高校应用数学学报
2022, 37(1): 116-122

DOI:10.13299/j.cnki.amjcu.002205

非线性特征值问题平移幂法的不动点分析

唐耀宗[1,2], 杨庆之[1,2]

(1. 喀什大学 数学与统计学院, 新疆喀什 844000;
2. 南开大学 数学科学学院, 天津 300071)

摘　要: 平移对称高阶幂法在求解源自玻色-爱因斯坦凝聚态的非线性特征值问题方面, 不仅具有较高的计算效率, 而且具有点列收敛性. 针对此算法进行不动点分析, 区分了使用平移对称高阶幂法可以求得的特征对类型.

关键词: 非线性特征值问题; 玻色-爱因斯坦凝聚态; 平移对称高阶幂法; 不动点分析
中图分类号: O224
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2022)01-0116-07

§1 引 言

玻色-爱因斯坦凝聚态(简称BEC)的基态, 即能量最低时的状态, 目前是量子力学领域中一个重要而且活跃的研究课题[1-4], 其离散情形可以描述为球面约束下的非凸最小化问题[5]

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\mathcal{A}\mathbf{x}^4 + \mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & ||\mathbf{x}||_2 = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

其中$\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{n\times n\times n\times n}$是4 阶对称张量, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$是对称半正定矩阵, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$是向量.

对上述优化问题的Lagrange函数求梯度, 容易验证其Karush-Kuhn-Tucker(KKT)系统即为非线性特征值问题

$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathbf{x}^3 + \mathbf{B}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \\ \|\mathbf{x}\|_2 = 1. \end{cases} \tag{2}$$

BEC基态解对BEC问题的理论研究以及实验指导具有重要意义. 对于基态解的存在和唯一性探讨, 可以参考[6-7]和其中的参考文献. 作为NP难的BEC基态问题[8], 通常采取两类数值方法进行求解. 第一类是在球面约束条件下, 利用非线性特征值格式(2) 设计不同类型的数值方法[9-15]. 第二类是求解球面约束下的极小化优化问题格式的方法[8,16-23]. 文献[5]中对更一般的NP难的BEC类非线性特征值问题采用了平移对称高阶幂法(SS-HOPM)进行求解, 体现了较好的数值计算效率, 并且能够保证点列收敛性[24].

收稿日期: 2020-09-17　　修回日期: 2022-01-28
基金项目: 国家自然科学基金(12071234); 新疆维吾尔自治区自然科学基金(2018D012A01)

本文将在文献[5, 24]的基础上进一步对SS-HOPM算法进行不动点分析, 以从理论上说明使用平移对称高阶幂法可以求得的非线性特征对类型.

本文的结构如下: §2介绍了相关的基础知识和基本术语. §3简单介绍了BEC类非线性特征值问题的SS-HOPM算法及其不动点分析. §4对本文进行了简单总结.

§2 基本概念和术语

在本文中, 用Σ表示$\mathbf{R}^n$上的单位球面, 即

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \ ||\mathbf{x}|| = 1\}.$$

.

2.1 张量相关概念

本文采用文献[25]中的张量, 矩阵以及向量的表示方法. 即向量用黑体小写字母表示, 如$\mathbf{a}$. 矩阵用黑体大写字母表示, 如$\mathbf{A}$. 张量由Euler手写体表示, 如$\mathcal{A}$. 标量用小写字母表示, 如a.

对称张量在指标任意排列下其元素都是不变的. 下面给出对称张量及相关概念的定义.

定义2.1[26] 如果张量$\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{\overbrace{n \times \cdots \times n}^{m}}$对所有$i_1 \cdots i_m \in \{1, \cdots, n\}$以及$p \in \Pi_m$, 均有

$$a_{i_{p(1)} \cdots i_{p(m)}} = a_{i_1 \cdots i_m}$$

成立, 则称张量$\mathcal{A}$是对称的, 其中Π_m表示了$(1, \cdots, m)$所有置换的集合.

定义2.2[26] 设$\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{\overbrace{n \times \cdots \times n}^{m}}$是对称张量, 且$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. 那么张量$\mathcal{A}$与向量$\mathbf{x}$的$m-r$次乘积可以表示为

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-r} \in \mathbf{R}^{\overbrace{n \times \cdots \times n}^{r}}, \quad 0 \le r \le m-1,$$

其具体表达式为

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-r})_{i_1 \cdots i_r} \equiv \sum_{i_{r+1}, \cdots, i_m} a_{i_1 \cdots i_m} x_{r+1, \cdots, i_m} \quad \text{对所有} \quad i_1, \cdots, i_r \in \{1, \cdots, n\}.$$

2.2 不动点相关知识

本文将要用到不动点的相关概念和性质, 罗列如下.

定义2.3[27] 假设$\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, 如果存在$\delta > 0$, 对由任何满足$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*\| \le \delta$的$\mathbf{x}_0$和由$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(\mathbf{x}_k)$所定义的序列$\{\mathbf{x}_k\}$都收敛到$\mathbf{x}_*$, 则称$\mathbf{x}_*$是$\phi$的吸引不动点.

定理2.1[28] 设$\mathbf{x}_*$为$\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$的不动点, $\mathbf{J} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n \times n}$为$\phi$的Jacobian矩阵. 如果$\sigma = \rho(\mathbf{J}(\mathbf{x}_*)) < 1$, 那么$\mathbf{x}_*$为$\phi$的吸引不动点; 如果$\sigma > 0$, 那么迭代$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(\mathbf{x}_k)$以线性速率$\sigma$收敛.

定理2.2[29] 设$\mathbf{x}_*$为$\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$的不动点, $\mathbf{J} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n \times n}$为$\phi$的Jacobian矩阵. 如果$\sigma = \rho(\mathbf{J}(\mathbf{x}_*)) > 1$, 那么$\mathbf{x}_*$为$\phi$的不稳定不动点.

§3 非线性特征值问题的SS-HOPM算法及不动点分析

3.1 非线性特征值问题的SS-HOPM算法

在文献[10]中, 作者构建了非齐次约束优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\mathcal{A}\mathbf{x}^4 + \mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & ||\mathbf{x}||_2 = 1. \end{aligned}$$

的稳定点与BEC类非线性特征值问题

$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathbf{x}^3 + \mathbf{B}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \\ ||\mathbf{x}||_2 = 1, \end{cases}$$

的特征对之间的联系, 然后将由Kolda和Mayor[30]提出的用于齐次优化问题求解的SS-HOPM算法推广到了上述的非齐次约束优化问题, 以求解BEC类非线性特征值问题.

从文献[24]可知, 对于凸的情形, 平移项$\alpha > 0$必须要大于某个参数β才能确保SS-HOPM算法收敛, 其中β定义如下

$$\beta \equiv \max_{\mathbf{x}\in\Sigma} \rho(3\mathcal{A}\mathbf{x}^2 + \mathbf{B}).$$

SS-HOPM算法如算法1所述.

Algorithm 1 平移对称高阶幂法(SS-HOPM)[5]

Require:

1. 给定4阶对称张量$\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{n\times n\times n\times n}$和半正定矩阵$\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$.
2. 平移项α;

Ensure:

特征值λ及相应的特征向量$\mathbf{x}$.

```
取初值 x_0 ∈ R^n, 使其满足 ||x_0||_2 = 1. 令 λ_0 = A x_0^4 + x_0^⊤ B x_0
for k = 0, 1, ···, do
  if α ≥ 0 then
    x̂_{k+1} ← A x_k^3 + B x_k + α x_k
  else
    x̂_{k+1} ← −(A x_k^3 + B x_k + α x_k)
  end if
  x_{k+1} ← x̂_{k+1} / ||x̂_{k+1}||_2
  λ_{k+1} = A x_{k+1}^4 + x_k^⊤ B x_k
end for
return λ = λ_{k+1}, x = x_{k+1}.
```

3.2 SS-HOPM算法的不动点分析

对于约束优化问题而言, Lagrange投影Hessian阵在决定不动点是否为局部极值方面起着关键作用. 从文献[5]可知

$$\nabla^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_*, \lambda_*) = 6\mathcal{A}\mathbf{x}_*^2 + 2\mathbf{B} - 2\lambda_*\mathbf{I},$$

根据约束优化问题的Lagrange函数的Hessian阵与$\mathbf{x}_*$正交的子空间的关系, 可以把Lagrange投影Hessian阵定义为

$$C(\lambda_*, \mathbf{x}_*) \equiv \mathbf{U}_*^T \left(3\mathcal{A}\mathbf{x}_*^2 + \mathbf{B} - \lambda_*\mathbf{I}\right)\mathbf{U}_* \in \mathbf{R}^{(n-1)\times(n-1)},$$

其中$\mathbf{U}_* \in \mathbf{R}^{n\times(n-1)}$的列形成了$\mathbf{x}_*^{\perp}$的正交基. 根据$C(\lambda_*, \mathbf{x}_*)$的谱性质可以对BEC类非线性特征值问题(2)的特征对进行分类.

定义3.1 设$\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{n\times n\times n\times n}$为对称张量, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$为半正定矩阵, $(\lambda, \mathbf{x})$是BEC类非线性特征值问题(2)的特征对. 如果$C(\lambda, \mathbf{x})$是正定的, 则特征对$(\lambda, \mathbf{x})$是正稳定的; 如果$C(\lambda, \mathbf{x})$是负定的, 则特征对$(\lambda, \mathbf{x})$是负稳定的, 如果$C(\lambda, \mathbf{x})$是不定的, 则特征对$(\lambda, \mathbf{x})$是不稳定的.

下面采用不动点理论对SS-HOPM算法进行分析, 以区分哪种类型的特征对可以使用SS-HOPM算法求得. 即首先通过Langrage投影Hessian阵来判断特征对是正稳定的, 负稳定的还是不稳定的; 然后依据不同情形下特征对进行对照即可.

不失一般性, 考虑凸的情形下的SS-HOPM算法视为不动点迭代

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(\mathbf{x}_k),$$

其中ϕ定义为

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_1(\phi_2(\mathbf{x})), \tag{3}$$

那么

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{(\mathbf{x}^\top\mathbf{x})^{\frac{1}{2}}},$$

$$\phi_2(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{x}^3 + \mathbf{B}\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}.$$

注意特征对$(\lambda, \mathbf{x})$当且仅当$\lambda + \alpha > 0$时是一个不动点, 这对于$\alpha > \beta$始终是正确的[24].

算子ϕ的Jacobian矩阵可以从下面的公式导出, 即

$$J(\mathbf{x}) = \phi_1'(\phi_2(\mathbf{x}))\phi_2'(\mathbf{x}).$$

容易得到

$$\phi_1'(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}^\top\mathbf{x})\mathbf{I} - \mathbf{x}\mathbf{x}^\top}{(\mathbf{x}^\top\mathbf{x})^{\frac{3}{2}}},$$

$$\phi_2'(\mathbf{x}) = 3\mathcal{A}\mathbf{x}^2 + \mathbf{B} + \alpha\mathbf{I}.$$

在任何特征对$(\lambda, \mathbf{x})$处, 都有

$$\phi_2(\mathbf{x}) = (\lambda+\alpha)\mathbf{x},$$

$$\phi_1'(\phi_2(\mathbf{x})) = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{x}\mathbf{x}^\top}{\lambda+\alpha},$$

$$\phi_2'(\mathbf{x}) = 3\mathcal{A}\mathbf{x}^2 + \mathbf{B} + \alpha\mathbf{I},$$

因此$\mathbf{x}$处的Jacobian矩阵为

$$J(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{x}\mathbf{x}^\top)(3\mathcal{A}\mathbf{x}^2 + \mathbf{B} + \alpha\mathbf{I})}{\lambda+\alpha}. \tag{4}$$

由$\mathcal{A}\mathbf{x}^2, \mathbf{B}$和$\mathbf{x}\mathbf{x}^\top$的对称性, 容易验证Jacobian矩阵$J(\mathbf{x})$是对称的.

定理3.1 设$(\lambda, \mathbf{x})$为非线性特征值问题(2)的特征对. 假设$\alpha \in \mathbf{R}$满足$\alpha > \beta$, 其中$\beta \equiv \max_{\mathbf{x}\in\Sigma} \rho(3\mathcal{A}\mathbf{x}^2 + \mathbf{B})$. 设$\phi(\mathbf{x})$由(3)给定. 那么当且仅当$\mathbf{x}$是$\phi$的线性吸引不动点时, $(\lambda, \mathbf{x})$是负稳定的.

证 假设$(\lambda, \mathbf{x})$是负稳定的, 算子ϕ在$\mathbf{x}$处的Jacobian矩阵的形式如(4)所示. 根据不动点理论, 要证明$\mathbf{x}$是算子ϕ的线性吸引不动点, 只需要验证$\rho(J(\mathbf{x})) < 1$.

因为Jacobian矩阵$J(\mathbf{x})$是对称的, 所以对于所有的$\mathbf{y} \in \Sigma$, $\rho(J(\mathbf{x})) = |\mathbf{y}^\top J(\mathbf{x})\mathbf{y}|$. 还需要进一步证明, 对于所有$\mathbf{y} \in \Sigma$, $|\mathbf{y}^\top J(\mathbf{x})\mathbf{y}| < 1$. 因为$J(\mathbf{x})\mathbf{x} = 0$, 因此限制$\mathbf{y} \in \mathbf{x}^\perp$, 故而$\mathbf{y} \in \Sigma \bigcap \mathbf{x}^\perp$,

那么

$$|\mathbf{y}^\top J(\mathbf{x})\mathbf{y}| = \left|\frac{\mathbf{y}^\top(\mathbf{I}-\mathbf{x}^\top\mathbf{x})(3\mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{B}+\alpha\mathbf{I})\mathbf{y}}{\lambda+\alpha}\right| = \left|\frac{\mathbf{y}^\top(3\mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{B})\mathbf{y}+\alpha}{\lambda+\alpha}\right|.$$

因为$(\lambda,\mathbf{x})$负稳定即意味着$C(\lambda,\mathbf{x})$是负定的；因此要$|\mathbf{y}^\top J(\mathbf{x})\mathbf{y}|<1$, 则必须$\mathbf{y}^\top(3\mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{B})\mathbf{y}<\lambda$. 根据$\beta$的定义, 可以知道$\beta\geq\rho(3\mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{B})$. 由$\lambda+\alpha>0$可得

$$0<\frac{-\beta+\alpha}{\lambda+\alpha}\leq\frac{\mathbf{y}^T\left(3\mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{B}\right)\mathbf{y}+\alpha}{\lambda+\alpha}<\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+\alpha}=1,$$

即$\rho(J(\mathbf{x}))<1$, 所以$\mathbf{x}$是ϕ的线性吸引不动点.

另一方面, 如果$(\lambda,\mathbf{x})$不是负稳定的, 那么存在$\mathbf{w}\in\Sigma$使得$\mathbf{w}\in\mathbf{x}^\perp$, 而且$\mathbf{w}^\top(3\mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{B})\mathbf{w}\geq\lambda$. 那么

$$\mathbf{w}^T J(\mathbf{x})\mathbf{w}=\frac{\mathbf{w}^T\left(3\mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{B}\right)\mathbf{w}+\alpha}{\lambda+\alpha}\geq\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+\alpha}=1,$$

即$\rho(J(\mathbf{x}))\geq1$, 根据不动点理论可知, $\mathbf{x}$不是算子ϕ的线性吸引不动点.

实际上从上面的证明可以推断出, 如果特征对$(\lambda,\mathbf{x})$不是负稳定的, 则不存在$\alpha\in\mathbf{R}$使得$\rho(J(\mathbf{x}))<1$成立. 换言之, 如果$(\lambda,\mathbf{x})$ 不是负稳定的, 由于$\mathbf{x}$是一个不动点, 必有$\lambda+\alpha>0$, 进而$\rho(J(\mathbf{x}))\geq1$, 那么较小的α当然不会出现“意外”的特征对收敛情形.

换句话说, 如果$\alpha>\beta$, 那么任何球面Σ上的吸引不动点都必然是$f(\mathbf{x})$ 的严格约束局部极小值. 因为从定理3.1可知, 只要$\alpha>\beta$, 目标函数的凸性即可满足. 球面Σ上$\mathbf{x}$任何收敛邻域中的点$\tilde{\mathbf{x}}$必然满足$f(\tilde{\mathbf{x}})>f(\mathbf{x})$, 由此表明$\mathbf{x}$为严格局部极小值. 反之, 如果$\alpha>\beta$, 任何严格局部极小值必然对应于某个吸引不动点.

定理3.1在凹的情况下的类似定理表述如下.

定理3.2 设$(\lambda,\mathbf{x})$为非线性特征值问题(2)的特征对. 假设$\alpha\in\mathbf{R}$, 满足$\alpha<-\beta$, 其中β定义为$\beta\equiv\max_{\mathbf{x}\in\Sigma}\rho(3\mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{B})$. 设$\phi(\mathbf{x})$由(3)给定, 那么当且仅当$\mathbf{x}$是$-\phi$的线性吸引不动点时, $(\lambda,\mathbf{x})$是正稳定的.

由矩阵幂法产生的序列$\{\mathbf{x}_k\}$总是收敛到谱特征值λ_1对应的特征向量, 其他特征向量均可能不是稳定不动点. 与矩阵幂法相比, 采用平移对称高阶幂法求解非线性特征值问题, 可以找到多个特征对, 因为可能存在多个正, 负稳定特征对. 但找到多个特征对的能力也意味着不能保证从任意初始点开始的迭代收敛到某个特定的特征对.

§3 结束语

SS-HOPM算法在求解中小规模的BEC类非线性特征值问题时具有不错的计算效率, 同时还满足点列收敛性. 本文进一步采用不动点分析, 从理论上区分了采用平移对称高阶幂法所能求得的非线性特征对类型.

平移对称高阶幂法之所以能够保证收敛, 在于其通过平移项的作用能够保证目标函数在整个迭代过程中保持凸性或凹性. 不过其中平移项的选择却是一个不小的挑战. 因为只有合适的平移项才能既保证收敛, 又能保证好的收敛速率. 设想在每次迭代中都重新设定一个平移项, 使得每次迭代过程中的目标函数凸, 从而既保证收敛, 又不降低效率. 我们将在以后的工作中将平移项的自适应改进作为进一步研究的课题.

参考文献:

[1] Jia Shanghui, Xie Hehu, Xie Manting, et al. A full multigrid method for nonlinear eigenvalue problems[J]. Science China Mathematics, 2016, 59(10): 2037-2048.

[2] 谢和虎. 非线性特征值的多重网格算法[J]. 中国科学A辑, 2015, 45(8): 1193-1204.

[3] Wu Xinming, Wen Zaiwen, Bao Weizhu. A regularized Newton method for computing ground states of Bose-Einstein condensates[J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 73(1): 303-329.

[4] Cancès Eric, Chakir Rachida, Maday Yvon. Numerical analysis of nonlinear eigenvalue problems[J]. Journal of Scientific Computing, 2010, 45(1-3): 90-117.

[5] Tang Yaozong, Yang Qingzhi, Huang Pengfei. SS-HOPM for BEC-like Nonlinear Eigenvalue Problems[J]. 高等学校计算数学学报, 2020, 42(2): 163-192.

[6] Bao Weizhu, Cai Yongyong. Mathematical theory and numerical methods for Bose-Einstein condensation[J]. Kinetic and Related Models, 2013, 6(1): 1-135.

[7] Elliott H Lieb, Robert Seiringer, Jakob Yngvason. Bosons in a Trap: A Rigorous Derivation of the Gross-Pitaevskii Energy Functional[J]. Physical Review, 2001, A61: 043602.

[8] Hu Jiang, Jiang Bo, Liu Xin, et al. A note on semi-definite programming relaxations for polynomial optimization over a single sphere[J]. Science China Mathematics, 2016, 59(8): 1543-1560.

[9] Sadhan K Adhikari. Numerical solution of the two-dimensional Gross-Pitaevskii equation for trapped interacting atoms[J]. Physics Letters A, 2000, 265(1): 91-96.

[10] Edwards Mark, Burnett K. Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation for small samples of trapped neutral atoms[J]. Physical Review A, 1995, 51(2): 1382-1386.

[11] Dodd R J. Approximate solutions of the nonlinear Schrödinger equation for ground and excited states of Bose-Einstein condensates[J]. Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, 1996, 101(2): 545–552.

[12] Schneider B I, Fede D L. Numerical approach to the ground and excited states of a Bose-Einstein condensed gas confined in a completely anisotropic trap[J]. Physical Review, 1999, 59(3): 2232-2242.

[13] Bao Weizhu, Tang Weijun. Ground-state solution of Bose-Einstein condensate by directly minimizing the energy functional[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 187(1): 230-254.

[14] Chang S L, Chien C S, Jeng B W. Computing wave functions of nonlinear Schrödinger equations: A time-independent approach[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 226(1): 104-130.

[15] Chang ShuMing, Lin WenWei, Shieh Shih-Feng. Gauss-Seidel type methods for energy states of a multi-component Bose-Einstein condensate[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 202(1): 367-390.

[16] Aftalion Amandine, Danaila Ionut. Three-dimensional vortex configurations in a rotating Bose Einstein condensate[J]. Physical Review, 2003, 68(2): 92-94.

[17] Cerimele M M, Chiofalo M L, Pistella F, et al. Numerical solution of the Gross-Pitaevskii equation using an explicit finite-difference scheme: an application to trapped Bose-Einstein condensates[J]. Physical Review, 2009, 62(1): 1382-1389.

[18] Chiofalo M, Succi S, Tosi M. Ground state of trapped interacting Bose-Einstein condensates by an explicit imaginary-time algorithm[J]. Physical Review E Statistical Physics Plasmas Fluids and Related Interdisciplinary Topics, 2000, 62(5): 7438-7444.

[19] Ruprecht P A, Holland M J, Burnett K, et al. Time-dependent solution of the nonlinear Schrödinger equation for Bose-condensed trapped neutral atoms[J]. Physical Review A, 1995, 51(6): 4704-4711.

[20] Juan Jose Garcia-Ripoll, Victor M Perez-Garcia. Optimizing Schrödinger functionals using sobolev gradients: applications to quantum mechanics and nonlinear optics[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2001, 23(4): 1316-1334.

[21] Bao Weizhu, Wang Hanquan. A mass and magnetization conservative and energy-diminishing numerical method for computing ground state of spin-1 Bose-Einstein condensates[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2007, 45(5): 2177-2200.

[22] Danaila Ionut, Kazemi Parimah. A new Sobolev gradient method for direct minimization of the Gross-Pitaevskii energy with rotation[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2010, 32(5): 2447-2467.

[23] 杨庆之, 黄鹏斐, 刘亚君. 解一类非线性特征值的数值算例[J]. 数值计算与计算机应用, 2019, 40(2): 130-142.

[24] Tang Yaozong, Yang Qingzhi, Luo Gang. Convergence analysis on SS-HOPM for BEC-like nonlinear eigenvalue problems[J]. Journal of Computational Mathematics, 2021,39(4), 617-628.

[25] Tamara G Kolda, Brett W Bader, Joseph P Kenny. Higher-Order Web Link Analysis Using Multilinear Algebra[C]. Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Data Mining, Houston, TX., 2005: 242-249.

[26] Pierre Comon, Golub Gene, Lim Lek-Heng, et al. Symmetric tensors and symmetric tensor rank[R]. SCCM Technical Report 06-02, Stanford University, 2006.

[27] Jachymski J, Reich S. Fixed Point Theory and its Applications[M]. Warsaw: Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, 2007.

[28] Werner C Rheinboldt. Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1974.

[29] Stuart A M, Humphries A R. Dynamical Systems and Numerical Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

[30] Tamara G Kolda, Jackson R Mayo. Shifted power method for computing tensor eigenpairs[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2011, 32(4): 1095-1124.

Fixed point analysis on SS-HOPM for nonlinear eigenvalue problems

TANG Yao-zong[1,2], YANG Qing-zhi[1,2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Kashi University, Kashi, 844000, China;

2. School of Mathematical Sciences, Nankai University, Tianjin, 300071, China)

Abstract: In solving the nonlinear eigenvalue problems (NEP) originated from Bose-Einstein Condensation (BEC) (BEC-like NEPs for short), the shifted symmetric higher-order power method(SS-HOPM) has not only high computational efficiency, but also has point-wise convergence. Through the fixed point analysis, the types of eigenpairs that can be obtained by SS-HOPM are distinguished.

Keywords: nonlinear eigenvalues; Bose-Einstein condensation; SS-HOPM; fixed point analysis

MR Subject Classification: 15A69; 49N15