

TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña
IDA, Linköpings Universitet

Föreläsning 2

- ▶ **Slumpvariabler**
- ▶ **Sannolikhetsfördelning**
- ▶ **Väntevärde** och **varians**
- ▶ **Kovarians** och **korrelation**
- ▶ **Chebyshevs olikhet**

Definition. En **slumpvariabel** X är en funktion från utfallsrummet Ω till \mathbb{R}

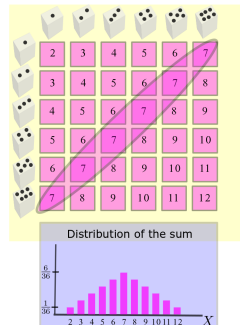
$$X = f(\omega)$$

där $\omega \in \Omega$ är ett utfall.

- ▶ Obs. X s värden är disjunkta och uttämmande, dvs utfall.
- ▶ Slumpvariabler är **praktiska**: Vi bryr oss ofta bara om ett enklare experiment (X) vars utfall är en funktion av den underliggande slumpen ω .
- ▶ Två typer av slumpvariabler:
 - ▶ **Kontinuerlig**: X antar värden i \mathbb{R} (eller $(0, 1)$). Längdhopp.
 - ▶ **Diskret**: X antar ett ändligt (t ex $\{0, 1, 2, \dots, n\}$) eller uppräkneligt ($\{0, 1, 2, \dots\}$) antal värden. Höjdhopp.
- ▶ Ett annat ord för slumpvariabel är **stokastisk variabel**.

Slumpvariabler: Några exempel

- ▶ Exempel: Kasta två tärningar.
 - ▶ $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$.
 - ▶ X = antalet prickar på två kast.
- ▶ Exempel: Singla två mynt.
 - ▶ $\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$.
 - ▶ X = antalet H (krona).
- ▶ Exempel: Flyga quadcopter.
 - ▶ Ω = abstrakt utfallsrum med alla möjliga utfall på faktorer som bestämmer quadcopterns resväg.
 - ▶ X = tre-dimensionella koordinater (x, y, z) över quadcopterns position vid tidpunkt t .



Definition. **(Sannolikhets)fördelningen** för en slumpvariabel X är sannolikheterna för alla dess utfall, dvs

$$P(x) = \mathbf{P}(X = x)$$

för alla möjliga utfall x .

- ▶ Stora och små bokstäver spelar roll:
 - ▶ X är **slumpvariabeln**. Exempel: Summan av två tärningarna.
 - ▶ x är ett **givet utfall**. Exempel: 7 prickar.
- ▶ Fet stil eller ej spelar roll:
 - ▶ \mathbf{P} är sannolikheten för ett givet utfall. $\mathbf{P}(X = x)$ betyder egentligen "Sannolikheten för alla de utfall $((1, 6), (2, 5), \text{ etc})$ som ger summan 7".
 - ▶ $P(x)$ är en enkel reellvärd funktion, precis som i vanlig analys.
- ▶ För **diskreta** slumpvariabler kallas $P(x)$ ofta för **pmf** (probability mass function).
- ▶ Slumpvariabelns **support**: $\{x : P(x) > 0\}$

Definition. **Fördelningsfunktionen** för en slumpvariabel X definieras som

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} P(y)$$

- ▶ En sannolikhetsfördelning summerar till 1:

$$\sum_{\text{alla } x} P(x) = \sum_{\text{alla } x} P(X = x) = 1$$

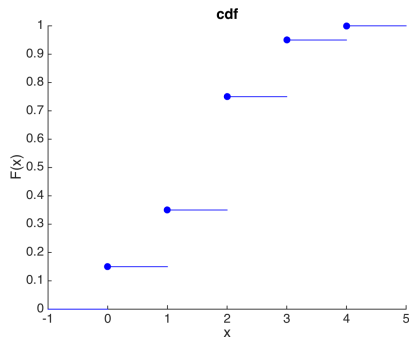
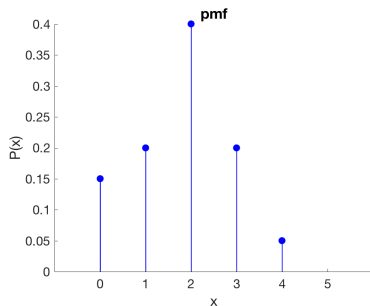
- ▶ Fördelningsfunktionen är icke-avtagande mellan 0 och 1:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

- ▶ Fördelningsfunktionen kallas också för den **kumulativa täthetsfunktionen** eller **cdf** (cumulative density function).

Sannolikhets- och fördelningsfunktion

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.15	0.20	0.40	0.20	0.05
$F(x)$	0.15	0.35	0.75	0.95	1.00



► Obs. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Simultanfördelning

- ▶ Låt X och Y vara slumpvariabler.
- ▶ (X, Y) är en **slumpvektor** med typiskt utfall (x, y) .
- ▶ Fördelningen för (X, Y) kallas **simultanfördelning**.

$$P(x, y) = \mathbf{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbf{P}(X = x \cap Y = y)$$

- ▶ Simultanfördelningen är en sannolikhetsfördelning:

$$\sum_x \sum_y P(x, y) = 1$$

- ▶ Exempel: $X = \text{Spam/Ham}$ och $Y = \text{Inbox/Spambox}$.

	Spam	Ham
Inbox	0.02	0.88
Spambox	0.09	0.01

- ▶ Simultanfördelningen: "Vad är sannolikheten att få ett ham-mejl **och** att det hamnar i spamboxen?"

Simultanfördelning

- ▶ Exempel: X = avkastning aktie X, och Y = avkastning aktie Y.

		Aktie Y		
		Låg	Medel	Hög
Aktie X	Låg	0.05	0.05	0.15
	Medel	0.10	0.30	0.20
	Hög	0.05	0.05	0.05

- ▶ Aktieportfölj: 50% i aktie X och 50% i aktie Y.
- ▶ Simultanfördelningen: "Vad är sannolikheten att min aktieportfölj får medelavkastning?"

Marginalfördelning

- ▶ Fördelningen för bara X kallas **marginalfördelningen** (för X).
- ▶ Fördelningen för bara Y kallas marginalfördelningen (för Y).
- ▶ Marginalfördelningen: "Vad är sannolikheten att få ett spam-mejl (oavsett var det hamnar) ?"
- ▶ Marginalfördelningen fås genom att summera ut den andra variabeln:

$$P_X(x) = \sum_y P(x, y)$$

$$P_Y(y) = \sum_x P(x, y)$$

- ▶ Jämför med lagen om total sannolikhet (Fö1).
- ▶ Exempel: X =Spam/Ham och Y =Inbox/Spambox.

	Spam	Ham	
Inbox	0.02	0.88	0.9
Spambox	0.09	0.01	0.1
	0.11	0.89	

Marginalfördelning

- ▶ Exempel: X = avkastning aktie X, och Y = avkastning aktie Y.

		Aktie Y			
		Låg	Medel	Hög	
Aktie X	Låg	0.05	0.05	0.15	0.25
	Medel	0.10	0.30	0.20	0.6
	Hög	0.05	0.05	0.05	0.15
		0.20	0.40	0.40	

- ▶ Vilka portföljandelar är optimala ? Beslut under osäkerhet.

Definition. Slumpvariablerna X och Y är **oberoende** om

$$P(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

för **alla** värden på x och y .

- ▶ Exempel: $X = \text{Spam/Ham}$ och $Y = \text{Inbox/Spambox}$.

	Spam	Ham	
Inbox	0.02	0.88	0.9
Spambox	0.09	0.01	0.1
	0.11	0.89	

- ▶ Valet av box är inte oberoende av om mejlet är ham eller spam:

$$P(\text{inbox}) \cdot P(\text{ham}) = 0.9 \cdot 0.89 = 0.801 \neq 0.88 = P(\text{inbox}, \text{ham})$$

- ▶ Alternativt, $P(\text{inbox}|\text{ham}) = \frac{P(\text{inbox}, \text{ham})}{P(\text{ham})} = \frac{0.88}{0.89} = 0.988 > 0.9 = P(\text{inbox})$,
dvs lättare att gissa box om man vet att mejlet är ham.

Lägesmått

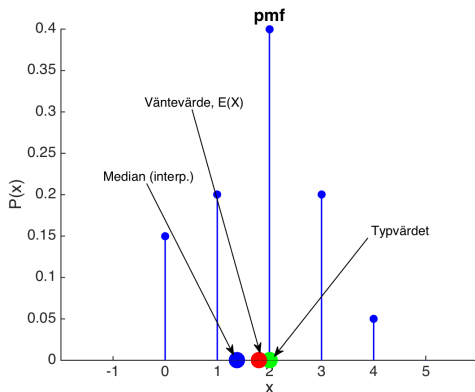
- ▶ En sannolikhetsfördelning $P(x)$ beskriver **all** osäkerhet om X .
- ▶ Kan vara komplicerat att förmedla hela $P(x)$, speciellt om X är en fler-dimensionell slumpvektor.
- ▶ Naturliga **lägesmått**:
 - ▶ **Median**, m . $P(X \leq m) = 0.5$. Hälften av sannolikhetsmassan ligger till vänster om m .
 - ▶ **Väntevärdet**, μ eller $\mathbb{E}(X)$, är det genomsnittliga värdet för X :
$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_x x \cdot P(x).$$
 - ▶ **Typvärdet** är det mest sannolika värdet, dvs $\arg \max_x P(x)$.

Lägesmått: Exempel

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.15	0.20	0.40	0.20	0.05

► Väntevärdet

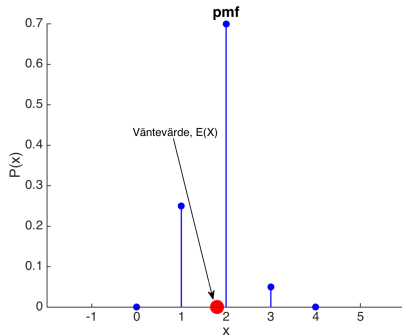
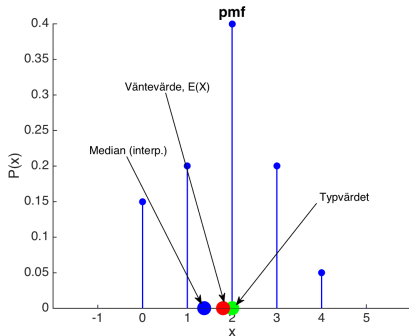
$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.20 + 2 \cdot 0.40 + 3 \cdot 0.20 + 4 \cdot 0.05 = 1.8$$



- Alternativ definition av median m : $P(X \leq m) \geq 1/2$ och $P(X \geq m) \geq 1/2$.
Då, $m = 2$.

Lägesmått säger inget om spridningen

- Väntevärdet är ett lägesmått. Ingen info om fördelningens spridning.



Varians

- ▶ Storleken på avvikelserna $x - \mathbb{E}(X)$ säger något om spridningen.
- ▶ Idé till spridningsmått: Den förväntade avvikelserna

$$\mathbb{E}(X - \mu) = \sum_x P(x) \cdot (X - \mu)$$

- ▶ Problem: $\mathbb{E}(X - \mu)$ är alltid exakt noll, eftersom positiva och negativa avvikelser tar ut varandra.
- ▶ **Varians**: Förväntade kvadrerade avvikelserna

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 \cdot P(x)$$

- ▶ Alternativ formel

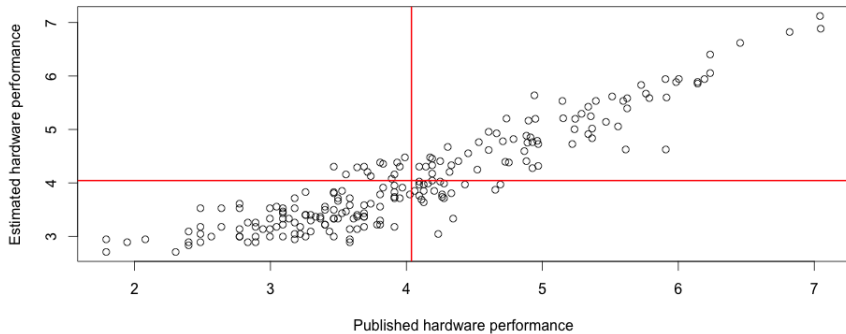
$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$$

- ▶ **Standardavvikelse**: $\sigma = \text{Std}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$. Samma skala som X .

Egenskaper hos väntevärde och varians

- ▶ $\mathbb{E}(c) = c$, där c är en konstant.
- ▶ $\mathbb{E}(aX + b) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b$ med a, b konstanter.
- ▶ $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- ▶ $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y) + c$ med a, b, c konstanter.
- ▶ $\text{Var}(aX + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$
- ▶ Om X och Y oberoende: $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
- ▶ Om X och Y oberoende: $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Kovarians och korrelation



Kovarians och korrelation

- ▶ Mått på **samvariation**. Sammanfattning av simultanfördelning.
- ▶ **Kovarians** mellan X och Y :

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$$

- ▶ Positiv kovarians:
 - ▶ X tenderar att vara större än $\mathbb{E}(X)$ samtidigt som Y tenderar att vara större än $\mathbb{E}(Y)$.
 - ▶ X tenderar att vara mindre än $\mathbb{E}(X)$ samtidigt som Y tenderar att vara mindre än $\mathbb{E}(Y)$.
- ▶ Negativ kovarians: X tenderar att vara större än $\mathbb{E}(X)$ samtidigt som Y tenderar att vara mindre än $\mathbb{E}(Y)$, och tvärtom.
- ▶ $\sigma^2 = \sigma_{XX} = \text{Cov}(X, X)$.
- ▶ **Korrelationskoefficienten** mellan X och Y

$$\rho = \text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Std}(X) \cdot \text{Std}(Y)}$$

- ▶ Obs. $-1 \leq \rho \leq 1$ och utan skala (jfr. med σ_{XY} som har skala $X \cdot Y$).
- ▶ Om $|\rho| = 1$, då Y är en linjär funktion av X .

Egenskaper hos kovarians

- ▶ $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- ▶ $\text{Var}(aX + bY + c) = a^2 \cdot \text{Var}(X) + b^2 \cdot \text{Var}(Y) + 2 \cdot a \cdot b \cdot \text{Cov}(X, Y)$ med a, b, c konstanter.
- ▶ $\text{Cov}(a \cdot X + b, c \cdot Y + d) = a \cdot c \cdot \text{Cov}(X, Y)$
- ▶ Om X och Y oberoende, då $\text{Cov}(X, Y) = 0$ and $\rho(X, Y) = 0$.
- ▶ Men $\text{Cov}(X, Y) = 0$ eller $\rho(X, Y) = 0$ innebär **inte** att X och Y är oberoende.

Chebyshevs olikhet

- ▶ Väntevärdet μ och variansen σ^2 innehåller information om sannolikhetsfördelningen.
- ▶ Chebyshevs olikhet: Givet μ och σ^2 så kommer X ligga i intervallet $[\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$ med en sannolikhet som är åtminstone $1 - (\sigma/\varepsilon)^2$.

Chebyshevs olikhet

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

- ▶ Notera att Chebyshevs olikhet endast kräver vetskap om μ och σ^2 . Inget andra egenskaper behövs (symmetri, skevhet).
- ▶ Men den lilla information har sitt pris: $\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$ är ofta bra mycket större än den sanna sannolikheten $P(|X - \mu| > \varepsilon)$.
- ▶ Chebyshevs olikhet är ofta nyttig i teoretiska sammanhang.
- ▶ Se Example 3.12 i Baron.

- ▶ **Slumpvariabler**
- ▶ **Sannolikhetsfördelning**
- ▶ **Väntevärde** och **varians**
- ▶ **Kovarians** och **korrelation**
- ▶ **Chebyshevs olikhet**