

TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña
IDA, Linköpings Universitet

Föreläsning 5

Översikt

- ▶ **Stora talen lag**
- ▶ **Centrala gränsvärdessatsen**
- ▶ **Simulering**
- ▶ **Monte Carlo metoder**

Stora talens lag

- ▶ Medelvärde: $\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$
- ▶ Medelvärdet av många oberoende slumpvariabler med samma väntevärde μ och varians kommer att ligga allt närmare μ .

Stora talens lag

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) = 0$$

- ▶ **Bevis** via Chebyshevs olikhet. Låt $X = \bar{X}_n$. Då $\mathbb{E}(X) = \mu$. Då

$$P(|X - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

eftersom σ^2 är $\text{Var}(X) = \text{Var}(\bar{X}_n) = \text{Var}(X_i)/n \rightarrow 0$ när $n \rightarrow \infty$.

Centrala gränsvärdessatsen

- ▶ Hur är \bar{X}_n fördelad ?

Centrala gränsvärdessatsen. Låt X_1, X_2, \dots, X_n vara oberoende variabler med samma väntevärde μ och standardavvikelse σ , och låt

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

När $n \rightarrow \infty$ så kommer den standardiserade summan

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\text{Std}(S_n)}$$

att **konvergera i fördelning** till en $N(0,1)$ variabel, dvs

$$F_{Z_n}(z) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z\right) \rightarrow \Phi(z)$$

- ▶ Då S_n och \bar{X}_n konvergerar i fördelning till $N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ och $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.
Vanlig tumregel: $n > 30$. Se Example 4.13 i Baron.

Centrala gränsvärdessatsen

- ▶ Man kan approximera en binomialfördelning med $N(np, \sqrt{np(1-p)})$ för $n > 30$ pga CLT och faktumet att en binomial är en summa av n lika Bernoulli variabler. Samma gäller för negativa binomialfördelningen (summa av k geometriska variabler), och gamma fördelningen (summa av α exponentiala variabler).
- ▶ Låt $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Vad är $P(X = x)$? Obs. $P(X = x) = 0$ för $N(np, \sqrt{np(1-p)})$. Byt frågan till vad $P(x - 0.5 < X < x + 0.5)$ är.
- ▶ Låt $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Vad är $P(X < x)$? Obs. $P(X < x) = P(X \leq x)$ för $N(np, \sqrt{np(1-p)})$. Byt frågan till vad $P(X < x - 0.5)$ är.

- ▶ **Pseudoslumptalsgenerator**: Datorer kan generera en lång sekvens tal som ser ut som $U(0,1)$ slumptal. Good enough.
- ▶ R: `runif(1)`. Matlab: `rand`. Python: `numpy.random.uniform()`.
- ▶ Från $U \sim U(0,1)$ kan vi skapa slumptal från andra fördelningar.
- ▶ Exempel: **Bernoulli** med sannolikhet p att lyckas:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{om } U < p \\ 0 & \text{om } U \geq p \end{cases}$$

- ▶ R kod Bernoulli: `U=runif(1); X=(U<p)`
- ▶ Exempel: **Binomial**. Summan av Bernoullis
 - ▶ R-kod för Binomial(n,p): `U=runif(n); X=sum(U<p)`
- ▶ See Example 5.14 i Baron.

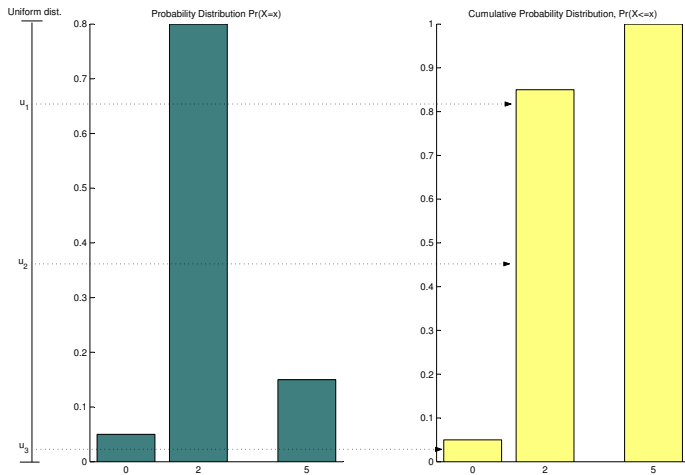
Simulering från diskret fördelning

- ▶ Simulering från allmän diskret fördelning, dvs

$$p_i = P(X = x_i), \quad \sum_{i=1} p_i = 1$$

- ▶ Dela upp intervallet $[0, 1]$ i delintervall:
 - ▶ $A_1 = [0, p_1)$
 - ▶ $A_2 = [p_1, p_2)$
 - ▶ \vdots
 - ▶ $A_n = [p_{n-1}, 1)$
- ▶ Slumpa $U \sim U(0, 1)$.
- ▶ Om $U \in A_i$ låt $X = x_i$.
- ▶ Se Example 5.9 i Baron.

Inversa cdf metoden: Diskreta fallet



Inversa cdf metoden: Kontinuerliga fallet

Theorem. Låt X vara en kontinuerlig variabel med cdf $F_X(x)$ och låt $U = F_X(X)$ vara en ny slumpvariabel. Då gäller att $U \sim U(0, 1)$.

- ▶ **Inversa transformationsmetoden:** Antag att X har cdf $F(X)$. X kan då simuleras med hjälp av en $U \sim U(0, 1)$ variabel, dvs

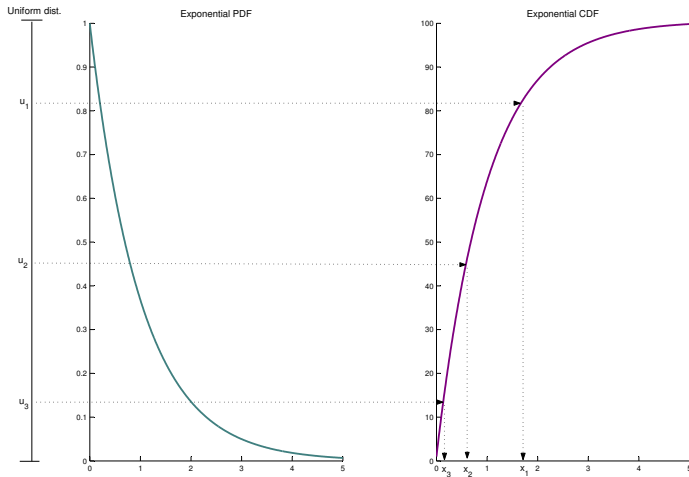
$$X = F^{-1}(U)$$

Dvs, lös ut X från ekvationen $U = F(X)$.

- ▶ Exempel: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Då

$$U = 1 - e^{-\lambda X}$$
$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$$

Inversa cdf metoden: Kontinuerliga fallet



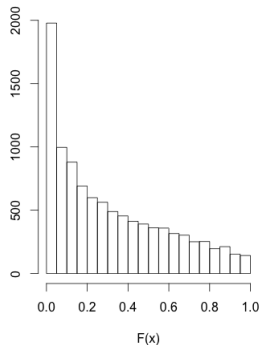
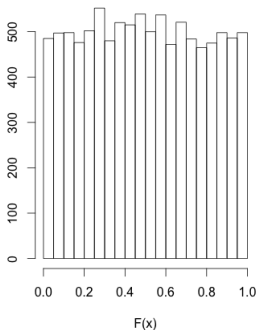
Simulering i R

- ▶ n **slumptal** från $N(\mu = 2, \sigma^2 = 3^2)$ simuleras med
`rnorm(n, mean = 2, sd = 3)`
- ▶ n **slumptal** från $\text{Gamma}(\alpha = 2, \lambda = 3)$ simuleras med
`rgamma(n, shape = 2, rate = 3)`
- ▶ Beräkna **pdf:en** i punkten $x = 1.5$ för $N(\mu = 2, \sigma^2 = 3^2)$
`dnorm(x=1.5, mean = 2, sd = 3)`
- ▶ Beräkna **cdf:en** i punkten $x = 1.5$ för $N(\mu = 2, \sigma^2 = 3^2)$
`pnorm(x=1.5, mean = 2, sd = 3)`

Testar inversa CDF metoden

- ▶ Följande funkar (dvs F_x blir likformigt fördelad):

- ▶ `x = rgamma(10000, shape = 2, rate = 3)`
- ▶ `Fx = pgamma(x, shape = 2, rate = 3)`
- ▶ `hist(Fx, 30)`



- ▶ Följande funkar inte (dvs F_x blir **inte** likformigt fördelad):

- ▶ `x = rgamma(10000, shape = 2, rate = 3)`
- ▶ `Fx = pgamma(x, shape = 1, rate = 3)`
- ▶ `hist(Fx, 30)`

Monte Carlo metoder

- ▶ Simulering från fördelningar kan användas för att approximera t ex olika sannolikheter.
- ▶ Låt X_1, X_2, \dots, X_N vara oberoende dragningar från en sannolikhetsfördelning. Vi kan t ex approximera sannolikheten $p = P(X < 2)$ med

$$\hat{p} = \hat{P}(X < 2) = \frac{\text{antal av } X_1, X_2, \dots, X_N \text{ som är mindre än } 2}{N}$$

- ▶ $\hat{\theta}$ (t ex \hat{p}) är en **estimator** (uppskattning) av kvantiteten θ (t ex p).
- ▶

```
x = rnorm(10000, mean = 1, sd = 2)  
pHat = sum(x<2)/10000
```

Monte Carlo metoder

- ▶ Men \hat{p} är bara en **skattning** av p . Varierar från stickprov till stickprov.
- ▶ Om vi upprepar hela receptet flera gånger, varje gång med ett nytt stickprov av storleken N , kommer vi då att ha rätt i genomsnitt? Dvs, är $\mathbb{E}(\hat{p}) = p$?
- ▶ Hur mycket kommer \hat{p} att variera från stickprov till stickprov? Hur stor är $\text{Var}(\hat{p})$?
- ▶ $Y = \text{antal } X_1, \dots, X_N \text{ som är mindre än 2}$. Då $Y \sim \text{Bin}(N, p)$. Så

$$\mathbb{E}(\hat{p}) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{N}\right) = \frac{1}{N}N \cdot p = p$$

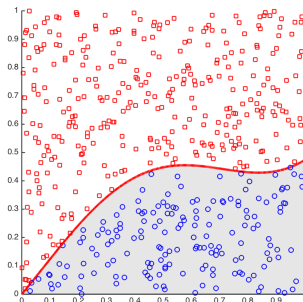
så \hat{p} är en **väntevärdesriktig** (unbiased på engelska) estimator av p .

$$\text{Var}(\hat{p}) = \text{Var}\left(\frac{Y}{N}\right) = \frac{1}{N^2}Np(1-p) = \frac{p(1-p)}{N}.$$

- ▶ Se Baron sidor 115-116 om hur man kan välja N för att nå given exakthet $P(|\hat{p} - p| > \varepsilon) \leq \alpha$.

Monte Carlo integration

- ▶ Mål: $\mathcal{I} = \int_0^1 g(x)dx$ där $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq g(x) \leq 1$.



- ▶ Simulera likformigt fördelade tal U_1, \dots, U_N och V_1, \dots, V_N .
- ▶ Monte Carlo skattning

$$\hat{\mathcal{I}} = \frac{\text{Antal dragningar där } V_i < g(U_i)}{N}$$

- ▶

```
u = runif(10000)
v = runif(10000)
IHat = mean(v < g(u))
```

Översikt

- ▶ **Stora talen lag**
- ▶ **Centrala gränsvärdessatsen**
- ▶ **Simulering**
- ▶ **Monte Carlo metoder**