Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-Механический Институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики
Кафедра «Прикладной Математики и Информатики»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ» «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ»

Выполнили
студенты группы 5030102/00101

КУАССИ СИЕМО Т. Г.

Руководитель
к. ф.-м. н., доц.

Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1 Постановка задачи

Пусть дана функция $f(x) = x^2 + x + sin(x)$, где $x \in [-2, 0]$. Необходимо:

1. Проиллюстрировать унимодальность функции графиком
2. Найти минимум данной функции Методом локализации экстремума, методом Фибоначчи (ычисления с точностью 0.000001)
3. Сравнить количество вызов функции Методом локализации экстремума, методом Фибоначчи.

2 Исследование применимости метода

Определение унимодальной функции

Функция $f(x)$ называется унимодальной на отрезке $[a, b]$, если существуют такие значения α и β:

$$a \leq \alpha \leq \beta \leq b \quad (4) \tag{1}$$

что выполняются следующие условия:

1) Если $a < \alpha$, то на отрезке $[a, \alpha]$ функция монотонно убывает.

2) Если $b < \beta$, то на отрезке $[\beta, b]$ функция монотонно возрастает.

3) При $x \in [\alpha, \beta]$: $f(x) = f^* = \min_{[a,b]} f(x)$.

Наша функция $f(x) = x^2 + x + \sin(x)$ удовлетворяет всем этим требованиям на интервале $[-2, 0]$.

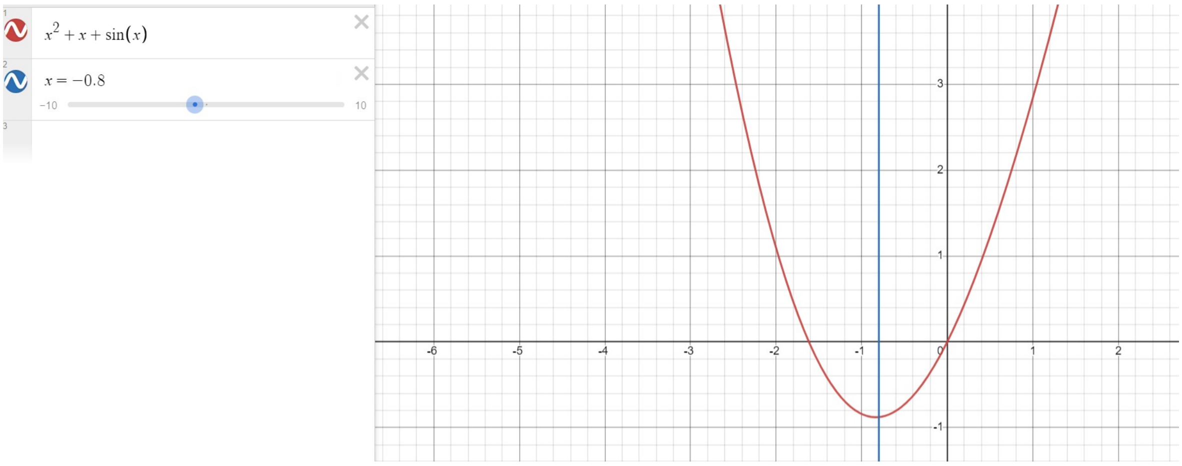

Рис. 1: График заданной функции

3 Описание алгоритма

3.1 Алгоритм Метод локализации экстремума

Этот метод является модификацией метода равномерного поиска. Общая схема метода следующая:

Выбирается число разбиений n и шаг $h = \frac{b-a}{n}$.

Далее генерируются не все точки с этим шагом, а последовательно начиная с левого края интервала неопределенности.

В начале рассматривается граничная точка a и следующая точка $a + h$.

Вычисляются значения функции в этих точках и сравниваются между собой: $f(a) \vee f(a+h)$.

Если $f(a) > f(a+h)$, то генерируется следующая точка $a + 2h$ и сравниваются значения функции $f(a+h) \vee f(a+2h)$.

И так далее.

Генерация точек и их сравнение выполняется до того момента, когда оказывается, что $f(x_{j-1}) > f(x_j)$ и $f(x_j) < f(x_{j+1})$.

Рассуждая как в методе равномерного поиска, приходим к тому, что следующим интервалом неопределенности будет: $[x_{j-1}, x_{j+1}]$.

Далее проделываем ту же самую процедуру для нового интервала: вычисляем новый шаг и генерируем новые точки слева направо.

Реализуем эту схему до тех пор, пока: $[x_{j-1}, x_{j+1}] < \varepsilon$.

Очевидно, что число обращений к вычислению функции в методе локализации экстремума меньше, чем для метода равномерного поиска.

3.2 Алгоритм метода Фибоначчи

1. Вычислить константу различимости α и задать точность вычислений $\varepsilon > 0$
2. Выбрать количество генерируемых чисел Фибоначии $n : F_n > \frac{b-a}{\varepsilon}$
3. Положить $k = 1$
4. Вычислить параметры $\lambda_1 = a + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b-a)$ и $\mu_1 = a + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b-a)$
5. Вычислить значения функции в точках λ_k и μ_k :
   - Если $g(\lambda_k) > g(\mu_k)$, то
   $$\begin{cases} a_{k+1} = \lambda_k \\ b_{k+1} = b_k \\ \lambda_{k+1} = \mu_k \\ \mu_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}) \end{cases} \tag{2}$$
   - Иначе
   $$\begin{cases} a_{k+1} = a_k \\ b_{k+1} = \mu_k \\ \mu_{k+1} = \lambda_k \\ \lambda_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}) \end{cases} \tag{3}$$

6. Если $k < n - 1$, то положить $k = k + 1$ и перейти к пункту 5. Иначе положить $\lambda_n = \lambda_{n-1}$ и $\mu_n = \lambda_n + \alpha$

7. Если $g(\lambda_n) = g(\mu_n)$, то положить $a_n = \lambda_n$, $b_n = b_{n-1}$, иначе $a_n = a_{n-1}$, $b_n = \mu_n$

8. Повторять алгоритм, пока заданный интервал неопределенности не удовлетворит точности вычислений ε

4 Практическое решение задач

Результать Решение Метод локализации экстремума
$x^* = -0.8354304$
функция вызов: 41
Результать Решение методом Фибоначчи
$x^* = -0.8363636$
функция вызов: 9

5 Обоснование результатов

Находим первую производную функции:

$$f'(x) = 2x + \cos(x) + 1$$

Приравниваем ее к нулю:

$$2x + \cos(x) + 1 = 0$$

$$x_1 = -0.835$$

Вычисляем значения функции на концах интервала:

$$f(-0.835) = -0.879$$

$$f(-2) = 1.0907$$

$$f(0) = 0$$

Ответ:

$$f_{\min} = -0.879, \quad f_{\max} = 1.091$$

6 Выводы

сравнивая метод Фибоначчи и метод локализации экстремума:

Скорость сходимости: Метод Фибоначчи совершил всего 9 вызовов функции для достижения заданной точности, в то время как метод локализации экстремума требовал 41 вызова функции. Это означает, что метод Фибоначчи сходится значительно быстрее.

Точность: Оба метода предоставили близкие значения экстремума. Метод Фибоначчи дал результат около -0.8363636, в то время как метод локализации экстремума выдал -0.8354304. Оба значения очень близки друг к другу, и различия находятся в пределах заданной точности.

Вычислительная сложность: Метод Фибоначчи требовал гораздо меньше вызовов функции, что делает его менее ресурсоемким. Это может быть важным фактором в задачах, где дорого вычислять функцию. Метод локализации экстремума потребовал больше итераций для достижения той же точности.

Устойчивость: Оба метода подходят для этой конкретной функции, и они дали схожие результаты. Однако стоит помнить, что результаты могут различаться в зависимости от функции и интервала.