

TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña
IDA, Linköpings Universitet

Föreläsning 6

Översikt

- ▶ **Stokastiska processer**
- ▶ **Markovkedjor**
- ▶ **Binomialprocess**
- ▶ **Poissonprocess**

Stokastiska processer

- ▶ **Stokastisk process:** En **sekvens** av slumpvariabler X_1, X_2, \dots, X_T **observerade över tid**.
 - ▶ Example: X_t = antalet påträffade buggar under dag t , $t = 1, 2, \dots, T$.
 - ▶ Example: X_t = slutkursen på Ericsson aktie vid dag t .
 - ▶ Example: X_t = temperaturen vid en viss plats vid tidpunkt t .
- ▶ **Stokastisk process:** En slumpvariabel $X(t, \omega)$ som också beror av tiden, där
 - ▶ $t \in \mathcal{T}$ och \mathcal{T} är en mängd tidpunkter, t ex $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
 - ▶ $\omega \in \Omega$ är utfallet i ett experiment (precis som förut).
 - ▶ Värden på $X(t, \omega)$ kallas **tillstånd**.
 - ▶ Härefter $X(t) = X(t, \omega)$ (precis som förut).
- ▶ Uppdelning av processer:
 - ▶ Diskreta eller kontinuerliga **tillstånd**.
 - ▶ Diskret eller kontinuerlig **tid**.
- ▶ Diskret tillstånd, kontinuerlig tid: Våljarsympatier över tid.
- ▶ Diskret tillstånd, diskret tid: Våljarsympatier på valdagen.
- ▶ Kontinuerligt tillstånd, diskret tid: Dagens högsta temperatur
- ▶ Kontinuerligt tillstånd, kontinuerlig tid: Temperaturen vid tidpunkten över tid.

- ▶ **Markovprocess:** Prognosen för morgondagen beror endast på idag:

$$P(\text{framtiden}|\text{nu, historiken}) = P(\text{framtiden}|\text{nu})$$

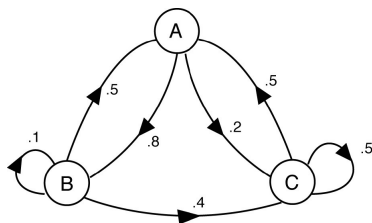
- ▶ **Markovprocess:** För alla tidpunkter $t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$ och händelser A_1, \dots, A_n, A_{n+1} gäller att

$$P(X(t_{n+1}) \in A_{n+1} | X(t_1) \in A_1, \dots, X(t_n) \in A_n) = P(X(t_{n+1}) \in A_{n+1} | X(t_n) \in A_n)$$

- ▶ Många processer är inte Markov. Praktiskt **antagande**.

- ▶ **Markovkedja**: Markovprocess med **diskret tid** och **diskreta tillstånd**.
- ▶ **Transitionssannolikheter (en-steps)**

$$p_{ij}(t) = \mathbf{P} \{X(t+1) = j | X(t) = i\}$$



- ▶ **Transitionssannolikheter (h-steps)**

$$p_{ij}^{(h)}(t) = \mathbf{P} \{X(t+h) = j | X(t) = i\}$$

Markovkedjor

- ▶ **Homogen Markovkedja:** Transitionssannolikheterna är konstanta över tiden, dvs

$$p_{ij}(t) = p_{ij}$$

- ▶ **Transitionsmatris**

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

- ▶ Example: $\Omega = \{\text{sol, regn}\}$

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

- ▶ Example: $\Omega = \{\text{RödGröna, Alliansen, SD}\}$

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$$

- ▶ Se `SimulateMarkovChain.R`.

► Transitionssannolikheter (h-steps)

$$p_{ij}^{(h)}(t) = \mathbf{P} \{X(t+h) = j | X(t) = i\}$$

- Komplex. Det finns många vägar som tar oss $i \rightarrow j$ när $h > 1$.
- Example: $\Omega = \{1, 2\}$. Om $h = 2$ kan vi göra resan $1 \rightarrow 2$ på två sätt:
 - $1 \rightarrow 1 \rightarrow 2$
 - $1 \rightarrow 2 \rightarrow 2$
- 2-steps transitionssannolikhet $1 \rightarrow 2$:

$$p_{12}^{(2)} = p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22}$$

- 3-steps transitionssannolikhet $1 \rightarrow 2$:

$$\begin{aligned} p_{12}^{(3)} &= p_{11}p_{11}p_{12} + p_{11}p_{12}p_{22} + p_{12}p_{21}p_{12} + p_{12}p_{22}p_{22} \\ &= p_{11}(p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22}) + p_{12}(p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22}) \\ &= p_{11}p_{12}^{(2)} + p_{12}p_{22}^{(2)} \end{aligned}$$

- ▶ Transitionsmatris 1-steg

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

- ▶ Transitionsmatris h -steg

$$P^{(h)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(h)} & p_{12}^{(h)} & \cdots & p_{1n}^{(h)} \\ p_{21}^{(h)} & p_{22}^{(h)} & \cdots & p_{2n}^{(h)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^{(h)} & p_{n2}^{(h)} & \cdots & p_{nn}^{(h)} \end{pmatrix}$$

- ▶ **Resultat:** $P^{(h)}$ är h :te matrispotensen av P

$$P^{(h)} = P \dots P \dots P = P^h$$

- ▶ Se Example 6.9 i Baron.

Marginalfördelning

- ▶ **Initialfördelning** vid $t = 0$ är radvektorn

$$P_0 = (P_0(1), P_0(2), \dots, P_0(n))$$

- ▶ **Sannolikhetsfördelning över tillstånden** efter h steg

$$P_h = (P_h(1), P_h(2), \dots, P_h(n))$$

- ▶ **Resultat:**

$$P_h = P_0 P^{(h)} = P_0 P^h$$

- ▶ Example: $P_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$ och

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Då

$$P_3 = (1/3, 1/3, 1/3) \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}^3 = (0.333, 0.407, 0.259)$$

- ▶ Se Example 6.10 i Baron.

Stationärfördelning

- ▶ Vad är sannolikhetsfördelningen över tillstånden efter många steg ?
- ▶ **Stationärfördelning** är radvektorn

$$\pi = \lim_{h \rightarrow \infty} P_h$$

- ▶ Obs. $\pi P = \pi$.
- ▶ En Markovkedja är **reguljär** om det finns en h så att

$$p_{ij}^{(h)} > 0$$

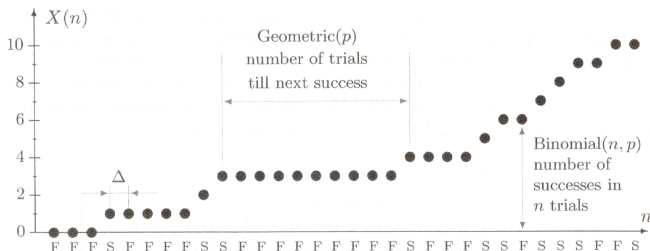
för alla i, j .

- ▶ **En reguljär Markov kedja har en stationärfördelning.** Man hittar den genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_x \pi_x = 1 \end{cases}$$

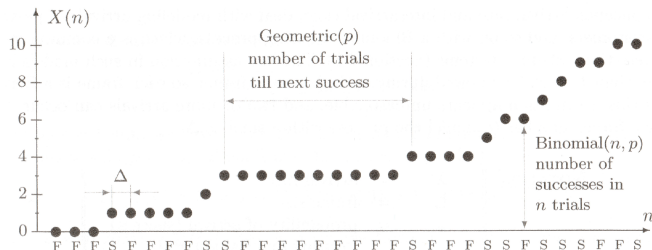
Binomialprocess

- ▶ **Räkneprocesser:** $X(t)$ är antalet räknade saker t o m tidpunkt t .
- ▶ **Binomialprocess:** $X(n)$ är **antalet lyckade försök i de n första** i en sekvens av oberoende Bernoulliförsök med sannolikhet p .
- ▶ $X(n) \sim \text{Binomial}(n, p)$
- ▶ $Y =$ antalet försök mellan två lyckade.
- ▶ $Y \sim \text{Geometrisk}(p)$



- ▶ Se `SimulateBinomialProcess.R`.

Binomialprocess



- ▶ Ett nytt Bernoulliförsök var Δ sekund. $\Delta =$ **time frame**.
- ▶ n försök tar $t = n\Delta$ sekunder att utföra. Så, $n = t/\Delta$.
- ▶ Processen kan defineras som funktion av (klock)tid, dvs $X(n) = X(t/\Delta)$.
- ▶ Förväntat antal lyckade under hela tidsperioden t är $\mathbb{E}(X(n)) = np$.
- ▶ **Förväntat antal lyckade försök under t sekunder:**

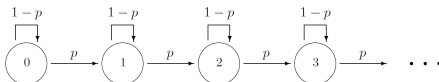
$$\mathbb{E}(X(t/\Delta)) = tp/\Delta,$$

dvs $\lambda = p/\Delta$ förväntat antal lyckade per sekund, också kallad **ankomstfrekvens**.

Binomialprocess

- ▶ **Interarrival time** T är **tiden** mellan lyckade försök.
- ▶ Y = **antalet** försök mellan två lyckade.
- ▶ $Y \sim \text{Geometrisk}(p)$
- ▶ $T = Y\Delta$. Följer en skalad geometrisk fördelning med support $\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots$. Då, $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(Y\Delta) = \Delta\mathbb{E}(Y) = \Delta/p = 1/\lambda$.
- ▶ Binomialprocessen innebär en diskret tid, diskreta tillstånd, Markov- och homogenprocess. Så, den kan representeras som Markovkedja med transitionssannolikheter

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{om } j = i + 1 \\ 1 - p & \text{om } j = i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

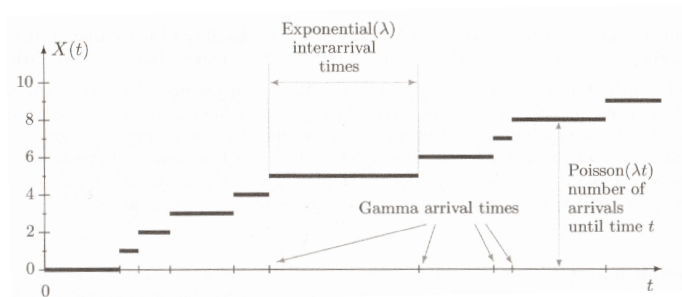


Obs. Markovkedjan är icke-reguljär, dvs ingen stationärfördelning. Obs. flera vägar till 1, 2, ..., vilken innebär binomialfördelningen.

- ▶ Notera att Binomialprocessen kan vara restriktiv om Δ väljs för stort, eftersom endast en Bernoullihändelse kan inträffa i varje time frame Δ .
- ▶ Se Example 6.18 i Baron.

Poissonprocess

- ▶ **Poissonprocessen** fås genom att låta $\Delta \rightarrow 0$ och $n \rightarrow \infty$ samtidigt som λ hålls konstant, dvs även $p \rightarrow 0$.
- ▶ **Kom ihåg:** $X(t) \sim \text{Binomial}(n, p) \rightarrow \text{Poisson}(\lambda)$ när $n \rightarrow \infty$ och $p \rightarrow 0$ och $\lambda = np$ är konstant.



- ▶ Poissonprocessen är en process i **kontinuerlig tid**.
- ▶ Interarrival time $T \sim \text{Exp}(\lambda)$. Används vid simulering, se [SimulatePoissonProcess.R](#).
- ▶ Interarrival för k framtida händelser $T_k \sim \text{Gamma}(k, \lambda)$.
- ▶ Se Example 6.20 i Baron.

Översikt

- ▶ **Stokastiska processer**
- ▶ **Markovkedjor**
- ▶ **Binomialprocess**
- ▶ **Poissonprocess**