TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña
IDA, Linköpings Universitet

Föreläsning 4

Översikt

- **Täthetsfunktion**
- **Likformig fördelning**
- **Exponentialfördelningen**
- **Gammafördelningen**
- **Normalfördelningen**
- **Betafördelningen**
- **t-fördelningen**

Kontinuerliga slumpvariabler

- Kontinuerliga slumpvariabler kan anta alla reella värden på ett intervall (a, b), speciellt $(-\infty, \infty)$.
- X kontinuerlig $\Rightarrow P(x) = 0$ för alla x. Pmf inte användbar.
- Fördelningsfunktionen funkar dock: $F(x) = \boldsymbol{P}\{X \leq x\}$.
- Eftersom $P(x) = 0$ för alla x, så gäller $\boldsymbol{P}\{X \leq x\} = \boldsymbol{P}\{X < x\}$.
- Om X kontinuerlig slumpvariabel: $F(x)$ **kontinuerlig**. Inga hopp. **Icke-avtagande**.

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \text{ och } \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$

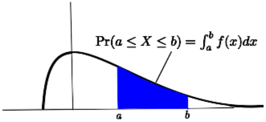
Täthetsfunktion

Definition. **Täthetsfunktionen** $f(x)$ för en kontinuerlig slumpvariabel X är derivatan av cdf:en, dvs

$$f(x) = F'(x)$$

- Täthetsfunktion heter **probability density function**, **pdf** på engelska.
- cdf:en $F(x)$ är antiderivatan av pdf:en.
- Sannolikheter för intervall ges av ytor under pdf:en

$$\boldsymbol{P}\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx$$



Täthetsfunktion

- $f(x) = F'(x)$ så
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - F(-\infty) = F(b) - 0 = F(b)$$
- Täthetsfunktioner integrerar till ett
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$
- Täthetsfunktionens värden, t ex $f(2)$, är inte en sannolikhet. $f(2) > 1$ helt ok. Men $f(x) \geq 0$ måste gälla.
- För litet ϵ: $\boldsymbol{P}\left(a - \frac{\epsilon}{2} \leq X \leq a + \frac{\epsilon}{2}\right) \approx \epsilon \cdot f(a)$.
- Exempel: Triangelfördelningen över support $[0, a]$. Se också Example 4.1 i Baron.
- Se Table 4.1 i Baron för en jämförelse av diskreta och kontinuerliga fördelningar.

Väntevärde och varians

- För diskreta slumpvariabler

$$\mathbb{E}(X) = \mu = \sum_x x \cdot P(x) \text{ och } Var(X) = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_x (x-\mu)^2 P(x)$$

- För kontinuerliga slumpvariabler

$$\mathbb{E}(X) = \mu = \int x \cdot f(x)dx \text{ och } Var(X) = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \int (x-\mu)^2 f(x)dx$$

- Exempel: Triangelfördelning.

Simultanfördelning för kontinuerliga variabler

- **Simultan fördelningsfunktion**

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \boldsymbol{P}\left\{X \leq x \cap Y \leq y\right\}$$

- **Simultan täthetsfunktion**

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{(X,Y)}(x,y)$$

- Ofta skriver man bara $f(x,y)$ istället för $f_{(X,Y)}(x,y)$.
- **Kovarians**

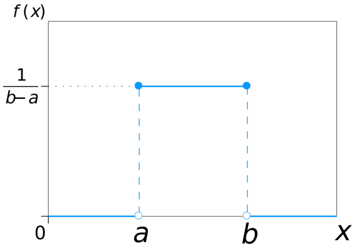
$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}\left[\left(X-\mu_X\right)\left(Y-\mu_Y\right)\right] \\ &= \int\int \left(X-\mu_X\right)\left(Y-\mu_Y\right) f(x,y) dxdy \end{aligned}$$

Likformig fördelning

Definition. En **likformig fördelad** variabel, dvs $X \sim U(a,b)$, har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{för } a \le x \le b, \text{ och } f(x) = 0 \text{ annars}$$

- Likformig heter uniform på engelska.



Likformig fördelning

- **Väntevärde**:

$$\mathbb{E}(X) = \int x \cdot f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int xdx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b$$
$$= \frac{1}{2(b-a)}\left(b^2-a^2\right) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

- **Varians**: $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int x^2 \cdot f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int x^2dx = \frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 = \frac{a^2+b^2+ab}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Alternativ härledning, se Baron sid 81. Alla likformiga variabler kan genereras från **standardmedlemmen**: $Y \sim U(0,1)$ genom följande resultat

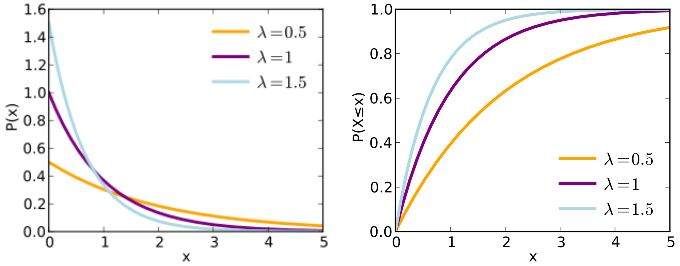
$$X = a + (b-a)Y \text{ där } Y \sim U(0,1) \Longrightarrow X \sim U(a,b)$$

Exponentialfördelningen

Definition. En **exponentialfördelad** variabel, dvs $X \sim Exp(\lambda)$, har täthetsfunktionen

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ för } x > 0$$

- Egenskaper av $X \sim Exp(\lambda)$
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
  - $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
  - $F(x) = \int_0^x f(y)dy = 1 - e^{-\lambda x}$ eftersom $(e^{g(z)})' = e^{g(z)}g'(z)$ och $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
- Parametern λ betyder det samma som i en Poisson fördelning, dvs förväntat antal händelser i en tidsperiod. Se Example 4.5 i Baron.



Exponentialfördelningen

- Tiden mellan Poissonhändelser är exponentialfördelad.
- Låt $Po(\lambda t)$ räkna antalet händelser i tidsintervallet $[0, t)$.
- Låt T vara tiden till nästa händelse

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(T \leq t) &= 1 - \boldsymbol{P}(T > t) \\ &= 1 - \boldsymbol{P}(\text{inga händelser i intervallet } [0, t)) \\ &= 1 - \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

  vilket är cdf:en för en $Exp(\lambda)$ variabel.
- Exponentialfördelade variabler är **minneslösa**:

$$\boldsymbol{P}(T > t + x | T > t) = e^{-\lambda(t+x)}/e^{\lambda t} = e^{-\lambda x} = \boldsymbol{P}(T > x)$$

- Geometriska fördelningen är också minneslös. Den är faktiskt den diskreta motsvarande av exponentialfördelningen.

Gammafördelningen

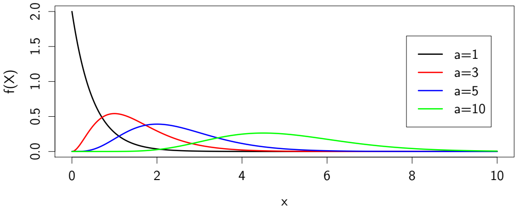
- Antag att tiden för att ladda ner en fil är $Exp(\lambda)$ fördelad. Tiden för att ladda ner α filer följer en $Gamma(\alpha, \lambda)$ fördelning om nedladdningstiderna är oberoende.

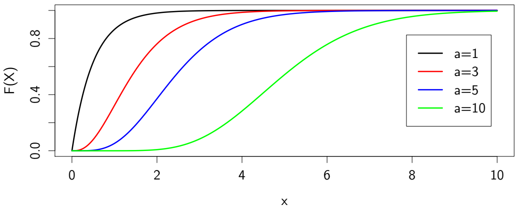
Definition. Om $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ är α stycken **oberoende** $Exp(\lambda)$ variabler, då

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_\alpha \sim Gamma(\alpha, \lambda)$$

- α kallas för en **shape**parameter, och λ är en **frekvens**parameter.
- $Exp(\lambda) = Gamma(1, \lambda)$
- Egenskaper av $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$
  - $Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$
- α och λ kan faktiskt anta vilka positiva reella värden som helst. Då, funkar inte den tolkingen ovanpå, men ovanpå väntevärdet och variansen stämmer ändå. Se sid 85 i Baron.
- Se Examples 4.7 och 4.8 i Baron.

Gammafördelningen





Normalfördelningen

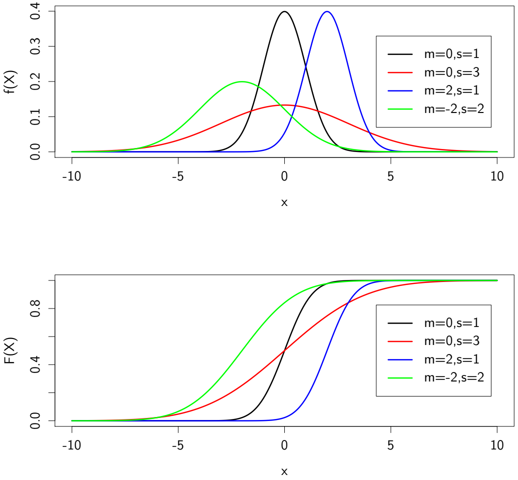
Definition. En **normalfördelad** variabel, dvs $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \text{för} \quad -\infty < x < \infty$$

- Egenskaper av $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - $\mathbb{E}(X) = \mu$
  - $Var(X) = \sigma^2$
- cdf:en finns inte i sluten form. Om $Z \sim N(0,1)$ så är cdf:en

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Normalfördelningen



Normalfördelningen

- **Standardmedlem**: $Z \sim N(0,1)$

$$X = \mu + \sigma Z \text{ där } Z \sim N(0,1) \Longrightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- **Standardisering**

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

- Standardisering är praktiskt. Låt $X \sim N(\mu = 900, \sigma = 200)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\{600 < X < 1200\} &= \boldsymbol{P}\left\{\frac{600-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1200-\mu}{\sigma}\right\} \\ &= \boldsymbol{P}\{-1.5 < Z < 1.5\} \\ &= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 0.9332 - 0.0668 = 0.8664 \end{aligned}$$

- Se Example 4.11 i Baron.

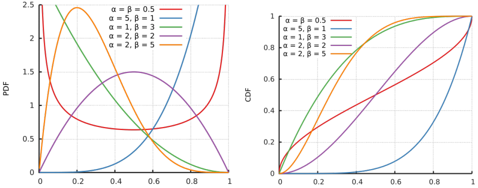
Betafördelningen

Definition. En **betafördelad** variabel, dvs $X \sim Beta(\alpha, \beta)$, har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \quad \text{för } 0 \leq x \leq 1$$

där $B(,)$ är **betafunktionen**.

- Egenskaper av $X \sim Beta(\alpha, \beta)$
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
  - $Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
- Passar **kontinuerliga** variabler i intervallet $[0, 1]$, t ex andelar eller sannolikheter.



t-fördelningen

- Normalfördelningen har **tunna svansar**. Mycket osannolikt att observera extrema observationer.
- t-fördelningen är en generalisering av normalfördelningen med en parameter ν (**frihetsgrader**) som modellerar hur tunga svansarna är.

Definition. En ***t*-fördelad** variabel, dvs $X \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$, har täthetsfunktionen

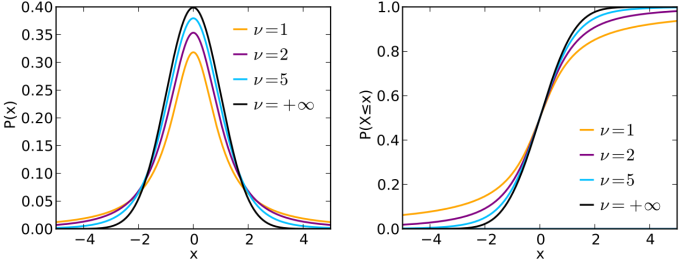
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu\sigma^2}}\left(1 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad \text{för } -\infty < x < \infty$$

där $\Gamma()$ är **gammafunktionen**.

- Egenskaper av $X \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$
  - $\mathbb{E}(X) = \mu$ om $\nu > 1$, odefinerad annars
  - $Var(X) = \sigma^2 \frac{\nu}{\nu-2}$ om $\nu > 2$, $Var(X) = \infty$ om $1 < \nu \leq 2$, odefinerad annars
- $t_\nu(0, 1)$ är standardmedlemmen.

t-fördelningen

- **Cauchy-fördelningen** är speciallfallet med $\nu = 1$.
- Normalfördelningen fås när $\nu \to \infty$.



- Viktig koppling mellan $t-$fördelning och normalfördelning:
  - $X_1, .., X_n | \mu, \sigma^2 \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$. σ^2 **känd**. $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$
  - $X_1, .., X_n | \mu, \sigma^2 \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$. σ^2 **okänd**, skattas med s^2. $T = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}(0, 1)$.
- Vi återkommer till detta koppling senare i kursen.

Översikt

- **Täthetsfunktion**
- **Likformig fördelning**
- **Exponentialfördelningen**
- **Gammafördelningen**
- **Normalfördelningen**
- **Betafördelningen**
- **t-fördelningen**