中图分类号: 学校代码: 10055

UDC: 密级: 公开

博 士 学 位 论 文

几类结构张量特征值和互补问题的研究

Research on eigenvalues and complementarity problems of several structured tensors

论文作者 梅炜 指导教师 杨庆之 教授

申请学位 理学博士 培养单位 数学科学学院

学科专业 计算数学 研究方向 张量优化

答辩委员会主席 黄正海 教授 评 阅 人 黄正海 教授、魏益民 教授、宋义生 教授、凌晨 教授、王宜举 教授

南开大学研究生院

二〇二一年三月

南开大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：________________ 年 月 日

非公开学位论文标注说明

(本页表中填写内容须打印)

根据南开大学有关规定，非公开学位论文须经指导教师同意、作者本人申请和相关部门批准方能标注。未经批准的均为公开学位论文，公开学位论文本说明为空白。

论文题目			
申请密级	□限制(≤2年)　□秘密(≤10 年)　□机密(≤20年)		
保密期限	年 月 日至 年 月 日		
审批表编号		**批准日期**	20 年 月 日

南开大学学位评定委员会办公室盖章(有效)

注：限制★2年(可少于2年);秘密★10年(可少于10年);机密★20年(可少于20年)

中文摘要

本文研究了几类结构张量的理论性质及其张量互补问题，主要讨论了非负Q-张量的张量互补问题解集的具体上下界；Cauchy-Hankel张量特征值的上界；矩形 Z-张量、矩形 P-张量的性质及相应互补问题解的存在情况。并运用相关算法来计算张量的特征值。论文结构如下：

首先，对由张量互补问题可解性定义的 Q-张量给出一些新的结果。对于这类结构张量，我们给出了充分条件来保证其相应的张量互补性问题的非零解至少包含两个非零分量，并讨论了它与其它结构张量之间的关系。此外，关于非负 Q-张量的张量互补问题，我们得到了其解集的上下界，并且证明了该张量的特征值与此解集密切相关。

其次，我们给出了有限维和无限维 Cauchy-Hankel张量特征值的上下界，并证明了由 m 阶无限维 Cauchy-Hankel张量定义的算子是一个从 l^1 到 $l^p(1 < p < \infty)$ 的有界、正 $(m-1)$-齐次算子。同时给出了相对应的两个正齐次算子范数的上界。此外，对于四阶实部分对称 Cauchy-Hankel张量，我们得到了 M-正定性的充分必要条件，并且给出了 M-特征值的上界，通过数值实验可以看出，该上界与由幂法计算出的上界很接近。

最后，我们讨论了矩形 Z-张量的性质，证明了一个矩形 Z-张量是一个矩形 M-张量当且仅当它的 V^+-奇异值都是非负的，并证明了矩形 M-张量的最大对角元素是非负的。此外，关于矩形强 M-张量的结果也相应地得到。同时，我们证明了一个偶数阶严格对角占优矩形张量是一个矩形 P-张量，并且证明了矩形 P-张量的矩形张量互补问题对于任何正向量都只有零解。此外，给出了非负矩形张量的矩形张量互补问题无解的充分条件。最后，通过数值实验来说明提出算法的有效性。

关键词： 结构张量，张量互补问题，特征值，上下界，范数，M-正定。

Abstract

This thesis studies the theoretical properties of several structured tensors and complementarity problem, mainly discusses the specific upper and lower bounds of solution set of tensor complementarity problem for nonnegative Q-tensors; the upper bounds of the eigenvalues of Cauchy-Hankel tensors; the properties of rectangular Z-tensors and rectangular P-tensors, and the existence of solutions for the corresponding complementarity problems. And calculate the eigenvalues of tensors by related algorithms. The thesis is organized as follows.

First, we present some new results on Q-tensors, which are defined by the solvability of the corresponding tensor complementarity problem. For such structured tensors, we give a sufficient condition to guarantee the nonzero solution of the corresponding tensor complementarity problem with a vector containing at least two nonzero components, and discuss their relationships with some other structured tensors. Furthermore, with respect to the tensor complementarity problem with a non-negative Q-tensor, we obtain the upper and lower bounds of its solution set, and by the way, we show that the eigenvalues of such a tensor are closely related to this solution set.

Next, we present upper bounds of eigenvalues for finite and infinite dimensional Cauchy-Hankel tensors. It is proved that an m-order infinite dimensional Cauchy-Hankel tensor defines a bounded and positively $(m-1)$-homogeneous operator from l^1 into $l^p (1 < p < \infty)$, and two upper bounds of corresponding positively homogeneous operator norms are given. Moreover, for a fourth-order real partially symmetric Cauchy-Hankel tensor, sufficient and necessary conditions of M-positive definiteness are obtained, and an upper bound of M-eigenvalue is also given. And numerical experiments show that the upper bound is very close to that calculated by power method.

Last, we discuss some properties of rectangular Z-tensors. It is proved that a rectangular Z-tensor is a rectangular M-tensor if and only if all of its V^+-singular value are nonnegative, we present that the maximal diagonal element of rectangular M-tensors is nonnegative. Moreover, some corresponding results of strong rectangular M-tensors are also obtained. In addition, we prove that an even order strictly diagonally dominated rectangular tensor is a rectangular P-tensor, and also establish that rectangular tensor complementarity problem, corresponding to a rectangular P-tensor, has only zero vector solution for any positive vectors. Besides, some sufficient conditions are given for the rectangular tensor complementarity problem with nonnegative rectangular tensors to have no solution. At last, numerical experiments are showed to test the efficiency of the proposed algorithm.

Key Words: Structured tensor, Tensor complementarity problems, Eigenvalues, Upper and lower bounds, Norm, M-positive definite.

目录

第一章 绪论

第一节 张量简介

一个 m 阶 n 维张量（超矩阵）$\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})$ 是实数 $a_{i_1\cdots i_m}\in\mathbb{R}$ 的多维数组，这里 $i_j\in I_n:=\{1,2,\cdots,n\}$ 和 $j\in I_m:=\{1,2,\cdots,m\}$。$T_{m,n}$ 是包含所有 m 阶 n 维张量的集合。$\mathcal{I}$ 是单位张量，其所有对角元素是1，且非对角元素是0。此外，定义 $\mathbb{R}^n:=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\top: x_i\in\mathbb{R}, i\in I_n\}$ 和 $\mathbb{R}^n_+:=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\mathbf{x}\geq\mathbf{0}\}$，这里 $\mathbb{R}$ 代表所有的实数集，$\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ 表示对所有 $i\in I_n$ 都有 $x_i\geq 0$。$\mathbb{Z}$ 是所有整数的集合，和 $\mathbb{Z}^+(\mathbb{Z}^-)$ 是所有非负 (非正) 整数的集合。用 “$\langle\cdot,\cdot\rangle$” 表示两个同维向量的内积，即 $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\mathbf{y}^\top\mathbf{x}$。如果张量的所有元素都是非负的，则称其为非负张量。此外，如果元素 $a_{i_1\cdots i_m}$ 在其指标作任意置换时均不变，则称其为对称张量，所有实 m 阶 n 维对称张量的集合记为 $S_{m,n}$。

设 $\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})\in T_{m,n}$ 和向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\top\in\mathbb{R}^n$，那么 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}$ 是一个向量且它的第 i 个元素是

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1})_i:=\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n} a_{ii_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}, \forall i\in I_n$$

$\mathcal{A}\mathbf{x}^m$ 是一个 m 齐次多项式，其定义如下

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^m:=\langle\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1},\mathbf{x}\rangle=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m=1}^{n} a_{i_1i_2\cdots i_m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}.$$

1.1.1 张量特征值

张量特征值，H-特征值，E-特征值和 Z-特征值等是由 Qi [1,2] 和 Lim [3] 最先提出来的。随后，针对高阶马尔可夫链，Chang和 Zhang [4] 首次引入了 Z_1-特征值的概念。且 Culp等 [5] 研究了转移概率张量的 Z_1-特征向量的唯一性。

定义 1.1 设 $\mathcal{A}=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in T_{m,n}$，

(i) 一个数 $\lambda\in\mathbb{C}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的一个特征值，且非零向量 $\mathbf{x}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 λ 的一个特征向量，如果 $(\lambda,\mathbf{x})$ 满足

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}=\lambda\mathbf{x}^{[m-1]}.$$

显然，如果 $\mathbf{x}$ 是实的，那么 λ 也是实的。在这种情况下，λ 和 $\mathbf{x}$ 分别称为 $\mathcal{A}$ 的一个 H-特征值和一个 H-特征向量。

(ii) 一个数 $\mu\in\mathbb{C}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的一个 E-特征值，且非零向量 $\mathbf{x}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 μ 的一个 E-特征向量，如果 $(\mu,\mathbf{x})$ 满足

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}=\mu\mathbf{x}(\mathbf{x}^\top\mathbf{x})^{\frac{m-2}{2}}.$$

显然，如果 $\mathbf{x}$ 是实的，那么 μ 也是实的。在这种情况下，μ 和 $\mathbf{x}$ 分别称为 $\mathcal{A}$ 的一个 Z-特征值和一个 Z-特征向量。

(iii) 一个数 $\sigma\in\mathbb{R}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的一个 Z_1-特征值，且实向量 $\mathbf{x}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 σ 的一个 Z_1-特征向量，如果 $(\sigma,\mathbf{x})$ 满足

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}=\sigma\mathbf{x}\ 和\ \|\mathbf{x}\|_1=1.$$

1.1.2 结构张量

现在，我们来回忆一些结构张量的定义。

定义 1.2 设 $\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})\in T_{m,n}$，那么 $\mathcal{A}$ 称为一个

(1) Q-张量 *[6]*，若对每个向量 $\mathbf{q}\in\mathbb{R}^n$，张量互补问题 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$，

$$\mathbf{x}\geq\mathbf{0},\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}+\mathbf{q}\geq\mathbf{0}\ 和\ \langle\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}+\mathbf{q},\mathbf{x}\rangle=0 \tag{1.1}$$

有一个解；

(2) 完全 Q-张量 *[7]*，若它的每个主子张量都是 Q-张量；

(3) （严格）半正张量 *[6]*，若对每个 $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$，存在一个指标 $k\in I_n$ 使得 $x_k>0$ 和 $\left(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}\right)_k(>)\geq 0$；

(4) 协正张量 *[8]*，若对所有的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_+$ 有 $\mathcal{A}\mathbf{x}^m\geq 0$；

(5) R_0-张量 *[6]*，若 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{0})$ 有唯一解 $\mathbf{0}$；

(6) 广义行严格对角占优张量 *[9]*，若对所有 $k\in I_n$ 有

$$|a_{kk\cdots k}|-\sum_{\substack{a_{ki_2i_3\cdots i_m}<0\\(i_2,i_3,\cdots,i_m)\neq(k,k,\cdots,k)}}|a_{ki_2i_3\cdots i_m}|>0.$$

第二节 本课题的研究现状

1.2.1 结构张量的研究现状

张量，作为矩阵的高阶推广，在化学计量学、高阶统计、数据分析与挖掘和信号处理等方面有着重要的应用 [10]。近年来，各种结构张量的性质被广

泛的研究，如非负张量 [11–13]、正定张量 [1, 14]、协正张量 [15–18]、半正张量 [6, 19]、Z-张量 [20]、M-张量 [21, 22]、S-张量 [23]、ER-张量 [24]、P(P_0)-张量 [25, 26]、B(B_0)-张量 [25, 27]、R(R_0)-张量 [6]、Hilbert张量 [28, 29]、Cauchy张量 [30, 31]等。但目前关于 Q-张量、Cauchy-Hankel张量以及矩形张量的研究相对较少，本文主要针对这几类张量展开研究。

众所周知，Q-矩阵（对每个向量，当相应的线性互补问题都有一个解时，则该矩阵称为 Q-矩阵）在结构矩阵领域和互补问题理论中都起着重要的作用，其许多好的性质已经被研究，可以参考文献 [32–37]。最近，Song和 Qi [6] 将 Q-矩阵的概念推广到 Q-张量，即，一个张量被称为 Q-张量当且仅当对每个向量，其相应的张量互补问题都有解。他们证明了 P-张量，R-张量，严格半正张量和半正 R_0-张量都是 Q-张量的子类。此外，Song和 Yu [38] 证明了每个 Q-张量必是一个 S-张量。Huang等 [8] 将与 Q-矩阵有关的两个著名结果推广到 Q-张量，即他们证明了在强 P_0-张量或者非负张量的条件下，R-张量，R_0-张量，Q-张量和 ER-张量都是等价的。Gowda等 [20] 通过度理论研究了 Q-张量的一些理论性质。尽管 Q-矩阵很多好的性质已经被推广到 Q-张量，但仍然还有许多特殊的性质值得我们进一步研究。例如，Pang [34] 证明了一个已知的结果：如果所涉及的矩阵是半单调 Q-矩阵，则其与零向量相对应的线性互补问题的非零解至少包含两个非零分量。随后，Song和 Qi [6] 提出了以下问题：这个已知结果可以推广到张量吗？Huang等 [8] 通过构造反例对这个问题给出了否定的答案。因此，我们很自然地想到

问题一：是否可以通过添加一些条件来使上述结论仍然成立？

此外，关于协正 Q-矩阵是 R_0-矩阵的一些充分条件已经很好地被研究 [39–41]。特别地，Jeter和 Pye [40] 证明了阶数小于或等于3的协正矩阵是 Q-矩阵当且仅当它是 R_0-矩阵。然而，Huang等 [8] 证明了这个结论并不能推广到 Q-张量中。受此启发，我们将思考

问题二：能否将四阶协正矩阵 [41] 的相应结论推广到张量的情况？

上述两个问题是本文我们将要考虑的问题。

Cauchy-Hankel矩阵与 Cauchy矩阵和 Hankel矩阵同时具有密切的关系（参考 [42–44]），其定义如下 [45]：

$$A_{ij} = \frac{1}{g + h(i + j)}, \ \ i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 g 和 h 是任意实数使得 $h \neq 0$ 和 g/h 是一个整数。

Chen等 [30] 首次提出了 Cauchy-Hankel张量的定义，它是 Cauchy-Hankel矩阵定义的推广。设 $g,h \neq 0 \in \mathbb{R}$ 和 g/h 不是一个整数，则一个 m 阶 n 维 Cauchy-Hankel张量 $\mathcal{A}_n = (\mathcal{A}_{i_1 i_2 \cdots i_m})$ 的元素定义如下

$$\mathcal{A}_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \frac{1}{g + h(i_1 + i_2 + \cdots + i_m)}, \quad i_1, i_2, \cdots, i_m = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.2}$$

和一个 m 阶无限维 Cauchy-Hankel张量 $\mathcal{A}_\infty = (\mathcal{A}_{i_1 i_2 \cdots i_m})$ 的元素定义如下

$$\mathcal{A}_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \frac{1}{g + h(i_1 + i_2 + \cdots + i_m)}, \quad i_1, i_2, \cdots, i_m = 1, 2, \cdots, n, \cdots \tag{1.3}$$

到目前为止，广义 Hilbert张量的很多好的理论结果已经得到，但关于 Cauchy-Hankel张量的研究却很少。受 Hilbert张量 [28] 研究的启发，Mei和 Song [29] 提出了广义 Hilbert张量的定义，其定义如下

$$\mathcal{H}_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \frac{1}{i_1 + i_2 + \cdots + i_m - m + a}, \; a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}^-; \, i_1, i_2, \cdots, i_m = 1, 2, \cdots, n,$$

他们给出了有限维广义 Hilbert张量特征值的上界，并证明了由无限维广义 Hilbert张量定义的算子是一个从 l^1 到 $l^p (1 < p < \infty)$ 的有界、正 $(m-1)$-齐次算子，其中 l^p 是包含所有实数序列 $x = (x_i)_{i=1}^\infty$ 且 $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty$ 的线性空间。此外，当 $a > 0$ 时，他们给出了相应的正齐次算子范数的两个上界。随后，Meng和 Song [46] 讨论了有限维和无限维广义 Hilbert张量的 Z_1-特征值的上界。最近，很多文献给出了一些使偶数阶张量是正定的充分必要条件。例如，Chen和 Qi [31] 证明了一个偶数阶对称 Cauchy张量是半正定的当且仅当它的生成向量是正的；一个偶数阶对称 Cauchy张量是正定的当且仅当它的生成张量是正的并且互不相同的。同时，他们还证明了一个偶数阶对称 Cauchy张量的半正定性可以等价的由其相对应的齐次多项式的单调增性来描述。如一个偶数阶 Cauchy张量是半正定的，当且仅当相对应的齐次多项式在非负象限上是单调增的。一个偶数阶 Cauchy张量是正定的，当且仅当相对应的齐次多项式在非负象限上是严格单调增的。Chen等 [30] 提出了一些使偶数阶 Cauchy-Hankel张量是正定的充分必要条件，并证明了一个偶数阶 Cauchy-Hankel张量是正定的，当且仅当相对应的齐次多项式在非负象限上是严格单调增的。然而，随着人们对四阶部分对称张量越来越关注，其 M-正定性和 M-特征值被广泛的研究。如一些关于 M-正定性的充分条件被提出。Li和 Li [47] 利用矩阵展开方法，给出了三个使四阶部分对称张量是 M-正定性的充分条件，且该条件很容易检验。Wang等 [48] 讨论了一

些使四阶部分对称非负张量是 M-正定性的充分条件。特别地，Che等 [49] 给出了一些使四阶部分对称 Cauchy张量是 M-(半)正定的充分必要条件。同时，他们证明了四阶部分对称 Cauchy张量是 M-半正定的，当且仅当相对应的齐次多项式在非负象限上是单调增的；是 M-正定的当且仅当相对应的齐次多项式在非负象限上是严格单调增的。当然，关于 M-特征值的研究也很多。如 Qi等 [50] 首次引入了四阶部分对称张量的 M-特征值的概念。随后，Che等 [51] 给出了一些 M-特征值的包含定理，和四阶部分对称非负张量的 M-谱半径的上界，这改进了文献 [52, 53] 中相应的结果。He等 [54] 给出了弹性 M-张量的最小 M-特征值的一些下界，这些下界只依赖于弹性 M-张量的元素，并且很容易验证。随后，Zhang等 [55] 给出了在不可约条件下，弹性 M-张量的最小 M-特征值的一个上界和两个下界，改进了文献 [54] 中已有的一些结果。同时，用数值算例验证了所得结果的有效性。受此启发，我们将在此基础上研究有限维和无限维 Cauchy-Hankel张量特征值的上界，以及四阶部分对称 Cauchy-Hankel张量的 M-正定性条件和 M-特征值上界。

随着张量的进一步发展，矩形张量作为张量的推广，由于其在固体力学 [56–60] 的强椭圆率条件问题和量子物理学 [61–63] 的纠缠问题中有重要的应用，因而引起了众多数学工作者对其的研究兴趣。它最初是由 Lim [3] 提出的，其定义如下：设 p，q，m，n 是正整数，且 m，$n \geq 2$。如果 $i_1, \cdots, i_p \in I_m := \{1, 2, \cdots, m\}$ 和 $j_1, \cdots, j_q \in I_n := \{1, 2, \cdots, n\}$, 则称 $\bar{\mathcal{A}} = (a_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q}) \in \mathbb{R}^{[p;q;m;n]}$ 是一个实 (p, q) 阶 $(m \times n)$ 维矩形张量。

设矩形张量 $\bar{\mathcal{A}} = (a_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q}) \in \mathbb{R}^{[p;q;m;n]}$，向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$，那么 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个向量且第 i 个元素是

$$(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_i = \sum_{i_2, \cdots, i_p = 1}^{m} \sum_{j_1, \cdots, j_q = 1}^{n} a_{i i_2 \cdots i_p j_1 \cdots j_q} x_{i_2} \cdots x_{i_p} y_{j_1} \cdots y_{j_q}.$$

类似地，$\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量且第 j 个元素是

$$(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_j = \sum_{i_1, \cdots, i_p = 1}^{m} \sum_{j_2, \cdots, j_q = 1}^{n} a_{i_1 \cdots i_p j j_2 \cdots j_q} x_{i_1} \cdots x_{i_p} y_{j_2} \cdots y_{j_q}.$$

随后，各种矩形张量的一些好的理论性质被广泛研究。如 Chang等 [64] 研究了实部分对称矩形张量 H-奇异值的一些性质，并给出了非负矩形张量 H-奇异值的 Perron-Frobenius定理，和计算其最大 H-奇异值的算法。同时，他们定义

了矩形张量的不可约性。随后，Yang和 Yang [65] 给出了非负矩形张量 Perron-Frobenius定理的一些新的结果。他们将文献 [11] 中的弱 Perron-Frobenius定理推广到非负矩形张量上，证明在某些条件下，最大 H-奇异值是几何单的。同时，对文献 [66] 中的算法给出了收敛性证明。Gu和 Wu [67] 首次提出了协正矩形张量的定义，且说明了部分对称非负矩形张量和半正定矩形张量都是协正矩形张量。同时，给出了一些使实部分对称矩形张量是协正矩形张量的充分必要条件。Wang等 [68] 提出了一些新的准则来判断部分对称张量是否为(严格)协正的，并基于二项式展开和凸组合给出了两个必要条件。He等 [69] 给出了严格对角占优部分对称矩形张量的定义，并证明了该矩形张量是矩形正定的。Zeng 等 [70] 给出了矩形 P-张量和矩形 S-张量的定义，并证明了矩形 P-张量的所有 V-奇异值都是正的。同时，提出了一些使矩形张量成为矩形 P-张量的充分必要条件，且矩形 S-张量可以由相应的矩形张量互补问题的可行性向量来定义等。

但是，目前关于矩形 P-张量的研究还是相对较少，且 Z-张量的定义还并未推广到矩形张量中。但是我们知道关于 Z-张量和 P-张量理论性质的研究已经相当成熟。例如，Gowda等 [20] 提出了一些使 Z-张量具有全局可解性的等价条件。Luo等 [71] 研究了 Z-张量互补问题。他们证明了在某些条件下，求解最稀疏解等价于求解具有线性目标函数的多项式规划问题。Zhang等 [21] 不仅证明了(强)M-张量是 Z-张量且最大对角元素是非负的(正的)，而且证明了一个 Z-张量是一个(强)M-张量，当且仅当它的所有 H^+-特征值(H-特征值)是非负的(正的)。Ding等 [22] 研究了 M-张量和非奇异 M-张量的一些重要性质。他们证明了 M-张量是 Z-张量，且 Z-张量是非奇异 M-张量的充要条件是它是半正的。因此，一个非奇异 M-张量的对角元素都是正的。此外，Song和 Qi [72] 研究了在 Z-张量的条件下，严格对角占优张量的等价条件。 Yuan和 You [25] 提出了一个偶数阶严格对角占优张量是一个 P-张量。Song和 Qi [6, 7] 证明了 P-张量的张量互补问题总是有一个解，且对任何非负向量只有零解。除此之外，Song和 Qi [6] 还证明了一个非负张量是一个 Q-张量当且仅当它的所有主对角元素都是正的，并且证明了对任何非负向量，非负 Q-张量的张量互补问题只有零可行解。那么基于 Z-张量和 P-张量这些良好的理论性质，我们将 Z-张量的定义推广到矩形张量中，并进一步研究矩形 Z-张量和矩形 P-张量的性质。

1.2.2 张量互补问题的研究现状

非线性互补问题是1964年 Cottle在他的博士论文中首次提出来的。由于其

与很多学科都有紧密的联系，并且在运筹学、应用科学和技术如优化、经济平衡问题、结构力学问题、接触力学问题、非线性障碍问题、离散时间最优控制和交通平衡问题等方面 [73–76] 都有重要应用。因此，在接下来的几十年中，很多数学工作者致力于研究这个经典问题。目前，已发表有一千多篇相关论文，并出版了几本相关书籍，该问题在数学规划领域已经发展的相当成熟。

张量互补问题是一类特殊的非线性互补问题，同时也是线性互补问题的自然推广。作为张量领域的一个新兴研究课题，其在非线性压缩传感、多人博弈、DNA微阵列、交换等方面都有着重要的应用。目前，关于此问题的理论性质和算法已经得到广泛研究。理论方面，主要针对该问题解集的存在性和全局唯一性 [7, 20, 77–81]、非空性和有界性 [6, 14, 24, 26, 82]、稳定性和连续性 [82–84] 等方面展开研究；而算法方面，主要针对如何求解该问题 [85–93]。最近，Huang和 Qi [94–96] 概述了张量互补问题和相关模型的最新研究进展。

目前，通过使用各种张量的特殊结构，张量互补问题中许多很好的性质和应用已经得到了。因此，最近一些数学工作者主要研究某些特殊结构张量的张量互补问题解集的误差界。例如，Song和 Yu [38] 给出了严格半正张量互补问题解集的全局上界，且该上界与严格半正张量的 Pareto-特征值密切相关。Song和 Qi [97] 给出了严格半正张量互补问题解集的上下界。 Song和 Mei [27] 提出了两个正齐次算子范数的严格上下界，并在此基础上，给出了 B-张量互补问题解集的严格下界。Xu等 [9] 给出了对角元素都是正的广义行严格对角占优张量的张量互补问题解集的上下界。但是，关于其它结构张量的张量互补问题解集的上下界目前知之甚少。因此，如何通过高阶张量的特殊结构来获得其互补问题解集的上下界将非常有意义。

1.2.3 张量特征值算法的研究现状

高阶张量的特征值在超图 [98–100]、高阶马尔可夫链 [66]、最佳秩一逼近 [101, 102]、自动控制中偶数阶多元形式的正定性 [103] 等方面有重要的应用。近年来，高阶张量的特征值问题，特别是非负张量特征值问题 [11, 12, 104–109] 在数值多线性代数领域得到了广泛的关注，众多数学工作者研究了非负张量的 Perron-Frobenius定理和如何求解其最大特征值的算法。

Ng等 [66] 为了计算不可约非负张量的最大特征值提出了 NQZ方法，该方法是之前为了计算不可约非负矩阵谱半径所提出来的 Collatz方法 [110–112] 的推广。在此基础上，Liu等 [104] 改进了 NQZ方法，并证明了该算法对于任何不可

约非负张量总是收敛的。Pearson [105] 证明了偶数阶本质正张量的唯一正特征值是实几何单的。 Chang等 [106] 给出了本原张量 NQZ方法的收敛性。Zhang和 Qi [107] 给出了本质正张量的 NQZ方法的线性收敛率。Friedland等 [108] 为了计算弱不可约非负张量的最大特征值提出了幂法，并证明了在弱本原的条件下它是 R-线性收敛的。随后，Hu等 [13] 改进了此方法，并证明了弱不可约非负张量的全局 R-线性收敛性。

此外，为了求解非负矩形张量的最大 H-奇异值，目前已经有很多算法被研究。如 Chang等 [64] 提出了 CQZ迭代算法，该算法与文献 [66] 中求解不可约非负张量最大特征值的算法是类似的。随后，Yang和 Yang [65] 通过引入本原矩形张量的概念给出了其算法的收敛性。同时，Zhou等 [113] 对该算法进行了改进，并证明了所提出的算法对于任何不可约非负矩形张量都是收敛的。在此基础上，Chen等 [114] 给出了一种不精确的幂型算法。最近，Ragnarsson和 Van Loan [115] 建立了一般张量的奇异值与相应对称嵌入张量的特征值之间的关系，即可以通过借助求非负张量最大特征值的方法来求解非负矩形张量的最大奇异值。然而，目前关于计算 Cauchy-Hankel张量的 M-特征值和矩形张量的最大 V-奇异值的算法相对较少。因此，在已有算法的基础上，本文将结合这两类张量的特殊结构，给出计算其特征值的相应算法。

第三节 本文的贡献及结构

本文，我们将主要围绕 Q-张量、Cauchy-Hankel张量、矩形张量展开研究。主要研究这几类张量的理论性质及其互补问题解的上下界、存在情况等。同时，运用相关算法来计算 M-特征值和 V-奇异值。

第二章，我们将证明具有特殊结构的半正 Q-张量与零向量所对应的张量互补问题的非零解至少包含两个非零分量，从而对问题一给出了肯定的回答。关于问题二，我们将给出一个具有正对角元素的四维协正张量是 Q-张量但不是 R_0-张量的例子，即对该问题给出了否定的回答。此外，将讨论非负 Q-张量的张量互补问题解集的具体上下界。

第三章，我们将讨论有限维和无限维 Cauchy-Hankel张量特征值的上界。随后，给出两个相应的正齐次算子范数的上界。对于四阶部分对称 Cauchy-Hankel张量，我们将给出它是 M-正定性的一些充分必要条件，并讨论了它的 M-特征值的上界。最后利用幂法计算四阶部分对称 Cauchy-Hankel张量的最大

和最小 M-特征值，同时通过数值算例来说明我们得到的 M-特征值的上界是有意义的。

第四章，基于 Z-张量良好的理论性质，我们将 Z-张量的概念推广到矩形张量。重点研究矩形 Z-张量和矩形 P-张量，主要讨论它们的性质以及相应张量互补问题解的存在情况。我们将证明矩形 Z-张量是矩形 M-张量，当且仅当其所有 V^+-奇异值都是非负的，并提出了矩形 M-张量的最大对角元素是非负的。此外，我们将证明对于任何正向量，矩形 P-张量的张量互补问题只有零解，且偶数阶严格对角占优矩形张量是矩形 P-张量。对于非负矩形张量，我们将给出其相应的矩形张量互补问题无解的充分条件，和计算其最大 V-奇异值的算法。

第五章，我们将概括总结全文，并提出需要进一步研究的问题。

第二章 Q-张量的结构性质和互补问题

本章，我们主要回答绪论中的两个问题，并给出非负 Q-张量的张量互补问题解集的上下界。

第一节 预备知识

对于任何给定的向量 $\mathcal{A}=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in T_{m,n}$，我们定义

$$\omega:=\{(i_2,i_3\cdots,i_m)|i_2,i_3,\cdots,i_m \text{ 互相不同}\}$$

此外，$\mathbb{R}^n$ 上的两个主要范数定义如下

$$\|\mathbf{x}\|_\infty=\max\{|x_i|:i\in I_n\} \text{ 和 } \|\mathbf{x}\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}},(p\geq 1) \tag{2.1}$$

引理 2.1 *[6, 推论 3.5] 设 $\mathcal{A}$ 是一个非负张量，那么以下是等价的：*

(i) $\mathcal{A}$ 是一个 Q-张量；

(ii) $\mathcal{A}$ 是一个严格半正张量；

(iii) 对所有 $i\in I_n$ 有 $a_{ii\cdots i}>0$。

引理 2.2 *[9, 引理 1] 设 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$ 是一个广义行严格对角占优张量且对角元素都是正的，$\mathbf{q}\in\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{R}^n_+$ 是任意给定的向量，且 $\Omega(\mathbf{q})=\{i\in I_n:q_i<0\}$。如果 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 的一个解，且 $\|\mathbf{x}\|_\infty=x_k$，那么 $k\in\Omega(\mathbf{q})$ 和 $(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1})_k+q_k=0$。*

引理 2.3 *[97, 定理 6, 7, 8, 9] 设 $\mathcal{A}\in T_{m,n}(m\geq 2)$ 是严格半正张量。假设 $\mathbf{x}$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 的一个解，且 $\mathbf{x}_+=(\max\{x_1,0\},\max\{x_2,0\},\cdots,\max\{x_n,0\})^\top$，那么*

(i) $\dfrac{\|(-\mathbf{q})_+\|_\infty}{n^{\frac{m-2}{2}}\max\limits_{i\in I_n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)}\leq\|\mathbf{x}\|_\infty^{m-1}\leq\dfrac{\|(-\mathbf{q})_+\|_\infty}{\beta(\mathcal{A})}$；

(ii) $\dfrac{\|(-\mathbf{q})_+\|_\infty}{\max\limits_{i\in I_n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)}\leq\|\mathbf{x}\|_\infty^{m-1}\leq\dfrac{\|(-\mathbf{q})_+\|_\infty}{\beta(\mathcal{A})}(0<\beta(\mathcal{A})\leq\min\limits_{i\in I_n}a_{ii\cdots i})$（$m$ 是偶数）；

(iii) $\dfrac{\|(-\mathbf{q})_+\|_2}{n^{\frac{m-2}{2}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\leq\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}\leq\dfrac{\|(-\mathbf{q})_+\|_2}{\mu(\mathcal{A})}(0<\mu(\mathcal{A})=\min\limits_{\substack{\mathbf{x}\geq 0\\ \|\mathbf{x}\|_2=1}}\mathcal{A}\mathbf{x}^m)$（$\mathcal{A}$ 是对称的）；

(iv) $\frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_m}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{1}{m}}} \le \|\mathbf{x}\|_m^{m-1} \le \frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_m}{\lambda(\mathcal{A})}(0<\lambda(\mathcal{A})=\min\limits_{\substack{\mathbf{x}\ge 0\\ \|\mathbf{x}\|_m=1}} \mathcal{A}\mathbf{x}^m)$（$\mathcal{A}$ 是对称的和 m 是偶数）。

第二节 Q-张量, 严格半正张量和 $\mathbf{R}_0$-张量

定理 2.4 设 $\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})\in T_{m,n}$ 是一个半正 Q-张量且当 $(i_2,\cdots,i_m)\neq(i,\cdots,i)$ 时有 $a_{i_1i_2\cdots i_m}=0$，那么 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{0})$ 的一个非零解至少包含两个非零元素。

证明. 我们采用反证法。假设非零解 $\mathbf{x}$ 只包含一个非零元素，那么存在一个指标 $i\in I_n$ 使得 $x_i>0$ 和 $x_j=0$ (对所有 $j\neq i$)，因此

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1})_i=a_{i1\cdots1}x_1^{m-1}+\cdots+a_{ii\cdots i}x_i^{m-1}+\cdots+a_{in\cdots n}x_n^{m-1}=0$$

和

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1})_j=a_{j1\cdots1}x_1^{m-1}+\cdots+a_{ji\cdots i}x_i^{m-1}+\cdots+a_{jn\cdots n}x_n^{m-1}\ge 0$$

则 $a_{ii\cdots i}=0$ 和 $a_{ji\cdots i}\ge 0$ (对所有 $j\neq i$)。

令 $q_i<0$ 且 $q_j>0$ (对所有 $j\neq i$)，如果 $\mathbf{y}$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 的一个解，那么很明显

$$(\mathcal{A}\mathbf{y}^{m-1}+\mathbf{q})_i=a_{i1\cdots1}y_1^{m-1}+\cdots+a_{ii\cdots i}y_i^{m-1}+\cdots+a_{in\cdots n}y_n^{m-1}+q_i\ge 0.$$

通过选取 $\mathbf{q}$，对某些 $j\neq i$ 必有 $y_j>0$，很明显

$$(\mathcal{A}\mathbf{y}^{m-1}+\mathbf{q})_j=\sum_{k\neq i}a_{jk\cdots k}y_k^{m-1}+a_{ji\cdots i}y_i^{m-1}+q_j=0,$$

则

$$\sum_{k\neq i}a_{jk\cdots k}y_k^{m-1}=-(a_{ji\cdots i}y_i^{m-1}+q_j)<0.$$

令 $\mathbf{z}=(y_1,\cdots,y_{i-1},0,y_{i+1},\cdots,y_n)^\top$，那么对上述的 $j\neq i$ 有 $z_j=y_j>0$。然而，

$$(\mathcal{A}\mathbf{z}^{m-1})_j=\sum_{k\neq i}a_{jk\cdots k}y_k^{m-1}+a_{ji\cdots i}\cdot 0^{m-1}<0.$$

因此不存在指标 j 使得 $z_j>0$ 和 $(\mathcal{A}\mathbf{z}^{m-1})_j\ge 0$，这与 $\mathcal{A}$ 是一个半正张量相矛盾。即结论得证。 □

Song和 Qi [7] 提出了以下问题：每个严格半正张量必是一个完全 Q-张量，每个完全 Q-张量也是严格半正的吗？Zheng和 Wu [19] 通过一个例子给出了否定

的回答，这个例子主要运用了半正 R_0-张量是 Q-张量。众所周知，严格半正张量的每个主子张量仍然是严格半正张量 [7, 命题2.2(ii)]。在下面的例子中，结合 Q-张量的定义，我们回答上述问题。

例 2.5 设 $\mathcal{A}=(a_{i_1i_2i_3})\in T_{3,2}$，$a_{111}=1$，$a_{211}=4$，$a_{121}=-1$，其它的 $a_{i_1i_2i_3}=0$。那么 $\mathcal{A}$ 是一个 Q-张量，但不是严格半正张量。

证明. 对于任何 $\mathbf{x}=(x_1,x_2)^\top$，那么

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^2=\begin{pmatrix} x_1^2-x_1x_2 \\ 4x_1^2 \end{pmatrix}$$

很明显，$\mathcal{A}$ 不是一个严格半正张量（例如，$\mathbf{x}=(0,1)^\top$）。

现在我们证明 $\mathcal{A}$ 是一个 Q-张量。设 q_1 和 q_2 都是非负实数，

(i) 如果 $\mathbf{q}=(q_1^2,q_2^2)^\top$，那么 $\mathbf{x}=(0,0)^\top$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 的一个解。

(ii) 如果 $\mathbf{q}=(-q_1^2,q_2^2)^\top$，那么 $\mathbf{x}=(q_1,0)^\top$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 的一个解，这是由于

$$\mathbf{x}\geq\mathbf{0},\ \mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{q}=\begin{pmatrix} q_1^2-q_1^2 \\ 4q_1^2+q_2^2 \end{pmatrix}\geq\mathbf{0},\ \langle\mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{q},\mathbf{x}\rangle=0.$$

(iii) 如果 $\mathbf{q}=(q_1^2,-q_2^2)^\top$ 且 $q_2\neq 0$，那么 $\mathbf{x}=(\frac{q_2}{2},\frac{4q_1^2+q_2^2}{2q_2})^\top$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 的一个解，这是由于

$$\mathbf{x}\geq\mathbf{0},\ \mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{q}=\begin{pmatrix} \frac{q_2^2}{4}-\frac{q_2}{2}\times\frac{4q_1^2+q_2^2}{2q_2}+q_1^2 \\ q_2^2-q_2^2 \end{pmatrix}=\mathbf{0},\ \langle\mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{q},\mathbf{x}\rangle=0.$$

(iv) 如果 $\mathbf{q}=(-q_1^2,-q_2^2)^\top$ 且 $2q_1\geq q_2$，那么 $\mathbf{x}=(q_1,0)^\top$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 的一个解，这是由于

$$\mathbf{x}\geq\mathbf{0},\ \mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{q}=\begin{pmatrix} q_1^2-q_1^2 \\ 4q_1^2-q_2^2 \end{pmatrix}\geq\mathbf{0},\ \langle\mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{q},\mathbf{x}\rangle=0.$$

(v) 如果 $\mathbf{q}=(-q_1^2,-q_2^2)^\top$ 且 $2q_1\leq q_2\neq 0$，那么 $\mathbf{x}=(\frac{q_2}{2},\frac{q_2^2-4q_1^2}{2q_2})^\top$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 的一个解，这是由于

$$\mathbf{x}\geq 0,\ \mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{q}=\begin{pmatrix} \frac{q_2^2}{4}-\frac{q_2}{2}\times\frac{q_2^2-4q_1^2}{2q_2}-q_1^2 \\ q_2^2-q_2^2 \end{pmatrix}=\mathbf{0},\ \langle\mathcal{A}\mathbf{x}^2+\mathbf{q},\mathbf{x}\rangle=0.$$

因此对每个向量 $\mathbf{q}\in\mathbb{R}^2$，$TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 都有一个解，即 $\mathcal{A}$ 是一个 Q-张量。 □

推论 2.6 设 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$ 是一个半正张量，那么对于每个正数 ε，$\mathcal{A}+\varepsilon\mathcal{I}$ 是一个严格半正张量，即也是完全 Q-张量。

Murthy等在文献 [41]的推论3.7中给出了以下命题。

命题 2.7 设 $A\in\mathbb{R}^{4\times4}$ 是一个协正矩阵，假设 A的对角元素都是正的，那么 A 是一个 Q-矩阵当且仅当它是一个 R_0-矩阵。

因此，我们很自然的猜想以上结论是否可以推广到张量空间，即：设 $\mathcal{A}\in T_{m,4}$ 是一个协正张量，假设 $\mathcal{A}$ 的对角元素都是正的，那么 $\mathcal{A}$ 是一个 Q-张量当且仅当它是一个 R_0-张量。

通过运用文献 [7] 中定理3.3相同的证明方法，可以很容易的证明一个协正张量是一个半正张量。然后，结合文献 [6] 中的定理 3.2，即：一个半正 R_0-张量是一个 Q-张量，我们可以得到 "如果" 部分。但是"只有" 部分可能不正确，我们运用下面的例子来进行说明。

例 2.8 设 $\mathcal{A}=(a_{i_1i_2i_3})\in T_{3,4}$，$a_{111}=a_{211}=a_{333}=a_{444}=1$，$a_{122}=a_{222}=4$，$a_{112}=a_{212}=-4$，其它的 $a_{i_1i_2i_3}=0$。那么 $\mathcal{A}$ 是一个 Q-张量，但不是一个 R_0-张量。

证明. 对于任何 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^\top\in\mathbb{R}^4_+$，很明显

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^3=\mathbf{x}^\top\mathcal{A}\mathbf{x}^2=x_1(x_1-2x_2)^2+x_2(x_1-2x_2)^2+x_3^3+x_4^3\geq 0,$$

即 $\mathcal{A}$ 是一个协正的。

此外，$TCP(\mathcal{A},\mathbf{0})$ 的解 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4$ 需要满足

$$\mathbf{x}\geq\mathbf{0},\ \ \mathcal{A}\mathbf{x}^2=\begin{pmatrix}(x_1-2x_2)^2\\(x_1-2x_2)^2\\x_3^2\\x_4^2\end{pmatrix}\geq\mathbf{0},\ \ \langle\mathcal{A}\mathbf{x}^2,\mathbf{x}\rangle=0$$

可以很容易验证 $(2,1,0,0)^\top$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{0})$ 的一个解，因此，$\mathcal{A}$ 不是一个 R_0-张量。

现在我们证明 $\mathcal{A}$ 是一个 Q-张量。设 q_1，q_2，q_3，q_4 都是非负实数，

(i) 如果 $\mathbf{q}=(q_1^2,q_2^2,q_3^2,q_4^2)^\top$，那么 $\mathbf{x}=(0,0,0,0)^\top$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 的一个解。

(ii) 如果 $\mathbf{q}=(-q_1^2,q_2^2,q_3^2,q_4^2)^\top$，那么 $\mathbf{x}=(q_1,0,0,0)^\top$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 的一个解，这

是由于

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathcal{A}\mathbf{x}^2 + \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_1^2 \\ q_1^2 + q_2^2 \\ q_3^2 \\ q_4^2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0},\ \langle \mathcal{A}\mathbf{x}^2 + \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

(iii) 如果 $\mathbf{q} = (q_1^2, -q_2^2, q_3^2, q_4^2)^\top$，那么 $\mathbf{x} = (0, \frac{q_2}{2}, 0, 0)^\top$ 是 $TCP(\mathcal{A}, \mathbf{q})$ 的一个解，这是由于

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathcal{A}\mathbf{x}^2 + \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_2^2 + q_1^2 \\ q_2^2 - q_2^2 \\ q_3^2 \\ q_4^2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0},\ \langle \mathcal{A}\mathbf{x}^2 + \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

(iv) 如果 $\mathbf{q} = (-q_1^2, -q_2^2, q_3^2, q_4^2)^\top$ 且 $q_1 \geq q_2$，那么 $\mathbf{x} = (q_1, 0, 0, 0)^\top$ 是 $TCP(\mathcal{A}, \mathbf{q})$ 的一个解，这是由于

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathcal{A}\mathbf{x}^2 + \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_1^2 \\ q_1^2 - q_2^2 \\ q_3^2 \\ q_4^2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0},\ \langle \mathcal{A}\mathbf{x}^2 + \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

(v) 如果 $\mathbf{q} = (-q_1^2, -q_2^2, q_3^2, q_4^2)^\top$ 且 $q_1 \leq q_2$，那么 $\mathbf{x} = (0, \frac{q_2}{2}, 0, 0)^\top$ 是 $TCP(\mathcal{A}, \mathbf{q})$ 的一个解，这是由于

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathcal{A}\mathbf{x}^2 + \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_2^2 - q_1^2 \\ q_2^2 - q_2^2 \\ q_3^2 \\ q_4^2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0},\ \langle \mathcal{A}\mathbf{x}^2 + \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

很明显，对第一种情况(i)，我们还需要用相同的方法来讨论 $\mathbf{q} = (q_1^2, q_2^2, -q_3^2, q_4^2)^\top$，$\mathbf{q} = (q_1^2, q_2^2, q_3^2, -q_4^2)^\top$， $\mathbf{q} = (q_1^2, q_2^2, -q_3^2, -q_4^2)^\top$ 且 $(q_3, q_4) \neq (0, 0)$。此外，(ii)-(v)的情况可以类似地讨论。因此，对每个向量 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$，$TCP(\mathcal{A}, \mathbf{q})$ 有一个解，即 $\mathcal{A}$ 是一个 Q-张量。 □

第三节 非负 Q-张量互补问题解的有界性

定理 2.9 设 $\mathcal{A}$ 是一个 m 阶 n 维非负 Q-张量，$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+$ 是任意给定的向量

和 $\Omega(\mathbf{q})=\{i\in I_n: q_i<0\}$，假设

$$\varphi_i(\mathcal{A})=\sum_{(i_2,i_3,\cdots,i_m)\in\omega} a_{ii_2\cdots i_m} \text{ 和 } \psi_i(\mathcal{A})=\sum_{(i_2,i_3,\cdots,i_m)\notin\omega} a_{ii_2\cdots i_m}.$$

如果 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 的一个解，那么

(i) $\min\limits_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{(m-1)^{-\frac{m-1}{2}}\varphi_i(\mathcal{A})+\psi_i(\mathcal{A})}\le\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}\le\max\limits_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-n^{\frac{m-1}{2}}q_i}{a_{ii\cdots i}}$（$n\ge m-1$）；

(ii) $\min\limits_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{\varphi_i(\mathcal{A})+\psi_i(\mathcal{A})}\le\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}\le\max\limits_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-n^{\frac{m-1}{2}}q_i}{a_{ii\cdots i}}$（$n<m-1$）。

证明. 由 Xu等在文献 [9]中的命题1(a)和引理2.1，可以很容易得到一个非负Q-张量是一个广义行严格对角占优张量且对角元素都是正的。

由引理2.2可知存在一个指标 $k\in\Omega(\mathbf{q})$ 使得 $x_k=\|\mathbf{x}\|_\infty>0$ 和 $(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1})_k+q_k=0$，因此

$$\begin{aligned}
\frac{-q_k}{\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}}&=(\mathcal{A}(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2})^{m-1})_k\\
&=\sum_{i_2,i_3,\cdots,i_m=1}^{n}a_{ki_2\cdots i_m}\frac{x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}}{\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}}\\
&=a_{kk\cdots k}\frac{x_k^{m-1}}{\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}}+\sum_{\substack{i_2,i_3,\cdots,i_m=1\\(i_2,i_3,\cdots,i_m)\neq(k,k,\cdots,k)}}^{n}a_{ki_2\cdots i_m}\frac{x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}}{\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}}\\
&\ge a_{kk\cdots k}\frac{x_k^{m-1}}{(nx_k^2)^{\frac{m-1}{2}}}\\
&\ge\frac{1}{n^{\frac{m-1}{2}}}a_{kk\cdots k}\\
&>0.
\end{aligned}$$

接下来我们证明左边的不等式，众所周知

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ (\forall a_i\ge0,i=1,2,\cdots,n)$$

以上 “=” 成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。

(i)当 $n\ge m-1$ 时，设 $\mathbf{x}=(x_1,x_2\cdots,x_n)^\top$，如果 $(i_2,\cdots,i_m)\in\omega$，则

$$x_{i_2}\cdots x_{i_m}\le(\frac{x_{i_2}^2+\cdots+x_{i_m}^2}{m-1})^{\frac{m-1}{2}}\le(\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{m-1})^{\frac{m-1}{2}}=\frac{\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}}{(m-1)^{\frac{m-1}{2}}}.$$

那么

$$
\begin{aligned}
0 < \frac{-q_k}{\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}} &= (\mathcal{A}(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2})^{m-1})_k \\
&= \sum_{i_2,i_3,\cdots,i_m=1}^{n} a_{ki_2\cdots i_m} \frac{x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}}{\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}} \\
&\leq \sum_{(i_2,\cdots,i_m)\in\omega} a_{ki_2\cdots i_m} \frac{1}{(m-1)^{\frac{m-1}{2}}} + \sum_{(i_2,\cdots,i_m)\notin\omega} a_{ki_2\cdots i_m} \frac{x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}}{x_k^{m-1}} \\
&\leq \frac{1}{(m-1)^{\frac{m-1}{2}}} \sum_{(i_2,\cdots,i_m)\in\omega} a_{ki_2\cdots i_m} + \sum_{(i_2,\cdots,i_m)\notin\omega} a_{ki_2\cdots i_m}.
\end{aligned}
$$

(ii)当 $n < m-1$ 时，则

$$
\begin{aligned}
0 < \frac{-q_k}{\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}} &= (\mathcal{A}(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2})^{m-1})_k \\
&= \sum_{i_2,i_3,\cdots,i_m=1}^{n} a_{ki_2\cdots i_m} \frac{x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}}{\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}} \\
&\leq \sum_{i_2,i_3,\cdots,i_m=1}^{n} a_{ki_2\cdots i_m} \frac{x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}}{x_k^{m-1}} \\
&\leq \sum_{i_2,i_3,\cdots,i_m=1}^{n} a_{ki_2\cdots i_m}.
\end{aligned}
$$

结论得证。 □

类似地，我们可以得到以下定理。

定理 2.10 设 $\mathcal{A}$ 是一个 m 阶 n 维非负 Q-张量，$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+$ 是任意给定的向量和 $\Omega(\mathbf{q}) = \{i \in I_n : q_i < 0\}$。如果 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是 $TCP(\mathcal{A}, \mathbf{q})$ 的一个解，那么

(i) $\min\limits_{i\in\Omega(\mathbf{q})} \frac{-q_i}{(m-1)^{-\frac{m-1}{m}}\varphi_i(\mathcal{A})+\psi_i(\mathcal{A})} \leq \|\mathbf{x}\|_m^{m-1} \leq \max\limits_{i\in\Omega(\mathbf{q})} \frac{-n^{\frac{m-1}{m}}q_i}{a_{ii\cdots i}}$（$n \geq m-1$）；

(ii) $\min\limits_{i\in\Omega(\mathbf{q})} \frac{-q_i}{\varphi_i(\mathcal{A})+\psi_i(\mathcal{A})} \leq \|\mathbf{x}\|_m^{m-1} \leq \max\limits_{i\in\Omega(\mathbf{q})} \frac{-n^{\frac{m-1}{m}}q_i}{a_{ii\cdots i}}$（$n < m-1$）。

根据引理2.1，我们知道每个非负 Q-张量都是严格半正张量。很容易看出我们在定理2.9和 2.10中得到的界与引理 2.3 中的界不相同。现在我们给出 $n \geq m-1$ 和 $n < m-1$ 两个例子来说明存在非负 Q-张量使得 $\|\mathbf{x}\|_2$，$\|\mathbf{x}\|_m$ 以及文献 [9] 的定理4中给出的 $\|\mathbf{x}\|_\infty$ 的上下界都比引理2.3中的更好。

例 2.11 设 $\mathcal{A} = (a_{i_1i_2i_3i_4}) \in S_{4,4}$，$a_{1111} = a_{3333} = 1$，$a_{2222} = \frac{1}{10}$，$a_{4444} = 2$，$a_{1333} = a_{3133} = a_{3313} = a_{3331} = \frac{1}{4}$，$a_{1124} = a_{1142} = a_{1214} = a_{1412} = a_{1241} = a_{1421} = a_{2114} = a_{4112} =$

$a_{2141}=a_{4121}=a_{4211}=a_{2411}=\frac{1}{24}$，其它的 $a_{i_1i_2i_3i_4}=0$，且 $\mathbf{q}=(-q_1,q_2,0,q_4)^\top$，$q_1$，$q_2$ 和 q_4 都是正数。那么，$\mathcal{A}$ 是一个非负 Q-张量。

证明. 由引理2.1可知非负张量 $\mathcal{A}$ 是一个 Q-张量和严格半正张量。

如果 $\mathbf{x}$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 的一个解，那么由文献 [9] 中的定理4可知

$$\min_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}a_{ii_2\cdots i_m}}\le\|\mathbf{x}\|_\infty^{m-1}\le\max_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{a_{ii\cdots i}}.$$

对于 $\|\mathbf{x}\|_\infty^{m-1}$ 的上下界，我们有

$$\min_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}a_{ii_2\cdots i_m}}=\frac{2}{3}q_1\ \text{和}\ \frac{\|(-q)_+\|_\infty}{\max\limits_{i\in I_n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)}=\frac{8}{17}q_1.$$

和

$$\max_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{a_{ii\cdots i}}=q_1\ \text{和}\ \frac{\|(-q)_+\|_\infty}{\beta(\mathcal{A})}\ge 10q_1\ (0<\beta(\mathcal{A})\le\min_{i\in I_n}a_{ii\cdots i}=\frac{1}{10}).$$

因此，

$$\frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_\infty}{\max\limits_{i\in I_n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)}<\min_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}a_{ii_2\cdots i_m}}\le\|\mathbf{x}\|_\infty^{m-1}\le\max_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{a_{ii\cdots i}}<\frac{\|(-q)_+\|_\infty}{\beta(\mathcal{A})}.$$

对于 $\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}$ 的上下界，我们有

$$\min_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{(m-1)^{-\frac{m-1}{2}}\varphi_i(\mathcal{A})+\psi_i(\mathcal{A})}=\frac{q_1}{3^{-\frac{3}{2}}\times\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}>\frac{2}{3}q_1;$$

$$\frac{\|(-q)_+\|_2}{n^{\frac{m-2}{2}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{q_1}{4[(\frac{3}{2})^2+(\frac{9}{40})^2+(\frac{7}{4})^2+(\frac{17}{8})^2]^{\frac{1}{2}}}<\frac{2}{3}q_1.$$

$$\max_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-n^{\frac{m-1}{2}}q_i}{a_{ii\cdots i}}=8q_1\ \text{和}\ \frac{\|(-q)_+\|_2}{\mu(\mathcal{A})}\ge 10q_1.$$

由于 $\mu(\mathcal{A})=\min\limits_{\substack{\mathbf{x}\ge\mathbf{0}\\ \|\mathbf{x}\|_2=1}}\mathcal{A}\mathbf{x}^m>0$，设 $\mathbf{x}=(0,1,0,0)^\top$，那么

$$0<\mu(\mathcal{A})\le\mathcal{A}(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2})^m=\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}^m}{\|\mathbf{x}\|_2^m}=\frac{x_1^4+\frac{1}{10}x_2^4+x_3^4+2x_4^4+x_1x_3^3+\frac{1}{2}x_1^2x_2x_4}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2}=\frac{1}{10}.$$

因此，

$$\frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_2}{n^{\frac{m-2}{2}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} < \min_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{(m-1)^{-\frac{m-1}{2}}\varphi_i(\mathcal{A})+\psi_i(\mathcal{A})} \le \|\mathbf{x}\|_2^{m-1}$$

$$\le \max_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-n^{\frac{m-1}{2}}q_i}{a_{ii\cdots i}} < \frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_2}{\mu(\mathcal{A})}.$$

对于 $\|\mathbf{x}\|_m^{m-1}$ 的上下界，我们有

$$\min_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{(m-1)^{-\frac{m-1}{m}}\varphi_i(\mathcal{A})+\psi_i(\mathcal{A})} = \frac{q_1}{3^{-\frac{3}{4}}\times\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}} > \frac{q_1}{\frac{3}{2}} > \frac{q_1}{3^{\frac{1}{4}}(\frac{3}{2})^{\frac{1}{3}}};$$

$$\frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_m}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{1}{m}}} = \frac{q_1}{[(\frac{3}{2})^{\frac{4}{3}}+(\frac{9}{40})^{\frac{4}{3}}+(\frac{7}{4})^{\frac{4}{3}}+(\frac{17}{8})^{\frac{4}{3}}]^{\frac{1}{4}}} < \frac{q_1}{3^{\frac{1}{4}}(\frac{3}{2})^{\frac{1}{3}}}.$$

$$\max_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-n^{\frac{m-1}{m}}q_i}{a_{ii\cdots i}} = 4^{\frac{3}{4}}q_1 \text{ 和 } \frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_m}{\lambda(\mathcal{A})} \ge 10q_1.$$

由于 $\lambda(\mathcal{A}) = \min\limits_{\substack{\mathbf{x}\ge\mathbf{0}\\ \|\mathbf{x}\|_m=1}} \mathcal{A}\mathbf{x}^m > 0$，设 $\mathbf{x} = (0,1,0,0)^\top$，那么

$$0 < \lambda(\mathcal{A}) \le \mathcal{A}(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_m})^m = \frac{\mathcal{A}\mathbf{x}^m}{\|\mathbf{x}\|_m^m} = \frac{x_1^4+\frac{1}{10}x_2^4+x_3^4+2x_4^4+x_1x_3^3+\frac{1}{2}x_1^2x_2x_4}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4} = \frac{1}{10}.$$

因此，

$$\frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_m}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{1}{m}}} < \min_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{(m-1)^{-\frac{m-1}{m}}\varphi_i(\mathcal{A})+\psi_i(\mathcal{A})} \le \|\mathbf{x}\|_m^{m-1}$$

$$\le \max_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-n^{\frac{m-1}{m}}q_i}{a_{ii\cdots i}} < \frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_m}{\lambda(\mathcal{A})}.$$

□

例 2.12 设 $\mathcal{A} = (a_{i_1i_2i_3i_4}) \in S_{4,2}$，$a_{1121} = a_{1211} = a_{1112} = a_{2111} = \frac{1}{4}$，$a_{1111} = \frac{1}{8}$，$a_{2222} = \frac{1}{2}$，$a_{1122} = a_{1212} = a_{1221} = a_{2112} = a_{2121} = a_{2211} = \frac{1}{12}$，其它的 $a_{i_1i_2i_3i_4} = 0$，且 $\mathbf{q} = (q_1,-q_2)^\top$，$q_1$ 和 q_2 都是正数。那么 $\mathcal{A}$ 是一个非负 Q-张量。

证明. 由引理2.1可知非负张量 $\mathcal{A}$ 是一个 Q-张量和严格半正张量。

对于 $\|\mathbf{x}\|_\infty^{m-1}$ 的上下界，我们有

$$\min_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}a_{ii_2\cdots i_m}}=q_2 \text{ 和 } \frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_\infty}{\max\limits_{i\in I_n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)}=\frac{8}{9}q_2.$$

$$\max_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{a_{ii\cdots i}}=2q_2 \text{ 和 } \frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_\infty}{\beta(\mathcal{A})}\geq 8q_2\ (0<\beta(\mathcal{A})\leq\min_{i\in I_n}a_{ii\cdots i}=\frac{1}{8}).$$

因此，

$$\frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_\infty}{\max\limits_{i\in I_n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)}<\min_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}a_{ii_2\cdots i_m}}\leq\|\mathbf{x}\|_\infty^{m-1}\leq\max_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{a_{ii\cdots i}}<\frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_\infty}{\beta(\mathcal{A})}.$$

对于 $\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}$ 的上下界，我们有

$$\frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_2}{n^{\frac{m-2}{2}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{q_2}{2[(\frac{9}{8})^2+1^2]^{\frac{1}{2}}}<q_2.$$

$$\max_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-n^{\frac{m-1}{2}}q_i}{a_{ii\cdots i}}=2^{\frac{5}{2}}q_2 \text{ 和 } \frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_2}{\mu(\mathcal{A})}\geq 8q_2.$$

由于 $\mu(\mathcal{A})=\min\limits_{\substack{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}\\ \|\mathbf{x}\|_2=1}}\mathcal{A}\mathbf{x}^m>0$，设 $\mathbf{x}=(1,0)^\top$，那么

$$0<\mu(\mathcal{A})\leq\mathcal{A}(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2})^m=\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}^m}{\|\mathbf{x}\|_2^m}=\frac{\frac{1}{8}x_1^4+\frac{1}{2}x_2^4+x_1^3x_2+\frac{1}{2}x_1^2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}=\frac{1}{8}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_2}{n^{\frac{m-2}{2}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}&<\min_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{\varphi_i(\mathcal{A})+\psi_i(\mathcal{A})}\leq\|\mathbf{x}\|_2^{m-1}\\&\leq\max_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-n^{\frac{m-1}{2}}q_i}{a_{ii\cdots i}}<\frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_2}{\mu(\mathcal{A})}.\end{aligned}$$

对于 $\|\mathbf{x}\|_m^{m-1}$ 的上下界，我们有

$$\frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_m}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{1}{m}}}=\frac{q_2}{[(\frac{9}{8})^{\frac{4}{3}}+1^{\frac{4}{3}}]^{\frac{1}{4}}}<q_2.$$

$$\max_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-n^{\frac{m-1}{m}}q_i}{a_{ii\cdots i}}=2^{\frac{7}{4}}q_2 \text{ 和 } \frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_m}{\lambda(\mathcal{A})}\geq 8q_2.$$

由于 $\lambda(\mathcal{A})=\min\limits_{\substack{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}\\ \|\mathbf{x}\|_m=1}}\mathcal{A}\mathbf{x}^m>0$，设 $\mathbf{x}=(1,0)^\top$，那么

$$0<\lambda(\mathcal{A})\leq\mathcal{A}(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_m})^m=\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}^m}{\|\mathbf{x}\|_m^m}=\frac{\frac{1}{8}x_1^4+\frac{1}{2}x_2^4+x_1^3x_2+\frac{1}{2}x_1^2x_2^2}{x_1^4+x_2^4}=\frac{1}{8}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_m}{\left(\sum\limits_{i=1}^n\left(\sum\limits_{i_2,\cdots,i_m=1}^n|a_{ii_2\cdots i_m}|\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{1}{m}}}&<\min_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-q_i}{\varphi_i(\mathcal{A})+\psi_i(\mathcal{A})}\leq\|\mathbf{x}\|_m^{m-1}\\&\leq\max_{i\in\Omega(\mathbf{q})}\frac{-n^{\frac{m-1}{m}}q_i}{a_{ii\cdots i}}<\frac{\|(-\mathbf{q})_+\|_m}{\lambda(\mathcal{A})}.\end{aligned}$$

□

由引理2.2及定义1.1 (i)和(ii)，可以得到以下推论。

推论 2.13 设 $\mathcal{A}$ 是一个 m 阶 n 维非负 Q-张量，$\mathbf{q}\in\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{R}^n_+$ 是任意给定向量，如果 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 是 $TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 的一个解且 $\|\mathbf{x}\|_\infty=x_k$，那么 $\mathcal{A}$ 有

(i) H-特征值 $\lambda=\frac{-q_k}{\|\mathbf{x}\|_\infty^{m-1}}$;

(ii) Z-特征值 $\mu=\frac{-q_k}{\|\mathbf{x}\|_\infty\|\mathbf{x}\|_2^{m-2}}$.

第三章 Cauchy-Hankel张量特征值的上界

这一章，我们主要给出了有限维和无限维 Cauchy-Hankel张量、以及四阶部分对称 Cauchy-Hankel张量特征值的上界，并用数值算例来说明我们给出的 M-特征值上界与由幂法求得的 M-特征值上界确实是很接近的。

第一节 预备知识

设 $\mathcal{A}_n \in T_{m,n}$ 是一个 Cauchy-Hankel张量，向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$，当 $g, h \neq 0 \in \mathbb{R}$ 且 g/h 不是一个整数时，$\mathcal{A}_n\mathbf{x}^{m-1}$ 是一个向量且第 i 个元素是

$$(\mathcal{A}_n\mathbf{x}^{m-1})_i = \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n} \frac{x_{i_2}\cdots x_{i_m}}{g + h(i + i_2 + \cdots + i_m)}, \ \forall i \in I_n$$

和 $\mathcal{A}_n\mathbf{x}^m$ 定义如下

$$\mathcal{A}_n\mathbf{x}^m = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m=1}^{n} \frac{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}}{g + h(i_1 + i_2 + \cdots + i_m)}.$$

对于两个巴拿赫空间 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$，设 T 是一个从 X 到 Y 的算子，那么称 T 为

(i) t-齐次：如果对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{x} \in X$ 有 $T(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^t T(\mathbf{x})$;

(ii) 正齐次：如果对所有 $t > 0$ 和 $\mathbf{x} \in X$ 有 $T(t\mathbf{x}) = tT(\mathbf{x})$;

(iii) 有界的：如果存在一个实数 $M > 0$ 使得对所有 $\mathbf{x} \in X$ 有 $\|T\mathbf{x}\|_Y \leq M\|\mathbf{x}\|_X$。

假设 T 是一个从 X 到 Y 的有界、连续和正齐次算子，那么它的范数定义如下

$$\|T\| = \sup\{\|T\mathbf{x}\|_Y : \|\mathbf{x}\|_X = 1\}.$$

设向量 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots) \in l^p$，则

$$\|\mathbf{x}\|_{l^p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, (p \geq 1)$$

是 l^p 上的一个范数。此外，$\mathbb{R}^n$ 上的两个主要范数定义如下

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : i \in I_n\} \text{ 和 } \|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, (p \geq 1)$$

且众所周知

$$\|\mathbf{x}\|_q \leq \|\mathbf{x}\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\mathbf{x}\|_q \ (q > p). \tag{3.1}$$

引理 3.1 [116] 设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$，那么

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{|x_i||x_j|}{i+j-1} \leq (n\sin\frac{\pi}{n})\sum_{k=1}^{n}x_k^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 n\sin\frac{\pi}{n}.$$

引理 3.2 [117] 设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$，那么

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{|x_i||y_j|}{i+j-1} < \pi(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^{n}y_j^2)^{\frac{1}{2}} = \pi\|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}\|_2.$$

引理 3.3 [118] 设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)^\top \in l^2$，那么

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|x_i||x_j|}{i+j} < \pi\|\mathbf{x}\|_{l^2}^2.$$

随着人们对无限维高阶张量的研究兴趣日益浓厚，Meng和 Song [46] 针对无限维张量提出了 Z_1-特征值的概念。设

$$T_\infty\mathbf{x} = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_{l^1}^{2-m}\mathcal{A}_\infty\mathbf{x}^{m-1}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \ \text{和} \ F_\infty\mathbf{x} = (\mathcal{A}_\infty\mathbf{x}^{m-1})^{[\frac{1}{m-1}]} \ (m \text{ 是偶数}), \tag{3.2}$$

这里 $\mathbf{x}^{[\frac{1}{m-1}]} = (x_1^{\frac{1}{m-1}}, x_2^{\frac{1}{m-1}}, \cdots, x_n^{\frac{1}{m-1}}, \cdots)^\top$。显然，$F_\infty$ 和 T_∞ 都是连续和正齐次的，因此只需要考虑它们的有界性。

定义 3.4 设 $\mathcal{A}_\infty$ 是一个 m 阶无限维 *Cauchy-Hankel*张量，一个实数 $\bar{\sigma}$ 称为 $\mathcal{A}_\infty$ 的 Z_1-特征值，且非零向量 $\mathbf{x} \in l^2$ 称为 $\mathcal{A}_\infty$ 关于 $\bar{\sigma}$ 的 Z_1-特征向量，如果 $(\bar{\sigma}, \mathbf{x})$ 满足

$$T_\infty\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_{l_1}^{2-m}\mathcal{A}_\infty\mathbf{x}^{m-1} = \bar{\sigma}\mathbf{x}.$$

第二节 有限维和无限维 Cauchy-Hankel张量

定理 3.5 设 $\mathcal{A}_n$ 是由(1.2)定义的一个 m 阶 n 维 *Cauchy-Hankel*张量，假设

$$K(g,h) = \begin{cases} \frac{1}{m|h|+|g|}, & \frac{g}{h} > 0; \\ \frac{1}{m|h|-|g|}, & -m < \frac{g}{h} < 0; \\ \frac{1}{\min\{-|g|-|h|\lceil\frac{g}{h}\rceil, |g|+|h|(1+\lceil\frac{g}{h}\rceil)\}}, & -mn < \frac{g}{h} < -m; \\ \frac{1}{-mn|h|+|g|}, & \frac{g}{h} < -mn; \end{cases}$$

这里 $\lceil \frac{g}{h} \rceil$ 是不超过 $\frac{g}{h}$ 的最大整数。那么

(i) 当 m 是偶数时，则 $\mathcal{A}_n$ 的所有 H-特征值 $|\lambda| \le n^{m-1}K(g,h)$；

(ii) $\mathcal{A}_n$ 的所有 Z-特征值 $|\mu| \le n^{\frac{m}{2}}K(g,h)$；

(iii) $\mathcal{A}_n$ 的所有 Z_1-特征值 $|\sigma| \le nK(g,h)$。

证明. 由于 $\mathcal{A}_n$ 是一个 Cauchy-Hankel张量，设 $f = |g + h(i_1 + i_2 + \cdots + i_m)| = |h||X + \frac{g}{h}|$，这里 $X = i_1 + i_2 + \cdots + i_m \in \{m, m+1, \cdots, mn\}$。我们考虑以下几种情况：

- 当 $\frac{g}{h} > -m$ 时，我们有 $f_{min} = |h|(m + \frac{g}{h})$。

- 当 $-mn < \frac{g}{h} < -m$ 时，我们很容易看出 f 在 $-\lceil \frac{g}{h} \rceil - 1$ 或 $-\lceil \frac{g}{h} \rceil$ 处取得最小值，因此

$$\begin{aligned} f_{min} &= |h| \min\{|(-\lceil \frac{g}{h} \rceil - 1) + \frac{g}{h}|, |-\lceil \frac{g}{h} \rceil + \frac{g}{h}|\} \\ &= |h| \min\{1 + \lceil \frac{g}{h} \rceil - \frac{g}{h}, -\lceil \frac{g}{h} \rceil + \frac{g}{h}\}. \end{aligned}$$

- 当 $\frac{g}{h} < -mn$ 时，我们有 $f_{min} = |h||mn + \frac{g}{h}| = -|h|(mn + \frac{g}{h})$。

综合上面三种情况，很明显

$$\frac{1}{|g + h(i_1 + i_2 + \cdots + i_m)|} \le \frac{1}{f_{min}} = K(g,h). \tag{3.3}$$

因此，对所有的非零向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_n \mathbf{x}^m| &= \left| \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_m = 1}^{n} \frac{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}}{g + h(i_1 + i_2 + \cdots + i_m)} \right| \\ &\le \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_m = 1}^{n} \frac{|x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}|}{|g + h(i_1 + i_2 + \cdots + i_m)|} \\ &\le K(g,h) \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_m = 1}^{n} |x_{i_1}||x_{i_2}| \cdots |x_{i_m}| \\ &= K(g,h)\|\mathbf{x}\|_1^m. \end{aligned}$$

(i) 设 λ 是 $\mathcal{A}_n$ 的任意一个 H-特征值，$\mathbf{x}$ 是对应于 λ 的 H-特征向量。那么，由(3.1)，定义1.1(i)和 m 是偶数，我们得到

$$|\lambda| \|\mathbf{x}\|_m^m = |\mathcal{A}_n \mathbf{x}^m| \le K(g,h)\|\mathbf{x}\|_1^m \le n^{m-1}\|\mathbf{x}\|_m^m K(g,h),$$

即

$$|\lambda| \le n^{m-1}K(g,h).$$

(ii) 设 μ 是 $\mathcal{A}_n$ 的任意一个 Z-特征值，$\mathbf{x}$ 是对应于 μ 的 Z-特征向量。那么，由(3.1)，定义1.1(ii)，我们得到

$$|\mu|\|\mathbf{x}\|_2^m = |\mathcal{A}_n\mathbf{x}^m| \leq K(g,h)\|\mathbf{x}\|_1^m \leq n^{\frac{m}{2}}\|\mathbf{x}\|_2^m K(g,h),$$

即

$$|\mu| \leq n^{\frac{m}{2}}K(g,h).$$

(iii) 设 σ 是 $\mathcal{A}_n$ 的任意一个 Z_1-特征值，$\mathbf{x}$ 是对应于 σ 的 Z_1-特征向量。那么，由(3.1)，定义1.1(iii)，我们得到

$$|\sigma|\|\mathbf{x}\|_2^2 = |\mathcal{A}_n\mathbf{x}^m| \leq K(g,h)\|\mathbf{x}\|_1^m \leq n\|\mathbf{x}\|_2^2\cdot\|\mathbf{x}\|_1^{m-2}K(g,h),$$

即

$$|\sigma| \leq nK(g,h).$$

综上，结论得证。 □

根据 Song和 Mei在文献 [27]中的(6)-(8)及定理4.1和4.2，我们可以得出以下结论。

推论 3.6 设 $\mathcal{A}_n$ 是一个 m 阶 n 维 *Cauchy-Hankel*张量，那么

(i) $n^{\frac{m}{2}}M(g,h) \leq \|T_{\mathcal{A}_n}\|_\infty \leq n^{m-1}K(g,h)$;

(ii) $n^{\frac{m}{2}}M(g,h) \leq \|T_{\mathcal{A}_n}\|_p \leq n^{\frac{m}{2}}K(g,h)$（$p \geq 1$）;

(iii) $n(M(g,h))^{\frac{1}{m-1}} \leq \|F_{\mathcal{A}_n}\|_\infty \leq n(K(g,h))^{\frac{1}{m-1}}$ （m 是偶数）;

(iv) $n(M(g,h))^{\frac{1}{m-1}} \leq \|F_{\mathcal{A}_n}\|_p \leq n(K(g,h))^{\frac{1}{m-1}}$（$m$ 是偶数和 $p \geq 1$）。

这里 $K(g,h)$ 如定理3.5中定义的，且

$$M(g,h) = \begin{cases} \frac{1}{mn|h|+|g|}, & \frac{g}{h} > 0; \\ \frac{1}{mn|h|-|g|}, & -m < \frac{g}{h} < 0; \\ 0, & -mn < \frac{g}{h} < -m; \\ \frac{1}{-m|h|+|g|}, & \frac{g}{h} < -mn. \end{cases}$$

证明. 类似定理3.5，我们考虑下面几种情况：

- 当 $\frac{g}{h} > -m$ 时，则 $f_{max} = |h|(mn + \frac{g}{h})$。

- 当 $\frac{g}{h} < -mn$ 时，则 $f_{max} = |h||m + \frac{g}{h}| = -|h|(m + \frac{g}{h})$。

因此，对以上两种情况有

$$\left|\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n} \frac{1}{g + h(i_1 + \cdots + i_m)}\right| = \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n} \frac{1}{|g + h(i_1 + \cdots + i_m)|} \geq \frac{1}{f_{max}} \cdot n^{m-1}.$$

- 当 $-mn < \frac{g}{h} < -m$ 时，则 $\left|\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n} \frac{1}{g+h(i_1+\cdots+i_m)}\right| \geq 0$。

结合上面三种情况，则

$$\left|\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n} \frac{1}{g+h(i_1+i_2+\cdots+i_m)}\right| \geq n^{m-1}M(g,h). \tag{3.4}$$

(i) 令 $\mathbf{e}=(1,1,\cdots,1)^\top$，则 $\|\mathbf{e}\|_\infty = 1$ 和 $\|\mathbf{e}\|_2 = n^{\frac{1}{2}}$。由(3.4)可知

$$\begin{aligned}
\|T_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{e})\|_\infty &= \max_{i\in I_n}\left|\|\mathbf{e}\|_2^{2-m}\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{1}{g+h(i+i_2+\cdots+i_m)}\right| \\
&= n^{\frac{2-m}{2}}\max_{i\in I_n}\left|\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{1}{g+h(i+i_2+\cdots+i_m)}\right| \\
&\geq n^{\frac{2-m}{2}}n^{m-1}M(g,h) \\
&= n^{\frac{m}{2}}M(g,h),
\end{aligned}$$

因此，$n^{\frac{m}{2}}M(g,h) \leq \|T_{\mathcal{A}_n}\|_\infty$.

现在我们证明右边不等式。由 $\|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty$，$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2$ 和 (3.3)可知

$$\begin{aligned}
\|T_{\mathcal{A}_n}\|_\infty &= \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1}\|T_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{x})\|_\infty \\
&= \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1}\max_{i\in I_n}\left|\|\mathbf{x}\|_2^{2-m}\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}}{g+h(i+i_2+\cdots+i_m)}\right| \\
&\leq \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1}\|\mathbf{x}\|_\infty^{2-m}\max_{i\in I_n}\left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{|x_{i_2}||x_{i_3}|\cdots|x_{i_m}|}{|g+h(i+i_2+\cdots+i_m)|}\right) \\
&\leq \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1}\|\mathbf{x}\|_\infty^{2-m}K(g,h)\left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|x_{i_2}||x_{i_3}|\cdots|x_{i_m}|\right) \\
&= \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1}\|\mathbf{x}\|_\infty^{2-m}K(g,h)\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)^{m-1} \\
&= \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1}\|\mathbf{x}\|_\infty^{2-m}K(g,h)\|\mathbf{x}\|_1^{m-1} \\
&\leq \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1}\|\mathbf{x}\|_\infty^{2-m}(n\|\mathbf{x}\|_\infty)^{m-1}K(g,h) \\
&= n^{m-1}K(g,h).
\end{aligned}$$

(ii) 令 $\mathbf{y}=(n^{-\frac{1}{p}},n^{-\frac{1}{p}},\cdots,n^{-\frac{1}{p}})^\top$，则 $\|\mathbf{y}\|_p=1$ 和 $\|\mathbf{y}\|_2=n^{\frac{p-2}{2p}}$。由(3.4) 可知

$$\begin{aligned}
\|T_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{y})\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n}\left|\|\mathbf{y}\|_2^{2-m}\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{(n^{-\frac{1}{p}})^{m-1}}{g+h(i+i_2+\cdots+i_m)}\right|^p \\
&= n^{\frac{(p-2)(2-m)}{2}}\sum_{i=1}^{n}n^{1-m}\left|\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{1}{g+h(i+i_2+\cdots+i_m)}\right|^p \\
&\geq n^{\frac{(p-2)(2-m)}{2}}\sum_{i=1}^{n}n^{1-m}\left(n^{m-1}M(g,h)\right)^p \\
&= n^{\frac{mp}{2}}(M(g,h))^p,
\end{aligned}$$

因此，

$$n^{\frac{m}{2}}M(g,h)\leq\|T_{\mathcal{A}_n}\|_p.$$

接下来我们证明右边不等式。由(3.3)和 $\|\mathbf{x}\|_q\leq\|\mathbf{x}\|_p\leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\mathbf{x}\|_q(q>p)$ 可知

$$\begin{aligned}
\|T_{\mathcal{A}_n}\|_p^p &= \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1}\|T_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{x})\|_p^p \\
&= \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1}\sum_{i=1}^{n}\left|\|\mathbf{x}\|_2^{2-m}\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}}{g+h(i+i_2+\cdots+i_m)}\right|^p \\
&\leq \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1}\|\mathbf{x}\|_2^{(2-m)p}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{|x_{i_2}||x_{i_3}|\cdots|x_{i_m}|}{|g+h(i+i_2+\cdots+i_m)|}\right)^p \\
&\leq \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1}\|\mathbf{x}\|_2^{(2-m)p}\sum_{i=1}^{n}\left(K(g,h)\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}|x_{i_2}||x_{i_3}|\cdots|x_{i_m}|\right)^p \\
&= \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1}\|\mathbf{x}\|_2^{(2-m)p}\sum_{i=1}^{n}(K(g,h)\|\mathbf{x}\|_1^{m-1})^p \\
&\leq \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1}\|\mathbf{x}\|_2^{(2-m)p}(\sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2)^{(m-1)p}\sum_{i=1}^{n}(K(g,h))^p \\
&= \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1}n^{\frac{(m-1)p}{2}+1}\|\mathbf{x}\|_2^p(K(g,h))^p \\
&\leq \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1}n^{\frac{(m-1)p}{2}+1}(n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|\mathbf{x}\|_p)^p(K(g,h))^p \\
&= n^{\frac{mp}{2}}(K(g,h))^p.
\end{aligned}$$

因此，

$$\|T_{\mathcal{A}_n}\|_p\leq n^{\frac{m}{2}}K(g,h).$$

(iii) 令 $\mathbf{e}=(1,1,\cdots,1)^\top$，则 $\|\mathbf{e}\|_\infty=1$。由(3.4)可知

$$\begin{aligned}\|F_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{e})\|_\infty &= \max_{i\in I_n}\left|\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{1}{g+h(i+i_2+\cdots+i_m)}\right|^{\frac{1}{m-1}}\\ &\geq (n^{m-1}M(g,h))^{\frac{1}{m-1}}\\ &= n(M(g,h))^{\frac{1}{m-1}}.\end{aligned}$$

因此，

$$n(M(g,h))^{\frac{1}{m-1}}\leq \|F_{\mathcal{A}_n}\|_\infty.$$

接下来我们证明右边不等式。由(3.3)可知

$$\begin{aligned}\|F_{\mathcal{A}_n}\|_\infty &= \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1}\|F_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{x})\|_\infty\\ &= \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1}\max_{i\in I_n}\left|\left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}}{g+h(i+i_2+\cdots+i_m)}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right|\\ &\leq \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1}\max_{i\in I_n}\left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{|x_{i_2}||x_{i_3}|\cdots|x_{i_m}|}{|g+h(i+i_2+\cdots+i_m)|}\right)^{\frac{1}{m-1}}\\ &\leq \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1}\left(n^{m-1}K(g,h)\|\mathbf{x}\|_\infty^{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}\\ &= n(K(g,h))^{\frac{1}{m-1}}.\end{aligned}$$

(iv) 令 $\mathbf{y}=(n^{-\frac{1}{p}},n^{-\frac{1}{p}},\cdots,n^{-\frac{1}{p}})^\top$，则 $\|\mathbf{y}\|_p=1$。由(3.4)可知

$$\begin{aligned}\|F_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{y})\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{(n^{-\frac{1}{p}})^{m-1}}{g+h(i+i_2+\cdots+i_m)}\right|^{\frac{p}{m-1}}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left|\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{1}{g+h(i+i_2+\cdots+i_m)}\right|^{\frac{p}{m-1}}\\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(n^{m-1}M(g,h)\right)^{\frac{p}{m-1}}\\ &= n^p(M(g,h))^{\frac{p}{m-1}},\end{aligned}$$

因此，

$$n(M(g,h))^{\frac{1}{m-1}}\leq \|F_{\mathcal{A}_n}\|_p.$$

接下来我们证明右边不等式。由(3.3)和 $\|\mathbf{x}\|_1 \le n^{1-\frac{1}{p}}\|\mathbf{x}\|_p (p>1)$ 可知

$$\begin{aligned}
\|F_{\mathcal{A}_n}\|_p^p &= \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|F_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{x})\|_p^p \\
&= \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n} \frac{x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_m}}{g+h(i+i_2+\cdots+i_m)} \right|^{\frac{p}{m-1}} \\
&\le \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \sum_{i=1}^{n} \left(K(g,h) \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n} |x_{i_2}||x_{i_3}|\cdots|x_{i_m}| \right)^{\frac{p}{m-1}} \\
&= \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \sum_{i=1}^{n} \left(K(g,h)\|\mathbf{x}\|_1^{m-1} \right)^{\frac{p}{m-1}} \\
&\le \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} (n^{1-\frac{1}{p}}\|\mathbf{x}\|_p)^p \sum_{i=1}^{n} (K(g,h))^{\frac{p}{m-1}} \\
&= n^p (K(g,h))^{\frac{p}{m-1}}.
\end{aligned}$$

综上，结论得证。 □

定理 3.7 设 $\mathcal{A}_\infty$ 是由(1.3)定义的一个 m 阶无限维 *Cauchy-Hankel*张量。假设 $\frac{g}{h} > 2-m$，那么对 $\mathcal{A}_\infty$ 的所有 Z_1-特征值

$$|\bar{\sigma}| < \frac{\pi}{|h|}.$$

证明. 根据引理3.3，对所有向量 $\mathbf{x} \in l^2$，

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_\infty \mathbf{x}^m| &= \left| \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m=1}^{\infty} \frac{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}}{g+h(i_1+i_2+\cdots+i_m)} \right| \\
&\le \frac{1}{|h|} \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m=1}^{\infty} \frac{|x_{i_1}||x_{i_2}|\cdots|x_{i_m}|}{|i_1+i_2+\underbrace{1+\cdots+1}_{m-2}+\frac{g}{h}|} \\
&< \frac{1}{|h|} \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m=1}^{\infty} \frac{|x_{i_1}||x_{i_2}|\cdots|x_{i_m}|}{i_1+i_2} \\
&= \frac{1}{|h|} \left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty} \frac{|x_{i_1}||x_{i_2}|}{i_1+i_2} \right) \left(\sum_{i_3,\cdots,i_m=1}^{\infty} |x_{i_3}|\cdots|x_{i_m}| \right) \\
&< \frac{1}{|h|} \left(\pi\|\mathbf{x}\|_{l^2}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \right)^{m-2} \\
&= \frac{\pi}{|h|} \|\mathbf{x}\|_{l^2}^2 \|\mathbf{x}\|_{l^1}^{m-2}.
\end{aligned}$$

由于 $\bar{\sigma}$ 是 $\mathcal{A}_\infty$ 的一个 Z_1-特征值，那么存在一个非零向量 $\mathbf{x} \in l^2$ 使得

$$\|\mathbf{x}\|_{l^1}^{2-m} \mathcal{A}_\infty \mathbf{x}^{m-1} = \bar{\sigma}\mathbf{x},$$

则

$$|\bar{\sigma}\mathbf{x}^\top \mathbf{x}| = |\mathbf{x}^\top(\|\mathbf{x}\|_{l^1}^{2-m} \mathcal{A}_\infty \mathbf{x}^{m-1})| = \|\mathbf{x}\|_{l^1}^{2-m} |\mathcal{A}_\infty \mathbf{x}^m|.$$

那么

$$|\bar{\sigma}| \|\mathbf{x}\|_{l^2}^2 = \|\mathbf{x}\|_{l^1}^{2-m} |\mathcal{A}_\infty \mathbf{x}^m| < \frac{\pi}{|h|} \|\mathbf{x}\|_{l^2}^2.$$

即

$$|\bar{\sigma}| < \frac{\pi}{|h|}.$$

结论得证。 □

定理 3.8 设 F_∞ 和 T_∞ 如(3.2)中所定义的，那么

(i) 如果 $\mathbf{x} \in l^1$，则当 $m-1 < p < \infty$ 时，有 $F_\infty \mathbf{x} \in l^p$。此外，$F_\infty$ 是一个从 l^1 到 l^p $(m-1 < p < \infty)$ 的有界、连续和正齐次算子。特别地，

$$\|F_\infty\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{l^1}=1} \|F_\infty \mathbf{x}\|_{l^{2(m-1)}} \le \phi(g,h)^{\frac{1}{m-1}};$$

(ii) 如果 $\mathbf{x} \in l^1$，则当 $1 < p < \infty$ 时，有 $T_\infty \mathbf{x} \in l^p$。此外，$T_\infty$ 是一个从 l^1 到 l^p $(1 < p < \infty)$ 的有界、连续和正齐次算子。特别地，

$$\|T_\infty\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{l^1}=1} \|T_\infty \mathbf{x}\|_{l^2} \le \phi(g,h),$$

这里

$$\phi(g,h) = \begin{cases} \frac{1}{|h|}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}, & \frac{g}{h} > 1-m; \\ \frac{1}{|h|}\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{\pi^2}{6}}, & -m < \frac{g}{h} < 1-m; \\ \frac{1}{|h|}\sqrt{\frac{1}{d^2} + \frac{\pi^2}{6} + \frac{d-c}{(\min\{d,1-d\})^2}}, & \frac{g}{h} < -m; \end{cases}$$

和 $c = m + \frac{g}{h}$，$d = \frac{g}{h} - \lceil \frac{g}{h} \rceil$.

证明. 对于任意向量 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots)^\top \in l^1$，当 $\frac{g}{h} > -m$ 时，我们有

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}_\infty \mathbf{x}^{m-1})_i| &= \left| \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{\infty} \frac{x_{i_2} \cdots x_{i_m}}{g + h(i + i_2 + \cdots + i_m)} \right| \\ &\le \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{\infty} \frac{|x_{i_2} \cdots x_{i_m}|}{|h||i + i_2 + \cdots + i_m + \frac{g}{h}|} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{\infty} \frac{|x_{i_2}||x_{i_3}|\cdots|x_{i_m}|}{|h|(i+\underbrace{1+\cdots+1}_{m-1}+\frac{g}{h})} \\
&= \frac{1}{|h|(i+m-1+\frac{g}{h})} \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{\infty} |x_{i_2}||x_{i_3}|\cdots|x_{i_m}| \\
&= \frac{1}{|h|(i+m-1+\frac{g}{h})} (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|)^{m-1} \\
&= \frac{1}{|h|(i-1+c)} \|\mathbf{x}\|_{l^1}^{m-1}. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

当 $\frac{g}{h} < -m$ 时，我们考虑以下两种情况。在 $i > 1-c$ 的情况下，很明显(3.5)仍然成立。在 $1 \le i < 1-c$ 的情况下，类似于定理3.5的证明，我们得到

$$
\begin{aligned}
|(\mathcal{A}_\infty \mathbf{x}^{m-1})_i| &\le \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{\infty} \frac{|x_{i_2}\cdots x_{i_m}|}{|g+h(i+i_2+\cdots+i_m)|} \\
&\le \frac{1}{|h|\min\{\frac{g}{h}-\lceil\frac{g}{h}\rceil, 1+\lceil\frac{g}{h}\rceil-\frac{g}{h}\}} \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{\infty} |x_{i_2}||x_{i_3}|\cdots|x_{i_m}| \\
&= \frac{1}{|h|\min\{d,1-d\}} (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|)^{m-1} \\
&= \frac{1}{|h|\min\{d,1-d\}} \|\mathbf{x}\|_{l^1}^{m-1}. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

众所周知，假设 $a > 0$，那么对于任何正整数 $i > 1$ 有 $\frac{1}{(i-1+a)^s} \le \frac{1}{(i-1)^s}$。因此，当 $s > 1$ 时，序列 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1+a)^s}$ 收敛。

(i) 当 $m-1 < p < \infty$ 和 $\frac{g}{h} > -m$ 时，由(3.5)可知

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |(F_\infty \mathbf{x})_i|^p &= \sum_{i=1}^{\infty} |\left(\mathcal{A}_\infty \mathbf{x}^{m-1}\right)_i^{\frac{1}{m-1}}|^p \\
&\le \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|h|(i-1+c)} \|\mathbf{x}\|_{l^1}^{m-1}\right)^{\frac{p}{m-1}} \\
&= |h|^{-\frac{p}{m-1}} \|\mathbf{x}\|_{l^1}^{p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1+c)^{\frac{p}{m-1}}} < \infty
\end{aligned}
$$

这是由于 $a = c = m + \frac{g}{h} > 0$ 和 $s = \frac{p}{m-1} > 1$。因此对每个 $\mathbf{x} \in l^1$ 有 $F_\infty \mathbf{x} \in l^p$。

类似地，对 $\frac{g}{h} < -m$，结合(3.5)和(3.6)，则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}|(F_\infty\mathbf{x})_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty}|\left(\mathcal{A}_\infty\mathbf{x}^{m-1}\right)_i^{\frac{1}{m-1}}|^p \\
\le &|h|^{-\frac{p}{m-1}}\|\mathbf{x}\|_{l^1}^p\left(\sum_{1\le i<1-c}\frac{1}{(\min\{d,1-d\})^{\frac{p}{m-1}}}+\sum_{i>1-c}\frac{1}{(i-1+c)^{\frac{p}{m-1}}}\right) \\
= &|h|^{-\frac{p}{m-1}}\|\mathbf{x}\|_{l^1}^p\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1+\frac{g}{h}-\lceil\frac{g}{h}\rceil)^{\frac{p}{m-1}}}-\frac{m+\lceil\frac{g}{h}\rceil}{(\min\{d,1-d\})^{\frac{p}{m-1}}}\right) \\
= &|h|^{-\frac{p}{m-1}}\|\mathbf{x}\|_{l^1}^p\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1+d)^{\frac{p}{m-1}}}-\frac{c-d}{(\min\{d,1-d\})^{\frac{p}{m-1}}}\right)<\infty
\end{aligned}
$$

这是由于 $a = d = \frac{g}{h} - \lceil\frac{g}{h}\rceil > 0$ 和 $s = \frac{p}{m-1} > 1$。因此对每个 $\mathbf{x} \in l^1$ 有 $F_\infty\mathbf{x} \in l^p$。

结合这两种情况，我们有

$$
\|F_\infty\mathbf{x}\|_{l^p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|(F_\infty\mathbf{x})_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \tilde{M}|h|^{-\frac{1}{m-1}}\|\mathbf{x}\|_{l^1} = M\|\mathbf{x}\|_{l^1}. \tag{3.7}
$$

很明显，$M = \tilde{M}|h|^{-\frac{1}{m-1}} > 0$。因此 F_∞ 是一个从 l^1 到 l^p $(m-1 < p < \infty)$ 的有界、连续和正齐次算子。众所周知 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$，取 $p = 2(m-1)$，当 $\frac{g}{h} > 1-m$ 时，则 $c > 1$。因此

$$
\tilde{M} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1+c)^2}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[2(m-1)]{\frac{\pi^2}{6}}.
$$

当 $-m < \frac{g}{h} < 1-m$ 时，则 $0 < c < 1$。因此

$$
\tilde{M} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1+c)^2}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{1}{c^2}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{(i-1)^2}\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[2(m-1)]{\frac{1}{c^2}+\frac{\pi^2}{6}}.
$$

当 $\frac{g}{h} < -m$ 时，则 $0 < d < 1$。因此

$$
\begin{aligned}
\tilde{M} &= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1+d)^2}-\frac{c-d}{(\min\{d,1-d\})^2}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sqrt[2(m-1)]{\frac{1}{d^2}+\frac{\pi^2}{6}+\frac{d-c}{(\min\{d,1-d\})^2}}.
\end{aligned}
$$

将它们与(3.7)结合起来，可以很容易得到

$$
\|F_\infty\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{l^1}=1}\|F_\infty\mathbf{x}\|_{l^{2(m-1)}} \le \phi(g,h)^{\frac{1}{m-1}}.
$$

(ii) 当 $1 < p < \infty$ 和 $\frac{g}{h} > -m$ 时，由(3.5)可知

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|(T_\infty\mathbf{x})_i|^p &= \sum_{i=1}^{\infty}|(\|\mathbf{x}\|_{l^1}^{2-m}\mathcal{A}_\infty\mathbf{x}^{m-1})_i|^p \\ &\le \|\mathbf{x}\|_{l^1}^{(2-m)p}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|h|(i-1+c)}\|\mathbf{x}\|_{l^1}^{m-1}\right)^p \\ &= |h|^{-p}\|\mathbf{x}\|_{l^1}^{p}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1+c)^p} < \infty\end{aligned}$$

这是由于 $a = c = m + \frac{g}{h} > 0$ 和 $s = p > 1$。因此，对每个 $\mathbf{x} \in l^1$ 有 $T_\infty\mathbf{x} \in l^p$。

类似地，当 $\frac{g}{h} < -m$ 时，结合(3.5)和(3.6)，则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|(T_\infty\mathbf{x})_i|^p &= \sum_{i=1}^{\infty}|(\|\mathbf{x}\|_{l^1}^{2-m}\mathcal{A}_\infty\mathbf{x}^{m-1})_i|^p \\ &\le |h|^{-p}\|\mathbf{x}\|_{l^1}^{p}\left(\sum_{1\le i<1-c}\frac{1}{(\min\{d,1-d\})^p} + \sum_{i>1-c}\frac{1}{(i-1+c)^p}\right) \\ &= |h|^{-p}\|\mathbf{x}\|_{l^1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1+\frac{g}{h}-\lceil\frac{g}{h}\rceil)^p} - \frac{m+\lceil\frac{g}{h}\rceil}{(\min\{d,1-d\})^p}\right) \\ &= |h|^{-p}\|\mathbf{x}\|_{l^1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1+d)^p} - \frac{c-d}{(\min\{d,1-d\})^p}\right) < \infty\end{aligned}$$

由于 $a = d = \frac{g}{h} - \lceil\frac{g}{h}\rceil > 0$，$s = p > 1$。因此，对每个 $\mathbf{x} \in l^1$ 有 $T_\infty\mathbf{x} \in l^p$。

结合这两种情况，我们有

$$\|T_\infty\mathbf{x}\|_{l^p} = (\sum_{i=1}^{\infty}|(T_\infty\mathbf{x})_i|^p)^{\frac{1}{p}} \le \tilde{N}|h|^{-1}\|\mathbf{x}\|_{l^1} = N\|\mathbf{x}\|_{l^1}. \tag{3.8}$$

很明显，$N = \tilde{N}|h|^{-1} > 0$。因此 T_∞ 是一个从 l^1 到 l^p $(1 < p < \infty)$ 的有界、连续和正齐次算子。取 $p = 2$，当 $\frac{g}{h} > 1 - m$ 时，则

$$\tilde{N} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1+c)^2}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}.$$

当 $-m < \frac{g}{h} < 1 - m$ 时，则

$$\tilde{N} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1+c)^2}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{1}{c^2} + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{(i-1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{\pi^2}{6}}.$$

当 $\frac{g}{h} < -m$ 时，则

$$\tilde{N} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1+d)^2} - \frac{c-d}{(\min\{d, 1-d\})^2} \right)^{\frac{1}{p}} \le \sqrt{\frac{1}{d^2} + \frac{\pi^2}{6} + \frac{d-c}{(\min\{d, 1-d\})^2}}.$$

将它们与(3.8)结合起来，可以很容易得到

$$\|T_\infty\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{l^1}=1} \|T_\infty \mathbf{x}\|_{l^2} \le \phi(g,h).$$

结论得证。 □

定理 3.9 设 $\mathcal{A}_\infty$ 是一个 m 阶无限维 *Cauchy-Hankel*张量，且 $f(\mathbf{x}) = \mathcal{A}_\infty \mathbf{x}^{m-1}$，那么 f 是一个从 l^1 到 l^p $(1 < p < \infty)$ 的有界、连续和正 $(m-1)$-齐次算子。

第三节 四阶部分对称 Cauchy-Hankel张量

众所周知，如果

$$a_{ijkl} = a_{kjil} = a_{ilkj} = a_{klij};\ i,k \in I_m,\ j,l \in I_n.$$

则四阶实张量 $\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ 称为部分对称张量。

定义 3.10 设四阶部分对称张量 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkl})$ 和 $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{ijkl})$ 分别是 *Cauchy-Hankel*和广义 *Hilbert*张量，其形式如下：

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \frac{1}{g + h(i+j+k+l)},\ i,k \in I_m,\ j,l \in I_n,$$

这里 $g, h \neq 0 \in \mathbb{R}$ 和 g/h 不是一个整数。和

$$\mathcal{H}_{ijkl} = \frac{1}{i+j+k+l-4+a},\ \ a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}^-;\ i,k \in I_m,\ j,l \in I_n.$$

对于任何向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$，齐次多项式定义如下：

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{A}\mathbf{xyxy} = \sum_{i,k=1}^{m} \sum_{j,l=1}^{n} a_{ijkl} x_i y_j x_k y_l$$

定义 3.11 对于任何向量 $\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$，齐次多项式 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是

(i) 单调递增（单调递减）的：如果 $\mathbf{x} \ge \hat{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{y} \ge \hat{\mathbf{y}}$ ($\mathbf{x} \le \hat{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{y} \le \hat{\mathbf{y}}$)，那么 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ge f(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$；

(ii) 严格单调递增（严格单调递减）的：如果 $\mathbf{x} \geq \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{y} \geq \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{y} \neq \hat{\mathbf{y}}$ ($\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{y} \leq \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{y} \neq \hat{\mathbf{y}}$)，那么 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) > f(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}})$。

定义 3.12 设 $\mathcal{A}$ 是一个四阶部分对称张量，那么 $\mathcal{A}$ 称为

(i) *M*-半正定的：如果对所有的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$，$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$；

(ii) *M*-正定的：如果对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$，$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$，都有 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0$。

定义 3.13 一个实数 τ 是 $\mathcal{A}$ 的一个 *M*-特征值，向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 分别称为关于 τ 的左和右 *M*-特征向量，如果它们满足方程

$$\begin{cases} \mathcal{A} \cdot \mathbf{yxy} = \tau \mathbf{x}, \\ \mathcal{A}\mathbf{xyx}\cdot = \tau \mathbf{y}, \\ \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 1, \\ \mathbf{y}^\top \mathbf{y} = 1, \end{cases} \tag{3.9}$$

这里 $(\mathcal{A} \cdot \mathbf{yxy})_i = \sum\limits_{k \in I_m, j,l \in I_n} a_{ijkl} y_j x_k y_l$ 和 $(\mathcal{A}\mathbf{xyx}\cdot)_l = \sum\limits_{i,k \in I_m, j \in I_n} a_{ijkl} x_i y_j x_k$。

定理 3.14 设 $\mathcal{A}$ 是一个四阶部分对称 *Cauchy-Hankel*张量，那么 $\mathcal{A}$ 是 *M*-正定的当且仅当 $g+4h>0$，$g+2h(m+n)>0$。

证明. 如果 $\mathcal{A}$ 是 M-正定的，令 $\mathbf{x} = \mathbf{e_i} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{y} = \mathbf{e_j} \in \mathbb{R}^n$，则

$$f(\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}) = \frac{1}{g+h(1+1+1+1)} = \frac{1}{g+4h} > 0,$$
$$f(\mathbf{e_m},\mathbf{e_n}) = \frac{1}{g+h(m+n+m+n)} = \frac{1}{g+2h(m+n)} > 0,$$

即 $g+4h>0$，$g+2h(m+n)>0$。

反过来，如果 $g+4h>0$，$g+2h(m+n)>0$，则

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathcal{A}\mathbf{xyxy} &= \sum_{i,k=1}^{m} \sum_{j,l=1}^{n} a_{ijkl} x_i y_j x_k y_l \\ &= \sum_{i,k=1}^{m} \sum_{j,l=1}^{n} \frac{x_i y_j x_k y_l}{g+h(i+j+k+l)} \\ &= \sum_{i,k=1}^{m} \sum_{j,l=1}^{n} \int_0^1 t^{g+h(i+j+k+l)-1} x_i y_j x_k y_l dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{m} t^{hi+\frac{g-1}{4}} x_i \right)^2 \left(\sum_{j=1}^{n} t^{hj+\frac{g-1}{4}} y_j \right)^2 dt \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

假设 $\mathcal{A}$ 不是 M-正定的，那么只需证明存在向量 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m\backslash\{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\}$ 使得 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$，也就是，

$$\int_0^1\left(\sum_{i=1}^m t^{hi+\frac{g-1}{4}}x_i\right)^2\left(\sum_{j=1}^n t^{hj+\frac{g-1}{4}}y_j\right)^2dt=0,$$

即有

$$\sum_{i=1}^m t^{hi+\frac{g-1}{4}}x_i=0\text{ 或 }\sum_{j=1}^n t^{hj+\frac{g-1}{4}}y_j=0\text{ 对所有的 }t\in[0,1].$$

显然，只需要讨论上述其中一种情况，如

$$\sum_{i=1}^m t^{hi+\frac{g-1}{4}}x_i=0\text{ 对所有 }t\in[0,1].$$

因此对所有 $t\in(0,1]$，有

$$x_1+t^hx_2+t^{2h}x_3+\cdots+t^{(m-1)h}x_m=0.$$

由于上述多项式在 $t=0$ 处连续，所以 $x_1=0$。也就是说，对所有 $t\in(0,1]$，我们有

$$x_2+t^hx_3+t^{2h}x_4+\cdots+t^{(m-2)h}x_m=0.$$

重复上述过程，可以得到

$$x_i=0\text{ 对所有 }i=1,2,\cdots,m.$$

显然 $\mathbf{x}=(0,0,\cdots,0)^\top$，这与 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m\backslash\{\mathbf{0}\}$ 相矛盾。因此，$\mathcal{A}$ 是 M-正定的。 □

推论 3.15 设 $\mathcal{H}$ 是一个四阶部分对称广义 *Hilbert*张量。那么 $\mathcal{H}$ 是 *M*-正定的当且仅当 $a>0$，$2(m+n)-4+a>0$。

定理 3.16 设 $\mathcal{A}$ 是一个四阶部分对称 *Cauchy-Hankel*张量。那么 $\mathcal{A}$ 是 *M*-正定的当且仅当齐次多项式 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 在 $\mathbb{R}_+^m\times\mathbb{R}_+^n$ 上是严格单调增的。

证明. 假设 $\mathbf{x}\geq\hat{\mathbf{x}}$，$\mathbf{x}\neq\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{y}\geq\hat{\mathbf{y}}$，$\mathbf{y}\neq\hat{\mathbf{y}}$，那么存在指标 $i'\in I_m$ 和 $j'\in I_n$ 使得

$$x_{i'}>\hat{x}_{i'}\geq0\text{ 和 }y_{j'}>\hat{y}_{j'}\geq0.$$

由于 $\mathcal{A}$ 是 M-正定，则由定理3.14可知 $g+h(i+j+k+l)>0$。因此

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x},\mathbf{y})-f(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}) &= \mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{x}\mathbf{y}-\mathcal{A}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}} \\
&= \sum_{i,k=1}^{m}\sum_{j,l=1}^{n}\frac{x_iy_jx_ky_l-\hat{x}_i\hat{y}_j\hat{x}_k\hat{y}_l}{g+h(i+j+k+l)} \\
&= \sum_{(i,j,k,l)\neq(i',j',i',j')}\frac{x_iy_jx_ky_l-\hat{x}_i\hat{y}_j\hat{x}_k\hat{y}_l}{g+h(i+j+k+l)}+\frac{x_{i'}^2y_{j'}^2-\hat{x}_{i'}^2\hat{y}_{j'}^2}{g+2h(i'+j')} \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

即 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 在 $\mathbb{R}_+^m\times\mathbb{R}_+^n$ 上是严格单调增的。

反过来，令 $\mathbf{x}=\mathbf{e_i}\in\mathbb{R}_+^m$，$\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{0}\in\mathbb{R}_+^m$ 和 $\mathbf{y}=\mathbf{e_j}\in\mathbb{R}_+^n$，$\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{0}\in\mathbb{R}_+^n$，则很容易看出

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{e_1},\mathbf{e_1})-f(\mathbf{0},\mathbf{0}) &= \frac{1}{g+h(1+1+1+1)}=\frac{1}{g+4h}>0, \\
f(\mathbf{e_m},\mathbf{e_n})-f(\mathbf{0},\mathbf{0}) &= \frac{1}{g+h(m+n+m+n)}=\frac{1}{g+2h(m+n)}>0.
\end{aligned}
$$

即有 $g+4h>0$，$g+2h(m+n)>0$。因此 $\mathcal{A}$ 是 M-正定的。 □

推论 3.17 设 $\mathcal{H}$ 是一个四阶部分对称广义 *Hilbert*张量，那么 $\mathcal{H}$ 是 *M*-正定的当且仅当齐次多项式 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 在 $\mathbb{R}_+^m\times\mathbb{R}_+^n$ 上是严格单调增的。

定理 3.18 设 $\mathcal{A}$ 是一个四阶部分对称 *Cauchy-Hankel*张量，那么对 $\mathcal{A}$ 的所有的 *M*-特征值

$$
|\tau|\leq mnL(m,n,g,h), \tag{3.10}
$$

这里

$$
L(m,n,g,h)=\begin{cases}
\frac{1}{|h|(4+\frac{g}{h})}, & \frac{g}{h}>(\sin\frac{\pi}{\max\{m,n\}})^{-1}-4 \\
 & \text{或 } -4<\frac{g}{h}<-3; \\
\frac{1}{|h|}\sin\frac{\pi}{\max\{m,n\}}, & -3<\frac{g}{h}<(\sin\frac{\pi}{\max\{m,n\}})^{-1}-4; \\
\frac{1}{\min\{-|g|-|h|\lceil\frac{g}{h}\rceil,|g|+|h|(1+\lceil\frac{g}{h}\rceil)\}}, & -2(m+n)<\frac{g}{h}<-4; \\
\frac{1}{-2(m+n)|h|+|g|}, & \frac{g}{h}<-2(m+n).
\end{cases}
$$

对于 $L(m,n,g,h)$ 中的第二种情况，(3.10)中的不等式应改为“$<$”，且 $\lceil\frac{g}{h}\rceil$ 是不超过 $\frac{g}{h}$ 的最大整数。

证明. 当 $\frac{g}{h} > -3$ 时，由(3.1)，(3.9)和引理3.1可知，对所有向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 有

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}\mathbf{xyxy}| &= \left| \sum_{i,k=1}^{m} \sum_{j,l=1}^{n} a_{ijkl} x_i y_j x_k y_l \right| \\
&\le \sum_{i,k=1}^{m} \sum_{j,l=1}^{n} \frac{|x_i y_j x_k y_l|}{|g + h(i+j+k+l)|} \\
&\le \frac{1}{|h|} \sum_{i,k=1}^{m} \sum_{j,l=1}^{n} \frac{|x_i y_j x_k y_l|}{|i+1+k+1+\frac{g}{h}|} \\
&< \frac{1}{|h|} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{|x_i||x_k|}{i+k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j| \right)^2 \\
&\le \frac{1}{|h|} (m \sin\frac{\pi}{m} \|\mathbf{x}\|_2^2) \|\mathbf{y}\|_1^2 \\
&\le mn|h|^{-1} \sin\frac{\pi}{m}.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

在上述的第一个不等式中取 $i,k=1$。类似地，可得

$$
|\mathcal{A}\mathbf{xyxy}| < mn|h|^{-1} \sin\frac{\pi}{n}. \tag{3.12}
$$

在上述的第一个不等式中取 $k,l=1$ 或 $i,j=1$。我们只需考虑其中一种情况。不失一般性，假设 $m > n$，令 $\mathbf{y}' = (y_1', \cdots, y_n', y_{n+1}', \cdots, y_m')^\top \in \mathbb{R}^m$ 且

$$
y_j' = \begin{cases} y_j, & 1 \le j \le n; \\ 0, & n+1 \le j \le m; \end{cases}
$$

很明显 $\|\mathbf{y}'\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1$，结合引理3.2，则有

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}\mathbf{xyxy}| &\le \frac{1}{|h|} \sum_{i,k=1}^{m} \sum_{j,l=1}^{n} \frac{|x_i y_j x_k y_l|}{|i+j+1+1+\frac{g}{h}|} \\
&\le \frac{1}{|h|} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_i||y_j|}{i+j+2+\frac{g}{h}} \right) \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |x_k||y_l| \right) \\
&= \frac{1}{|h|} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{|x_i||y_j'|}{i+j+2+\frac{g}{h}} \right) \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k| \right) \left(\sum_{l=1}^{n} |y_l| \right) \\
&< \frac{1}{|h|} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{|x_i||y_j'|}{i+j-1} \right) \|\mathbf{x}\|_1 \|\mathbf{y}\|_1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&< \frac{1}{|h|}(\pi\|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}'\|_2)\|\mathbf{x}\|_1\|\mathbf{y}\|_1\\&\leq \pi|h|^{-1}\sqrt{mn}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

设 τ 是 $\mathcal{A}$ 的一个 M-特征值，根据 [50, 定理 1]可知

$$\tau = \mathcal{A}\mathbf{xyxy}.$$

由于 $m > n$，那么由(3.11)，(3.12)，(3.13)和 $\sin x < x\ (x > 0)$ 可知

$$|\tau| = |\mathcal{A}\mathbf{xyxy}| < mn|h|^{-1}\sin\frac{\pi}{m}.$$

类似地，当 $m \leq n$ 时，那么

$$|\tau| < mn|h|^{-1}\sin\frac{\pi}{n}.$$

因此，可得出

$$|\tau| < mn|h|^{-1}\sin\frac{\pi}{\max\{m,n\}} \text{ 对 } \frac{g}{h} > -3.\tag{3.14}$$

使用定理3.5中相同的证明方法, 可得

$$\frac{1}{|g+h(i+j+k+l)|} \leq K(m,n,g,h)$$

和

$$K(m,n,g,h) = \begin{cases}\frac{1}{|h|(4+\frac{g}{h})}, & \frac{g}{h} > -4;\\ \frac{1}{\min\{-|g|-|h|\lceil\frac{g}{h}\rceil,|g|+|h|(1+\lceil\frac{g}{h}\rceil)\}}, & -2(m+n) < \frac{g}{h} < -4;\\ \frac{1}{-2(m+n)|h|+|g|}, & \frac{g}{h} < -2(m+n).\end{cases}$$

那么，对于所有的非零向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$，很容易得到

$$|\tau| = |\mathcal{A}\mathbf{xyxy}| \leq mnK(m,n,g,h).\tag{3.15}$$

由(3.14)和(3.15)可知

$$|\tau| \leq mnL(m,n,g,h).$$

结论得证。 □

推论 3.19 设 $\mathcal{H}$ 是一个四阶部分对称广义 *Hilbert*张量，假设 $a\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$，那么 $\mathcal{H}$ 的所有 *M*-特征值

$$|\tau|\le mnL(m,n,a),$$

这里

$$L(m,n,a)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & a>(\sin\frac{\pi}{\max\{m,n\}})^{-1} \text{ 或 } 0<a<1;\\ \sin\frac{\pi}{\max\{m,n\}}, & 1\le a\le(\sin\frac{\pi}{\max\{m,n\}})^{-1};\\ \frac{1}{\min\{a-\lceil a\rceil,1+\lceil a\rceil-a\}}, & 4-2(m+n)<a<0;\\ \frac{1}{-2(m+n)+4-a}, & a<4-2(m+n);\end{cases}$$

和 $\lceil a\rceil$ 是不超过 a 的最大整数。

Che等在文献 [49] 的定理3.4中给出了四阶部分对称 Cauchy张量的 M-特征值包含定理。下面，我们将针对 Cauchy-Hankel张量，给出类似的结论。

推论 3.20 设 $\mathcal{A}$ 是一个四阶部分对称 *Cauchy-Hankel*张量，那么对于包含 $\mathcal{A}$ 的所有 *M*-特征值集合 $\sigma(\mathcal{A})$ 有

$$\sigma(\mathcal{A})\subseteq\delta(\mathcal{A})=\bigcup_{i\in I_m}\delta_i(\mathcal{A})$$

这里 $\delta_i(\mathcal{A})=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le\sum_{k\in I_m,j,l\in I_n}\frac{1}{|g+h(i+j+k+l)|}\}$。

证明. 假设 λ 是 $\mathcal{A}$ 的一个 M-特征值，$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ 是其相对应的左和右 M-特征向量，由定义3.13可知 $\mathbf{x}$ 中至少存在一个非零元素，设 $|x_s|=\max_{i\in I_m}|x_i|>0$，那么

$$\begin{aligned}\lambda x_s&=(\mathcal{A}\cdot\mathbf{yxy})_s\\&=\sum_{k\in I_m,j,l\in I_n}a_{sjkl}y_jx_ky_l\\&=\sum_{k\in I_m,j,l\in I_n}\frac{y_jx_ky_l}{g+h(s+j+k+l)}\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{y}^\top\mathbf{y}=1$，即对任何 $j\in I_n$ 有 $|y_j|\le1$，因此

$$\begin{aligned}|\lambda|&=\frac{1}{|x_s|}|\sum_{k\in I_m,j,l\in I_n}\frac{y_jx_ky_l}{g+h(s+j+k+l)}|\\&\le\sum_{k\in I_m,j,l\in I_n}\frac{1}{|g+h(s+j+k+l)|}\frac{|x_k|}{|x_s|}|y_jy_l|\\&\le\sum_{k\in I_m,j,l\in I_n}\frac{1}{|g+h(s+j+k+l)|}\end{aligned}$$

即结论得证。 □

第四节 数值实验

Che等 [49] 提出了幂法来计算四阶部分对称 Cauchy张量的最大和最小 M-特征值，并用数值算例来说明了该算法的有效性。接下来，我们将用类似的方法来计算四阶部分对称 Cauchy-Hankel张量的最大和最小 M-特征值。

计算四阶部分对称 Cauchy-Hankel张量的最小 M-特征值。假设 λ 是 Cauchy-Hankel张量的 M-特征值，那么选取 $\zeta > |\lambda|$，并定义

$$\tilde{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \zeta\mathcal{I}\mathbf{xyxy} - \mathcal{A}\mathbf{xyxy} = \tilde{\mathcal{A}}\mathbf{xyxy}$$

根据推论3.20，我们可以选取

$$\zeta = (1+\varepsilon)\max_{i\in I_m}\sum_{k\in I_m, j,l\in I_n}|a_{ijkl}|$$

这里 $\varepsilon > 0$ 是充分小的数。显然，如果 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 是 $\tilde{\mathcal{A}}$ 的 M-特征向量对，且 λ 是其对应的 M-特征值。那么它们也是 $\mathcal{A}$ 的 M-特征向量对，且对应的 M-特征值为 $\zeta-\lambda$。

算法 1 幂法 [49]

输入: 选择初始点 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$，并设 $k = 0$.

1: **for** $k = 0, 1, \cdots,$ **do**

2:

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{\mathcal{A}}\cdot y_k x_k y_k, \quad x_{k+1} = \frac{\tilde{x}_{k+1}}{\|\tilde{x}_{k+1}\|}$$

3:

$$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{\mathcal{A}}\cdot x_{k+1} y_k x_{k+1}, \quad y_{k+1} = \frac{\tilde{y}_{k+1}}{\|\tilde{y}_{k+1}\|}$$

$$k = k+1$$

4: **end for**

输出: 张量 $\mathcal{A}$ 的最小 M-特征值 $\zeta - \tilde{f}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ 和相对应的 M-特征向量 $\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*$.

类似地，计算四阶部分对称 Cauchy-Hankel张量的最大 M-特征值时，定义

$$\hat{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \zeta\mathcal{I}\mathbf{xyxy} + \mathcal{A}\mathbf{xyxy} = \hat{\mathcal{A}}\mathbf{xyxy}$$

显然，如果 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 是 $\hat{\mathcal{A}}$ 的 M-特征向量对，且 $\hat{\lambda}$ 是其对应的 M-特征值。那么它们也是 $\mathcal{A}$ 的 M-特征向量对，且对应的 M-特征值为 $\hat{\lambda}-\zeta$。

整个实验是在计算机 Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU 2.83GHZ 和 RAM 4.00G-B中 Matlab R2015b上进行的，我们选择 $\|x_{k+1}-x_k\|+\|y_{k+1}-y_k\|\leq 0.00001$ 作为迭代停止条件，并取 $\varepsilon=0.00001$。

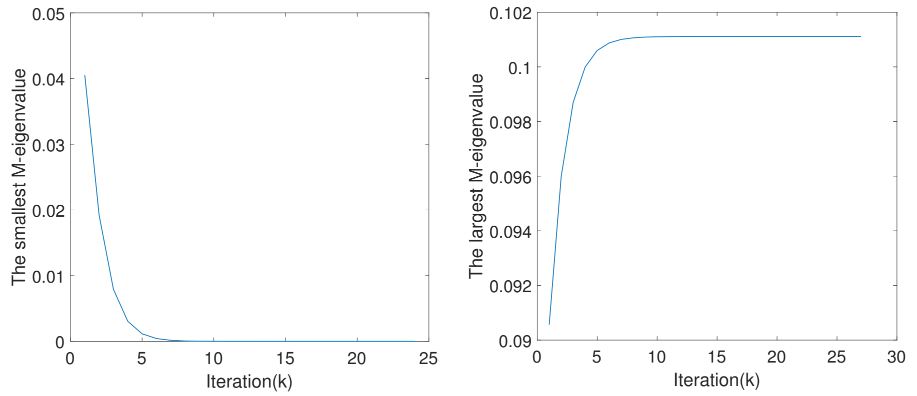

图1 例3.21的数值结果

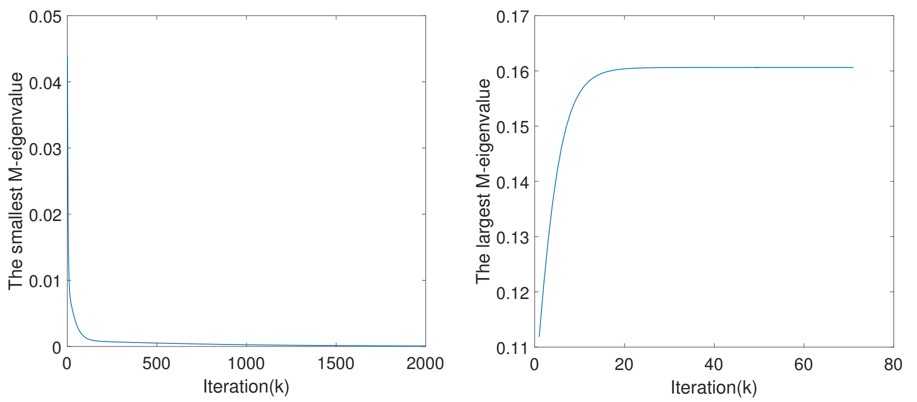

图2 例3.22的数值结果

例 3.21 *设 $\mathcal{A}$ 是一个四阶部分对称 Cauchy-Hankel张量，且 $m=6$，$n=2$，$g=99$，$h=2$，张量 $\mathcal{A}$ 对应的目标函数值变化情况如图1所示。它的最小 M-特征值是 3.1138×10^{-8}，最大 M-特征值是 0.1011。根据定理 3.18 可知其最大 M-特征值是 0.1121。*

例 3.22 设 $\mathcal{A}$ 是一个四阶部分对称 *Cauchy-Hankel*张量，且 $m=2$，$n=6$，$g=-44.9$，$h=15$，张量 $\mathcal{A}$ 对应的目标函数值变化情况如图2所示。它的最小 *M*-特征值是 7.3440×10^{-5}，最大 *M*-特征值是 *0.1606*。根据定理*3.18* 可知其最大 *M*-特征值是 *0.4*。

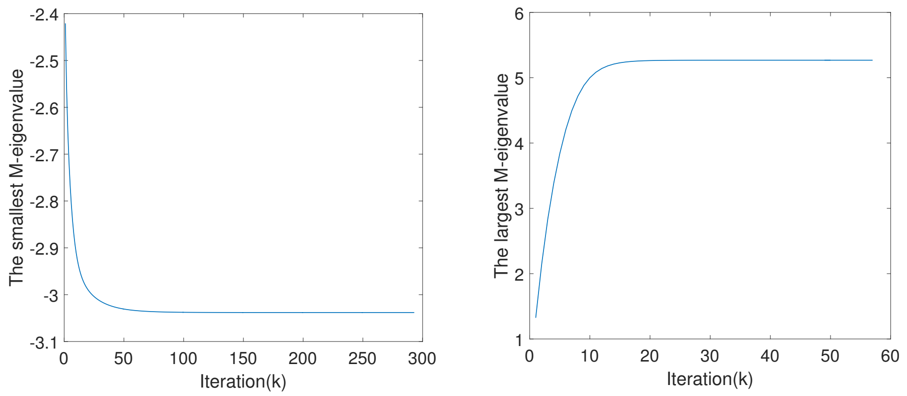

图3 例3.23的数值结果

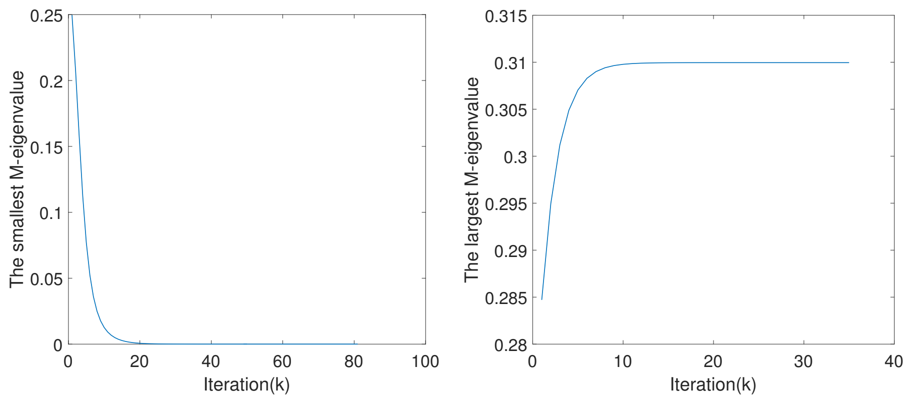

图4 例3.24的数值结果

例 3.23 设 $\mathcal{A}$ 是一个四阶部分对称 *Cauchy-Hankel*张量，且 $m=3$，$n=2$，$g=-7.5$，$h=1$，张量 $\mathcal{A}$ 对应的目标函数值变化情况如图*3*所示。它的最小 *M*-特征值是 3.1138×10^{-8}，最大 *M*-特征值是 *5.2679*。根据定理*3.18* 可知其最大 *M*-特征值是 *12*。

例 3.24 设 $\mathcal{A}$ 是一个四阶部分对称 *Cauchy-Hankel*张量，且 $m=2$，$n=3$，$g=26.5$，$h=-1$，张量 $\mathcal{A}$ 对应的目标函数值变化情况如图*4*所示。它的最小

M-特征值是 5.81801×10^{-7}，最大 *M*-特征值是 *0.3100*。根据定理*3.18* 可知其最大 *M*-特征值是 *0.3636*。

从上面四组实验可以看出我们在定理3.18中得到的 M-特征值的上界还是很接近其最大 M-特征值的。这也说明了定理3.18中给出的上界是有意义的。

第四章 矩形 Z-张量和矩形 P-张量

本章我们主要讨论了矩形 Z-张量和矩形 P-张量的一些理论性质，及张量互补问题解的存在情况，并给出了计算不可约非负矩形张量最大 V-奇异值的迭代算法。

第一节 预备知识

记 $\bar{\mathcal{I}}$ 为单位矩张量，其所有对角元素 $a_{i\cdots ij\cdots j}(i\in I_m, j\in I_n)$ 是1和非对角元素是0。此外，如果元素 $a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}$ 在其指标 $i_1,\cdots,i_p$ 和 $j_1,\cdots,j_q$ 作任意置换时均不变，则称其是一个部分对称矩形张量，且所有实部分对称矩形张量集合记为 $S^{[p;q;m;n]}$。

矩形张量的奇异值最初是由 Chang等 [64]和 He [69]提出的，其定义如下

定义 4.1 设 $\bar{\mathcal{A}} = (a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}) \in \mathbb{R}^{[p;q;m;n]}$,

(i) 如果存在 $\bar{\lambda}\in\mathbb{R}$，和向量 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m\backslash\{\mathbf{0}\}$，$\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\}$ 使得

$$\begin{cases}\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q = \bar{\lambda}\mathbf{x}^{[M-1]},\\ \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1} = \bar{\lambda}\mathbf{y}^{[M-1]},\end{cases}$$

这里 $\mathbf{x}^{[M-1]} = [x_1^{M-1},\cdots,x_m^{M-1}]^\top$, $\mathbf{y}^{[M-1]} = [y_1^{M-1},\cdots,y_n^{M-1}]^\top$ 和 $M=p+q$。那么 $\bar{\lambda}$ 称为 $\bar{\mathcal{A}}$ 的 H-奇异值，且 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 称为 $\bar{\mathcal{A}}$ 关于 $\bar{\lambda}$ 的左和右 H-特征向量对。

(ii) p，$q\geq 2$。如果存在数 $\bar{\mu}\in\mathbb{R}$，和向量 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m\backslash\{\mathbf{0}\}$，$\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\}$ 使得

$$\begin{cases}\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q = \bar{\mu}\mathbf{x}^{[p-1]},\\ \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1} = \bar{\mu}\mathbf{y}^{[q-1]},\\ \sum_{i=1}^m x_i^p = 1,\\ \sum_{j=1}^n y_j^q = 1.\end{cases}$$

那么 $\bar{\mu}$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的 V-奇异值，且 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 关于 $\bar{\mu}$ 的左和右 V-特征向量对。此外，如果 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m_+$ 和 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n_+$，那么我们称 $\bar{\mu}$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的一个 V^+-奇异值。

定义 4.2 设 $\bar{\mathcal{A}} = (a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}) \in \mathbb{R}^{[p;q;m;n]}$，那么 $\bar{\mathcal{A}}$ 称为一个

(i) 正定矩形张量 [64]，如果 p，q 是偶数，那么对所有的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ 有 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^q > 0$。

(ii) 矩形 P-张量 [70]，如果对每个 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$，存在一些指标 $i \in I_m$，$j \in I_n$ 使得

$$x_i^{p-1}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_i > 0,$$
$$y_j^{q-1}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1})_j > 0.$$

(iii) 矩形 P_0-张量 [70]，如果对每个 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$，存在一些指标 $i \in I_m$，$j \in I_n$ 使得

$$x_i^{p-1}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_i \geq 0,$$
$$y_j^{q-1}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1})_j \geq 0.$$

(iv) 矩形 S-张量 [70]，当且仅当存在 $\mathbf{0} < \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{0} < \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q > \mathbf{0},$$
$$\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1} > \mathbf{0}.$$

受 Q-张量 [6]，Z-张量 [21] 和矩形张量互补问题 [70] 定义的启发，我们现在给出几个结构矩形张量的定义。

定义 4.3 设 $\bar{\mathcal{A}} = (a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}) \in \mathbb{R}^{[p;q;m;n]}$，那么 $\bar{\mathcal{A}}$ 称为一个

(i) 矩形 Q-张量，当且仅当对每个向量 $\mathbf{q_m} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{q_n} \in \mathbb{R}^n$，矩形张量互补问题 $RTCP(\bar{\mathcal{A}}, \mathbf{q_m}, \mathbf{q_n})$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q + \mathbf{q_m} \geq \mathbf{0},\ \langle \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q + \mathbf{q_m}, \mathbf{x} \rangle = 0$$
$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0},\ \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1} + \mathbf{q_n} \geq \mathbf{0},\ \langle \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1} + \mathbf{q_n}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

有一个解。

(ii) 矩形 Z-张量，如果它的所有非对角元素是非正的，即可以写成

$$\bar{\mathcal{A}} = r\bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{B}}$$

这里 $r > 0$ 和 $\bar{\mathcal{B}}$ 是非负矩形张量。如果 $r \geq \rho_v(\bar{\mathcal{B}})$，则称 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 M-张量；如果 $r > \rho_v(\bar{\mathcal{B}})$，则称 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形强 M-张量，这里谱半径

$$\rho_v(\bar{\mathcal{B}}) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_v(\bar{\mathcal{B}})\},$$

且 $\sigma_v(\bar{\mathcal{B}})$ 是 $\bar{\mathcal{B}}$ 的所有 V-奇异值的集合。

定义 4.4 *[69, 定义 4]* 设 $\bar{\mathcal{A}}=(a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q})\in S^{[p;q;m;n]}$，其对角元素都是正的，且 p 和 q 是偶数， $\Delta=\{(j_1,\cdots,j_q):(1,\cdots,1),\cdots,(n,\cdots,n)\}$, $\Omega=\{(i_1,\cdots,i_p):(1,\cdots,1),\cdots,(m,\cdots,m)\}$, 和

$$\min_{i\in I_m}\{a_{i\cdots i1\cdots 1},\cdots,a_{i\cdots in\cdots n}\}=\alpha_i,\qquad \min_{j\in I_n}\{a_{1\cdots 1j\cdots j},\cdots,a_{m\cdots mj\cdots j}\}=\beta_j.$$

那么部分对称矩形张量 $\bar{\mathcal{A}}$ 称为严格对角占优矩形张量，如果对所有 $i\in I_m$，$j\in I_n$，则

$$\alpha_i>R_i(\bar{\mathcal{A}})\quad 或\quad \beta_j>C_j(\bar{\mathcal{A}}),$$

这里

$$R_i(\bar{\mathcal{A}})=\sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\notin\Delta}}^{n}|a_{ii_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}|+\gamma_i,\qquad \gamma_i=\max_{k\in I_n}\{\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_p=1\\(i_2,\cdots,i_p)\neq(i,\cdots,i)}}^{m}|a_{ii_2\cdots i_p k\cdots k}|\},$$

和

$$C_j(\bar{\mathcal{A}})=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1\\(i_1,\cdots,i_p)\notin\Omega}}^{m}\sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n}|a_{i_1\cdots i_p j j_2\cdots j_q}|+\delta_j,\qquad \delta_j=\max_{k\in I_m}\{\sum_{\substack{j_2,\cdots,j_q=1\\(j_2,\cdots,j_q)\neq(j,\cdots,j)}}^{m}|a_{k\cdots kjj_2\cdots j_q}|\}.$$

Yang和 Yang在文献 [65, 定理 2]中给出了非负矩形张量 H-奇异值的弱 Perron-Frobenius定理。随后，He等 [69] 对非负矩形张量的 V-奇异值给出了相似的结论。

引理 4.5 设 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个非负矩形张量，那么 $\rho_v(\bar{\mathcal{A}})$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的最大 V-奇异值，且其相对应的左和右特征向量对 $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}_+^m\setminus\{\mathbf{0}\}\times\mathbb{R}_+^n\setminus\{\mathbf{0}\}$。

Chang等人在文献 [12, 定义 2.1]中给出了张量不可约的定义：一个 m 阶 n 维张量 $\mathcal{B}=(b_{i_1i_2\cdots i_m})$ 称为可约的，如果存在一个非空适当指标子集 $\mathbb{I}\subset\{1,\cdots,n\}$ 使得

$$b_{i_1i_2\cdots i_m}=0,\ \ \forall i_1\in\mathbb{I},\ \ \forall i_2,\cdots,i_m\notin\mathbb{I}.$$

否则称 $\mathcal{B}$ 不可约。随着矩形张量的发展，Chang等 [64] 在此基础上给出了矩形张量不可约的定义，其定义如下：

定义 4.6 *[64, 定义 1]* 一个非负矩形张量 $\bar{\mathcal{A}}$ 称为不可约的，如果张量 $\bar{\mathcal{A}}(\cdot,e_j^q),j=1,\cdots,n$, 和 $\bar{\mathcal{A}}(f_i^p,\cdot),i=1,\cdots,m$, 都是不可约的。这里，对任何 $j\in I_n$，$\bar{\mathcal{A}}(\cdot,e_j^q)=(a_{i_1\cdots i_p j\cdots j})$ 是一个 p 阶 m 维张量；对任何 $i\in I_m$，$\bar{\mathcal{A}}(f_i^p,\cdot)=(a_{i\cdots ij_1\cdots j_q})$ 是一个 q 阶 n 维张量。

第二节 矩形 Z-张量

定理 4.7 设 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形张量，考虑以下情况：

(a) $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 Q-张量。

(b) 对所有的 $\mathbf{q_m} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{q_n} \in \mathbb{R}^n$，$RTCP(\bar{\mathcal{A}}, \mathbf{q_m}, \mathbf{q_n})$ 是可行的。

(c) $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 S-张量，即存在 $\mathbf{u} > \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ 使得 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{u}^{p-1}\mathbf{v}^q > \mathbf{0}$ 和 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{u}^p\mathbf{v}^{q-1} > \mathbf{0}$。

(d) 对所有 $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$，则有 $\max\limits_{i \in I_m} x_i(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_i > 0$ 和 $\max\limits_{j \in I_n} y_j(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_j > 0$。

(e) 对所有 $\mathbf{q_m} > \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{q_n} > \mathbf{0}$，则 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$，$\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 是 $RTCP(\bar{\mathcal{A}}, \mathbf{q_m}, \mathbf{q_n})$ 的唯一解。

那么 $(a) \Rightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e)$。

证明. $(a) \Rightarrow (b)$ 根据 Zeng等人在文献 [70] 中(71)可知 $RTCP(\bar{\mathcal{A}}, \mathbf{q_m}, \mathbf{q_n})$ 是可行的当且仅当向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 满足以下不等式：

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \ \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q + \mathbf{q_m} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0},\ \ \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1} + \mathbf{q_n} \geq \mathbf{0}$$

再由矩形 Q-张量的定义即可得。

$(b) \Leftrightarrow (c)$ 根据 Zeng等人在文献 [70] 中的定理11，我们知道 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 S-张量当且仅当对所有的 $\mathbf{q_m} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{q_n} \in \mathbb{R}^n$，$RTCP(\bar{\mathcal{A}}, \mathbf{q_m}, \mathbf{q_n})$ 是可行的。

$(c) \Rightarrow (d)$: 由 Zeng等人在文献 [70] 中的定理12 (b)，我们知道一个矩形 S-张量是一个严格协正矩形张量。即对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m_+ \backslash \{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{\mathbf{0}\}$ 有 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^q > 0$。假设对所有 $i \in I_m$ 有 $x_i(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_i \leq 0$，那么

$$\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^q = \sum_{i=1}^{m} x_i(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_i \leq 0,$$

这与 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^q > 0$ 相矛盾。因此

$$\max_{i \in I_m} x_i(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_i > 0.$$

类似地，假设对所有 $j \in I_n$ 有 $y_j(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_j \leq 0$，那么

$$\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^q = \sum_{j=1}^{n} y_j(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1})_j \leq 0,$$

这与 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^q > 0$ 相矛盾。因此

$$\max_{j\in I_n} y_j(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_j > 0.$$

$(d) \Rightarrow (e)$: 很明显 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$，$\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 是 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 的一个解。假设除此解外还有其它解，那么我们讨论以下三种情况。

(i) 假设 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 有非零解 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$，即 $\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{0}\neq\mathbf{y}\geq\mathbf{0}$。由条件(d)，我们知道 $\max\limits_{i\in I_m} x_i(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_i > 0$ 和 $\max\limits_{j\in I_n} y_j(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_j > 0$，那么存在 $k\in I_m$ 和 $l\in I_n$ 使得

$$x_k(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_k > 0 \text{ 和 } y_l(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_l > 0.$$

由 $\mathbf{q_m}>\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{q_n}>\mathbf{0}$ 可知

$$\langle\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q+\mathbf{q_m},\mathbf{x}\rangle = x_k(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q+\mathbf{q_m})_k + \sum_{i\neq k} x_i(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q+\mathbf{q_m})_i > 0$$

和

$$\langle\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1}+\mathbf{q_n},\mathbf{y}\rangle = y_l(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1}+\mathbf{q_n})_l + \sum_{j\neq l} y_j(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1}+\mathbf{q_n})_j > 0.$$

这些与 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 是 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 的解相矛盾。

(ii) 假设 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 有解 $\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{y}=\mathbf{0}$，那么由定义4.3(i)可知

$$\langle\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q+\mathbf{q_m},\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q+\mathbf{q_m})_i = 0.$$

由于 $\mathbf{q_m}>\mathbf{0}$，即 $\mathbf{x}=(0,\cdots,0)^\top$，这与 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 相矛盾。

(iii) 假设 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 有解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{0}\neq\mathbf{y}\geq\mathbf{0}$，那么由定义4.3 (i) 可知

$$\langle\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1}+\mathbf{q_n},\mathbf{y}\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1}+\mathbf{q_n})_j = 0.$$

由于 $\mathbf{q_n}>\mathbf{0}$，即 $\mathbf{y}=(0,\cdots,0)^\top$，这与 $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$ 相矛盾。

综上，$\mathbf{x}=\mathbf{0}$，$\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 是 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 的唯一解。 □

定理 4.8 *设 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 Z-张量，考虑以下几种情况：*

(a) $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 Q-张量。

(b) 对每个 $\mathbf{q_m}\geq\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{q_n}\geq\mathbf{0}$，存在 $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{y}\geq\mathbf{0}$ 使得 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q=\mathbf{q_m}$ 和 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1}=\mathbf{q_n}$。

(c) $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 S-张量。

那么 $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$。

证明. $(a) \Rightarrow (b)$: 设 $\mathbf{q_m} \geq \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{q_n} \geq \mathbf{0}$，由于 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 Q-张量，那么存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \ \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q - \mathbf{q_m} \geq \mathbf{0},\ \langle \bar{\mathbf{w}}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

和

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0},\ \ \hat{\mathbf{w}} = \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1} - \mathbf{q_n} \geq \mathbf{0},\ \langle \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

由于 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$，即我们讨论以下两种情况。

当 $x_i = 0$ 时，那么 $\bar{w}_i \geq 0$。由于 $\bar{\mathcal{A}}$ 是矩形 Z-张量，则

$$(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_i = a_{i\cdots ij\cdots j}x_i^{p-1}y_j^q + \sum_{(i_2,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q)\neq(i,\cdots,i,j,\cdots,j)} a_{ii_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}x_{i_2}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q} \leq 0$$

因此

$$\bar{w}_i(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_i \leq 0.$$

当 $x_{\bar{i}} > 0$，那么 $\bar{w}_{\bar{i}} = 0$。我们有

$$\bar{w}_{\bar{i}}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_{\bar{i}} = 0.$$

因此

$$\langle \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q, \bar{\mathbf{w}} \rangle = \sum \bar{w}_i(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_i + \sum \bar{w}_{\bar{i}}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_{\bar{i}} \leq 0.$$

即

$$\langle \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{q_m}, \bar{\mathbf{w}} \rangle = \|\bar{\mathbf{w}}\|^2 + \langle \mathbf{q_m}, \bar{\mathbf{w}} \rangle \leq 0.$$

由于 $\mathbf{q_m} \geq \mathbf{0}$，则很容易得出 $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$，即 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q = \mathbf{q_m}$。

类似地，由于 $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$，即我们讨论以下两种情况。

当 $y_j = 0$ 时，那么 $\hat{w}_j \geq 0$。由于 $\bar{\mathcal{A}}$ 是矩形 Z-张量，则

$$(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1})_j = a_{i\cdots ij\cdots j}x_i^{p}y_j^{q-1} + \sum_{(i_1,\cdots,i_p,j_2,\cdots,j_q)\neq(i,\cdots,i,j,\cdots,j)} a_{i_1\cdots i_p jj_2\cdots j_q}x_{i_1}\cdots x_{i_p}y_{j_2}\cdots y_{j_q} \leq 0$$

因此

$$\hat{w}_j(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1})_j \leq 0.$$

当 $y_{\bar{j}} > 0$，那么 $\hat{w}_{\bar{j}} = 0$。我们有

$$\hat{w}_{\bar{j}}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_{\bar{j}} = 0.$$

因此

$$\langle \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1}, \hat{\mathbf{w}} \rangle = \sum \hat{w}_j(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_j + \sum \hat{w}_{\bar{j}}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_{\bar{j}} \le 0.$$

即

$$\langle \hat{\mathbf{w}} + \mathbf{q_n}, \hat{\mathbf{w}} \rangle = \|\hat{\mathbf{w}}\|^2 + \langle \mathbf{q_n}, \hat{\mathbf{w}} \rangle \le 0.$$

由于 $\mathbf{q_n} \ge \mathbf{0}$，则很容易得出 $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$，即 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1} = \mathbf{q_n}$。

$(b) \Rightarrow (c)$: 由(b)可知对于任何 $\mathbf{q_m} > \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{q_n} > \mathbf{0}$，有 $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$ 使得 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q = \mathbf{q_m} > \mathbf{0}$ 和 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1} = \mathbf{q_n} > \mathbf{0}$。由连续性可知，存在 $\mathbf{u} > \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ 使得 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{u}^{p-1}\mathbf{v}^q > \mathbf{0}$ 和 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{u}^p\mathbf{v}^{q-1} > \mathbf{0}$。 □

根据定理4.8，我们可以得到以下推论。

推论 4.9 *设 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 Z-张量，且 $\mathbf{q_m} \in \mathbb{R}^m_+$，$\mathbf{q_n} \in \mathbb{R}^n_+$，那么以下条件等价：*

(i) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m_+$，$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+$，$\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q - \mathbf{q_m} \in \mathbb{R}^m_+$，$\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1} - \mathbf{q_n} \in \mathbb{R}^n_+$，$\langle \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q - \mathbf{q_m}, \mathbf{x} \rangle = 0$，$\langle \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1} - \mathbf{q_n}, \mathbf{y} \rangle = 0$。

(ii) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m_+$，$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+$，$\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q - \mathbf{q_m} = \mathbf{0}$，$\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1} - \mathbf{q_n} = \mathbf{0}$。

引理 4.10 *设 $\bar{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{[p;q;m;n]}$ 和 $\bar{\mathcal{B}} = \alpha(\bar{\mathcal{A}} + \beta\bar{\mathcal{I}})$（$\alpha \neq 0$），那么 $\bar{\mu}$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的一个 V-奇异值当且仅当 $\hat{\mu} = \alpha(\bar{\mu} + \beta)$ 是 $\bar{\mathcal{B}}$ 的一个 V-奇异值。在这种情况下，它们有相同的 V-特征向量对。*

证明. ”⇒”: 假设 $\bar{\mu}$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的对应于左和右 V-特征向量对 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的一个 V-奇异值，由定义4.1 可知

$$\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q = \bar{\mu}\mathbf{x}^{[p-1]} \text{ 和 } \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1} = \bar{\mu}\mathbf{y}^{[q-1]}.$$

且

$$(\bar{\mathcal{I}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_i = \sum_{j=1}^n x_i^{p-1}y_j^q = x_i^{p-1} \text{ 和 } (\bar{\mathcal{I}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_i = \sum_{i=1}^m x_i^p y_j^{q-1} = y_j^{q-1},$$

因此

$$\bar{\mathcal{B}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q = \alpha(\bar{\mathcal{A}} + \beta\bar{\mathcal{I}})\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q = \alpha(\bar{\mu} + \beta)\mathbf{x}^{[p-1]},$$

$$\bar{\mathcal{B}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1} = \alpha(\bar{\mathcal{A}} + \beta\bar{\mathcal{I}})\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1} = \alpha(\bar{\mu} + \beta)\mathbf{y}^{[q-1]}.$$

所以 $\hat{\mu}=\alpha(\bar{\mu}+\beta)$ 是 $\bar{\mathcal{B}}$ 的一个 V-奇异值。

”$\Leftarrow$”: 由于 $\bar{\mathcal{B}}=\alpha(\bar{\mathcal{A}}+\beta\bar{\mathcal{I}})$，那么 $\bar{\mathcal{A}}=\frac{1}{\alpha}(\bar{\mathcal{B}}-\alpha\beta\bar{\mathcal{I}})$。假设 $\hat{\mu}$ 是 $\bar{\mathcal{B}}$ 的一个 V-奇异值，由必要性可知

$$\frac{1}{\alpha}(\hat{\mu}-\alpha\beta)=\frac{1}{\alpha}(\alpha(\bar{\mu}+\beta)-\alpha\beta)=\bar{\mu}$$

是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的一个 V-奇异值。 □

定理 4.11 *假设 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 Z-张量，考虑以下情况：*

(a) $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 P-张量。

(b) $\bar{\mathcal{A}}$ 的每一个 V-奇异值都是正的。

(c) 对所有的 $\varepsilon\geq 0$，如果 $(\bar{\mathcal{A}}+\varepsilon\bar{\mathcal{I}})\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^{q}=\mathbf{0}$ 和 $(\bar{\mathcal{A}}+\varepsilon\bar{\mathcal{I}})\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1}=\mathbf{0}$，那么 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{y}=\mathbf{0}$。

则 (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c)。

证明. $(a)\Rightarrow(b)$: 由 Zeng等人在文献 [70]中的定理1可知，如果 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 P-张量，那么它的所有 V-奇异值都是正的。

$(b)\Rightarrow(c)$: 反证法。假设存在某些 $\varepsilon\geq 0$ 和某些 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m\backslash\{\mathbf{0}\}$，$\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\}$ 使得 $(\bar{\mathcal{A}}+\varepsilon\bar{\mathcal{I}})\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^{q}=\mathbf{0}$ 和 $(\bar{\mathcal{A}}+\varepsilon\bar{\mathcal{I}})\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1}=\mathbf{0}$，那么0是 $\bar{\mathcal{A}}+\varepsilon\bar{\mathcal{I}}$ 的一个 V-奇异值。由引理4.10可知

$$\bar{\mu}=-\varepsilon\leq 0$$

是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的一个 V-奇异值，这与 $\bar{\mathcal{A}}$ 的每个 V-奇异值都是正的相矛盾，即结论得证。

$(c)\Rightarrow(b)$: 设 $\bar{\mu}$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的最小 V-奇异值，且其对应的左和右 V-特征向量为 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m\backslash\{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\}$。假设 $\bar{\mu}\leq 0$，令 $\varepsilon=-\bar{\mu}\geq 0$，那么

$$((\bar{\mathcal{A}}+\varepsilon\bar{\mathcal{I}})\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^{q})_i=\bar{\mu}x_i^{p-1}+\varepsilon x_i^{p-1}=0,$$

$$((\bar{\mathcal{A}}+\varepsilon\bar{\mathcal{I}})\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1})_j=\bar{\mu}y_j^{q-1}+\varepsilon y_j^{q-1}=0.$$

因此

$$(\bar{\mathcal{A}}+\varepsilon\bar{\mathcal{I}})\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^{q}=\mathbf{0}\text{ 和 }(\bar{\mathcal{A}}+\varepsilon\bar{\mathcal{I}})\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1}=\mathbf{0}$$

这与 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 相矛盾，所以 $\bar{\mathcal{A}}$ 的每个 V-奇异值是正的。 □

定理 4.12 *设 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 Z-张量，那么以下性质等价：*

(a) $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形（强）M-张量。

(b) $\bar{\mathcal{A}}$ 的每个 V-奇异值是非负的（正的）。

(c) $\bar{\mathcal{A}}$ 的每个 V$^+$-奇异值都是非负的（正的）。

(d) $\xi \geq (>)\rho_v(\xi\bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{A}})$ 且 $\xi = \max\limits_{i\in I_m, j\in I_n} a_{i\cdots ij\cdots j}$。

证明. $(a) \Leftrightarrow (b)$: 假设 $\bar{\mu}$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的一个 V-奇异值，那么由定义4.1 (ii)，4.3 (ii)和引理4.10 可知 $r \geq (>)\rho_v(\bar{\mathcal{B}})$，且 $r-\bar{\mu}$ 是 $\bar{\mathcal{B}}$ 的一个 V-奇异值，因此

$$\rho_v(\bar{\mathcal{B}}) \geq |r-\bar{\mu}| \geq r-\bar{\mu} \geq (>)\rho_v(\bar{\mathcal{B}})-\bar{\mu},$$

即 $\bar{\mu} \geq (>)0$，所以 $\bar{\mathcal{A}}$ 的所有 V-奇异值是非负的（正的）。

相反地，设 $r = \max\limits_{i\in I_m, j\in I_n} a_{i\cdots ij\cdots j}$，那么很明显 $\bar{\mathcal{B}} = r\bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{A}}$ 是一个非负矩形张量。由引理4.5和4.10可知 $\rho_v(\bar{\mathcal{B}})$ 是 $\bar{\mathcal{B}}$ 的一个 V-奇异值，且 $r-\rho_v(\bar{\mathcal{B}})$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的一个 V-奇异值。因此

$$r-\rho_v(\bar{\mathcal{B}}) \geq (>)0,$$

所以 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形（强）M-张量。

$(a) \Leftrightarrow (c)$: 假设 $\bar{\mu}$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的一个 V$^+$-奇异值，那么由定义4.1 (ii)，4.3 (ii)和引理 4.10 可知 $r \geq (>)\rho_v(\bar{\mathcal{B}})$，且 $r-\bar{\mu}$ 是 $\bar{\mathcal{B}}$ 的一个 V$^+$-奇异值。因此

$$\rho_v(\bar{\mathcal{B}}) \geq |r-\bar{\mu}| \geq r-\bar{\mu} \geq (>)\rho_v(\bar{\mathcal{B}})-\bar{\mu}, \tag{4.1}$$

即 $\bar{\mu} \geq (>)0$，所以 $\bar{\mathcal{A}}$ 的所有 V$^+$-奇异值都是非负的（正的）。

相反地，设 $r = \max\limits_{i\in I_m, j\in I_n} a_{i\cdots ij\cdots j}$，那么很明显 $\bar{\mathcal{B}} = r\bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{A}}$ 是一个非负矩形张量。由引理4.5和4.10可知 $\rho_v(\bar{\mathcal{B}})$ 是 $\bar{\mathcal{B}}$ 的一个 V$^+$-奇异值，且 $r-\rho_v(\bar{\mathcal{B}})$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的一个 V$^+$-奇异值。因此

$$r-\rho_v(\bar{\mathcal{B}}) \geq (>)0,$$

所以 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形（强）M-张量。

$(a) \Leftrightarrow (d)$: 由于 $\xi = \max\limits_{i\in I_m, j\in I_n} a_{i\cdots ij\cdots j}$，那么 $\bar{\mathcal{B}} = \xi\bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{A}}$ 是一个非负矩形张量。根据引理4.5和4.10，我们知道 $\xi-\rho_v(\bar{\mathcal{B}})$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的一个 V-奇异值，那么由 $(a) \Leftrightarrow (b)$ 可知

$$\xi-\rho_v(\bar{\mathcal{B}}) = \xi-\rho_v(\xi\bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{A}}) \geq (>)0.$$

所以 $\xi \geq (>)\rho_v(\xi\bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{A}})$。

相反地，如果 $\xi \geq (>)\rho_v(\xi\bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{A}}) = \rho_v(\bar{\mathcal{B}})$，那么我们知道 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形（强）M-张量。 □

推论 4.13 设 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形（强）M-张量，那么

$$\max_{i\in I_m, j\in I_n} a_{i\cdots ij\cdots j} \geq (>)0.$$

证明. 设 $r = \max_{i\in I_m, j\in I_n} a_{i\cdots ij\cdots j}$, 那么 $\bar{\mathcal{B}} = r\bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{A}}$ 是一个非负矩形张量。由于 $r - \rho_v(\bar{\mathcal{B}})$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的一个 V$^+$-奇异值，那么结合定理4.12中 $(a) \Leftrightarrow (c)$，则有

$$r \geq \rho_v(\bar{\mathcal{B}}) \geq 0.$$

即 $\max_{i\in I_m, j\in I_n} a_{i\cdots ij\cdots j} \geq 0$。矩形强 M-张量的情况可以类似的证明。 □

定理 4.14 设 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形强 M-张量，那么 $\bar{\mathcal{A}} - \min_{\bar{\mu}\in\sigma_v(\bar{\mathcal{A}})} \bar{\mu}\bar{\mathcal{I}}$ 是一个矩形 M-张量。特别地，0 是 $\bar{\mathcal{A}} - \min_{\bar{\mu}\in\sigma_v(\bar{\mathcal{A}})} \bar{\mu}\bar{\mathcal{I}}$ 的一个 V^+-奇异值。

证明. 由于 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形强 M-张量，由(4.1)可知

$$\rho_v(\bar{\mathcal{B}}) \geq \max_{\bar{\mu}\in\sigma_v(\bar{\mathcal{A}})} \{r - \bar{\mu}\} = r - \min_{\bar{\mu}\in\sigma_v(\bar{\mathcal{A}})} \bar{\mu},$$

即

$$\min_{\bar{\mu}\in\sigma_v(\bar{\mathcal{A}})} \bar{\mu} \geq r - \rho_v(\bar{\mathcal{B}}). \tag{4.2}$$

由于 $r - \rho_v(\bar{\mathcal{B}})$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的一个 V-奇异值，因此

$$r - \rho_v(\bar{\mathcal{B}}) \geq \min_{\bar{\mu}\in\sigma_v(\bar{\mathcal{A}})} \bar{\mu}. \tag{4.3}$$

由(4.2)和(4.3)可知

$$\min_{\bar{\mu}\in\sigma_v(\bar{\mathcal{A}})} \bar{\mu} = r - \rho_v(\bar{\mathcal{B}}).$$

因此

$$\bar{\mathcal{A}} - \min_{\bar{\mu}\in\sigma_v(\bar{\mathcal{A}})} \bar{\mu}\bar{\mathcal{I}} = (r - \min_{\bar{\mu}\in\sigma_v(\bar{\mathcal{A}})} \bar{\mu})\bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{B}} = \rho_v(\bar{\mathcal{B}})\bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{B}},$$

即 $\bar{\mathcal{A}} - \min_{\bar{\mu}\in\sigma_v(\bar{\mathcal{A}})} \bar{\mu}\bar{\mathcal{I}}$ 是一个矩形 M-张量。很明显，

$$\rho_v(\bar{\mathcal{B}}) - \rho_v(\bar{\mathcal{B}}) = 0$$

是 $\rho_v(\bar{\mathcal{B}})\bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{B}}$ 的一个 V$^+$-奇异值，所以0是 $\bar{\mathcal{A}} - \min_{\bar{\mu}\in\sigma_v(\bar{\mathcal{A}})} \bar{\mu}\bar{\mathcal{I}}$ 的一个 V$^+$-奇异值。 □

推论 4.15 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 M-张量当且仅当对所有 $\epsilon > 0$，$\bar{\mathcal{A}} + \epsilon\bar{\mathcal{I}}$ 是一个矩形强 M-张量。

证明. ”⇒”: 由定义4.3 (ii)可知

$$\bar{\mathcal{A}}+\epsilon\bar{\mathcal{I}} = r\bar{\mathcal{I}}-\bar{\mathcal{B}}+\epsilon\bar{\mathcal{I}} = (r+\epsilon)\bar{\mathcal{I}}-\bar{\mathcal{B}},$$

结合 $\epsilon>0$ 和 $r\geq\rho_v(\bar{\mathcal{B}})$，则 $r+\epsilon>\rho_v(\bar{\mathcal{B}})$。因此 $\bar{\mathcal{A}}+\epsilon\bar{\mathcal{I}}$ 是一个矩形强 M-张量。

”⇐”: 由定义4.3 (ii) 可知，$\bar{\mathcal{A}}+\epsilon\bar{\mathcal{I}}$ 可以写成

$$\bar{\mathcal{A}}+\epsilon\bar{\mathcal{I}} = s\bar{\mathcal{I}}-\bar{\mathcal{B}},$$

这里 $s>0$ 和 $\bar{\mathcal{B}}$ 是一个矩形非负张量，且 $s>\rho_v(\bar{\mathcal{B}})$。那么

$$\bar{\mathcal{A}} = (s-\epsilon)\bar{\mathcal{I}}-\bar{\mathcal{B}},$$

令 $\epsilon\to 0$，则 $s-\epsilon\geq\rho_v(\bar{\mathcal{B}})$。因此 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 M-张量。 □

第三节 矩形 P-张量及互补问题

定理 4.16 设 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 P-张量（P_0-张量）且 p，q 是偶数，那么 $\bar{\mathcal{A}}$ 的所有 H-奇异值是正的（非负的）。

证明. 假设 $\bar{\lambda}$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的一个 H-奇异值，且其对应的 H-特征向量对 $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^m\backslash\{\mathbf{0}\}\times\mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\}$，那么存在指标 $k\in I_m$ 和 $l\in I_n$ 使得

$$x_k\neq 0 \text{ 和 } y_l\neq 0$$

由定义4.1 (i) 和4.2 (ii)可知

$$x_k^{p-1}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_k = \bar{\lambda}x_k^{p-1+(M-1)} = \bar{\lambda}x_k^{2(p-1)}\cdot x_k^q>0,$$

$$y_l^{q-1}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_l = \bar{\lambda}y_l^{q-1+(M-1)} = \bar{\lambda}y_l^{2(q-1)}\cdot y_l^p>0.$$

由于 p，q 是偶数的，即 $\bar{\lambda}>0$。矩形 P_0-张量的情况可以类似的得到。 □

定理 4.17 设矩形 Z-张量 $\bar{\mathcal{A}}\in S^{[p;q;m;n]}$ 是严格对角占优的，那么对所有的 $i\in I_m$，$j\in I_n$，则

$$\sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n}a_{ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q}>0 \text{ 或 } \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n}a_{i_1\cdots i_pjj_2\cdots j_q}>0.$$

证明. 假设 $\alpha_i = a_{i\cdots it\cdots t}$ 和

$$\gamma_i = \max_{k\in I_n}\{\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_p=1\\(i_2,\cdots,i_p)\neq(i,\cdots,i)}}^{m} |a_{ii_2\cdots i_pk\cdots k}|\} = \sum_{\substack{i_2,\cdots,i_p=1\\(i_2,\cdots,i_p)\neq(i,\cdots,i)}}^{m} |a_{ii_2\cdots i_p\tilde{k}\cdots\tilde{k}}|,$$

那么对任何 $\bar{j}\neq t$ 和 $\tilde{j}\neq\tilde{k}$，则

$$a_{i\cdots i\bar{j}\cdots\bar{j}} \geq \alpha_i > R_i(\bar{\mathcal{A}}) \geq \gamma_i \geq \sum_{\substack{i_2,\cdots,i_p=1\\(i_2,\cdots,i_p)\neq(i,\cdots,i)}}^{m} |a_{ii_2\cdots i_p\tilde{j}\cdots\tilde{j}}|$$

即

$$a_{i\cdots i\bar{j}\cdots\bar{j}} + \sum_{\substack{i_2,\cdots,i_p=1\\(i_2,\cdots,i_p)\neq(i,\cdots,i)}}^{m} a_{ii_2\cdots i_p\tilde{j}\cdots\tilde{j}} > 0.$$

由定义4.3(ii)和4.4可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n} a_{ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q}\\
&= \sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\notin\Delta}}^{n} a_{ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q} + \sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\in\Delta}}^{n} a_{ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q}\\
&= \sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\notin\Delta}}^{n} a_{ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q} + (a_{i\cdots i1\cdots 1}+\cdots+a_{i\cdots it\cdots t}+\cdots+a_{i\cdots in\cdots n})\\
&\quad + \sum_{\substack{i_2,\cdots,i_q=1\\(i_2,\cdots,i_p)\neq(i\cdots i)}}^{n} (a_{ii_2\cdots i_p1\cdots 1}+\cdots+a_{ii_2\cdots i_p\tilde{k}\cdots\tilde{k}}+\cdots+a_{ii_2\cdots i_pn\cdots n})\\
&> a_{i\cdots it\cdots t} + \sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\notin\Delta}}^{n} a_{ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q} + \sum_{\substack{i_2,\cdots,i_q=1\\(i_2,\cdots,i_p)\neq(i\cdots i)}}^{n} a_{ii_2\cdots i_p\tilde{k}\cdots\tilde{k}}\\
&> 0.
\end{aligned}$$

即

$$\sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n} a_{ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q} > 0.$$

类似地，假设 $\beta_j = a_{s\cdots sj\cdots j}$ 和

$$\delta_j = \max_{k\in I_m}\{\sum_{\substack{j_2,\cdots,j_q=1\\(j_2,\cdots,j_q)\neq(j,\cdots,j)}}^{n} |a_{k\cdots kjj_2\cdots j_q}|\} = \sum_{\substack{j_2,\cdots,j_q=1\\(j_2,\cdots,j_q)\neq(j,\cdots,j)}}^{n} |a_{\hat{k}\cdots\hat{k}jj_2\cdots j_q}|,$$

那么对任何 $\bar{i} \neq s$ 和 $\hat{i} \neq \hat{k}$，则

$$a_{\bar{i}\cdots\bar{i}j\cdots j} \geq \beta_j > C_j(\bar{\mathcal{A}}) \geq \delta_j \geq \sum_{\substack{j_2,\cdots,j_q=1 \\ (j_2,\cdots,j_q)\neq(j,\cdots,j)}}^{n} |a_{\hat{i}\cdots\hat{i}jj_2\cdots j_q}|$$

即

$$a_{\bar{i}\cdots\bar{i}j\cdots j} + \sum_{\substack{j_2,\cdots,j_q=1 \\ (j_2,\cdots,j_q)\neq(j,\cdots,j)}}^{n} a_{\hat{i}\cdots\hat{i}jj_2\cdots j_q} > 0.$$

由定义4.3(ii)和4.4可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} \sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n} a_{i_1\cdots i_p jj_2\cdots j_q} \\
&= \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1 \\ (i_1,\cdots,i_p)\notin\Omega}}^{m} \sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n} a_{i_1\cdots i_p jj_2\cdots j_q} + \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1 \\ (i_1,\cdots,i_p)\in\Omega}}^{m} \sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n} a_{i_1\cdots i_p jj_2\cdots j_q} \\
&= \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1 \\ (i_1,\cdots,i_p)\notin\Omega}}^{m} \sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n} a_{i_1\cdots i_p jj_2\cdots j_q} + (a_{1\cdots 1j\cdots j} + \cdots + a_{s\cdots sj\cdots j} + \cdots + a_{m\cdots mj\cdots j}) \\
&\quad + \sum_{\substack{j_2,\cdots,j_q=1 \\ (j_2,\cdots,j_q)\neq(j\cdots j)}}^{n} (a_{1\cdots 1jj_2\cdots j_q} + \cdots + a_{\hat{k}\cdots\hat{k}jj_2\cdots j_p} + \cdots + a_{m\cdots mjj_2\cdots j_q}) \\
&> a_{s\cdots sj\cdots j} + \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1 \\ (i_1,\cdots,i_p)\notin\Omega}}^{m} \sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n} a_{i_1\cdots i_p jj_2\cdots j_q} + \sum_{\substack{j_2,\cdots,j_q=1 \\ (j_2,\cdots,j_q)\neq(j\cdots j)}}^{n} a_{\hat{k}\cdots\hat{k}jj_2\cdots j_q} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

即

$$\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} \sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n} a_{i_1\cdots i_p jj_2\cdots j_q} > 0.$$

结论得证。 □

根据文献 [70] 中的定理1，12(a) 和文献 [69] 中的定理7，我们可以得到以下推论。

推论 4.18 设 p 和 q 是偶数，$\bar{\mathcal{A}} \in S^{[p;q;m;n]}$ 是矩形 P-张量当且仅当它是正定矩形张量。

定理 4.19 设 p 和 q 是偶数，$\bar{\mathcal{A}} = (a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}) \in S^{[p;q;m;n]}$ 是一个严格对角占优矩形张量，那么它是一个矩形 P-张量。

证明. 对于任何向量 $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$，假设

$$|x_s| = \max_{i\in I_m}\{|x_i|\} \text{ 和 } |y_t| = \max_{j\in I_n}\{|y_j|\}$$

那么 $|x_s| \neq 0$ 和 $|y_t| \neq 0$。由定义4.4及 p，q 是偶数可知

$$\begin{aligned}
x_s^{p-1}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_s &= x_s^{p-1}\Big(\sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n} a_{si_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}x_{i_2}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q}\Big)\\
&= x_s^{p-1}\Big(\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_p=1\\(i_2,\cdots,i_p)=(s,\cdots,s)}}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\in\Delta}}^{n} a_{si_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}x_{i_2}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q}\\
&\quad+\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_p=1\\(i_2,\cdots,i_p)\neq(s,\cdots,s)}}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\in\Delta}}^{n} a_{si_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}x_{i_2}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q}\\
&\quad+\sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\notin\Delta}}^{n} a_{si_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}x_{i_2}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q}\Big)\\
&\geq (a_{s\cdots s1\cdots 1}y_1^q+\cdots+a_{s\cdots st\cdots t}y_t^q+\cdots+a_{s\cdots sn\cdots n}y_n^q)x_s^{2(p-1)}\\
&\quad-(|y_1|^q+\cdots+|y_t|^q+\cdots+|y_n|^q)\gamma_s|x_s|^{2(p-1)}\\
&\quad-\sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\notin\Delta}}^{n}|a_{si_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}||x_s|^{2(p-1)}|y_t|^q\\
&= ((a_{s\cdots s1\cdots 1}-\gamma_s)|y_1|^q+\cdots+(a_{s\cdots st\cdots t}-\gamma_s)|y_t|^q+\cdots)\,|x_s|^{2(p-1)}\\
&\quad-\sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\notin\Delta}}^{n}|a_{si_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}||x_s|^{2(p-1)}|y_t|^q\\
&\geq \left(\alpha_s-\gamma_s-\sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\notin\Delta}}^{n}|a_{si_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}|\right)|x_s|^{2(p-1)}|y_t|^q\\
&> 0.
\end{aligned}$$

即

$$x_s^{p-1}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_s > 0.$$

类似地，则有

$$
\begin{aligned}
y_t^{q-1}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_t &= y_t^{q-1}\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n} a_{i_1\cdots i_p t j_2\cdots j_q} x_{i_1}\cdots x_{i_p} y_{j_2}\cdots y_{j_q}\Big)\\
&= y_t^{q-1}\Big(\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1\\(i_1,\cdots,i_p)\in\Omega}}^{m}\ \sum_{\substack{j_2,\cdots,j_q=1\\(j_2,\cdots,j_q)=(t,\cdots,t)}}^{n} a_{i_1\cdots i_p t j_2\cdots j_q} x_{i_1}\cdots x_{i_p} y_{j_2}\cdots y_{j_q}\\
&\quad + \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1\\(i_1,\cdots,i_p)\in\Omega}}^{m}\ \sum_{\substack{j_2,\cdots,j_q=1\\(j_2,\cdots,j_q)\neq(t,\cdots,t)}}^{n} a_{i_1\cdots i_p t j_2\cdots j_q} x_{i_1}\cdots x_{i_p} y_{j_2}\cdots y_{j_q}\\
&\quad + \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1\\(i_1,\cdots,i_p)\notin\Omega}}^{m}\ \sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n} a_{i_1\cdots i_p t j_2\cdots j_q} x_{i_1}\cdots x_{i_p} y_{j_2}\cdots y_{j_q}\Big)\\
&\geq (a_{1\cdots 1t\cdots t}x_1^p+\cdots+a_{s\cdots st\cdots t}x_s^p+\cdots+a_{m\cdots mt\cdots t}x_m^p)y_t^{2(q-1)}\\
&\quad -(|x_1|^p+\cdots+|x_s|^p+\cdots+|x_m|^p)\delta_t|y_t|^{2(q-1)}\\
&\quad -\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1\\(i_1,\cdots,i_p)\notin\Omega}}^{m}\ \sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n} |a_{i_1\cdots i_p t j_2\cdots j_q}||x_s|^p|y_t|^{2(q-1)}\\
&= ((a_{1\cdots 1t\cdots t}-\delta_t)|x_1|^p+\cdots+(a_{s\cdots st\cdots t}-\delta_t)|x_s|^p+\cdots)\,|y_t|^{2(q-1)}\\
&\quad -\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1\\(i_1,\cdots,i_p)\notin\Omega}}^{m}\ \sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n} |a_{i_1\cdots i_p t j_2\cdots j_q}||x_s|^p|y_t|^{2(q-1)}\\
&\geq \left(\beta_t-\delta_t-\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1\\(i_1,\cdots,i_p)\notin\Omega}}^{m}\ \sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n} |a_{i_1\cdots i_p t j_2\cdots j_q}|\right)|x_s|^p|y_t|^{2(q-1)}\\
&> 0.
\end{aligned}
$$

即

$$y_t^{q-1}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_t > 0.$$

因此 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 P-张量。 □

结合推论4.18和定理4.19，我们得到以下结果。

推论 4.20 设 p 和 q 是偶数，$\bar{\mathcal{A}}\in S^{[p;q;m;n]}$ 是一个严格对角占优矩形张量，那么 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个正定矩形张量。

推论 4.21 设 $\bar{\mathcal{A}}=(a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q})\in S^{[p;q;m;n]}$，且 p 和 q 是偶数。如果对所有 $i\in I_m$，$j\in I_n$ 有

$$a_{i\cdots i j\cdots j}>\frac{1}{2}\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n}|a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}|$$

那么 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 P-张量。

证明. 很明显 $a_{i\cdots i j\cdots j}>0$，那么

$$\begin{aligned}
a_{i\cdots i j\cdots j} &> \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n}|a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}|-|a_{i\cdots i j\cdots j}|\\
&\geq \sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n}|a_{i i_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}|-|a_{i\cdots i j\cdots j}|\\
&= \sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\notin\Delta}}^{n}|a_{i i_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}|+\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_p=1\\(i_2,\cdots,i_p)\neq(i\cdots i)}}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\in\Delta}}^{n}|a_{i i_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}|\\
&\quad+\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\in\Delta}}^{n}|a_{i\cdots i j_1\cdots j_q}|-|a_{i\cdots i j\cdots j}|\\
&\geq \sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_q=1\\(j_1,\cdots,j_q)\notin\Delta}}^{n}|a_{i i_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}|+\gamma_i,
\end{aligned}$$

即 $\alpha_i>R_i(\bar{\mathcal{A}})$。类似地，则有

$$\begin{aligned}
a_{i\cdots i j\cdots j} &> \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n}|a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}|-|a_{i\cdots i j\cdots j}|\\
&\geq \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n}|a_{i_2\cdots i_p j j_2\cdots j_q}|-|a_{i\cdots i j\cdots j}|\\
&= \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1\\(i_1,\cdots,i_p)\notin\Omega}}^{m}\sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n}|a_{i_1\cdots i_p j j_2\cdots j_q}|+\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1\\(i_1,\cdots,i_p)\in\Omega}}^{m}\sum_{\substack{j_2,\cdots,j_q=1\\(j_2,\cdots,j_q)\neq(j\cdots j)}}^{n}|a_{i_1\cdots i_p j j_2\cdots j_q}|\\
&\quad+\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1\\(i_1,\cdots,i_p)\in\Omega}}^{m}|a_{i_1\cdots i_p j\cdots j}|-|a_{i\cdots i j\cdots j}|\\
&\geq \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_p=1\\(i_1,\cdots,i_p)\notin\Omega}}^{m}\sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n}|a_{i_1\cdots i_p j j_2\cdots j_q}|+\delta_j,
\end{aligned}$$

即 $\beta_j > C_j(\bar{\mathcal{A}})$。

因此，结合定义4.4和定理4.19可知 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 P-张量。 □

Song和 Qi [72] 提出以下问题：对每个 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$，$TCP(\mathcal{A},\mathbf{q})$ 有唯一解是不是 $\mathcal{A}$ 为一个 P-张量的充要条件？Bai等 [77] 通过两个反例给出了否定的回答。那么对于 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$，我们提出下面问题：如果 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 P- 张量，那么对每个 $\mathbf{q_m} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{q_n} \in \mathbb{R}^n$，$RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 有唯一解吗？通过下面的例子，我们对此给出回答。

例 4.22 设 $\bar{\mathcal{A}} = (a_{i_1i_2j_1j_2}) \in \mathbb{R}^{[2,2,3,2]}$，$a_{1111} = a_{1122} = a_{2222} = a_{2211} = a_{3311} = a_{3322} = 1$，其它的 $a_{i_1i_2j_1j_2} = 0$，且 $\mathbf{q_m} = (3,1,2)^\top$ 和 $\mathbf{q_n} = (0,0)^\top$。那么 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 P-张量，但 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 的解不是唯一的。

证明. 对于任何向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$，则有

$$\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}\mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} x_1y_1^2 + x_1y_2^2 \\ x_2y_2^2 + x_2y_1^2 \\ x_3y_1^2 + x_3y_2^2 \end{pmatrix} \text{ 和 } \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^2\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1^2y_1 + x_2^2y_1 + x_3^2y_1 \\ x_2^2y_2 + x_1^2y_2 + x_3^2y_2 \end{pmatrix}$$

且

$$x_1(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}\mathbf{y}^2)_1 = x_1^2y_1^2 + x_1^2y_2^2;\ x_2(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}\mathbf{y}^2)_2 = x_2^2y_2^2 + x_2^2y_1^2;\ x_3(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}\mathbf{y}^2)_3 = x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2;$$

$$y_1(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^2\mathbf{y})_1 = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_1^2 + x_3^2y_1^2;\ y_2(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^2\mathbf{y})_2 = x_2^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_3^2y_2^2.$$

由于存在 $x_i \neq 0$ 和 $y_j \neq 0$ 使得 $x_i^2y_j^2 > 0$，即显然 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 P-张量。

此外，$RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 的解 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ 需要满足

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \\ y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0, \end{cases} \begin{cases} x_1y_1^2 + x_1y_2^2 + 3 \geq 0, \\ x_2y_2^2 + x_2y_1^2 + 1 \geq 0, \\ x_3y_1^2 + x_3y_2^2 + 2 \geq 0, \\ x_1^2y_1 + x_2^2y_1 + x_3^2y_1 \geq 0, \\ x_2^2y_2 + x_1^2y_2 + x_3^2y_2 \geq 0, \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x_1(x_1y_1^2 + x_1y_2^2 + 3) = 0, \\ x_2(x_2y_2^2 + x_2y_1^2 + 1) = 0, \\ x_3(x_3y_1^2 + x_3y_2^2 + 2) = 0, \\ y_1(x_1^2y_1 + x_2^2y_1 + x_3^2y_1) = 0, \\ y_2(x_2^2y_2 + x_1^2y_2 + x_3^2y_2) = 0. \end{cases}$$

显然，$\mathbf{x} = (0,0,0)^\top$，$\mathbf{y} = (y_1,y_2)^\top$ $(y_1 \geq 0, y_2 \geq 0)$ 是 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 的解。即其解不是唯一的。 □

定理 4.23 设 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 P-张量，当 $\mathbf{q_m} > \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{q_n} > \mathbf{0}$，则 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 只有唯一零解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$，$\mathbf{y} = \mathbf{0}$。

证明. 显然 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$，$\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 是 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 的一个解。假设 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$，那么我们讨论以下三种情况。

(i) 当 $\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ 且 $\mathbf{0}\neq\mathbf{y}\geq\mathbf{0}$ 时，由于 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 P-张量，那么存在某些指标 $k\in I_m$，$l\in I_n$ 使得

$$x_k^{p-1}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_k>0,$$
$$y_l^{q-1}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1})_l>0,$$

由于 $\mathbf{q_m}>\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{q_n}>\mathbf{0}$，即有 $(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_k+q_k>0$ 和 $(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1})_l+q_l>0$，因此

$$\langle\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q+\mathbf{q_m},\mathbf{x}\rangle>0,$$
$$\langle\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1}+\mathbf{q_n},\mathbf{y}\rangle>0.$$

这与 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ 是 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 的解相矛盾。

(ii) 当 $\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ 且 $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 时，由定义4.3(i)可知

$$\langle\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q+\mathbf{q_m},\mathbf{x}\rangle=\sum_{i=1}^{m}x_i(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q+\mathbf{q_m})_i=0$$

结合 $\mathbf{q_m}>\mathbf{0}$，则 $\mathbf{x}=(0,0,\cdots,0)^\top$，这与 $\mathbf{x}$ 是非零解相矛盾。

(iii) 当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 且 $\mathbf{0}\neq\mathbf{y}\geq\mathbf{0}$ 时，由定义4.3(i)可知

$$\langle\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1}+\mathbf{q_n},\mathbf{y}\rangle=\sum_{j=1}^{n}y_j(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1}+\mathbf{q_n})_j=0$$

结合 $\mathbf{q_n}>\mathbf{0}$，则 $\mathbf{y}=(0,0,\cdots,0)^\top$，这与 $\mathbf{y}$ 是非零解相矛盾。

综上，当 $\mathbf{q_m}>\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{q_n}>\mathbf{0}$ 时，$RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 只有零解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$，$\mathbf{y}=\mathbf{0}$。 □

推论 4.24 设 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形张量，当 $\mathbf{q_m}\geq\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{q_n}\geq\mathbf{0}$ 时，$RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 有零解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$，$\mathbf{y}=\mathbf{0}$。

定理 4.25 设 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个非负矩形张量，如果满足以下任何一个条件：

(i) $\mathbf{q_m}>\mathbf{0}$ 且 $\mathbf{q_n}$ 中至少存在一个分量 $q_j<0$；

(ii) $\mathbf{q_n}>\mathbf{0}$ 且 $\mathbf{q_m}$ 中至少存在一个分量 $q_i<0$，

那么 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 无解。

证明. (i) 假设 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ 是 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 的解，那么对所有 $i\in I_m$，

$$(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q+\mathbf{q_m})_i=\sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n}a_{ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q}x_{i_2}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q}+q_i>0.$$

因此，对所有的 $i \in I_m$ 有

$$x_i = 0.$$

由于 $q_j < 0$，那么

$$(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1} + \mathbf{q_n})_j = \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} \sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n} a_{i_1\cdots i_p j j_2\cdots j_q} x_{i_1}\cdots x_{i_p} y_{j_2}\cdots y_{j_q} + q_j < 0,$$

这与 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1} + \mathbf{q_n} \geq \mathbf{0}$ 相矛盾，即 $RTCP(\bar{\mathcal{A}}, \mathbf{q_m}, \mathbf{q_n})$ 无解。

(ii) 假设 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ 是 $RTCP(\bar{\mathcal{A}}, \mathbf{q_m}, \mathbf{q_n})$ 的解，那么对所有 $j \in I_n$，

$$(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1} + \mathbf{q_n})_j = \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m} \sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n} a_{i_1\cdots i_p j j_2\cdots j_q} x_{i_1}\cdots x_{i_p} y_{j_2}\cdots y_{j_q} + q_j > 0.$$

因此，对所有的 $j \in I_n$ 有

$$y_j = 0.$$

由于 $q_i < 0$，那么

$$(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q + \mathbf{q_m})_i = \sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m} \sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n} a_{i i_2\cdots i_p j_1\cdots j_q} x_{i_2}\cdots x_{i_p} y_{j_1}\cdots y_{j_q} + q_i < 0,$$

这与 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q + \mathbf{q_m} \geq \mathbf{0}$ 相矛盾，即 $RTCP(\bar{\mathcal{A}}, \mathbf{q_m}, \mathbf{q_n})$ 无解。 □

定理 4.26 设 $\bar{\mathcal{A}} = (a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}) \in \mathbb{R}^{[p;q;m;n]}$ 是非负矩形张量，如果 $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个矩形 Q-张量，那么对所有 $i \in I_m$，$j \in I_n$ 有 $a_{i\cdots i j\cdots j} > 0$。但是反过来不成立。

证明. 假设存在 $k \in I_m$ 和 $l \in I_n$ 使得 $a_{k\cdots k l\cdots l} = 0$，那么令

$$\mathbf{q_m} = (q_1, \cdots, q_m)^\top \text{ 且 } q_k < 0 \text{ 和 } q_i > 0 \text{ (对所有 } i \in I_m \text{ 和 } i \neq k);$$

$$\mathbf{q_n} = (q_1, \cdots, q_n)^\top \text{ 且 } q_l < 0 \text{ 和 } q_j > 0 \text{ (对所有 } j \in I_n \text{ 和 } j \neq l).$$

再结合定义4.3(i) 可知 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$。由于 $\bar{\mathcal{A}}$ 是非负矩形张量，因此，对每个 $i \in I_m$ 且 $i \neq k$，

$$(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q + \mathbf{q_m})_i = \sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m} \sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n} a_{i i_2\cdots i_p j_1\cdots j_q} x_{i_2}\cdots x_{i_p} y_{j_1}\cdots y_{j_q} + q_i > 0,$$

那么，对所有的 $i \neq k$ 且 $i \in I_m$，则有

$$x_i = 0. \tag{4.4}$$

类似地，对每个 $j\in I_n$ 且 $j\neq l$ 有

$$(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1}+\mathbf{q_n})_j=\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n}a_{i_1\cdots i_p j j_2\cdots j_q}x_{i_1}\cdots x_{i_p}y_{j_2}\cdots y_{j_q}+q_j>0,$$

那么，对所有 $j\neq l$ 且 $j\in I_n$，则有

$$y_j=0. \tag{4.5}$$

因此，由 (4.4)，(4.5)和 $a_{k\cdots kl\cdots l}=0$ 可得

$$\begin{aligned}(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q+\mathbf{q_m})_k&=\sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n}a_{ki_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}x_{i_2}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q}+q_k\\&=a_{k\cdots kl\cdots l}x_k^{p-1}y_l^q+q_k<0,\end{aligned}$$

这与 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q+\mathbf{q_m}\geq\mathbf{0}$ 相矛盾，结论得证。

反过来，由下面例子可知不成立。当然，由定理4.25也可知其逆不成立。□

例 4.27 设 $\bar{\mathcal{A}}=(a_{i_1i_2j_1j_2})\in\mathbb{R}^{[2,2,3,2]}$，$a_{1111}=a_{2211}=a_{3311}=a_{3312}=1$，$a_{1122}=a_{2222}=a_{3322}=2$，其它的 $a_{i_1i_2j_1j_2}=0$，且 $\mathbf{q_m}=(0,2,3)^\top$ 和 $\mathbf{q_n}=(-4,-6)^\top$。那么 $\bar{\mathcal{A}}$ 是非负矩形张量，且对所有 $i\in I_3$，$j\in I_2$ 有 $a_{iijj}>0$，但 $\bar{\mathcal{A}}$ 不是一个矩形 Q-张量。

证明. 对于任何向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^\top$ 和 $\mathbf{y}=(y_1,y_2)^\top$，则有

$$\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}\mathbf{y}^2=\begin{pmatrix}x_1y_1^2+2x_1y_2^2\\x_2y_1^2+2x_2y_2^2\\x_3y_1^2+2x_3y_2^2+x_3y_1y_2\end{pmatrix}\text{ 和 }\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^2\mathbf{y}=\begin{pmatrix}x_1^2y_1+x_2^2y_1+x_3^2y_1+x_3^2y_2\\2x_1^2y_2+2x_2^2y_2+2x_3^2y_2\end{pmatrix}$$

由定义4.3(i)知 $RTCP(\bar{\mathcal{A}},\mathbf{q_m},\mathbf{q_n})$ 的解 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2$ 需要满足

$$\begin{cases}x_1\geq0,\\x_2\geq0,\\x_3\geq0,\\y_1\geq0,\\y_2\geq0,\end{cases}\quad\begin{cases}x_1y_1^2+2x_1y_2^2\geq0,\\x_2y_1^2+2x_2y_2^2+2\geq0,\\x_3y_1^2+2x_3y_2^2+x_3y_1y_2+3\geq0,\\x_1^2y_1+x_2^2y_1+x_3^2y_1+x_3^2y_2-4\geq0,\\2x_1^2y_2+2x_2^2y_2+2x_3^2y_2-6\geq0.\end{cases}\text{ 和 }\begin{cases}x_1(x_1y_1^2+2x_1y_2^2)=0,\\x_2(x_2y_1^2+2x_2y_2^2+2)=0,\\x_3(x_3y_1^2+2x_3y_2^2+x_3y_1y_2+3)=0,\\y_1(x_1^2y_1+x_2^2y_1+x_3^2y_1+x_3^2y_2-4)=0,\\y_2(2x_1^2y_2+2x_2^2y_2+2x_3^2y_2-6)=0.\end{cases}$$

显然，

$$x_2=x_3=0\text{ 且 }y_1\neq0,\ \ y_2\neq0.$$

即

$$x_1^2 y_1 = 4 \text{ 和 } x_1^2 y_2 = 3. \tag{4.6}$$

由此可看出

$$x_1 \neq 0.$$

再结合 $x_1(x_1 y_1^2 + 2x_1 y_2^2) = 0$，可知

$$x_1 y_1^2 + 2x_1 y_2^2 = 0.$$

将(4.6)代入上式，即

$$x_1\left(\frac{4}{x_1^2}\right)^2 + 2x_1\left(\frac{3}{x_1^2}\right)^2 = \frac{34}{x_1^3} = 0.$$

这显然不成立。因此 $RTCP(\bar{\mathcal{A}}, \mathbf{q_m}, \mathbf{q_n})$ 无解，即 $\bar{\mathcal{A}}$ 不是一个矩形 Q-张量。 □

推论 4.28 设一个非负矩形张量是矩形 Q-张量，那么当 $\mathbf{q_m} \geq \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{q_n} \geq \mathbf{0}$ 时，$RTCP(\bar{\mathcal{A}}, \mathbf{q_m}, \mathbf{q_n})$ 的解为 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$。

证明. 由定理4.26可知对所有 $i \in I_m$ 和 $j \in I_n$ 有 $a_{i\cdots ij\cdots j} > 0$，如果向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 是 $RTCP(\bar{\mathcal{A}}, \mathbf{q_m}, \mathbf{q_n})$ 的解，那么

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q + \mathbf{q_m} \geq \mathbf{0} \text{ 和 } \langle \bar{\mathbf{w}}, \mathbf{x} \rangle = \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^q + \mathbf{x}^\top \mathbf{q_m} = 0,$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0},\ \hat{\mathbf{w}} = \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p}\mathbf{y}^{q-1} + \mathbf{q_n} \geq \mathbf{0} \text{ 和 } \langle \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{y} \rangle = \bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^q + \mathbf{x}^\top \mathbf{q_n} = 0.$$

假设存在 $i \in I_m$，$j \in I_n$ 使得 $x_i > 0$ 和 $y_j > 0$，那么

$$\bar{\mathbf{w}}_i = a_{i\cdots ij\cdots j} x_i^{p-1} y_j^q + \sum_{(i_2,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q)\neq(i,\cdots,i,j,\cdots,j)} a_{ii_2\cdots i_p j_1\cdots j_q} x_{i_2}\cdots x_{i_p} y_{j_1}\cdots y_{j_q} + (\mathbf{q_m})_i > 0;$$

和

$$\hat{\mathbf{w}}_j = a_{i\cdots ij\cdots j} x_i^{p} y_j^{q-1} + \sum_{(i_1,\cdots,i_p,j_2,\cdots,j_q)\neq(i,\cdots,i,j,\cdots,j)} a_{i_1\cdots i_p j j_2\cdots j_q} x_{i_1}\cdots x_{i_p} y_{j_2}\cdots y_{j_q} + (\mathbf{q_n})_j > 0,$$

即有

$$\mathbf{x}^\top \bar{\mathbf{w}} = x_i \bar{w}_i + \sum_{k\neq i} x_k \bar{w}_k > 0$$

和

$$\mathbf{y}^\top \hat{\mathbf{w}} = y_j \hat{w}_j + \sum_{l\neq j} y_l \hat{w}_l > 0.$$

这与 $\mathbf{x}^\top\bar{\mathbf{w}} = 0$ 和 $\mathbf{y}^\top\hat{\mathbf{w}} = 0$ 相矛盾，因此 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$。

事实上，不难看出当 $\mathbf{q_m} \geq \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{q_n} \geq \mathbf{0}$ 时,

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \\ y_j \begin{cases} = 0, & \text{如果 } (\mathbf{q_n})_j > 0, \\ \geq 0, & \text{如果 } (\mathbf{q_n})_j = 0. \end{cases} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_i \begin{cases} = 0, & \text{如果 } (\mathbf{q_m})_i > 0, \\ \geq 0, & \text{如果 } (\mathbf{q_m})_i = 0. \end{cases} \\ \mathbf{y} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

是 $RTCP(\bar{\mathcal{A}}, \mathbf{q_m}, \mathbf{q_n})$ 的解。 □

第四节 数值实验

Chang等 [64] 给出了一个计算不可约非负矩形张量最大 H-奇异值的算法。在这里，我们给出了计算不可约非负矩形张量 V-奇异值的相似迭代方法。

算法 2 计算不可约非负矩形张量最大 V-奇异值的迭代算法

1: 选择 $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^m_{++}$ 和 $\mathbf{y}^{(0)} \in \mathbb{R}^n_{++}$，令 $\xi^{(0)} = \bar{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(0)})^{p-1}(\mathbf{y}^{(0)})^q$，$\eta^{(0)} = \bar{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(0)})^p(\mathbf{y}^{(0)})^{q-1}$，并设 $k = 0$.

2: 计算

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{(\xi^{(k)})^{[\frac{1}{p-1}]}}{\|(\xi^{(k)})^{[\frac{1}{p-1}]}\|}, \qquad \mathbf{y}^{(k+1)} = \frac{(\eta^{(k)})^{[\frac{1}{q-1}]}}{\|(\eta^{(k)})^{[\frac{1}{q-1}]}\|},$$

$$\xi^{(k+1)} = \bar{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(k+1)})^{p-1}(\mathbf{y}^{(k+1)})^q, \qquad \eta^{(k+1)} = \bar{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(k+1)})^p(\mathbf{y}^{(k+1)})^{q-1}.$$

3:

$$\underline{\lambda}_{k+1} = \min_{x_i^{(k+1)}>0, y_j^{(k+1)}>0} \{\frac{\xi_i^{(k+1)}}{(x_i^{(k+1)})^{p-1}}, \frac{\eta_j^{(k+1)}}{(y_j^{(k+1)})^{q-1}}\},$$

$$\bar{\lambda}_{k+1} = \max_{x_i^{(k+1)}>0, y_j^{(k+1)}>0} \{\frac{\xi_i^{(k+1)}}{(x_i^{(k+1)})^{p-1}}, \frac{\eta_j^{(k+1)}}{(y_j^{(k+1)})^{q-1}}\}.$$

4: 如果 $\underline{\lambda}_{k+1} = \bar{\lambda}_{k+1}$，则停止。否则，用 k+1替换 k并转到步骤2。

整个实验是在计算机 Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU 2.83GHZ 和 RAM 4.00G-B 中 Matlab R2015b上进行的，我们主要对一些随机生成的矩形张量进行数值实验。对于这些随机生成的矩形张量，每个元素的值都在0到10之间。在实验中，我们选择初始点 $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, \cdots, 1]^\top \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{y}^{(0)} = [1, 1, \cdots, 1]^\top \in \mathbb{R}^n$，并将 $\bar{\lambda}_k - \underline{\lambda}_k \leq 10^{-7}$ 作为迭代停止条件。

表 4.1 随机生成矩形张量的数值结果

(p,q)	(m,n)	Ite	$\bar{\lambda}-\underline{\lambda}$	λ	NormX	NormY
(2,2)	(2,2)	12	2.2647e-08	22.4948	8.4466e-09	5.2455e-09
(2,2)	(2,4)	15	3.7283e-08	39.8712	1.3017e-08	9.3987e-09
(2,2)	(2,6)	9	8.6874e-08	59.1573	8.9933e-10	1.8673e-08
(2,2)	(2,8)	9	4.5172e-08	76.3978	8.4619e-09	8.0273e-09
(2,2)	(2,10)	10	1.3172e-08	101.9109	2.6835e-09	2.2893e-09
(2,3)	(2,2)	9	2.6004e-08	48.7653	9.6867e-09	1.9272e-09
(2,3)	(2,4)	7	1.1189e-08	155.4959	1.8513e-09	2.3503e-09
(2,3)	(2,6)	7	1.7983e-08	352.1554	5.1151e-09	2.8352e-09
(2,3)	(2,8)	6	3.2430e-08	651.6519	5.5557e-09	4.2162e-09
(2,3)	(2,10)	6	2.0532e-08	995.9937	3.2693e-09	2.1849e-09
(3,3)	(2,2)	7	6.3089e-09	85.4742	1.5504e-09	2.0388e-09
(3,3)	(2,4)	6	7.4837e-08	318.4418	6.6777e-09	1.5411e-08
(3,3)	(2,6)	6	4.4319e-08	706.6215	6.2287e-09	7.0233e-09
(3,3)	(2,8)	6	3.0300e-09	1294.8000	3.6925e-10	3.8312e-10
(3,3)	(2,10)	6	2.1453e-09	1984.7000	1.6144e-11	2.4022e-10

表4.1中给出了数值结果, 且每一列都代表着不同的含义。

(p,q) 随机生成矩形张量的阶;

(m,n) 随机生成矩形张量的维;

Ite 迭代次数;

$\bar{\lambda}-\underline{\lambda}$ $\bar{\lambda}_k-\underline{\lambda}_k$ 的最终值;

λ $\frac{1}{2}(\bar{\lambda}_k+\underline{\lambda}_k)$ 的最终值;

NormX $\|\bar{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(k)})^{p-1}(\mathbf{y}^{(k)})^{q}-\lambda_k(\mathbf{x}^{(k)})^{[p-1]}\|_\infty$ 的最终值;

NormY $\|\bar{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(k)})^{p}(\mathbf{y}^{(k)})^{q-1}-\lambda_k(\mathbf{y}^{(k)})^{[q-1]}\|_\infty$ 的最终值。

结果表明，通过算法2可以求出这些随机生成矩形张量的最大 V-奇异值。但是，我们没有研究该算法的收敛性，这值得进一步考虑。

第五章 总结

本文，我们对问题一、问题二给出了回答，讨论了非负 Q-张量互补问题解集的上下界，计算出了 Cauchy-Hankel张量特征值的上界，并通过数值实验来说明我们得到的 M-特征值的上界是有意义的。此外，将 Z-张量的概念推广到矩形张量，重点研究了矩形 Z-张量和矩形 P-张量的理论性质，及张量互补问题解的存在情况，并给出了计算不可约非负矩形张量的 V-奇异值的迭代算法。

第二章，如果所涉及的张量是具有特殊结构的半正 Q-张量，则其与零向量所对应的张量互补问题的非零解至少包含两个非零元素。此外，对于非负 Q-张量的张量互补问题的解，我们得到了它的上下界以及与该张量特征值之间的关系。

第三章，关于有限维和无限维的 Cauchy-Hankel张量，我们讨论了其特征值的上界。另外，也得到了两个相对应的正齐次算子范数的上界。对于四阶部分对称 Cauchy-Hankel张量，我们给出了其 M-正定性的一些充分必要条件，计算出了其 M-特征值的上界，并通过几个数值算例来说明该上界是有意义的。

第四章，我们证明了矩形 Z-张量是矩形 M-张量，当且仅当其所有 V^+-奇异值都是非负的。对于任何正向量，矩形 P-张量的张量互补问题只有零解，且偶数阶严格对角占优矩形张量是矩形 P-张量。此外，对于非负矩形张量，我们讨论了其相应的矩形张量互补问题无解的充分条件，并给出了计算其最大 V-奇异值的相关算法。

此外，仍有一些问题有待进一步研究。如：

- 对于一个阶数小于或等于6的协正张量，假如它的3阶主子张量都是 Q-张量，那么这样的协正张量是 Q-张量当且仅当它是 R_0-张量吗？
- Q-张量的张量互补问题解集的上下界存在吗？如果存在，那么怎么计算呢？
- 本文求出的 Cauchy-Hankel张量特征值的上界是最好的吗？
- 如何证明算法2的收敛性？

这些都是我们需要进一步考虑的问题。

参考文献

[1] Qi L Q. Eigenvalues of a real supersymmetric tensor[J]. *Journal of symbolic computation*, 2005, **40**, 1302-1324.

[2] Qi L Q. Rank and eigenvalues of a supersymmetric tensor, the multivariate homogeneous polynomial and the algebraic hypersurface it defines[J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2006, **41**, 1309-1327.

[3] Lim L H. Singular values and eigenvalues of tensors: a variational approach[C]. In: Proceedings of the 1st IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing, 2005. 129-132.

[4] Chang K C, Zhang T. On the uniqueness and non-uniqueness of the positive Z-eigenvector for transition probability tensors[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, **408**, 525-540.

[5] Culp J, Pearson K, Zhang T. On the uniqueness of the Z_1-eigenvector of transition probability tensors[J]. *Linear and Multilinear Algebra*, 2017, **65**, 891-896.

[6] Song Y S, Qi L Q. Properties of tensor complementarity problem and some classes of structured tensors[J]. *Annals of Applied Mathematics*, 2017, **33(3)**, 308-323.

[7] Song Y S, Qi L Q. Tensor complementarity problem and semi-positive tensors[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2016, **169(3)**, 1069-1078.

[8] Huang Z H, Suo Y Y, Wang J. On Q-tensors[J]. *Pacific Journal of Optimization*, 2020, **16(1)**, 67-86.

[9] Xu Y, Gu W Z, Huang Z H. Estimations on upper and lower bounds of solutions to a class of tensor complementarity problems[J]. *Frontiers of Mathematics in China*, 2019, **14(3)**, 661-671.

[10] Comon P. Tensor decompositions: state of the art and applications[J], in Mathematics in Signal Processing, V (Coventry, 2000). The Institute of Mathematics and its Applications Conference Series, vol. 71 (Oxford University, Oxford, 2002), pp. 1-24.

[11] Yang Y N, Yang Q Z. Further results for Perron-Frobenius Theorem for nonneg-

ative tensors[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2010, **31**, 2517-2530.

[12] Chang K C, Pearson K, Zhang T. Perron Frobenius Theorem for nonnegative tensors[J]. *Communications in Mathematical Sciences*, 2008, **6**, 507-520.

[13] Hu S L, Huang Z H, Qi L Q. Finding the spectral radius of a nonnegative tensor[J], 2011, http://arxiv.org/abs/1111.2138v1.

[14] Che M L, Qi L Q, Wei Y M. Positive definite tensors to nonlinear complementarity problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2016, **168**, 475-487.

[15] Qi L Q. Symmetric nonnegative tensors and copositive tensors[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, **439**, 228-238.

[16] Chen H B, Huang Z H, Qi L Q. Copositive tensor detection and its applications in physics and hypergraphs[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2018, **69**, 133-158.

[17] Li L, Zhang X Z, Huang Z H, Qi L Q. Test of copositive tensors[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2019, **15(2)**, 881-891.

[18] Chen H B, Wang Y J. High-order copositive tensors and its applications[J]. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 2018, **8(6)**, 1863-1885.

[19] Zheng Y N, Wu W. On a class of semi-positive tensors in tensor complementarity problem[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1979, **177**, 127-136.

[20] Gowda M S, Luo Z Y, Qi L Q, Xiu N H. Z-tensors and complementarity problems[J]. 2016, arXiv:1510.07933v2.

[21] Zhang L P, Qi L Q, Zhou G L. M-tensors and some applications[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2014, **35(2)**, 437-452.

[22] Ding W Y, Qi L Q, Wei Y M. M-tensors and nonsingular M-tensors[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, **439**, 3264-3278.

[23] Guo Q, Zheng M M, Huang Z H. Properties of S-tensors[J]. *Linear and Multilinear Algebra*, 2019, **67**, 685-696.

[24] Wang Y, Huang Z H, Bai X L. Exceptionally regular tensors and tensor complementarity problems[J]. *Optimization Methods and Software*, 2016, **31(4)**, 815-

828.

[25] Yuan P Z, You L H. Some remarks on P, P_0, B and B_0 tensors[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2014, **459**, 511-521.

[26] Ding W Y, Luo Z Y, Qi L Q. P-Tensors, P_0-Tensors, and their applications[J]. *Linear Algebra and its Applications*. 2018, **555**, 336-354.

[27] Song Y S, Mei W. Structural properties of tensors and complementarity problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2018, **176(2)**, 289-305.

[28] Song Y S, Qi L. Infinite and finite dimensional Hilbert tensors[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2014, **451**, 1-14.

[29] Mei W, Song Y S. Infinite and finite dimensional generalized Hilbert tensors[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2017, **532**, 8-24.

[30] Chen H B, Li G Y, Qi L Q. Further results on Cauchy tensors and Hankel tensors[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, **275**, 50-62.

[31] Chen H B, Qi L Q. Positive definiteness and semi-definiteness of even order symmetric Cauchy tensors[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2015, **11(4)**, 1263-1274.

[32] Gowda M S. On Q-matrices[J]. *Mathematical Programming*, 1990, **49**, 139-141.

[33] Aganagic M, Cottle R W. A note on Q-matrices[J]. *Mathematical Programming*, 1979, **16**, 374-377.

[34] Pang J S. On Q-matrices[J]. *Mathematical Programming*, 1979, **17**, 243-247.

[35] Murthy G S R, Parthasarathy T. Some properties of fully semimonotone Q_0-matrices[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1995, **16**, 1268-1286.

[36] Danao R A. Q-matrices and boundedness of solutions to linear complementarity problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1994, **83(2)**, 321-332.

[37] Cottle R W. Completely Q-matrices[J]. *Mathematical Programming*, 1980, **19**, 347-351.

[38] Song Y S, Yu G H. Properties of solution set of tensor complementarity problem[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2016, **170**, 85-96.

[39] Murthy G S R, Parthasarathy T and Ravindran G. A copositive Q-matrix which

is not R_0[J]. *Mathematical Programming*, 1993, **61**, 131-135.

[40] Jeter M W, Pye W C. Some remarks on copositive Q-matrices and on a conjecture on Pang[J]. *Industrial Mathematics*, 1985, **35**, 75-80.

[41] Murthy G S R, Parthasarathy T and Ravindran G. On copositive, semimonotone Q-matrices[J]. *Mathematical Programming*, 1995, **68**, 187-203.

[42] Güngör A D. Lower bounds for the norms of Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel matrices[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **157(3)**, 599-604.

[43] Solak S, Bozkurt D. Some bounds on l_p matrix and l_p operator norms of almost circulant, Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel matrices[J]. *Mathematical and Computational Applications*, 2002, **7(3)**, 211-218.

[44] Solak S, Bozkurt D. On the spectral norms of Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel matrices[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2003, **140(2)**, 231-238.

[45] Türkmen R, Bozkurt D. On the bounds for the norms of Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel matrices[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2002, **132**, 633-642.

[46] Meng J, Song Y S. Upper bounds for Z_1-eigenvalues of generalized Hilbert tensors[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2020, **16(2)**, 911-918.

[47] Li S H, Li Y T. Checkable Criteria for the M-Positive Definiteness of Fourth-Order Partially Symmetric Tensors[J]. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 2020, **46**, 1455-1463.

[48] Wang G, Sun L X, Liu L X. M-eigenvalues-based sufficient conditions for the positive definiteness of fourth-order partially symmetric tensors[J]. *Complexity*, 2020(3), 1-8.

[49] Che H T, Chen H B, Wang Y J. M-positive semi-definiteness and M-positive definiteness of fourth-order partially symmetric Cauchy tensors[J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2019, 2019: 32.

[50] Qi L Q, Dai H H, Han D R. Conditions for strong ellipticity and M-eigenvalues[J]. *Frontiers of Mathematics in China*, 2009, **4**, 349-364.

[51] Che H T, Chen H B, Wang Y J. On the M-eigenvalue estimation of fourth-order partially symmetric tensors[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2020, **16(1)**, 309-324.

[52] Chang K C, Pearson K J, Zhang T, Some variational principles for Z-eigenvalues of nonnegative tensors[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, **438**, 4166-4182.

[53] Song Y S, Qi L Q, Spectral properties of positively homogeneous operators induced by higher order tensors[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2013, **34**, 1581-1595.

[54] He J, Xu G J, Liu Y M. Some inequalities for the minimum M-eigenvalue of elasticity M-tensors[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2020, **16(6)**, 3035-3045.

[55] Zhang Y, Sun L X, Wang G. Sharp Bounds on the Minimum M-Eigenvalue of Elasticity M-Tensors[J]. *Mathematics* 2020, **8(2)**, 250.

[56] Knowles J K, Sternberg E. On the ellipticity of the equations of non-linear elastostatics for a special material[J]. *Journal of Elasticity*, 1975, **5**, 341-361.

[57] Knowles J K, Sternberg E. On the failure of ellipticity of the equations for finite elastostatic plane strain[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1997, **63**, 321-336.

[58] Rosakis P. Ellipticity and deformations with discontinuous deformation gradients in finite elastostatics[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1990, **109**, 1-37.

[59] Wang Y, Aron M. A reformulation of the strong ellipticity conditions for unconstrained hyperelastic media[J]. *Journal of Elasticity*, 1996, **44**, 89-96.

[60] Simpson H C, Spector S J. On copositive matrices and strong ellipticity for isotropic elastic materials[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1983, **84**, 55-68.

[61] Dahl D, Leinass J M, Myrheim J, Ovrum E. A tensor product matrix approximation problem in quantum physics[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2007, **420**, 711-725.

[62] Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can quantum-mechanical description of phys-

ical reality be considered complete?[J]. *Physical review*, 1935, **48**, 696-702.

[63] Schrödinger E. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik[J], *Naturwissenschaften*, 1935, **23**, 807-812.

[64] Chang K C, Qi L Q, Zhou G L. Singular values of a real rectangular tensor[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, **370**, 284-294.

[65] Yang Y N, Yang Q Z. Singular values of nonnegative rectangular tensors[J]. *Frontiers of Mathematics in China* 2011, **6(2)**, 363-378.

[66] Ng M, Qi L Q, Zhou G L. Finding the largest eigenvalue of a non-negative tensor[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2009, **31**, 1090-1099.

[67] Gu Y N, Wu W. Partially symmetric nonnegative rectangular tensors and copositive rectangular tensors[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2019, **15(2)**, 775-789.

[68] Wang C Y, Chen H B, Wang Y J, Zhou G L. On copositiveness identification of partially symmetric rectangular tensors[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020, **372**, 112678.

[69] He J, Liu Y M, Xu G J, Liu G. V-singular values of rectangular tensors and their applications[J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2019, 2019: 84.

[70] Zeng Q Y, He J, Liu Y M. Structured rectangular tensors and rectangular tensor complementarity problems[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020.

[71] Luo Z Y, Qi L Q, Xiu N H. The sparsest solutions to Z-tensor complementarity problems[J]. *Optimization Letters*, 2017, **11(3)**, 471-482.

[72] Song Y S, Qi L Q. Properties of some classes of structured tensors[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2015, **165**, 854-873.

[73] Ferris M C, Pang J S. Engineering and economic applications of complementarity problems[J]. *SIAM Review*, 1997, **39(4)**, 669-713.

[74] Harker P T, Pang J S. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications[J]. *Mathematical Programming*, 1990, **48(1-3)**, 161-220.

[75] Han J Y, Xiu N H, Qi H D. Nonlinear complementary Theory and Algorithm[M]. *Shanghai Science and Technology Press*, Shanghai, 2006. (in Chinese).

[76] Facchinei F, Pang J S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Comple-

mentarity Problems: vol. I[M]. *Springer Science and Business Media*, New York, 2007.

[77] Bai X L, Huang Z H, Wang Y. Global uniqueness and solvability for tensor complementarity problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2016, **170**, 72-84.

[78] Wang X Z, Che M L, Wei Y M. Global uniqueness and solvability of tensor complementarity problems for $\mathcal{H}_+$-tensors[J]. *Numerical Algorithms*, 2020, **84**, 567-590.

[79] Chen H B, Qi L Q, Song Y S. Column sufficient tensors and tensor complementarity problems[J]. *Frontiers of Mathematics in China*, 2018, **13(2)**, 255-276.

[80] Liu D D, Li W, Vong S W. Tensor complementarity problems: the GUS-property and an algorithm[J]. *Linear and Multilinear Algebra*, 2018, **66(9)**, 1726-1749.

[81] Balaji R, Palpandi K. Positive definite and Gram tensor complementarity problems[J]. *Optimization Letters*, 2018, **12**, 639-648.

[82] Yu W, Ling C, He H J. On the properties of tensor complementarity problems[J]. *Pacific Journal of Optimization*, 2018, **14(4)**, 675-691.

[83] Bai X L, Huang Z H, Li X. Stability of solutions and continuity of solution maps of tensor complementarity problems[J]. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 2019, **36(2)**, 1940002.

[84] Hieu V T. On the R_0-tensors and the solution map of tensor complementarity problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, **181**, 163-183.

[85] Guan H B, Li D H. Linearized methods for tensor complementarity problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2020, **184**, 972-987.

[86] Wang X Z, Che M L, Qi L Q, Wei Y M. Modified gradient dynamic approach to the tensor complementarity problem[J]. *Optimization Methods and Software*, 2020, **35(2)**, 394-415.

[87] Xie S L, Li D H, Xu H R. An iterative method for finding the least solution to the tensor complementarity problem[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2017, **175(1)**, 119-136.

[88] Zhang K L, Chen H B, Zhao P F. A potential reduction method for tensor com-

plementarity problems[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2019, **15(2)**, 429-443.

[89] Zhao X, Fan J Y. A semidefinite method for tensor complementarity problems[J]. *Optimization Methods and Software*, 2019, **34(4)**, 758-769.

[90] Hu S L, Wang J, Huang Z H: An inexact augmented Lagrangian multiplier method for solving quadratic complementary problems: an adapted algorithmic framework combining specific resolution techniques[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, **361**, 64-78.

[91] Han L X. A continuation method for tensor complementarity problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, **180**, 949-963.

[92] Xu H R, Li D H, Xie S L. An equivalent tensor equation to the tensor complementarity problem with positive semi-definite Z-tensor[J]. *Optimization Letters*, 2019, **13**, 685-694.

[93] Du S Q, Zhang L P. A mixed integer programming approach to the tensor complementarity problem[J]. *Journal of Global Optimization*, 2019, **73(4)**, 789-800.

[94] Huang Z H, Qi L Q. Tensor complementarity problems-part I: basic theory[J], *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, **183(1)**, 1-23.

[95] Qi L Q, Huang Z H. Tensor complementarity problems-part II: solution methods[J], *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, **183(2)**, 365-385.

[96] Huang Z H, Qi L Q. Tensor complementarity problems-part III: applications[J], *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, **183(3)**, 771-791.

[97] Song Y S, Qi L Q. Strictly semi-positive tensors and the boundedness of tensor complementarity problems[J]. *Optimization Letters*, 2017, **11**, 1407-1426.

[98] Cooper J, Dutle A. Spectra of uniform hypergraphs[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2012, **436**, 3268-3292.

[99] Drineas P, Lim L H. A multilinear spectral theory of hypergraphs and expander hypergraphs[J], 2005.

[100] Hu S L, Qi L Q. Algebraic connectivity of an even uniform hypergraph[J]. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2012, **24**, 564-579.

[101] De Lathauwer L, De Moor B, Vandewalle J. On the best rank-1 and rank-(R_1, R_2, $\cdots$, R_N) approximation of higher-order tensors[J]. *SIAM Journal on Matrix*

Analysis and Applications, 2000, **21**, 1324-1342.

[102] Qi L Q, Sun W Y, Wang Y J. Numerical multilinear algebra and its applications[J]. *Frontiers of Mathematics in China*, 2007, **2**, 501-526.

[103] Ni Q, Qi L Q, Wang F. An eigenvalue method for testing positive definiteness of a multivariate form[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**, 1096-1107.

[104] Liu Y J, Zhou G L, Ibrahim N F. An always convergent algorithm for the largest eigenvalue of an irreducible nonnegative tensor[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2010, **235**, 286-292.

[105] Pearson K. Essentially positive tensors[J]. *International Journal of Algebra*, 2010, **4**, 421-427.

[106] Chang K C, Pearson K, Zhang T. Primitivity, the convergence of the NQZ method, and the largest eigenvalue for nonnegative tensors[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2011, **32**, 806-819.

[107] Zhang L P, Qi L Q. Linear convergence of an algorithm for computing the largest eigenvalue of a nonnegative tensor[J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2012, **19**, 830-841.

[108] Friedland S, Gaubert S, Han L. Perron-Frobenius theorem for nonnegative multilinear forms and extensions[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, **438(2)**, 738-749.

[109] Zhang L P, Qi L Q, Xu Y. Linear convergence of the LZI algorithm for weakly positive tensors[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2012, **30(1)**, 24-33.

[110] Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey*, 1962.

[111] Collatz L. Einschliessungssatz f*ü*r die charakteristischen Zahlen von Matrizen[J]. *Mathematische Zeitschrift*, 1942, **48(1)**, 221-226.

[112] Wood R J, O'Neill M J. Finding the spectral radius of a large sparse non-negative matrix[J]. *ANZIAM Journal*, 2007, **48**, C330-C345.

[113] Zhou G L, Caccetta L, Qi L Q. Convergence of an algorithm for the largest singular value of a nonnegative rectangular tensor[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, **438**, 959-968.

[114] Chen Z M, Qi L Q, Yang Q Z, Yang Y N. The solution methods for the largest eigenvalue (singular value) of nonnegative tensors and convergence analysis[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, **439**, 3713-3733.

[115] Ragnarsson S, Van Loan C F. Block tensors and symmetric embeddings[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, **438(2)**, 853-874.

[116] Frazer H. Note on Hilbert′s inequality[J]. *Journal of the London Mathematical Society*, 1946, **21**, 7-9.

[117] Kuang J C, Debnath L. On new generalizations of Hilbert’s inequality and their applications[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, **245**, 248-265.

[118] Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. Inequalities[M]. Cambridge, UK: *Cambridge University Press*, 1952.

致谢

时光如白驹过隙，转眼间三年的博士生涯即将结束。在即将离开之际感觉对南开有太多的不舍。在这里，想对我的导师，家人，同学表示我最衷心的感谢，谢谢你们对我科研、生活上的关心与帮助。

首先，我要特别感谢我的导师杨庆之教授。第一次见到杨老师，就深深地感受到杨老师的博学多才与温文儒雅。杨老师对待科研严谨认真，每次上讨论班，都会提出很多问题，让我们发表自己的看法，从而开拓我们的思维、引导我们思考，并从中发现新课题。课下也会经常给我们很多课题，帮助我们每个同学找到适合自己的研究方向。在论文及毕业论文的写作过程中，杨老师不厌其烦地帮我一遍遍修改，并给予悉心指导。除此之外，在平常生活中，杨老师也会给我们无微不至的关心和帮助，感谢杨老师在教我专业知识的同时也教我为人处事。在此，向杨老师表达我最衷心的的感谢和最诚挚的敬意！

感谢罗刚师兄、黄鹏斐师妹，感谢你们在我写论文时仔细的帮我检查语法错误，在平时的学习中耐心的帮我答疑解惑，怀念与你们在一起学习的快乐时光，谢谢你们！另外还要感谢唐耀宗、阿米娜、唐云飞、杨雪梅、冯晓丹、王子、柏由进，感谢你们平时对我学习和生活上的关心与照顾！

感谢吴春林老师及数学院的其他老师，谢谢你们为我们提供了良好的学习环境，丰富的教学资源。

感谢我的爱人王鑫对我的支持与理解，让我能够没有后顾之忧地在学校继续学习。

感谢我的家人，谢谢你们一直以来对我的鼓励、支持与理解，感谢你们这么多年来对我的培养和默默的付出！谢谢你们！

个人简历

个人信息：

姓名：梅炜

籍贯：河南信阳

教育背景：

2018.09–2021.07, 南开大学计算数学专业（博士研究生）

2015.09–2018.07, 河南师范大学运筹学与控制论专业（硕士研究生）

2010.09–2014.07, 河南师范大学数学与应用数学专业（本科）

研究成果：

1. Mei Wei, Yang Qingzhi. Properties of structural tensors and complementarity problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*,2020,**185**, 99-114.
2. Mei Wei, Yang Qingzhi. Upper bounds for eigenvalues of Cauchy-Hankel tensors. *Frontiers of Mathematics in China*,2020, in press.
3. Yang Qingzhi, Paek Yujin and Mei Wei. Further investigation of positive definiteness of fourth order Cauchy and Hankel tensors,2020, submitted.
4. Mei Wei, Yang Qingzhi and Huang Pengfei. Properties of some classes of structured rectangular tensors,2021, finished.