# TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña
IDA, Linköpings Universitet

Föreläsning 3

# Översikt

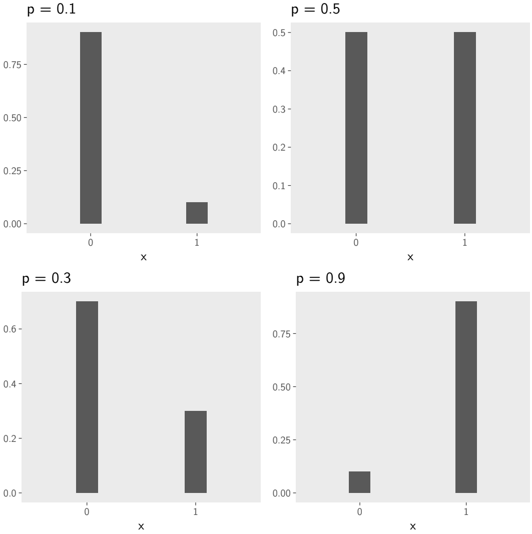
- **Fördelningsfamiljer för diskreta variabler**
- **Bernoulli, binomial, multinomial**
- **Geometrisk, negativ binomial**
- **Poisson**

# Bernoullifördelningen

Definition. En **Bernoullivariabel** $X$ kan anta två olika värden, 0 och 1. Om $X$ är **Bernoullifördelad**, dvs $X \sim \mathit{Bernoulli}(p)$, så gäller att $\boldsymbol{P}(X = 1) = P(1) = p$ och $\boldsymbol{P}(X = 0) = P(0) = q = 1 - p$.

- Genom att ändra parametern $p$ får vi en mängd olika sannolikhetsfördelningar på $\{0, 1\}$. En fördelningsfamilj är en mängd olika sannolikhetsfördelningar som indexeras med en eller flera parametrar. Några få fördelningsfamiljer räcker för att modellera en majoritet av experimenten.
- Se `ManipDistributions.R`.

# Bernoullifördelningen



# Bernoullifördelningen

- Pmf för $X \sim Bernoulli(p)$

$$P(x) = \begin{cases} q = 1 - p & \text{om x=0} \\ p & \text{om x=1} \end{cases}$$

- Om $X \sim Bernoulli(p)$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$
$$Var(X) = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 p = p - p^2 = p \cdot q$$

- En Benoullivariabel kallas också Bernoulliförsök.

# Binomialfördelningen

Definition. Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara en sekvens av $n$ **oberoende** Bernoulliförsök med sannolikhet $p$. Låt $X$ = **antalet lyckade försök i sekvensen**. Då är $X$ **binomialfördelad** med parametrar $n$ och $p$, dvs $X \sim \mathit{Binomial}(n, p)$ med pmf

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

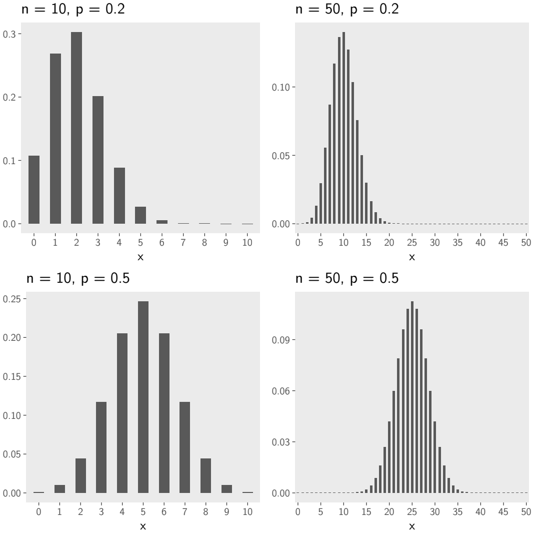
för $x = 0, 1, 2, \ldots, n$.

- $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ är antalet sekvenser av längd $n$ med exakt $x$ lyckade försök, så kallad **binomialkoefficienten**.
- Om t ex $n = 3$ och $x = 2$, så leder alla tre sekvenserna $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ och $(1, 1, 0)$ till utfallet $x = 2$.
  - Sekvensen $(0, 1, 1)$ har sannolikheten $q \cdot p \cdot p = p^2 q$.
  - Sekvensen $(1, 0, 1)$ har sannolikheten $p \cdot q \cdot p = p^2 q$.
  - Sekvensen $(1, 1, 0)$ har sannolikheten $p \cdot p \cdot q = p^2 q$.
- Antalet misslyckade försök i sekvensen följer $\mathit{Binomial}(n, q)$.

# Binomialfördelningen

- Binomialfördelningen passar data:
  - som är **diskreta icke-negativa heltal**.
  - som kan anta alla **heltal mellan** 0 **och** $n$.
- Passande: Hur många elever i klass 5A kan simma ?
- Inte passande: Hur många mål gör IFK Norrköping på lördag ? (pga ingen naturlig övre gräns) eller längdmätningar (kontinuerliga).
- Egenskaper för $X \sim Binomial(n, p)$
  - $\mathbb{E}(X) = n \cdot p$
  - $Var(X) = n \cdot p \cdot q$
- **Bevis**: $X \sim Binomial(n, p)$ innebär att $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, dvs $X$ är en summa av $n$ oberoende Bernoullivariabler med sannolikhet $p$. Dessutom, väntevärdet och variansen av en summa av oberoende variabler är summan av variablernas väntevärden och varianser.
- Se Example 3.17 i Baron.

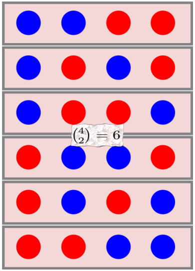
# Binomialfördelningen



# Multinomialfördelningen

- Bernoullidata: $n$ personer utfrågas om vilket partiblock de föredrar (röd eller blå). $n_1$ personer svarar röd, $n_2$ personer svarar blå.
- Antal sätt vi kan få dessa data: $\binom{n}{n_1} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$
- Sannolikheten för att få $n_1$ röda i $n$ försök:

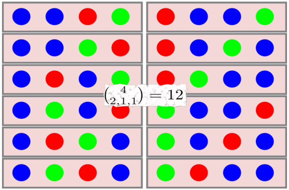
$$P(n_1) = \binom{n}{n_1} p^{n_1} q^{n_2}$$



# Multinomialfördelningen

- Multinomiala data: $n$ personer utfrågas om vilket partiblock de föredrar (röd, blå eller grön). $n_1$ personer svarar blå, $n_2$ personer svarar röd och $n_3$ personer svarar grön.
- Antal sätt vi kan få dessa data ges av **multinomialkoefficienten**: $\binom{n}{n_1\, n_2\, n_3} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$ och

$$P(n_1, n_2, n_3) = \binom{n}{n_1\; n_2\; n_3} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$$




- Notera att multinomialfördelningen är en simultanfördelning för **tre** slumpvariabler: $N_1, N_2$ och $N_3$.

# Geometriska fördelningen

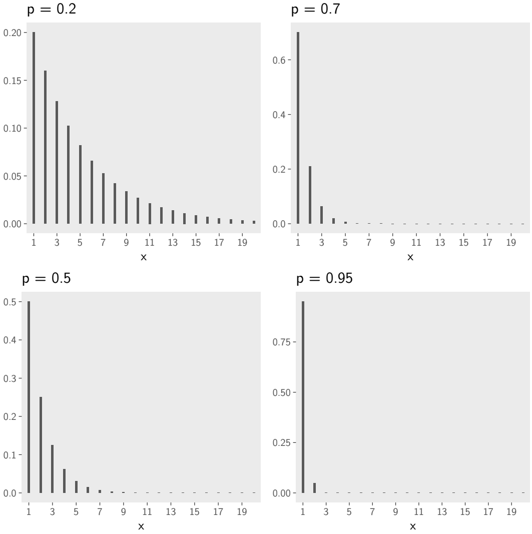
Definition. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en sekvens av **oberoende** Bernoulliförsök med sannolikhet $p$. Låt $X$ = **antalet Bernoulliförsök för att få ett lyckat försök**. Då är $X$ **geometrisk fördelad**, dvs $X \sim Geo(p)$ med pmf

$$P(x) = (1-p)^{x-1}p$$

för $x = 1, 2, \ldots$

- Geometriska fördelningen passar data:
  - som antar **diskreta positiva heltal:** $1, 2, 3, \ldots$
  - som **inte har en övre gräns** (jfr binomial).
  - med **monotont avtagande pmf**.
- Egenskaper för $X \sim Geo(p)$
  - $\mathbb{E}(X) = 1/p$
  - $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$
  - Väntevärdet och variansen beräknas med hjälp av den geometriska serien.
- Slantsingling (lyckat=krona): $\mathbb{E}(X) = 2,\ Var(X) = 2$.
- Kasta tarning (lyckat=en prick): $\mathbb{E}(X) = 6,\ Var(X) = 30$.

# Geometriska fördelningen



# Negativa binomialfördelningen

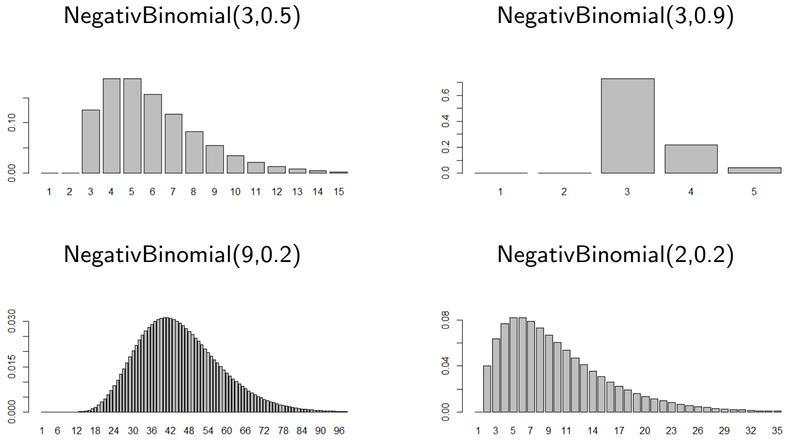
**Definition.** Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en sekvens av **oberoende** Bernoulliförsök med sannolikhet $p$. Låt $X$ = **antalet Bernoulliförsök för att få $k$ lyckade försök**. Då är $X$ **negativ binomialfördelad**, dvs $X \sim NegativBinomial(k, p)$ med pmf

$$P(x) = \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k$$

för $x = 1, 2, \ldots$

- $NegativBinomial(1, p) = Geo(p)$.
- Negativa binomialfördelningen är rak motsats till binomialfördelningen: Den sista modellerar hur många gånger man lyckas i en sekvens av $n$ Bernoulliförsök, och den första modellerar antalet Benouilliförsök för att lyckas $k$ gånger. Se Example 3.21 i Baron.
- Negativa binomialfördelningen passar data:
  - som antar **diskreta positiva heltal:** $1, 2, 3, \ldots$
  - som **inte har en övre gräns** (jfr binomial).
- Egenskaper för $X \sim NegativBinomial(k, p)$
  - $\mathbb{E}(X) = k/p$
  - $Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$
- **Bevis**: $X \sim NegativBinomial(k, p)$ innebär att $X$ är en summa av $k$ oberoende geometriskvariabler med sannolikhet $p$. Dessutom, väntevärdet och variansen av en summa av oberoende variabler är summan av variablernas väntevärden och varianser.

# Negativa binomialfördelningen



# Poissonfördelningen

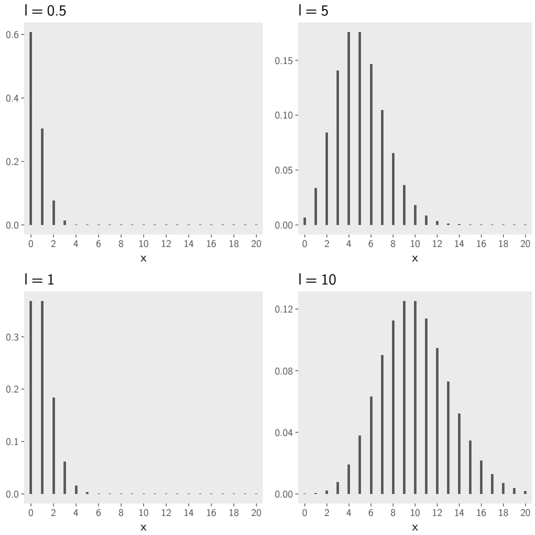
**Definition.** En **Poissonfördelad** slumpvariabel med frekvens $\lambda$, dvs $X \sim Po(\lambda)$, har pmf

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

för $x = 0, 1, 2, \ldots$

- Egenskaper för $X \sim Po(\lambda)$
  - $\mathbb{E}(X) = \lambda$
  - $Var(X) = \lambda$
  - Väntevärdet och variansen beräknas med Taylorutvecklingen.
- Poissonfördelningen passar data:
  - som antar **diskreta icke-negativa heltal:** $0, 1, 2, \ldots$
  - som **inte har en övre gräns** (jfr binomial).
  - vars väntevärde och varians är ungefär lika.
- Poissonfördelningen passar som modell av antalet ovanliga händelser i en tidsperiod, dvs osannolikt att flera händer samtidigt eller nära varandra i tiden. T ex
  - Antalet upptäckta buggar i en kod.
  - Antalet döda i trafiken under år 2014.
  - Se Example 3.22 i Baron.
- Poissonfördelningen med $\lambda = n \cdot p$ kan användas för att approximera binomialfördelningen när $n \geq 30$ and $p \leq 0.05$. Se `ManipDistributions.R`.

# Poissonfördelningen



# Poissonfördelningen

- Godtycklig modell att antal händelser i en tidsperiod ? Nej.
- Låt $X_t$ vara händelser i tidsintervallet $[0, t]$. **Poisson postulat**:
  - $X_0 = 0$, dvs inga händelser i början.
  - $s < t \Rightarrow X_s$ och $X_t - X_s$ är oberoende, dvs oberoende antal för disjunkta tider.
  - $X_s$ och $X_{t+s} - X_t$ har samma fördelning, dvs antal beror bara om längden av tidsintervallet.
  - $\lim_{t \to 0} \boldsymbol{P}(X_t = 1)/t = \lambda$, dvs sannolikhet proportionell till längden av tidsintervallet, för korta intervall.
  - $\lim_{t \to 0} \boldsymbol{P}(X_t > 1)/t = 0$, dvs ej samtidiga händelser.

  Då $X_t \sim Po(\lambda t)$.
- I praktiken, är det svårt att bevisa om postulaten gäller eller ej för mitt problem. De brukar användas som riktlinjer.

# Översikt

- **Fördelningsfamiljer för diskreta variabler**
- **Bernoulli, binomial, multinomial**
- **Geometrisk, negativ binomial**
- **Poisson**