中图分类号:　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　学校代码:　10055

UDC:　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　密级:　公开

南開大學

博 士 学 位 论 文

几类结构张量特征值和互补问题的研究

Research on eigenvalues and complementarity problems of several structured tensors

论文作者　梅炜　　　　　　　　指导教师　杨庆之　教授

申请学位　理学博士　　　　　　培养单位　数学科学学院

学科专业　计算数学　　　　　　研究方向　张量优化

答辩委员会主席　黄正海 教授　　评 阅 人　黄正海 教授、魏益民 教授、宋义生 教授、凌晨 教授、王宜举 教授

南开大学研究生院

二〇二一年五月

南开大学学位论文使用授权书

本人完全了解《南开大学关于研究生学位论文收藏和利用管理办法》关于南开大学(简称“学校”)研究生学位论文收藏和利用的管理规定，同意向南开大学提交本人的学位论文电子版及相应的纸质本。

本人了解南开大学拥有在《中华人民共和国著作权法》规定范围内的学位论文使用权，同意在以下几方面向学校授权。即：

1.学校将学位论文编入《南开大学博硕士学位论文全文数据库》，并作为资料在学校图书馆等场所提供阅览，在校园网上提供论文目录检索、文摘及前16页的浏览等信息服务；

2.学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存学位论文；学校根据规定向教育部指定的收藏和存档单位提交学位论文；

3.非公开学位论文在解密后的使用权同公开论文。

本人承诺：本人的学位论文是在南开大学学习期间创作完成的作品，并已通过论文答辩；提交的学位论文电子版与纸质本论文的内容一致，如因不同造成不良后果由本人自负。

本人签署本授权书一份（此授权书为论文中一页），交图书馆留存。

学位论文作者暨授权人(亲笔)签字：梅炜

2021 年 6 月 17 日

南开大学研究生学位论文作者信息

论文题目	几类结构张量特征值和互补问题的研究				
姓名	梅炜	学号	1120180025	答辩日期	2021年5月25日
论文类别	博士■ 学历硕士□ 专业学位硕士□ 同等学力硕士□ 划■选择				
学院(单位)	数学科学学院	学科/专业(专业学位)名称	计算数学		
联系电话	16622808845	电子邮箱	meiwei326@qq.com		
通讯地址(邮编)：天津市南开区卫津路94号南开大学数学科学学院(300071)					
非公开论文编号		备注			

注：本授权书适用我校授予的所有博士、硕士的学位论文。如已批准为非公开学位论文，须向图书馆提供批准通过的《南开大学研究生申请非公开学位论文审批表》复印件和“非公开学位论文标注说明”页原件。

南开大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：梅炜　　　　2021年6月17日

非公开学位论文标注说明

(本页表中填写内容须打印)

根据南开大学有关规定，非公开学位论文须经指导教师同意、作者本人申请和相关部门批准方能标注。未经批准的均为公开学位论文，公开学位论文本说明为空白。

论文题目			
申请密级	□限制(≤2年)　□秘密(≤10 年)　□机密(≤20年)		
保密期限	20　年　月　日至20　年　月　日		
审批表编号		**批准日期**	20　年　月　日

南开大学学位评定委员会办公室盖章(有效)

注：限制★2年(可少于2年);秘密★10年(可少于10年);机密★20年(可少于20年)

中文摘要

本文研究了几类结构张量的理论性质及其张量互补问题，主要讨论了非负Q-张量的张量互补问题解集的具体上下界；Cauchy-Hankel张量特征值的上界；矩形 Z-张量、矩形 P-张量的性质及相应互补问题解的存在情况。并运用相关算法来计算张量的特征值。论文结构如下：

首先，对由张量互补问题可解性定义的 Q-张量给出一些新的结果。对于这类结构张量，我们给出了充分条件来保证其相应的张量互补性问题的非零解至少包含两个非零分量，并讨论了它与其它结构张量之间的关系。此外，关于非负 Q-张量的张量互补问题，我们得到了其解集的上下界，并且证明了该张量的特征值与此解集密切相关。

其次，我们给出了有限维和无限维 Cauchy-Hankel张量特征值的上下界，并证明了由 m 阶无限维 Cauchy-Hankel张量定义的算子是一个从 l^1 到 $l^p(1 < p < \infty)$ 的有界、正 $(m-1)$-齐次算子。同时给出了相对应的两个正齐次算子范数的上界。此外，对于四阶实部分对称 Cauchy-Hankel张量，我们得到了 M-正定性的充分必要条件，并且给出了 M-特征值的上界，通过数值实验可以看出，该上界与由幂法计算出的上界很接近。

最后，我们讨论了矩形 Z-张量的性质，证明了一个矩形 Z-张量是一个矩形 M-张量当且仅当它的 V^+-奇异值都是非负的，并证明了矩形 M-张量的最大对角元素是非负的。此外，关于矩形强 M-张量的结果也相应地得到。同时，我们证明了一个偶数阶严格对角占优矩形张量是一个矩形 P-张量，并且证明了矩形 P-张量的矩形张量互补问题对于任何正向量都只有零解。此外，给出了非负矩形张量的矩形张量互补问题无解的充分条件。最后，通过数值实验来说明提出算法的有效性。

关键词： 结构张量；张量互补问题；特征值；上下界；范数；M-正定

Abstract

This thesis studies the theoretical properties of several structured tensors and complementarity problem, mainly discusses the specific upper and lower bounds of solution set of tensor complementarity problem for nonnegative Q-tensors; the upper bounds of the eigenvalues of Cauchy-Hankel tensors; the properties of rectangular Z-tensors and rectangular P-tensors, and the existence of solutions for the corresponding complementarity problems. And calculate the eigenvalues of tensors by related algorithms. The thesis is organized as follows.

First, we present some new results on Q-tensors, which are defined by the solvability of the corresponding tensor complementarity problem. For such structured tensors, we give a sufficient condition to guarantee the nonzero solution of the corresponding tensor complementarity problem with a vector containing at least two nonzero components, and discuss their relationships with some other structured tensors. Furthermore, with respect to the tensor complementarity problem with a non-negative Q-tensor, we obtain the upper and lower bounds of its solution set, and by the way, we show that the eigenvalues of such a tensor are closely related to this solution set.

Next, we present upper bounds of eigenvalues for finite and infinite dimensional Cauchy-Hankel tensors. It is proved that an m-order infinite dimensional Cauchy-Hankel tensor defines a bounded and positively $(m-1)$-homogeneous operator from l^1 into $l^p (1 < p < \infty)$, and two upper bounds of corresponding positively homogeneous operator norms are given. Moreover, for a fourth-order real partially symmetric Cauchy-Hankel tensor, sufficient and necessary conditions of M-positive definiteness are obtained, and an upper bound of M-eigenvalue is also given. And numerical experiments show that the upper bound is very close to that calculated by power method.

Last, we discuss some properties of rectangular Z-tensors. It is proved that a rectangular Z-tensor is a rectangular M-tensor if and only if all of its V^+-singular value are nonnegative, we present that the maximal diagonal element of rectangular M-tensors is nonnegative. Moreover, some corresponding results of strong rectangular M-tensors are also obtained. In addition, we prove that an even order strictly diagonally dominated rectangular tensor is a rectangular P-tensor, and also establish that rectangular tensor complementarity problem, corresponding to a rectangular P-tensor, has only zero vector solution for any positive vectors. Besides, some sufficient conditions are given for the rectangular tensor complementarity problem with nonnegative rectangular tensors to have no solution. At last, numerical experiments are showed to test the efficiency of the proposed algorithm.

Key Words: Structured tensor; Tensor complementarity problems; Eigenvalues; Upper and lower bounds; Norm; M-positive definite

目录

第一章　绪论

第一节　张量简介

一个 m 阶 n 维张量（超矩阵）$\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})$ 是实数 $a_{i_1\cdots i_m}\in\mathbb{R}$ 的多维数组，这里 $i_j\in I_n:=\{1,2,\cdots,n\}$ 和 $j\in I_m:=\{1,2,\cdots,m\}$。$T_{m,n}$ 是包含所有 m 阶 n 维张量的集合。$\mathcal{I}$ 是单位张量，其所有对角元素是1，且非对角元素是0。此外，定义 $\mathbb{R}^n:=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\top: x_i\in\mathbb{R}, i\in I_n\}$ 和 $\mathbb{R}^n_+:=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\mathbf{x}\geq\mathbf{0}\}$，这里 $\mathbb{R}$ 代表所有的实数集，$\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ 表示对所有 $i\in I_n$ 都有 $x_i\geq 0$。$\mathbb{Z}$ 是所有整数的集合，和 $\mathbb{Z}^+(\mathbb{Z}^-)$ 是所有非负 (非正) 整数的集合。用 “$\langle\cdot,\cdot\rangle$” 表示两个同维向量的内积，即 $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\mathbf{y}^\top\mathbf{x}$。如果张量的所有元素都是非负的，则称其为非负张量。此外，如果元素 $a_{i_1\cdots i_m}$ 在其指标作任意置换时均不变，则称其为对称张量，所有实 m 阶 n 维对称张量的集合记为 $S_{m,n}$。

设 $\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})\in T_{m,n}$ 和向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\top\in\mathbb{R}^n$，那么 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}$ 是一个向量且它的第 i 个元素是

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1})_i:=\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n} a_{ii_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m},\forall i\in I_n$$

$\mathcal{A}\mathbf{x}^m$ 是一个 m 齐次多项式，其定义如下

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^m:=\langle\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1},\mathbf{x}\rangle=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m=1}^{n} a_{i_1i_2\cdots i_m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}.$$

1.1.1　张量特征值

张量特征值，H-特征值，E-特征值和 Z-特征值等是由 Qi [1,2] 和 Lim [3] 最先提出来的。随后，针对高阶马尔可夫链，Chang和 Zhang [4] 首次引入了 Z_1-特征值的概念。且 Culp等 [5] 研究了转移概率张量的 Z_1-特征向量的唯一性。

定义 1.1 设 $\mathcal{A}=(a_{i_1i_2\cdots i_m})\in T_{m,n}$，

(i) 一个数 $\lambda\in\mathbb{C}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的一个特征值，且非零向量 $\mathbf{x}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 λ 的一个特征向量，如果 $(\lambda,\mathbf{x})$ 满足

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}=\lambda\mathbf{x}^{[m-1]}.$$

显然，如果 $\mathbf{x}$ 是实的，那么 λ 也是实的。在这种情况下，λ 和 $\mathbf{x}$ 分别称为 $\mathcal{A}$ 的一个 H-特征值和一个 H-特征向量。

(ii) 一个数 $\mu \in \mathbb{C}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的一个 E-特征值，且非零向量 $\mathbf{x}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 μ 的一个 E-特征向量，如果 $(\mu, \mathbf{x})$ 满足

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} = \mu\mathbf{x}(\mathbf{x}^\top\mathbf{x})^{\frac{m-2}{2}}.$$

显然，如果 $\mathbf{x}$ 是实的，那么 μ 也是实的。在这种情况下，μ 和 $\mathbf{x}$ 分别称为 $\mathcal{A}$ 的一个 Z-特征值和一个 Z-特征向量。

(iii) 一个数 $\sigma \in \mathbb{R}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的一个 Z_1-特征值，且实向量 $\mathbf{x}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 σ 的一个 Z_1-特征向量，如果 $(\sigma, \mathbf{x})$ 满足

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} = \sigma\mathbf{x} \text{ 和 } \|\mathbf{x}\|_1 = 1.$$

1.1.2 结构张量

现在，我们来回忆一些结构张量的定义。

定义 1.2 设 $\mathcal{A} = (a_{i_1\cdots i_m}) \in T_{m,n}$，那么 $\mathcal{A}$ 称为一个

(1) Q-张量 *[6]*，若对每个向量 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$，张量互补问题 $TCP(\mathcal{A}, \mathbf{q})$，

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} + \mathbf{q} \geq \mathbf{0} \text{ 和 } \langle \mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} + \mathbf{q}, \mathbf{x} \rangle = 0 \tag{1.1}$$

有一个解；

(2) 完全 Q-张量 *[7]*，若它的每个主子张量都是 Q-张量；

(3) （严格）半正张量 *[6]*，若对每个 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$，存在一个指标 $k \in I_n$ 使得 $x_k > 0$ 和 $\left(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}\right)_k (>) \geq 0$；

(4) 协正张量 *[8]*，若对所有的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ 有 $\mathcal{A}\mathbf{x}^m \geq 0$；

(5) R_0-张量 *[6]*，若 $TCP(\mathcal{A}, \mathbf{0})$ 有唯一解 $\mathbf{0}$；

(6) 广义行严格对角占优张量 *[9]*，若对所有 $k \in I_n$ 有

$$|a_{kk\cdots k}| - \sum_{\substack{a_{ki_2i_3\cdots i_m} < 0 \\ (i_2, i_3, \cdots, i_m) \neq (k, k, \cdots, k)}} |a_{ki_2i_3\cdots i_m}| > 0.$$

第二节 本课题的研究现状

1.2.1 结构张量的研究现状

张量，作为矩阵的高阶推广，在化学计量学、高阶统计、数据分析与挖掘和信号处理等方面有着重要的应用 [10]。近年来，各种结构张量的性质被广

泛的研究，如非负张量 [11–13]、正定张量 [1,14]、协正张量 [15–18]、半正张量 [6,19]、Z-张量 [20]、M-张量 [21,22]、S-张量 [23]、ER-张量 [24]、$P(P_0)$-张量 [25,26]、$B(B_0)$-张量 [25,27]、$R(R_0)$-张量 [6]、Hilbert张量 [28,29]、Cauchy张量 [30,31]等。但目前关于 Q-张量、Cauchy-Hankel张量以及矩形张量的研究相对较少，本文主要针对这几类张量展开研究。

众所周知，Q-矩阵（对每个向量，当相应的线性互补问题都有一个解时，则该矩阵称为 Q-矩阵）在结构矩阵领域和互补问题理论中都起着重要的作用，其许多好的性质已经被研究，可以参考文献 [32–37]。最近，Song和 Qi [6] 将 Q-矩阵的概念推广到 Q-张量，即，一个张量被称为 Q-张量当且仅当对每个向量，其相应的张量互补问题都有解。他们证明了 P-张量，R-张量，严格半正张量和半正 R_0-张量都是 Q-张量的子类。此外，Song和 Yu [38] 证明了每个 Q-张量必是一个 S-张量。Huang等 [8] 将与 Q-矩阵有关的两个著名结果推广到 Q-张量，即他们证明了在强 P_0-张量或者非负张量的条件下，R-张量，R_0-张量，Q-张量和 ER-张量都是等价的。Gowda等 [20] 通过度理论研究了 Q-张量的一些理论性质。尽管 Q-矩阵很多好的性质已经被推广到 Q-张量，但仍然还有许多特殊的性质值得我们进一步研究。例如，Pang [34] 证明了一个已知的结果：如果所涉及的矩阵是半单调 Q-矩阵，则其与零向量相对应的线性互补问题的非零解至少包含两个非零分量。随后，Song和 Qi [6] 提出了以下问题：这个已知结果可以推广到张量吗？Huang等 [8] 通过构造反例对这个问题给出了否定的答案。因此，我们很自然地想到

问题一：是否可以通过添加一些条件来使上述结论仍然成立？

此外，关于协正 Q-矩阵是 R_0-矩阵的一些充分条件已经很好地被研究 [39–41]。特别地，Jeter和 Pye [40] 证明了阶数小于或等于3的协正矩阵是 Q-矩阵当且仅当它是 R_0-矩阵。然而，Huang等 [8] 证明了这个结论并不能推广到 Q-张量中。受此启发，我们将思考

问题二：能否将四阶协正矩阵 [41] 的相应结论推广到张量的情况？

上述两个问题是本文我们将要考虑的问题。

Cauchy-Hankel矩阵与 Cauchy矩阵和 Hankel矩阵同时具有密切的关系（参考 [42–44]），其定义如下 [45]：

$$A_{ij} = \frac{1}{g + h(i + j)},\ \ i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 g 和 h 是任意实数使得 $h \neq 0$ 和 g/h 是一个整数。

Chen等 [30] 首次提出了 Cauchy-Hankel张量的定义，它是 Cauchy-Hankel矩阵定义的推广。设 $g,h\neq 0\in\mathbb{R}$ 和 g/h 不是一个整数，则一个 m 阶 n 维 Cauchy-Hankel张量 $\mathcal{A}_n=(\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_m})$ 的元素定义如下

$$\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_m}=\frac{1}{g+h(i_1+i_2+\cdots+i_m)},\quad i_1,i_2,\cdots,i_m=1,2,\cdots,n, \tag{1.2}$$

和一个 m 阶无限维 Cauchy-Hankel张量 $\mathcal{A}_\infty=(\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_m})$ 的元素定义如下

$$\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_m}=\frac{1}{g+h(i_1+i_2+\cdots+i_m)},\quad i_1,i_2,\cdots,i_m=1,2,\cdots,n,\cdots \tag{1.3}$$

到目前为止，广义 Hilbert张量的很多好的理论结果已经得到，但关于 Cauchy-Hankel张量的研究却很少。受 Hilbert张量 [28] 研究的启发，Mei和 Song [29] 提出了广义 Hilbert张量的定义，其定义如下

$$\mathcal{H}_{i_1i_2\cdots i_m}=\frac{1}{i_1+i_2+\cdots+i_m-m+a},\ a\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-;\ i_1,i_2,\cdots,i_m=1,2,\cdots,n,$$

他们给出了有限维广义 Hilbert张量特征值的上界，并证明了由无限维广义 Hilbert张量定义的算子是一个从 l^1 到 $l^p(1<p<\infty)$ 的有界、正 $(m-1)$-齐次算子，其中 l^p 是包含所有实数序列 $x=(x_i)_{i=1}^\infty$ 且 $\sum_{i=1}^\infty|x_i|^p<\infty$ 的线性空间。此外，当 $a>0$ 时，他们给出了相应的正齐次算子范数的两个上界。随后，Meng和 Song [46] 讨论了有限维和无限维广义 Hilbert张量的 Z_1-特征值的上界。最近，很多文献给出了一些使偶数阶张量是正定的充分必要条件。例如，Chen和 Qi [31] 证明了一个偶数阶对称 Cauchy张量是半正定的当且仅当它的生成向量是正的；一个偶数阶对称 Cauchy张量是正定的当且仅当它的生成张量是正的并且互不相同的。同时，他们还证明了一个偶数阶对称 Cauchy张量的半正定性可以等价的由其相对应的齐次多项式的单调增性来描述。如一个偶数阶 Cauchy张量是半正定的，当且仅当相对应的齐次多项式在非负象限上是单调增的。一个偶数阶 Cauchy张量是正定的，当且仅当相对应的齐次多项式在非负象限上是严格单调增的。Chen等 [30] 提出了一些使偶数阶 Cauchy-Hankel张量是正定的充分必要条件，并证明了一个偶数阶 Cauchy-Hankel张量是正定的，当且仅当相对应的齐次多项式在非负象限上是严格单调增的。然而，随着人们对四阶部分对称张量越来越关注，其 M-正定性和 M-特征值被广泛的研究。如一些关于 M-正定性的充分条件被提出。Li和 Li [47] 利用矩阵展开方法，给出了三个使四阶部分对称张量是 M-正定性的充分条件，且该条件很容易检验。Wang等 [48] 讨论了一

些使四阶部分对称非负张量是 M-正定性的充分条件。特别地，Che等 [49] 给出了一些使四阶部分对称 Cauchy张量是 M-(半)正定的充分必要条件。同时，他们证明了四阶部分对称 Cauchy张量是 M-半正定的，当且仅当相对应的齐次多项式在非负象限上是单调增的；是 M-正定的当且仅当相对应的齐次多项式在非负象限上是严格单调增的。当然，关于 M-特征值的研究也很多。如 Qi等 [50] 首次引入了四阶部分对称张量的 M-特征值的概念。随后，Che等 [51] 给出了一些 M-特征值的包含定理，和四阶部分对称非负张量的 M-谱半径的上界，这改进了文献 [52, 53] 中相应的结果。He等 [54] 给出了弹性 M-张量的最小 M-特征值的一些下界，这些下界只依赖于弹性 M-张量的元素，并且很容易验证。随后，Zhang等 [55] 给出了在不可约条件下，弹性 M-张量的最小 M-特征值的一个上界和两个下界，改进了文献 [54] 中已有的一些结果。同时，用数值算例验证了所得结果的有效性。受此启发，我们将在此基础上研究有限维和无限维 Cauchy-Hankel张量特征值的上界，以及四阶部分对称 Cauchy-Hankel张量的 M-正定性条件和 M-特征值上界。

随着张量的进一步发展，矩形张量作为张量的推广，由于其在固体力学 [56–60] 的强椭圆率条件问题和量子物理学 [61–63] 的纠缠问题中有重要的应用，因而引起了众多数学工作者对其的研究兴趣。它最初是由 Lim [3] 提出的，其定义如下：设 p，q，m，n 是正整数，且 m，$n \geq 2$。如果 $i_1, \cdots, i_p \in I_m := \{1, 2, \cdots, m\}$ 和 $j_1, \cdots, j_q \in I_n := \{1, 2, \cdots, n\}$, 则称 $\bar{\mathcal{A}} = (a_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q}) \in \mathbb{R}^{[p;q;m;n]}$ 是一个实 (p, q) 阶 $(m \times n)$ 维矩形张量。

设矩形张量 $\bar{\mathcal{A}} = (a_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q}) \in \mathbb{R}^{[p;q;m;n]}$，向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$，那么 $\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个向量且第 i 个元素是

$$(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{p-1}\mathbf{y}^q)_i = \sum_{i_2, \cdots, i_p = 1}^{m} \sum_{j_1, \cdots, j_q = 1}^{n} a_{i i_2 \cdots i_p j_1 \cdots j_q} x_{i_2} \cdots x_{i_p} y_{j_1} \cdots y_{j_q}.$$

类似地，$\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量且第 j 个元素是

$$(\bar{\mathcal{A}}\mathbf{x}^p\mathbf{y}^{q-1})_j = \sum_{i_1, \cdots, i_p = 1}^{m} \sum_{j_2, \cdots, j_q = 1}^{n} a_{i_1 \cdots i_p j j_2 \cdots j_q} x_{i_1} \cdots x_{i_p} y_{j_2} \cdots y_{j_q}.$$

随后，各种矩形张量的一些好的理论性质被广泛研究。如 Chang等 [64] 研究了实部分对称矩形张量 H-奇异值的一些性质，并给出了非负矩形张量 H-奇异值的 Perron-Frobenius定理，和计算其最大 H-奇异值的算法。同时，他们定义

了矩形张量的不可约性。随后，Yang和 Yang [65] 给出了非负矩形张量 Perron-Frobenius定理的一些新的结果。他们将文献 [11] 中的弱 Perron-Frobenius定理推广到非负矩形张量上，证明在某些条件下，最大 H-奇异值是几何单的。同时，对文献 [66] 中的算法给出了收敛性证明。Gu和 Wu [67] 首次提出了协正矩形张量的定义，且说明了部分对称非负矩形张量和半正定矩形张量都是协正矩形张量。同时，给出了一些使实部分对称矩形张量是协正矩形张量的充分必要条件。Wang等 [68] 提出了一些新的准则来判断部分对称张量是否为(严格)协正的，并基于二项式展开和凸组合给出了两个必要条件。He等 [69] 给出了严格对角占优部分对称矩形张量的定义，并证明了该矩形张量是矩形正定的。Zeng 等 [70] 给出了矩形 P-张量和矩形 S-张量的定义，并证明了矩形 P-张量的所有 V-奇异值都是正的。同时，提出了一些使矩形张量成为矩形 P-张量的充分必要条件，且矩形 S-张量可以由相应的矩形张量互补问题的可行性向量来定义等。

但是，目前关于矩形 P-张量的研究还是相对较少，且 Z-张量的定义还并未推广到矩形张量中。但是我们知道关于 Z-张量和 P-张量理论性质的研究已经相当成熟。例如，Gowda等 [20] 提出了一些使 Z-张量具有全局可解性的等价条件。Luo等 [71] 研究了 Z-张量互补问题。他们证明了在某些条件下，求解最稀疏解等价于求解具有线性目标函数的多项式规划问题。Zhang等 [21] 不仅证明了(强)M-张量是 Z-张量且最大对角元素是非负的(正的)，而且证明了一个 Z-张量是一个(强)M-张量，当且仅当它的所有 H^+-特征值(H-特征值)是非负的(正的)。Ding等 [22] 研究了 M-张量和非奇异 M-张量的一些重要性质。他们证明了 M-张量是 Z-张量，且 Z-张量是非奇异 M-张量的充要条件是它是半正的。因此，一个非奇异 M-张量的对角元素都是正的。此外，Song和 Qi [72] 研究了在 Z-张量的条件下，严格对角占优张量的等价条件。 Yuan和 You [25] 提出了一个偶数阶严格对角占优张量是一个 P-张量。Song和 Qi [6,7] 证明了 P-张量的张量互补问题总是有一个解，且对任何非负向量只有零解。除此之外，Song和 Qi [6] 还证明了一个非负张量是一个 Q-张量当且仅当它的所有主对角元素都是正的，并且证明了对任何非负向量，非负 Q-张量的张量互补问题只有零可行解。那么基于 Z-张量和 P-张量这些良好的理论性质，我们将 Z-张量的定义推广到矩形张量中，并进一步研究矩形 Z-张量和矩形 P-张量的性质。

1.2.2 张量互补问题的研究现状

非线性互补问题是1964年 Cottle在他的博士论文中首次提出来的。由于其

与很多学科都有紧密的联系，并且在运筹学、应用科学和技术如优化、经济平衡问题、结构力学问题、接触力学问题、非线性障碍问题、离散时间最优控制和交通平衡问题等方面 [73–76] 都有重要应用。因此，在接下来的几十年中，很多数学工作者致力于研究这个经典问题。目前，已发表有一千多篇相关论文，并出版了几本相关书籍，该问题在数学规划领域已经发展的相当成熟。

张量互补问题是一类特殊的非线性互补问题，同时也是线性互补问题的自然推广。作为张量领域的一个新兴研究课题，其在非线性压缩传感、多人博弈、DNA微阵列、交换等方面都有着重要的应用。目前，关于此问题的理论性质和算法已经得到广泛研究。理论方面，主要针对该问题解集的存在性和全局唯一性 [7, 20, 77–81]、非空性和有界性 [6, 14, 24, 26, 82]、稳定性和连续性 [82–84] 等方面展开研究；而算法方面，主要针对如何求解该问题 [85–93]。最近，Huang和 Qi [94–96] 概述了张量互补问题和相关模型的最新研究进展。

目前，通过使用各种张量的特殊结构，张量互补问题中许多很好的性质和应用已经得到了。因此，最近一些数学工作者主要研究某些特殊结构张量的张量互补问题解集的误差界。例如，Song和 Yu [38] 给出了严格半正张量互补问题解集的全局上界，且该上界与严格半正张量的 Pareto-特征值密切相关。Song和 Qi [97] 给出了严格半正张量互补问题解集的上下界。 Song和 Mei [27] 提出了两个正齐次算子范数的严格上下界，并在此基础上，给出了 B-张量互补问题解集的严格下界。Xu等 [9] 给出了对角元素都是正的广义行严格对角占优张量的张量互补问题解集的上下界。但是，关于其它结构张量的张量互补问题解集的上下界目前知之甚少。因此，如何通过高阶张量的特殊结构来获得其互补问题解集的上下界将非常有意义。

1.2.3 张量特征值算法的研究现状

高阶张量的特征值在超图 [98–100]、高阶马尔可夫链 [66]、最佳秩一逼近 [101, 102]、自动控制中偶数阶多元形式的正定性 [103] 等方面有重要的应用。近年来，高阶张量的特征值问题，特别是非负张量特征值问题 [11, 12, 104–109] 在数值多线性代数领域得到了广泛的关注，众多数学工作者研究了非负张量的 Perron-Frobenius定理和如何求解其最大特征值的算法。

Ng等 [66] 为了计算不可约非负张量的最大特征值提出了 NQZ方法，该方法是之前为了计算不可约非负矩阵谱半径所提出来的 Collatz方法 [110–112] 的推广。在此基础上，Liu等 [104] 改进了 NQZ方法，并证明了该算法对于任何不可

约非负张量总是收敛的。Pearson [105] 证明了偶数阶本质正张量的唯一正特征值是实几何单的。 Chang等 [106] 给出了本原张量 NQZ方法的收敛性。Zhang和 Qi [107] 给出了本质正张量的 NQZ方法的线性收敛率。Friedland等 [108] 为了计算弱不可约非负张量的最大特征值提出了幂法，并证明了在弱本原的条件下它是 R-线性收敛的。随后，Hu等 [13] 改进了此方法，并证明了弱不可约非负张量的全局 R-线性收敛性。

此外，为了求解非负矩形张量的最大 H-奇异值，目前已经有很多算法被研究。如 Chang等 [64] 提出了 CQZ迭代算法，该算法与文献 [66] 中求解不可约非负张量最大特征值的算法是类似的。随后，Yang和 Yang [65] 通过引入本原矩形张量的概念给出了其算法的收敛性。同时，Zhou等 [113] 对该算法进行了改进，并证明了所提出的算法对于任何不可约非负矩形张量都是收敛的。在此基础上，Chen等 [114] 给出了一种不精确的幂型算法。最近，Ragnarsson和 Van Loan [115] 建立了一般张量的奇异值与相应对称嵌入张量的特征值之间的关系，即可以通过借助求非负张量最大特征值的方法来求解非负矩形张量的最大奇异值。然而，目前关于计算 Cauchy-Hankel张量的 M-特征值和矩形张量的最大 V-奇异值的算法相对较少。因此，在已有算法的基础上，本文将结合这两类张量的特殊结构，给出计算其特征值的相应算法。

第三节　本文的贡献及结构

本文，我们将主要围绕 Q-张量、Cauchy-Hankel张量、矩形张量展开研究。主要研究这几类张量的理论性质及其互补问题解的上下界、存在情况等。同时，运用相关算法来计算 M-特征值和 V-奇异值。

第二章，我们将证明具有特殊结构的半正 Q-张量与零向量所对应的张量互补问题的非零解至少包含两个非零分量，从而对问题一给出了肯定的回答。关于问题二，我们将给出一个具有正对角元素的四维协正张量是 Q-张量但不是 R_0-张量的例子，即对该问题给出了否定的回答。此外，将讨论非负 Q-张量的张量互补问题解集的具体上下界。

第三章，我们将讨论有限维和无限维 Cauchy-Hankel张量特征值的上界。随后，给出两个相应的正齐次算子范数的上界。对于四阶部分对称 Cauchy-Hankel张量，我们将给出它是 M-正定性的一些充分必要条件，并讨论了它的 M-特征值的上界。最后利用幂法计算四阶部分对称 Cauchy-Hankel张量的最大