

中图分类号:

UDC:

学校代码: 10055

密级: 公开

南开大学  
硕士学位论文

张量分解及其在图像压缩中的应用

Tensor Decomposition and Its Application in Image Compression

论文作者 杨雪梅 指导教师 杨庆之 教授

申请学位 理学硕士 培养单位 数学科学学院

学科专业 计算数学 研究方向 最优化方法

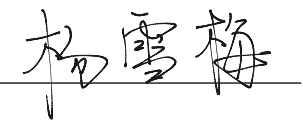
答辩委员会主席 吴春林 教授 评阅人 吴春林 张新珍

南开大学研究生院

二〇二一年五月

# 南开大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律 responsibility 由本人承担。

学位论文作者签名：  2021 年 6 月 15 日

## 非公开学位论文标注说明

(本页表中填写内容须打印)

根据南开大学有关规定，非公开学位论文须经指导教师同意、作者本人申请和相关部门批准方能标注。未经批准的均为公开学位论文，公开学位论文本说明为空白。

论文题目						
申请密级	<input type="checkbox"/> 限制 (≤2 年) <input type="checkbox"/> 秘密 (≤10 年) <input type="checkbox"/> 机密 (≤20 年)					
保密期限	20	年	月	日至 20	年	月 日
审批表编号			批准日期	20	年	月 日

南开大学学位评定委员会办公室盖章 (有效)

注：限制 ★ 2 年 (可少于 2 年); 秘密 ★ 10 年 (可少于 10 年); 机密 ★ 20 年 (可少于 20 年)

## 南开大学学位论文使用授权书

本人完全了解《南开大学关于研究生学位论文收藏和利用管理办法》关于南开大学(简称“学校”)研究生学位论文收藏和利用的管理规定,同意向南开大学提交本人的学位论文电子版及相应的纸质本。

本人了解南开大学拥有在《中华人民共和国著作权法》规定范围内的学位论文使用权,同意在以下几方面向学校授权。即:

1. 学校将学位论文编入《南开大学博硕士学位论文全文数据库》,并作为资料在学校图书馆等场所提供阅览,在校园网上提供论文目录检索、文摘及前 16 页的浏览等信息服务;

2. 学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存学位论文;学校根据规定向教育部指定的收藏和存档单位提交学位论文;

3. 非公开学位论文在解密后的使用权同公开论文。

本人承诺:本人的学位论文是在南开大学学习期间创作完成的作品,并已通过论文答辩;提交的学位论文电子版与纸质本论文的内容一致,如因不同造成不良后果由本人自负。

本人签署本授权书一份(此授权书为论文中一页),交图书馆留存。

学位论文作者暨授权人(亲笔)签字:

2021 年 6 月 15 日

### 南开大学研究生学位论文作者信息

论 文 题 目	张量分解及其在图像压缩中的应用				
姓 名	杨雪梅	学号	2120180039	答辩日期	2021 年 5 月 27 日
论 文 类 别	博士 <input type="checkbox"/> 学历硕士 <input checked="" type="checkbox"/> 硕士专业学位 <input type="checkbox"/> 高校教师 <input type="checkbox"/> 同等学力硕士 <input type="checkbox"/> 划 <input checked="" type="checkbox"/> 选择				
学 院 (单 位)	数学科学学院		学科/专业(专业学位)名称		计算数学
联 系 电 话	18822198046		电子邮箱	sherriyang@63.com	
通讯地址(邮编): 天津市南开区卫津路 94 号南开大学(300071)					
非公开论文编号			备 注		

注:本授权书适用我校授予的所有博士、硕士的学位论文。如已批准为非公开学位论文,须向图书馆提供批准通过的《南开大学研究生申请非公开学位论文审批表》复印件和“非公开学位论文标注说明”页原件。

## 摘要

图像数据因为其直观形象的特点而被广泛传播和使用，但是其占据了较大的空间。因此，在不影响图像的主观视觉效果的前提下，对图像进行有效的压缩能够减少对空间的占用和浪费。矩阵奇异值分解（SVD）可用于实现灰度图像的压缩，其本质为矩阵的低秩逼近。通过选取一定数量的数值较大的奇异值，来实现图像的压缩，这样不仅能够保留矩阵的主要特征，还能减少数据的存储空间。本文在此基础上，将该方法用于彩色图像的压缩，其基本做法是对彩色图像的 R、G、B 三个通道进行 SVD 分解，保留每个通道的主要信息。本文提出了基于张量 T-SVD 分解的图像压缩方法，利用块循环矩阵可对角化的性质，将图像数据分解为三个简单张量的 t-product 乘积，对奇异值进行截断，并重构图像。实验展示了选取不同数量奇异值时图像的压缩效果，从压缩比和结构相似性（SSIM）指数两个角度对原始图像和压缩图像做比较。通过数值实验验证了基于 T-SVD 的图像压缩方法是可行的，而且和矩阵 SVD 方法相比较，该方法实现的图像压缩效果更好。

**关键词：** SVD；T-SVD；图像压缩

## Abstract

Image is widely disseminated and used because of its vivid and visual characteristics, but it occupies a large space. Therefore, the effective compression of the image can reduce the occupation and waste of space under the premise of not affecting the observation of the image. Matrix singular value decomposition (SVD) can be used to compress gray image. Its essence is low rank approximation of matrix. The image compression is realized by selecting a certain number of singular values with large values. It can not only retain the main features of the matrix, but also reduce the storing space of the data. On this basis, the method is applied to the compression of color image. The basic idea is SVD decomposition of R, G and B channels of color image, and then retain the main features of each channel. In this paper, a method is proposed to realize image compression based on tensor T-SVD decomposition. Based on the diagonalizable property of block circulant matrix, the image data is decomposed into 't-product' products of three simple tensors. Then we truncate the singular values and reconstruct this image. The paper display the image compression results when selecting different number of singular values, and compare the original image with the compressed image from the perspectives of compression ratio and structural similarity ( SSIM ) index. The numerical experiments verified that the method of image compression based on T-SVD is feasible, and the image compression results achieved by this method is better than matrix SVD.

**Key Words:** SVD; T-SVD; Image Compression

## 目录

摘要	I
Abstract	II
第一章 前言	1
第一节 背景介绍	1
第二节 符号说明	4
第二章 张量及其分解	5
第一节 张量	5
第二节 张量分解	10
第三章 基于 SVD 的图像压缩	17
第一节 图像压缩评价指标	17
第二节 灰度图像压缩	19
第三节 彩色图像压缩	21
第四章 基于 T-SVD 的图像压缩	25
第一节 彩色图像压缩	25
第二节 视频图像压缩	27
第五章 总结	30
参考文献	31
致谢	34
个人简历	35

## 第一章 前言

### 第一节 背景介绍

互联网技术高速发展的今天，各行各业都在不断地产生大规模、高维度数据，在这些数据当中蕴含着大量信息，善加利用可以挖掘出其中隐含的巨大的商业价值和应用价值。如果能够提取出其中的有用信息，并将其应用到社会各项发展中，将会取得令人瞩目的成绩。但是这些数据面临着表达和传输存储两个难题。数据当中包含的大量冗余重复信息将会对计算机等设备的存储空间造成浪费，影响设备工作效率。而且数据在传输的过程中，冗余数据对于信道容量的占用也很巨大，这将使得信息传输的整体速率下降、效率变低。张量这一概念的提出解决了高维度数据的表达难题，经过多年的探索研究，逐渐发展成熟，成为一门热门研究学科。现如今，张量可被广泛应用于各种领域当中，比如医学影像数据 [1]、超图匹配 [2]、机器学习 [3] 等，尤其是在图像处理领域 [4–7]，可以将图像数据表示成张量的形式，从张量的角度对图像进行研究探索，提取并展示图像所包含的隐含信息。

张量分解技术发展历史久远，它的提出能够解决图像处理以及很多其它领域中的诸多问题，具有很大的研究价值。Hitchcock[8] 在 1927 年首次提出了张量分解这一概念，说明张量可以被分解成有限个秩-1 张量的和，该分解方法后来被正式称为张量 CANDECOMP/PARAFAC 分解，简称 CP 分解。虽然 CP 分解可以保证分解结果的唯一性，但是不足之处就在于 CP 分解所对应的张量秩的求解是一个 NP- 难问题 [9]。1966 年 Tucker[10] 提出了张量的 Tucker 分解，是将高阶张量分解成一个核心张量和若干因子矩阵的乘积，和 CP 分解相比，该分解的唯一性不能够得到保证。可是当 Tucker 分解中的核心张量是对角张量且各个维度都相等时，这两种分解一致。许多学者在上述两种经典的张量分解方法的基础之上，对分解得到的因子加以约束条件，提出更多的张量分解方法。例如，Lim[11] 等人在 2009 年对于非负张量提出了非负 CP 分解，要求分解之后的因子矩阵具有非负的性质；Wang[12] 等人后来实现了张量的非负稀疏 CP 分解，对于因子矩阵的结构提出了更高的标准；Lathauwer[13] 则是对经典 Tucker

分解添加约束条件, 要求分解之后的核心张量为块对角。为了实现数据的降维, 矩阵可以被分解表示成向量共同作用的结果, 于是有学者便将这一思想推广到张量, 把高阶张量分解后存储为低阶张量的形式。例如, 2011 年 Oseledets[14] 提出的张量的 Tensor-train 分解方法, 有效的实现了高阶张量数据的降维, 缓解了维数灾难。该分解的基本思想是将一个  $N$  阶张量表示成若干三阶张量的乘积, 并且该乘积的首项和尾项两个因子是以矩阵的形式存在。为了保证张量分解后得到的因子阶数和原始张量相同, 在 2010 年 Kilmer[15] 等人提出了三阶张量的 T-SVD 分解, 将张量分解成两个三阶正交张量和一个三阶  $f$ - 对角张量的乘积, 该乘积不同于以前的张量之间的乘积, 而是  $t$ -product 乘积。随后, 有学者在 T-SVD 分解的基础之上, 提出了新的四阶张量的分解方法 [16], 该方法的基本想法是将四阶张量分解为若干四阶张量的  $F$ - 乘积。2020 年 Chao Zeng 和 Michael[17] 综合了张量高阶奇异值分解 (HOSVD) [18] 和张量 T-SVD 分解两种方法, 提出了张量 O-SVD 分解, 将张量分解成三个张量和一个矩阵的乘积, 但是该分解要求张量根据正向切片中的矩阵的秩有一个特定的非零模式。

图像能够直观生动地传递信息, 避免了文字阅读带来的繁琐, 在日常生活中被广泛的使用, 但是图像数据在广泛传播中对于信道的大量占用会使其传输时间变长、效率变低。因此, 如果能够对图像数据进行有效的降维, 减少不必要的重复冗余数据, 图像对于存储空间的占用将会大大减少。图像压缩技术应运而生。如果能够根据实际需求不断改进压缩技术, 对提升图像压缩质量将具有十分重要的意义。通常图像压缩技术是根据压缩得到的数据被恢复后的结果分为无损压缩技术和有损压缩技术两种。无损压缩技术是指被压缩后的图像可以再次被恢复为原始图像, 不存在失真。传统方法有 Huffman 编码 [19]、算术编码 [20]、行程编码 [21] 等。而有损压缩则是指对经过压缩之后的数据进行重构, 不能够恢复到和原始图像数据一样, 存在一定的失真, 常见的方法有矩阵奇异值分解 (SVD)、JPEG 标准 [22]、MPEG 标准等。

通过图像压缩技术压缩过的图像是牺牲了图像中部分数据得到的, 所以一定会比原始图像的质量差。通常可以根据图像损失数据的多少, 来评价压缩技术的好坏。但是由于人与人视觉之间的差异化, 对图像质量的感知有所不同, 因此需要从多方面去评价压缩之后的图像数据的好坏。图像压缩质量评价指标之一为压缩比, 它是原始图像数据量与压缩后的图像数据量之间的比值, 是从图像数据的存储占用的角度衡量压缩效果的一种标准。均方误差 (MSE) 参数



[23] 是对处理前后的两幅图像的像素差的平方和取均值的结果，不涉及图像自身的结构。峰值信噪比（PSNR）[23] 通常是评价图像压缩质量最普遍的标准，而且其数值越大，表示压缩之后的图像失真程度越小，但是该数值很大时并不能表示人眼观察到的图像和原始图像之间差异较小。结构相似性（SSIM）指数[24, 25] 可以用来衡量两幅同样大小的图像的相似性，取值范围在 0 到 1 之间，值越大代表两幅图像越相近。SSIM 指数是从图像组成的角度出发，用均值表示亮度、标准差表示对比度、协方差表示结构相似程度，将这三个因素建模组合之后来反映图像压缩的程度。虽然 SSIM 指数在图像出现位置移动、大小缩放、翻转旋转的情况下无法有效的运作，但是在一定程度上绕开了自然图像中内容极其复杂的特点以及多通道相关的问题，而且在图像处理中评价精确度远远超过了 PSNR 方法，并弥补了 MSE 方法无法衡量图像结构相似性的缺陷。

Kilmer 在 2010 年提出了张量 T-SVD 方法，并将该方法应用到图像去噪当中，得到较好的实验结果。本文在 T-SVD 基础上，将其应用到图像压缩当中，实现彩色图像和监控视频图像的压缩。在数值实验中，从压缩比、结构相似性（SSIM）指数两个方面评价图像压缩的效果，而且从实验结果当中可以看出，T-SVD 方法同传统的矩阵奇异值分解（SVD）相比较，在同样压缩程度之下，T-SVD 能够得到更加清晰的图像压缩效果；在图像压缩效果相同的情况下，T-SVD 方法能够节省更多的存储空间，实现更高的压缩比。

本文接下来的写作安排如下：

第二章首先给出了张量的一些基本概念、张量的块循环矩阵化以及三阶张量  $t$ -product 乘积的相关内容，之后介绍了张量的 Tucker 分解，CP 分解、T-SVD 分解的基本思想。

第三章是基于矩阵奇异值分解方法实现图像的压缩。首先对图像压缩的两个评价指标：压缩比和结构相似性（SSIM）指数做出概述，介绍了两种指标的基本思想和计算方法。然后介绍了基于矩阵 SVD 实现灰度图像的压缩、彩色监控视频图像局部压缩的实验原理，展示了图像通道的奇异值分布情况和选取不同奇异值个数时图像压缩的直观视觉效果图。

第四章主要是基于 T-SVD 分解实现彩色图像和监控视频的压缩。对于图像数据构造出的块循环矩阵利用离散傅里叶变换，得到图像数据的 T-SVD 分解。通过截取不同数量的奇异值对图像进行重构，得到结构相似性（SSIM）指数和压缩比两种指标的量化数值。和传统的矩阵 SVD 方法作比较，验证了在相同压

缩比情况下，基于 T-SVD 方法的图像压缩得到的图像结果更好。

第五章是本文的总结部分，对本文中所出现的问题进行了分析，对未来的研究工作进行了展望。

## 第二节 符号说明

在本文中，小写字母  $a, b, c$  用来表示标量，小写加粗的字母  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  用来表示向量，大写字母  $A, B, C$  用来表示矩阵；花体大写字母  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  用来表示张量。 $F_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  用来表示离散傅里叶变换（DFT）矩阵， $F_n^*$  是  $F_n$  的共轭转置矩阵。

## 第二章 张量及其分解

张量作为矩阵向高阶形式的推广，通常会保留一些和矩阵运算类似的性质，因此可以尝试将矩阵的某些性质推广到张量运算中。本章中主要介绍张量的相关基本概念以及常见的张量分解方法。

### 第一节 张量

通常，我们把一阶张量表示为向量的形式，二阶张量表示为矩阵， $N$  阶张量  $\mathcal{A}$  表示为如下形式：

$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N},$$

其中，张量  $\mathcal{A}$  的第  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$  个元素记为  $\mathcal{A}(i_1, i_2, \dots, i_N) = a_{i_1 i_2 \dots i_N}$ 。

$N$  阶张量纤维是指固定张量的任意  $N-1$  个维度后所形成的向量，分为管纤维、行纤维和列纤维，对应于三阶张量时分别为  $a_{ij\cdot}$ 、 $a_{i\cdot k}$  和  $a_{\cdot jk}$ 。类似地，张量切片是指固定张量的任意  $N-2$  个维度后所形成的矩阵，分为水平切片、侧向切片和正向切片，考虑三阶张量时分别记为  $a_{i::}$ 、 $a_{\cdot j:}$  和  $a_{::k}$ 。

张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$  的模  $-n$  展开是将张量的纤维作为矩阵的列向量，是张量矩阵化的一种形式，记为  $A_{(n)}$ 。原张量中的元素  $\mathcal{A}(i_1, i_2, \dots, i_N)$  与展开后所得的矩阵中元素  $(i_n, j)$  对应关系如下：

$$j = 1 + \sum_{k=1, k \neq n}^N (i_k - 1)J_k, \text{ 其中, } J_k = \prod_{m=1, m \neq n}^{k-1} I_m.$$

以下定义和性质主要参考自文献 [6, 7, 15, 17, 26, 27]。

**定义 2.1** (*Kronecker 乘积*) 矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$  和矩阵  $B \in \mathbb{R}^{l_1 \times l_2}$  的 *Kronecker 乘积* 为：

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n_2}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n_2}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1 1}B & a_{n_1 2}B & \cdots & a_{n_1 n_2}B \end{bmatrix}.$$

**定义 2.2** (*Frobenius* 范数) 张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$  的 *Frobenius* 范数表示为:

$$\|\mathcal{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \cdots \sum_{i_N=1}^{I_N} a_{i_1 i_2 \cdots i_N}^2}.$$

**定义 2.3** (张量与矩阵的模  $-n$  乘积) 张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$  与矩阵  $B \in \mathbb{R}^{J \times I_n}$  的模  $-n$  乘积  $C \in \mathbb{R}^{I_1 \times \cdots \times I_{n-1} \times J \times I_{n+1} \times \cdots \times I_N}$  表示为:

$$C = \mathcal{A} \times_n B.$$

其中, 张量  $C$  的元素记为

$$C_{i_1 \cdots i_{n-1} j i_{n+1} \cdots i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} a_{i_1 i_2 \cdots i_N} b_{j i_n}.$$

**性质 2.4** 张量与多个矩阵进行不同模乘积时, 矩阵的乘积顺序对乘积结果没有影响:

$$\mathcal{A} \times_m B \times_n C = \mathcal{A} \times_n C \times_m B.$$

**性质 2.5** 张量与多个矩阵进行模  $-n$  乘积时, 矩阵可以先进行乘积:

$$\mathcal{A} \times_n B \times_n C = \mathcal{A} \times_n (CB).$$

**性质 2.6** 张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$  与矩阵  $B \in \mathbb{R}^{J \times I_n}$  进行模  $-n$  乘积时, 和张量的模  $-n$  展开具有如下关系:

$$C = \mathcal{A} \times_n B \Leftrightarrow C_{(n)} = B A_{(n)}.$$

**性质 2.7** 张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$  和向量  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{I_n}$  的模  $-n$  乘积记为  $\mathcal{A} \bar{\times}_n \mathbf{v}$ , 乘积中的元素表示为:

$$(\mathcal{A} \bar{\times}_n \mathbf{v})_{i_1 \cdots i_{n-1} i_{n+1} \cdots i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} a_{i_1 i_2 \cdots i_N} v_{i_n}.$$

**定义 2.8** (对角张量) 如果张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$  仅在  $i_1 = i_2 = \cdots = i_N$  时,  $a_{i_1 i_2 \cdots i_N} \neq 0$ , 则张量  $\mathcal{A}$  为对角张量。

**定义 2.9** ( $f$ -对角张量) 如果张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  的所有正向切片  $a_{::k}$  都是对角的, 其中  $k = 1, 2, \cdots, n_3$ , 则张量  $\mathcal{A}$  为  $f$ -对角张量。

设矩阵  $A$  是由向量  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$  生成的循环矩阵, 表示成如下的形式:

$$A = \text{circ}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} v_1 & v_n & v_{n-1} & \cdots & v_2 \\ v_2 & v_1 & v_n & \cdots & v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n & v_{n-1} & v_{n-2} & \cdots & v_1 \end{bmatrix}.$$

由上述内容可知，只要矩阵的第一列元素是确定的，循环矩阵中的其他元素就可以确定了。而且循环矩阵具有良好的运算性质，经过标准的离散傅里叶变换（DFT）可实现对角化，即

$$F_n \text{circ}(\mathbf{v}) F_n^*$$

是对角矩阵。通过对角化，可以从中推导出循环矩阵的许多性质，而且还可以简化循环矩阵的运算过程。

**性质 2.10**  $FFT(\mathbf{v})$  是对向量  $\mathbf{v}$  经过快速傅里叶变换 (FFT) 处理后的矩阵，则有

$$F_n \text{circ}(\mathbf{v}) F_n^* = FFT(\mathbf{v}).$$

将向量构造循环矩阵的方式推广到张量，可以用类似的方法构造出循环矩阵。接下来，以三阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  为例：

$$\text{unfold}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n_3)} \end{bmatrix}, \quad \text{fold}(\text{unfold}(\mathcal{A})) = \mathcal{A},$$

其中， $A^{(i)}$  是张量  $\mathcal{A}$  的第  $i$  个正向切片。将张量的正向切片依次排列作为矩阵的第一列，构造出如下块循环矩阵：

$$\text{circ}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} A^{(1)} & A^{(n_3)} & A^{(n_3-1)} & \dots & A^{(2)} \\ A^{(2)} & A^{(1)} & A^{(n_3)} & \dots & A^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{(n_3)} & A^{(n_3-1)} & A^{(n_3-2)} & \dots & A^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

和矩阵能够通过离散傅里叶变换（DFT）实现对角化一样，块循环矩阵也可以通过离散傅里叶变换（DFT）实现块对角化，即

$$(F_{n_3}^* \otimes I_{n_1}) \cdot \text{circ}(\text{unfold}(\mathcal{A})) \cdot (F_{n_3}^* \otimes I_{n_2}) = \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_{n_3} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

其中,  $\otimes$  是 Kronecker 乘积。

**性质 2.11**  $\mathcal{D}$  是对张量  $\mathcal{A}$  的每一个管纤维进行傅里叶变换后得到的张量,  $D_i$  则是张量  $\mathcal{D}$  的第  $i$  个正向切片。

矩阵之间可以做多种乘积运算, 如 Kronecker 乘积、内积、外积等, 而张量作为矩阵的推广, 同样也能够实现张量之间的乘积运算。Kilmer[15] 在 2010 年首次提出了  $t$ -product 方法, 实现了三阶张量之间的乘积。接下来的定义、引理和性质主要针对三阶张量, 参考自文献 [15, 27]。

**定义 2.12** ( $t$ -product) 张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  和  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n_2 \times l \times n_3}$  的  $t$ -product 乘积  $\mathcal{A} * \mathcal{B}$  记为:

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} = \text{fold}(\text{circ}(\mathcal{A}) \cdot \text{unfold}(\mathcal{B})),$$

其中,  $\mathcal{A} * \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n_1 \times l \times n_3}$ 。

**引理 2.13**  $\mathcal{A} * (\mathcal{B} * \mathcal{C}) = (\mathcal{A} * \mathcal{B}) * \mathcal{C}$ 。

**性质 2.14** 对张量的模 -3 展开进行快速傅里叶变换 (FFT) 时, 计算  $t$ -product 乘积的时间复杂度至多达到  $O(n_1 n_2 \ln n_3)$  量级。

**定义 2.15** (张量转置) 将张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  的所有正向切片转置, 第 2 到  $n$  个正向切片逆序排序, 此时得到的新张量为原张量的转置, 记为  $\mathcal{A}^T \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1 \times n_3}$ 。

**例 2.16** 已知张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times 5}$  的正向切片  $A^{(1)}$ 、 $A^{(2)}$ 、 $A^{(3)}$ 、 $A^{(4)}$ 、 $A^{(5)}$ , 则其转置张量为

$$\mathcal{A}^T = \text{fold} \left( \begin{bmatrix} (A^{(1)})^T \\ (A^{(5)})^T \\ (A^{(4)})^T \\ (A^{(3)})^T \\ (A^{(2)})^T \end{bmatrix} \right)。$$

**引理 2.17** 给定张量  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$ ,  $(\mathcal{A} * \mathcal{B})^T = \mathcal{B}^T * \mathcal{A}^T$ 。

**例 2.18** 给定张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 4 \times 2}$ , 它的正向切片分别为  $A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 8 & -5 \end{bmatrix}$

$$\text{和 } A^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 张量 } \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{4 \times 2 \times 2} \text{ 的正向切片为 } B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{和 } B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \text{ 那么张量 } \mathcal{A} \text{ 和 } \mathcal{B} \text{ 的 } t\text{-product 乘积为}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} * \mathcal{B} &= \text{fold} \left( \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & -2 & 9 & 9 & 6 \\ 4 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 8 & -5 & -1 & 4 & 5 & 2 \\ \hline -2 & 9 & 9 & 6 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 5 & 2 & -1 & -2 & 8 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -5 \\ -2 & -2 \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{fold} \left( \begin{bmatrix} -2 & 53 \\ -24 & 28 \\ \hline 36 & -11 \\ -7 & -59 \\ -12 & 4 \\ 16 & -63 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}^{3 \times 2 \times 2}, \end{aligned}$$

得到的结果是一个  $3 \times 2 \times 2$  的三阶张量。

**定义 2.19** (三阶单位张量) 如果张量  $\mathcal{I}_{nml} \in \mathbb{R}^{n \times n \times l}$  除了第一个正向切片是单位矩阵, 其他正向切片均为零矩阵, 则称该张量为三阶单位张量。

**定义 2.20** (三阶正交张量) 如果张量  $\mathcal{Q}_{mmn} \in \mathbb{R}^{m \times m \times n}$  满足  $\mathcal{Q}^T * \mathcal{Q} = \mathcal{Q} * \mathcal{Q}^T = \mathcal{I}$ , 则张量  $\mathcal{Q}$  为三阶正交张量。

**引理 2.21** 如果张量  $\mathcal{Q}$  是正交张量, 则有

$$\|\mathcal{Q} * \mathcal{A}\|_F = \|\mathcal{A}\|_F.$$

**Proof.** 定义  $(\mathcal{A} * \mathcal{A}^T)_{(:, :, 1)}$  和  $(\mathcal{A}^T * \mathcal{A})_{(:, :, 1)}$  分别是  $\mathcal{A} * \mathcal{A}^T$  和  $\mathcal{A}^T * \mathcal{A}$  的正向切片。根据张量范数、张量转置和 t-product 乘积的定义，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \text{trace}((\mathcal{A} * \mathcal{A}^T)_{(:, :, 1)}) \\ &= \text{trace}((\mathcal{A}^T * \mathcal{A})_{(:, :, 1)}),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Q} * \mathcal{A}\|_F^2 &= \text{trace}([(Q * \mathcal{A})^T * (Q * \mathcal{A})]_{(:, :, 1)}) \\ &= \text{trace}([\mathcal{A}^T * \mathcal{Q}^T * Q * \mathcal{A}]_{(:, :, 1)}) \\ &= \|\mathcal{A}\|_F^2.\end{aligned}$$

**定义 2.22** (三阶逆张量) 张量  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  有如下关系：

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} = \mathcal{B} * \mathcal{A} = \mathcal{I},$$

则称张量  $\mathcal{A}$  是张量  $\mathcal{B}$  的逆。

## 第二节 张量分解

张量分解作为张量运算中十分重要的一部分，对于探索张量性质具有十分重要的意义。本节中主要介绍张量的 Tucker 分解、CP 分解以及张量 T-SVD 分解的基本思想，这三种张量分解本质上都是矩阵奇异值分解的高阶推广。

### 2.2.1 CP 分解

本节在介绍张量 CP 分解之前，首先介绍秩 -1 张量的定义。

**定义 2.23** 秩 -1 张量。如果张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$  存在下面的分解：

$$\mathcal{A} = \mathbf{a}^{(1)} \circ \mathbf{a}^{(2)} \circ \cdots \circ \mathbf{a}^{(N)},$$

其中，符号“ $\circ$ ”代表向量的外积，则张量  $\mathcal{A}$  是秩 -1 张量。张量  $\mathcal{A}$  中的元素和这些向量之间的对应关系为：

$$a_{i_1 i_2 \cdots i_N} = \mathbf{a}_{i_1}^{(1)} \mathbf{a}_{i_2}^{(2)} \cdots \mathbf{a}_{i_N}^{(N)}, 1 \leq i_n \leq I_n.$$

张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$  的 CP 分解是将一个高阶张量分解成若干个秩 -1 张量和的形式，是对高维数据的一种低秩逼近，也就是特征提取。

若张量  $\mathcal{A}$  存在如下分解：

$$\mathcal{A} = \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r^{(1)} \circ \mathbf{a}_r^{(2)} \circ \cdots \circ \mathbf{a}_r^{(N)},$$