TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña
IDA, Linköpings Universitet

Föreläsning 8

Översikt

- **Punktskattning**
- **Maximum likelihood metoden**
- **Samplingfördelning**
- **Konfidensintervall**
- **Konfidensintervall för populationsväntevärden**
- **Konfidensintervall för proportioner**

Punktskattning

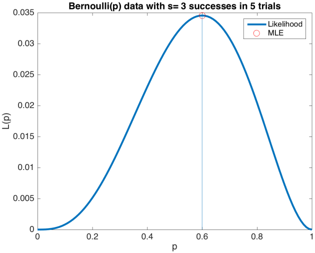
- Grundproblem: Sannolikhetsmodeller har **okända** parametrar, θ.
  - T ex medelinkomsten i Sverige. Populationens väntevärde μ är okänd.
  - T ex andelen defekta komponenter i produktionen av en produkt. Sannolikheten p är okänd.
  - T ex spamfilter. Parametrarna β_0 och β_1 är okända i

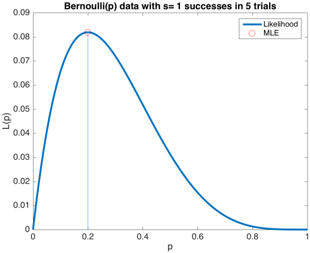
$$p\left(\text{spam}|\text{antal\$}\right) = \frac{\exp\left(\beta_0 + \beta_1 \cdot \text{antal\$}\right)}{1 + \exp\left(\beta_0 + \beta_1 \cdot \text{antal\$}\right)}$$

- Vi vill använda (tränings)data för att bestämma värden för dessa parametrar.
- **Punktskattning**: Vår bästa **gissning** utifrån data.

Maximum likelihood metoden

- **Maximum likelihood (ML) estimatorn**: Välj värdet för θ som maximerar sannolikheten för data, dvs
$$\hat{\theta} = \mathrm{argmax}_{\theta \in \Theta} P(x_1, \ldots, x_n | \theta)$$
- Kontinuerliga fallet:
$$\hat{\theta} = \mathrm{argmax}_{\theta \in \Theta} f(x_1, \ldots, x_n | \theta)$$
- **Likelihoodfunktionen** är sannolikheten för stickprovet sett **som en funktion av parametern**
$$L(\theta) = P(x_1, \ldots, x_n | \theta)$$
- ML-estimatorn maximerar $L(\theta)$.
- Exempel: Data $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 1$ från $Bernoulli(p)$.
$$L(p) = (1-p)pp(1-p)p = p^3(1-p)^2$$





Maximum likelihood metoden

- Vi kan hitta **ML-skattningen** analytiskt: Lös med avseende på θ

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

- Oftast enklare att **maximera log-likelihoodfunktionen**

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

- Exempel: Bernoulli data.

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(s \ln p + f \ln(1-p)\right) = \frac{s}{p} + f\frac{-1}{1-p} = \frac{s}{p} - \frac{f}{1-p} = 0$$

  vilket ger lösningen $\hat{p} = \frac{s}{s+f} = \frac{s}{n}$.

- Kontrollera $\hat{p}$ är ett maximum, dvs andraderivatan är negativ i $p = \hat{p}$.

$$\frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial p^2} = -\frac{s}{p^2} - \frac{f}{(1-p)^2} < 0$$

  för alla $p \in [0, 1]$, inklusive $p = \hat{p}$.

Maximum likelihood metoden

- Notera att oberoende data är praktiskt

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$$

så log-likelihooden blir en summa som är lättare att derivera

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i|\theta).$$

- Exempel: $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$ ger

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

och

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{\lambda} - n\bar{x},$$

och därmed $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$.

Samplingfördelningen

- Hur bra är en estimator $\hat{\theta}$?
- Väntevärdesriktig ? $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$.
- $Bias(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta$.
- **Samplingfördelningen** beskriver variationen i $\hat{\theta}$ **över alla stickprov** av en viss storlek n.
- **Standardfelet** för $\hat{\theta}$ är $\sqrt{Var(\hat{\theta})}$, dvs standardavvikelsen för $\hat{\theta}$ **över alla stickprov** av storleken n.
- **Mean Squared Error**:

$$MSE(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + \left[Bias(\hat{\theta})\right]^2$$

Samplingfördelningen

- Exempel: Poisson data. ML-estimator för λ: $\bar{X}$. Se Example 9.7 i Baron.
- Väntevärdesriktig: $\mathbb{E}(\hat{\lambda}) = \lambda$ och $Var(\hat{\lambda}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\lambda}{n}$.
- Notera att $Var(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{n}$ beror på den okända parametern λ. Lösning: Sätt $\lambda = \hat{\lambda} = \bar{x}$ eller sätt $\sigma^2 = s^2$
- Tekniker för att härleda samplingfördelningen för en estimator $\hat{\theta}$:
  - Om $X_1, \ldots, X_n$ är iid från $N(\mu, \sigma^2)$ så är $\hat{\theta} = \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ **exakt**.
  - **CLT med väntevärdesriktighet**: $\hat{\theta} \sim N(\theta, Var(\hat{\theta}))$ **approximativt**.
  - **Bootstrapsimulering**.
- **Bootstrap**:
  - Skapa N **bootstrapstickprov** $\mathrm{x}^{(1)}, \ldots, \mathrm{x}^{(N)}$ av samma storlek som det ursprungliga stickprovet genom dragning **med återläggning**.
  - Beräkna estimatet $\hat{\theta}(\mathrm{x}^{(1)}), \ldots, \hat{\theta}(\mathrm{x}^{(N)})$ för var och ett av dessa N stickprov.
  - Den empiriska fördelningen för $\hat{\theta}(\mathrm{x}^{(1)}), \ldots, \hat{\theta}(\mathrm{x}^{(N)})$ (tänk histogram) är en approximation av samplingfördelningen för $\hat{\theta}$.

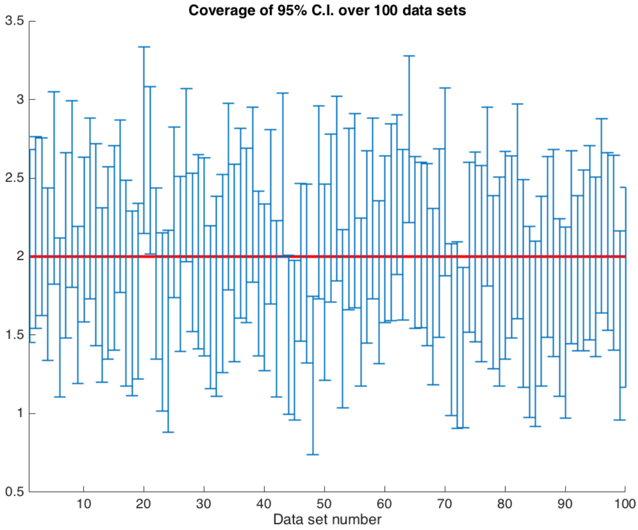
Konfidensintervall

- Punktskattning ger bara en bästa gissning för θ. Konfidensintervall är ett försök att beskriva osäkerheten om θ.
- **95%-igt konfidensintervall** för θ är ett intervall $[a, b]$ sådant att

$$\boldsymbol{P}\{a \leq \theta \leq b\} = 0.95.$$

- Viktigt: Parametern θ är en fix konstant. Det är **intervallet** som är **slumpmässigt**, dvs a och b are funktioner av stickprovet.
- **Tolkning**: Ett 95%-igt konfidensintervall $[a, b]$ kommer att **täcka** parametervärdet θ, dvs $\theta \in [a, b]$, i 95% av alla möjliga stickprov. Alltså om vi räknar a och b från alla stickprov, täcker intervallet θ i 95% av fallen. Denna konfidens säger mer om metoden för att räkna intervallet än om det specifika intervallet vi fick från stickprovet. Tänk på sannolikheten att intervallet täcker θ snarare än på sannolikheten att θ ligger i intervallet.
- Man kan naturligtvis ha andra **konfidensnivåer** än 95%, men 90%, 95% och 99% är vanligast.

Konfidensintervall

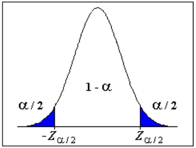


Konfidensintervall - standardprocedur

- Antag **normalfördelad väntevärdesriktig estimator** $\hat{\theta}$, t ex $\bar{X}$ vid normalfördelade data (eller CLT argument). Då gäller

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma(\hat{\theta})} \sim N(0,1)$$

- Låt z_α vara $(1-\alpha)\%$ percentilen i $N(0,1)$ fördelningen, dvs värdet som klipper av ytan α till **höger**. Tabell A4 i Baron ger att $z_{0.025} = 1.96$.



- Då gäller att

$$\boldsymbol{P}\left(-z_{0.025} \leq \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma(\hat{\theta})} \leq z_{0.025} \right) = 0.95$$

vilket kan skrivas om som

$$\boldsymbol{P}(\hat{\theta} - z_{0.025} \cdot \sigma(\hat{\theta}) \leq \theta \leq \hat{\theta} + z_{0.025} \cdot \sigma(\hat{\theta})) = 0.95$$

- Alltså, $[\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma(\hat{\theta}), \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma(\hat{\theta})]$ är ett $(1-\alpha)\%$-igt konfidensintervall för θ.

Konfidensintervall för populationsväntevärdet

- Antag $\theta = \mu$, $\hat{\theta} = \bar{X}$, $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$, och $\sigma(\hat{\theta}) = Std(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$. Dessutom, σ **antas känd**.
- Centrala gränsvärdessatsen ger att $\hat{\theta} = \bar{X}$ är approximativt normalfördelad när n är stort ($n \geq 30$). Oavsett hur data är fördelade. Alltså, $\bar{X} \pm z_{0.025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ är ett (approximativt) 95%-igt konfidensintervall för θ. Om data är normalfördelade är intervallet exakt.
- **Bestämning av stickprovsstorlek** n: Vi kan bestämma n så att vi får ett konfidensintervall av given bredd.
- Se Examples 9.13 och 9.15 i Baron.

Konfidensintervall för populationsväntevärdet

- I praktiken är $\sigma(\hat{\theta})$ inte känd utan måste skattas (estimeras) från data, t ex $\sigma(\hat{\theta}) = Std(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$ och σ är ofta okänd.
- **Vid stort** n får vi en bra skattning av $\sigma(\hat{\theta})$ genom att ersätta den med t ex $s(\hat{\theta}) = s/\sqrt{n}$.
- **Vid stort** n får vi ett bra **approximativt** konfidensintervall genom att ersätta $\sigma(\hat{\theta})$ med $s(\hat{\theta})$, och anropa centralagränsvärdessatsen som tidigare.
- **Vid litet** n funkar $s(\hat{\theta})$ inte lika bra. Då, konfidensintervall för populationsväntevärdet μ vid **små stickprov** från en **normalfördelad population**:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}(0,1)$$

- Så ett **exakt** 95%-igt konfidensintervall för μ ges då av

$$\bar{X} \pm t_{0.025}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

  där $t_{0.025}(n-1)$ är 97.5% percentilen i t-**fördelningen** med $\nu = n-1$ frihetsgrader. Läses av från Tabell A5 i Baron.
- Se Example 9.19 i Baron.
- Man kan också använda den senaste metoden **vid stora stickprov** och få en **exakt** konfidensintervall.
- För **små stickprov** från en **icke-normalfördelad population** använd bootstrap för att approximera samplingfördelningen (se slide 8).

Konfidensintervall för en andel

- Exempel: 196 av 2000 utfrågade svarar att de röstar på centerpartiet. Hur stor andel p röstar på centerpartiet i hela populationen ?
- $\hat{p} = 196/2000$ är ML-skattningen. Men hur säkra är vi ?
- $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ där $X_i = 1$ om den i:te utfrågade person röstar på centerpartiet och $X_i = 0$ annars. Så $\hat{p}$ är också ett medelvärde !
- Antag att $X_i \overset{iid}{\sim} Bernoulli(p)$. Då gäller $\mathbb{E}(X_i) = p$ och $Var(X_i) = p(1-p)$. Alltså,

$$\mathbb{E}(\hat{p}) = p \text{ och } Var(\hat{p}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

- $\sigma(\hat{p})$ beror på p, som vi ersätter med en skattning: $s(\hat{p}) = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$.
- Centralagränsvärdessatsen ger ett **approximativt** $(1-\alpha)100\%$-igt intervall

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = (0.085, 0.111)$$

Översikt

- **Punktskattning**
- **Maximum likelihood metoden**
- **Samplingfördelning**
- **Konfidensintervall**
- **Konfidensintervall för populationsväntevärden**
- **Konfidensintervall för proportioner**