

SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK

FÖRELÄSNING 9

Mattias Villani

**Avdelningen för Statistik och Maskininlärning
Institutionen för datavetenskap
Linköpings universitet**



ÖVERSIKT

- ▶ Hypotesttest
- ▶ Chi-tvåfördelningen (χ^2)
- ▶ χ^2 -test modellutvärdering

HYPOTESTEST

- ▶ Ex 1. genomsnittshastigheten på ditt bredband är det som leverantören utlovat.

Nollhypotes : $H_0 : \mu \geq 8\text{Mbit/s}$

Alternativhypotes: $H_A : \mu < 8\text{Mbit/s}$

- ▶ Ex 2. En ny medicin påverkar inte blodtrycket.

Nollhypotes : $H_0 : \mu = 0$

Alternativhypotes: $H_A : \mu \neq 0$

- ▶ Ex 3. en UI-förändring ökar andelen nöjda användare.

Nollhypotes : $H_0 : p \leq p_0$

Alternativhypotes: $H_A : p > p_0$

- ▶ Ex 4. andelen KD-väljare är under 4%-spärren.

HYPOTESTEST

- ▶ **Tvåsidigt test** förkastar H_0 om μ är större **eller** mindre än μ_0

Nollhypotes : $H_0 : \mu = \mu_0$

Alternativhypotes: $H_A : \mu \neq \mu_0$

- ▶ **Ensidigt test**

Nollhypotes : $H_0: \mu \leq \mu_0$

Alternativhypotes: $H_A : \mu > \mu_0$

eller

Nollhypotes : $H_0: \mu \geq \mu_0$

Alternativhypotes: $H_A : \mu < \mu_0$

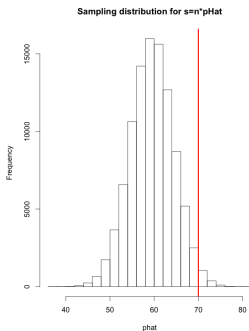
- ▶ Ensidiga test skrivs ibland så här (det ger samma resultat):

Nollhypotes : $H_0: \mu = \mu_0$

Alternativhypotes: $H_A : \mu < \mu_0$

HYPOTESTEST

- ▶ Notera att **hypotesen gäller populationen** (μ eller p). För en patient kan förändring i blodtrycket vara skild från noll, trots att $\mu = 0$.
- ▶ **Stickprov** från populationen. Dra **slutsatser** om H_0 eller H_A är sann.
- ▶ Ex 3. $p_0 = 0.6$. $s = 70$ baserat på ett stickprov av $n = 100$ användare. Är $s = 70$ **tillräckligt stort** för att förkasta $H_0 : p \leq p_0$?
- ▶ Prova: `sum(runif(100)<=0.6)` i R.



HYPOTESTEST

► Typ I fel

$$\alpha = P \{ \text{Förkasta } H_0 | H_0 \text{ är sann} \}$$

Vi vill kontrollera att α hålls på en förbestämd låg nivå.

- Ex Gödsel inte effektivt, men du väljer att gödsla ändå.

► Typ II fel

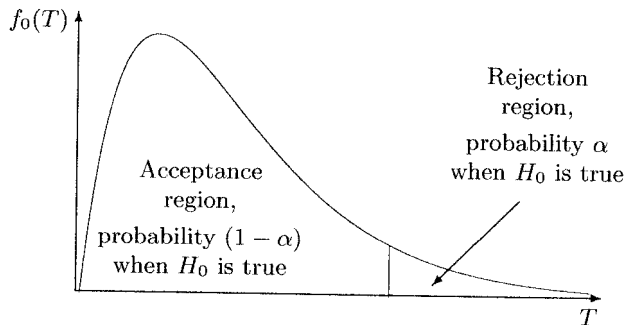
$$P \{ \text{Acceptera } H_0 | H_0 \text{ är falsk} \}$$

- Ex Gödsel effektivt, men du väljer att inte gödsla.

	Acceptera H_0	Förkasta H_0
H_0 sann	Korrekt beslut	Typ 1 fel
H_A sann	Typ II fel	Korrekt beslut

- Popper: man kan bara förkasta en nollhypotes, aldrig acceptera den.
- **Styrka** (power): $p(\theta) = P \{ \text{Förkasta } H_0 | H_A \text{ är sann} \}$.
- Applet: <http://tube.geogebra.org/student/m137287>.

FÖRKASTNINGSREGIONEN



STEG VID HYPOTESTEST

1. Välj **teststatistiska**, $T = T(X_1, \dots, X_n)$.
2. Beräkna **nollfördelningen** för T (dvs samplingfördelningen F_0 för T om H_0 är sann).
3. Bestäm **förkastningsregionen** \mathcal{R} i nollfördelningen så att $P\{T \in \mathcal{R}\} = \alpha$.
4. Förkasta H_0 på **signifikansnivån** α om $T \in \mathcal{R}$.

STEG VID HYPOTESTEST - BERNOULLIEXEMPEL

1. **Teststatistiska**, $T = S = \sum_{i=1}^n X_i = n\hat{p}$.
2. **Nollfördelningen** för T : $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p_0)$.
3. Låt $\alpha = 0.05$. `qbinom(p=0.05,size=100,prob=0.6,lower.tail=F)` ger $\mathcal{R} = [68, 100]$ (ungefär).
4. $T_{obs} = 70$ så $T_{obs} \in \mathcal{R}$ och nollhypotesen $p \leq 0.6$ förkastas på signifikansnivån 0.05.

Z-TEST

- **Z-test** används när nollfördelningen är normalfördelad. T ex om vi har en normalfördelad estimator $\hat{\theta}$

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}}.$$

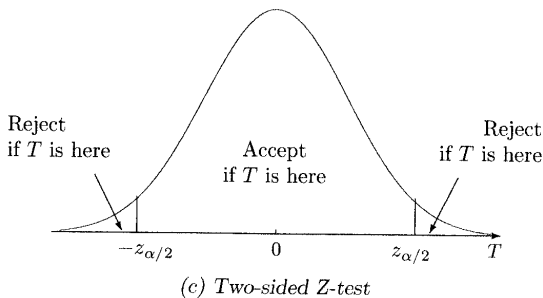
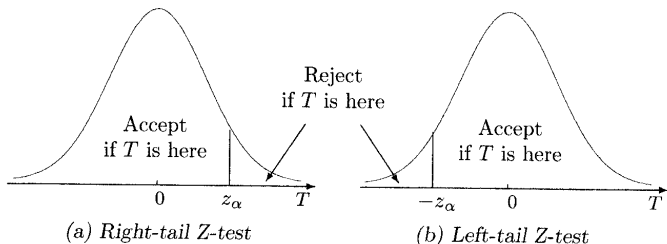
- Exempel: $H_0 : \mu = \mu_0$ och $H_A : \mu > \mu_0$.
- En-sidigt Z-test

$$\begin{cases} \text{Förkasta } H_0 & \text{om } Z \geq z_\alpha \\ \text{Acceptera } H_1 & \text{om } Z < z_\alpha \end{cases}$$

- Två-sidigt Z-test. $H_0 : \mu = \mu_0$ och $H_A : \mu \neq \mu_0$.

$$\begin{cases} \text{Förkasta } H_0 & \text{om } |Z| \geq z_{\alpha/2} \\ \text{Acceptera } H_1 & \text{om } |Z| < z_{\alpha/2} \end{cases}$$

FÖRKASTNINGSREGIONER - Z-TEST



T-TEST

- ▶ **Z-test** används när nollfördelningen är normalfördelad.
- ▶ Om σ^2 **inte** är känd utan skattas med s^2 blir inte

$$\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sqrt{s^2 / n}}$$

längre normalfördelad utan **t-fördelad** med $n - 1$ frihetsgrader.

- ▶ z_α blir istället t_α och hämtas från Tabell 5 i Byron. Se avsnitt 9.4.8 i Baron.

Z-TEST FÖR SKILLANDEN MELLAN POPULATIONER

- ▶ Vi kan också testa om **två** populationer har samma väntevärde:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_A : \mu_X \neq \mu_Y$$

- ▶ Ex är andelen KD-sympatisörer lika stor i Stockholm och Göteborg?
- ▶ Låt X_1, \dots, X_n vara ett slumpmässigt stickprov från $N(\mu_X, \sigma^2)$.
- ▶ Låt Y_1, \dots, Y_m vara ett slumpmässigt stickprov från $N(\mu_Y, \sigma^2)$.
- ▶ **Teststatistika:** $\bar{X} - \bar{Y}$. Samplingfördelning under H_0 ?
 - ▶ Linjärkombination av normalvariabler är normalfördelade. $\bar{X} - \bar{Y}$ är normalfördelad.
 - ▶ $E(\bar{X} - \bar{Y}) = \mu_X - \mu_Y = 0$ under H_0 .
 - ▶ $Var(\bar{X} - \bar{Y}) = Var(\bar{X}) + Var(\bar{Y}) = \sigma^2/n + \sigma^2/m = \sigma^2(1/n + 1/m)$.

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}.$$

KOPPLING MELLAN HYPOTESTEST OCH KONFIDENSINTERVALL

Ett test av $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_A : \theta \neq \theta_0$ på signifikansnivån α

accepterar nollhypotesen

om och endast om

θ_0 ingår i ett symmetriskt $(1 - \alpha)100\%$ konfidensintervall för θ

P-VÄRDE

- ▶ Hur väljer vi α ?
- ▶ **Lågt** α ställer mycket **stora krav** på bevisningen: teststatistikan måste anta mycket stora (positiva eller negativa) värden för att vi ska kunna förkasta H_0 .
- ▶ **Stort** α ställer **låga krav**. Vi förkastar baserat på väldigt lite bevis.
- ▶ Idé: presentera resultat för alla α .
- ▶ **P-värde** = den lägsta signifikansnivån α där vi kan förkasta nollhypotesen.
- ▶ Alternativ definition: Sannolikheten att acceptera en teststatistiska som är lika extrem eller ännu mer extrem än T_{obs} .
- ▶ Exempel: ensidigt Z -test:

$$p\text{-värde: } P\{Z \geq Z_{obs}\}$$

SKATTA EN VARIANS - χ^2 -FÖRDELNINGEN

- ▶ Väntevärdesriktig estimator av σ^2

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

- ▶ χ^2 (Chi-två) fördelningen med ν frihetsgrader

$$f(X) = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0$$

- ▶ Om $X \sim \chi^2_\nu$ så gäller

$$\mathbb{E}X = \nu, \quad \text{Var}(X) = 2\nu$$

- ▶ $\chi^2_\nu = \text{Gamma}(\nu/2, 1/2)$.
- ▶ **Samplingfördelning** för σ^2

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

- ▶ χ^2 -fördelningen kan användas för att skapa konfidensintervall och hypotestest för σ^2 .

χ^2 GOODNESS OF FIT TEST

- ▶ Antag att din population har följande diskreta fördelning F_0 :
 $P(X = 1) = p_1, P(X = 2) = p_2, \dots, P(X = m) = p_m$.
- ▶ Om du har observerat n observationer så förväntar du dig np_k observationer där $X = k$.
- ▶ Låt $Exp(k)$ beteckna förväntat antal observationer med värde k om F_0 är en korrekt populationsmodell.
- ▶ Låt $Obs(k)$ beteckna faktiskt antal observationer med värde k .

χ^2 GOODNESS OF FIT TEST

► Chi-två statistikan

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^N \frac{[Obs(k) - Exp(k)]^2}{Exp(k)}$$

- Om χ^2 är för stort så drar vi slutsatsen att data inte kommer från populationen med fördelningen F_0 ovan.
- Men hur stort är för stort? Jämför med samplingfördelningen för χ^2 under $H_0 : F = F_0$ mot $H_A : F \neq F_0$.
- Vid stora stickprov följer Chi-två statistikan en χ^2 -fördelning med $m - 1$ frihetsgrader, om $Exp(k) > 5$ för alla k .
- Kan även testa om data kommer från $F_0(\theta)$ där θ är en okänd parameter som skattas med en konsistent estimator. Frihetsgrader $= n - 1 - d$.
- **Kontinuerliga fördelningar** kan hanteras genom diskretisering (men se till att $Exp(k) > 5$ för alla k).