x_2+x_3 = 7500+7500+0 = 15000\\
e_1 &= y_1+y_2+y_3 = 2000+8000+10000 = 20000
\end{aligned}
$$

On achète 9500 barils de composant brut 1 , 15500 barils de composant brut 2 et 10000 barils de composant brut 3
On produit 15000 barils d’essence SP95 et 20000 barils d’essence SP98
La marge réalisée est de 444000 euros .

2.
On souhaite maintenir l’activité simultanément sur SP95 et SP98 . Pour cela, on veut maximiser la marge la plus faible sur les deux types de carburant. Il s’agit de maximiser la marge si la raffinerie ne produisait que du SP95 ou du SP98 et choisir la modélisation offrant la marge la plus faible .

Premier cas : on maximise la marge sur du SP95
la fonction marge à maximiser devient :

$$f(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) = -18\,x_1-6\,x_2+6\,x_3+0\,y_1+0\,y_2+0\,y_3$$

On obtient une marge de 180000 euros

Deuxième cas : on maximise la marge sur du SP98
$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 30y_1 - 18y_2 - 6y_3$
La marge obtenue est de 264000 euros.

La plus petite marge est obtenue avec le premier cas, et maximisée ,elle vaut 180 000 euros.

Exercice 3

Problème :
$$\begin{aligned} &Maximiser\ f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \\ &-x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ &x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ &x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 3 \\ &x_1 \geq 1 \\ &x_2 \geq 0 \\ &x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1)
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0$$
forme un système de 3 équations linéaire indépendantes de IR^3

Donc $P_1 = (1,0,0)$ est un pseudo du polyèdre de contraintes .
On vérifie ensuite aisément que P vérifie aussi les 3 premières inéquations, donc c'est un sommet du polyèdre .

Réécrivons le polyèdre des contraintes :
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 - x_3 + 1 \geq 0 \\ &-x_1 + 2x_2 - x_3 + 2 \geq 0 \\ &-x_1 - x_2 + 2x_3 + 3 \geq 0 \\ &x_1 - 1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Tableau du polyèdre vu du de l'origine (0,0,0)
Remarque : quand je parlerai de la $i-ème\ ligne$ du tableau du simplexe , on comptera à partir de la deuxième ligne , la première ligne en rouge étant les coefficients de la fonction à optimiser . $c_i\ est\ la\ i-ème\ colonne\ du\ tableau.$

1	1	1	0
1	-1	-1	1
-1	2	-1	2
-1	-1	2	3
1	0	0	-1
0	1	0	0
0	0	1	0

On élimine x2 et x3 car en gardant x1 la fonction peut toujours croître , on obtient 3 pseudo sommets avec la 2ème , 3ème et 4ème ligne :
$-x_1 + 2 = 0, -x_1 + 3 = 0, x_1 - 1 = 0$
La cordonnée minimale est obtenue dans la 4ème ligne. On fait ensuite

$c_4 \to c_4 + c_1$ on obtient le tableau du simplexe du polyèdre vu de P1 :

1	1	1	1
1	-1	-1	2
-1	2	-1	1
-1	-1	2	2
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0

On reste sur la première colonne et on prend la deuxième ligne comme pivot . On effectue successivement les opérations suivantes :
$c_2 \to c_2 + 2c_1, c_3 \to c_3 - c_1, c_4 \to c_4 + c_1, et\ c_1 \to -c_1$ dans cet ordre . On a le tableau :

-1	3	0	2
-1	1	-2	3
1	0	0	0
1	-3	3	1
-1	2	-1	1
0	1	0	0
0	0	1	0

Le deuxième sommet est obtenu via les lignes 2,5 et 6. Dans le repère initial , on a :
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0$: $P_2 = (2,0,0)^t$

Pour faire croître la fonction , on passe sur la colonne 2 en en prenant la ligne 3 comme pivot et en effectuant successivement et dans l'ordre les opérations suivantes :
$c_1 \to c_1 + \frac{1}{3}c_2, c_3 \to c_3 - \frac{1}{3}c_2, c_4 \to c_4 + \frac{1}{3}c_2, et\ c_2 \to -\frac{1}{3}c_2$
D'où le tableau :

0	-1	3	3
-2/3	-1/3	-1	10/3
1	0	0	0
0	1	0	0
-1/3	-2/3	1	5/3
1/3	-1/3	1	1/3
0	0	1	0

On passe à la colonne 3 et on prend la première ligne comme pivot. On effectue successivement et dans cet ordre les opérations :
$c_1 \to c_1 - \frac{2}{3}c_3, c_2 \to c_2 - \frac{1}{3}c_2, c_4 \to c_4 + \frac{10}{3}c_3, et\ c_3 \to -c_3$

d’où le tableau :

-2	-2	-3	13
0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
-1	-1	-1	5
-1/3	-2/3	-1	11/3
-2/3	-1/3	-1	10/3

La fonction ne peut plus croître car tous les coefficients sont négatifs.
La valeur maximale de la fonction f est 13 et elle est atteinte au sommet identifié par les 3 premières lignes .
Dans le repère initial , ce sommet est solution du système d’équations :

$$-x_1+x_2+x_3=1$$
$$x_1-2x_2+x_3=2$$
$$x_1+x_2-2x_3=3$$

$$P_{max}=(6,\frac{11}{3},\frac{10}{3})\ et\ on\ a\ bien\ f(P_{max})=13$$

Le sommet optimal est unique car à la dernière étape du simplexe tous les coefficients de la fonction sont strictement négatifs .