

TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña
IDA, Linköpings Universitet

Föreläsning 3

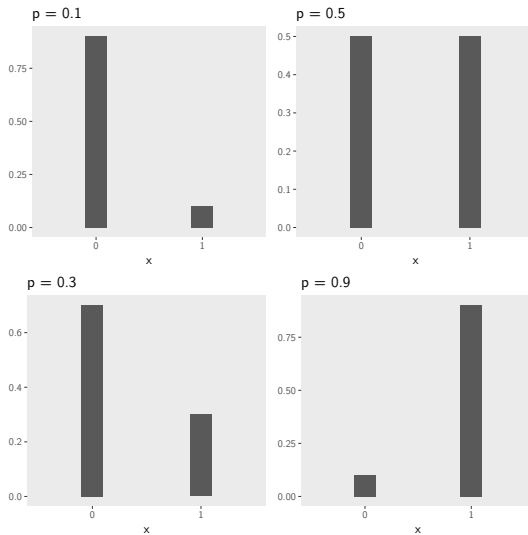
Översikt

- ▶ **Fördelningsfamiljer för diskreta variabler**
- ▶ **Bernoulli, binomial, multinomial**
- ▶ **Geometrisk, negativ binomial**
- ▶ **Poisson**

Definition. En **Bernoullivariabel** X kan anta två olika värden, 0 och 1. Om X är **Bernoullifördelad**, dvs $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, så gäller att $P(X = 1) = P(1) = p$ och $P(X = 0) = P(0) = q = 1 - p$.

- ▶ Genom att ändra parametern p får vi en mängd olika sannolikhetsfördelningar på $\{0, 1\}$. En fördelningsfamilj är en mängd olika sannolikhetsfördelningar som indexeras med en eller flera parametrar. Några få fördelningsfamiljer räcker för att modellera en majoritet av experimenterna.
- ▶ Se **ManipDistributions.R**.

Bernoullifördelningen



Bernoullifördelningen

- ▶ Pmf för $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$P(x) = \begin{cases} q = 1 - p & \text{om } x=0 \\ p & \text{om } x=1 \end{cases}$$

- ▶ Om $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$\text{Var}(X) = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 p = p - p^2 = p \cdot q$$

- ▶ En Bernoullivariabel kallas också Bernoulliförsök.

Binomialfördelningen

Definition. Låt X_1, X_2, \dots, X_n vara en sekvens av n **oberoende** Bernoulliförsök med sannolikhet p . Låt $X =$ **antalet lyckade försök i sekvensen**. Då är X **binomialfördelad** med parametrar n och p , dvs $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ med pmf

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},$$

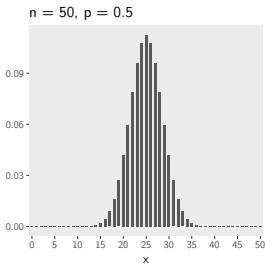
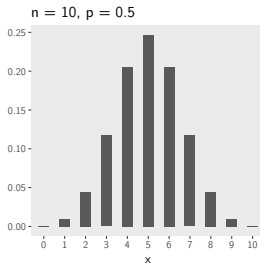
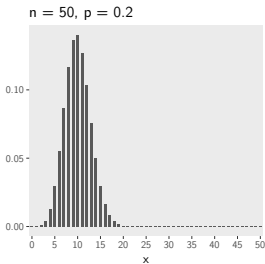
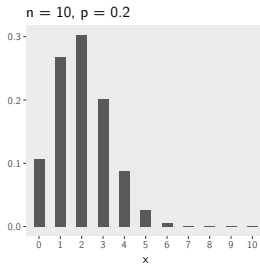
för $x = 0, 1, 2, \dots, n$.

- ▶ $\binom{n}{x}$ är antalet sekvenser av längd n med exakt x lyckade försök, så kallad **binomialkoefficienten**.
- ▶ Om t ex $n = 3$ och $x = 2$, så leder alla tre sekvenserna $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ och $(1, 1, 0)$ till utfallet $x = 2$.
 - ▶ Sekvensen $(0, 1, 1)$ har sannolikheten $q \cdot p \cdot p = p^2 q$.
 - ▶ Sekvensen $(1, 0, 1)$ har sannolikheten $p \cdot q \cdot p = p^2 q$.
 - ▶ Sekvensen $(1, 1, 0)$ har sannolikheten $p \cdot p \cdot q = p^2 q$.
- ▶ Antalet misslyckade försök i sekvensen följer $\text{Binomial}(n, q)$.

Binomialfördelningen

- ▶ Binomialfördelningen passar data:
 - ▶ som är **diskreta icke-negativa heltal**.
 - ▶ som kan anta alla **heltal mellan 0 och n** .
- ▶ Passande: Hur många elever i klass 5A kan simma ?
- ▶ Inte passande: Hur många mål gör IFK Norrköping på lördag ? (pga ingen naturlig övre gräns) eller längdmätningar (kontinuerliga).
- ▶ Egenskaper för $X \sim \text{Binomial}(n, p)$
 - ▶ $\mathbb{E}(X) = n \cdot p$
 - ▶ $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q$
- ▶ **Bevis:** $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ innebär att $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, dvs X är en summa av n oberoende Bernoullivariabler med sannolikhet p . Dessutom, väntevärdet och variansen av en summa av oberoende variabler är summan av variablernas väntevärden och varianser. Se sida 59 i Baron.
- ▶ Se Example 3.17 i Baron.

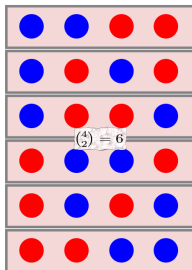
Binomialfördelningen



Multinomialfördelningen

- ▶ Bernoullidata: n personer utfrågas om vilket partiblock de föredrar (röd eller blå). n_1 personer svarar röd, n_2 personer svarar blå.
- ▶ Antal sätt vi kan få dessa data: $\binom{n}{n_1} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$
- ▶ Sannolikheten för att få n_1 röda i n försök:

$$P(n_1) = \binom{n}{n_1} p^{n_1} q^{n_2},$$

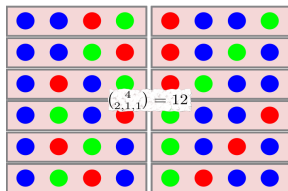


Multinomialfördelningen

- ▶ Multinomiala data: n personer utfrågas om vilket partiblock de föredrar (röd, blå eller grön). n_1 personer svarar blå, n_2 personer svarar röd och n_3 personer svarar grön.
- ▶ Antal sätt vi kan få dessa data ges av **multinomialkoefficienten**:
$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ n_3} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$$
 och

$$P(n_1, n_2, n_3) = \binom{n}{n_1 \ n_2 \ n_3} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3},$$

- ▶ Notera att multinomialfördelningen är en simultanfördelning för **tre** slumpvariabler: N_1 , N_2 och N_3 .



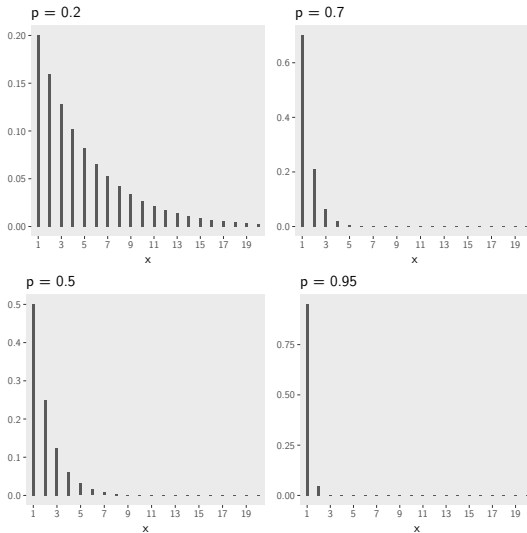
Definition. Låt X_1, X_2, \dots vara en sekvens av **oberoende** Bernoulliförsök med sannolikhet p . Låt X = **antalet Bernoulliförsök för att få ett lyckat försök**. Då är X **geometrisk fördelad**, dvs $X \sim \text{Geo}(p)$ med pmf

$$P(x) = (1 - p)^{x-1} p$$

för $x = 1, 2, \dots$

- ▶ Geometrisk fördelningen passar data:
 - ▶ som antar **diskreta positiva heltal**: $1, 2, 3, \dots$
 - ▶ som **inte har en övre gräns** (jfr binomial).
 - ▶ med **monotont avtagande pmf**.
- ▶ Egenskaper för $X \sim \text{Geo}(p)$
 - ▶ $\mathbb{E}(X) = 1/p$
 - ▶ $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
 - ▶ Väntevärdet och variansen beräknas med hjälp av den geometriska serien.
- ▶ Slantsingling (lyckat=krona): $\mathbb{E}(X) = 2$, $\text{Var}(X) = 2$.
- ▶ Kasta tarning (lyckat=en prick): $\mathbb{E}(X) = 6$, $\text{Var}(X) = 30$.

Geometrisk fördelningen



Negativa binomialfördelningen

Definition. Låt X_1, X_2, \dots vara en sekvens av **oberoende** Bernoulliförsök med sannolikhet p . Låt $X =$ **antalet Bernoulliförsök för att få k lyckade försök**. Då är X **negativ binomialfördelad**, dvs $X \sim \text{NegativBinomial}(k, p)$ med pmf

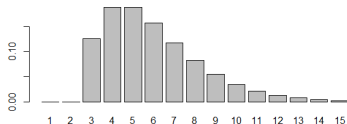
$$P(x) = \binom{x-1}{k-1} (1-p)^{x-k} p^k$$

för $x = 1, 2, \dots$

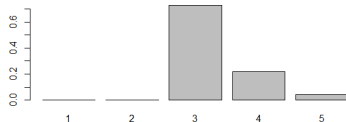
- ▶ $\text{NegativBinomial}(1, p) = \text{Geo}(p)$.
- ▶ Negativa binomialfördelningen är rak motsats till binomialfördelningen: Den sista modellerar hur många gånger man lyckas i en sekvens av n Bernoulliförsök, och den första modellerar antalet Bernoulliförsök för att lyckas k gånger. Se Example 3.21 i Baron.
- ▶ Negativa binomialfördelningen passar samma data som geometriska fördelningen.
- ▶ Egenskaper för $X \sim \text{NegativBinomial}(k, p)$
 - ▶ $\mathbb{E}(X) = k/p$
 - ▶ $\text{Var}(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$
- ▶ **Bevis:** $X \sim \text{NegativBinomial}(k, p)$ innebär att X är en summa av k oberoende geometriska variabler med sannolikhet p . Dessutom, väntevärdet och variansen av en summa av oberoende variabler är summan av variablernas väntevärden och varianser. Se sida 63 i Baron.

Negativa binomialfördelningen

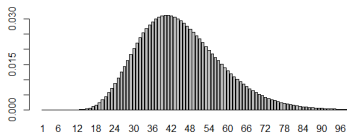
NegativBinomial(3,0.5)



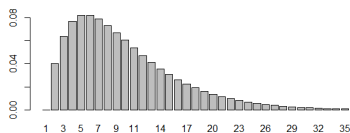
NegativBinomial(3,0.9)



NegativBinomial(9,0.2)



NegativBinomial(2,0.2)



Poissonfördelningen

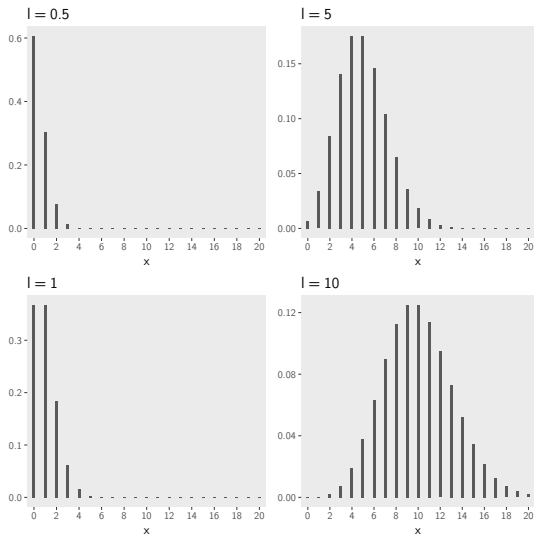
Definition. En **Poissonfördelad** slumpvariabel med frekvens λ , dvs $X \sim Po(\lambda)$, har pmf

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

för $x = 0, 1, 2, \dots$

- ▶ Egenskaper för $X \sim Po(\lambda)$
 - ▶ $\mathbb{E}(X) = \lambda$
 - ▶ $Var(X) = \lambda$
 - ▶ Väntevärdet och variansen beräknas med Taylorutvecklingen.
- ▶ Poissonfördelningen passar data:
 - ▶ som antar **diskreta icke-negativa heltal**: $0, 1, 2, \dots$
 - ▶ som **inte har en övre gräns** (jfr binomial).
 - ▶ vars väntevärde och varians är ungefär lika.
- ▶ Poissonfördelningen passar som modell av antalet ovanliga händelser i en tidsperiod, dvs osannolikt att flera händelser samtidigt eller nära varandra i tiden. T ex
 - ▶ Antalet upptäckta buggar i en kod.
 - ▶ Antalet döda i trafiken under år 2014.
 - ▶ Se Example 3.22 i Baron.
- ▶ Poissonfördelningen med $\lambda = n \cdot p$ kan användas för att approximera binomialfördelningen när $n \geq 30$ and $p \leq 0.05$. Se **ManipDistributions.R**.

Poissonfördelningen



Översikt

- ▶ **Fördelningsfamiljer för diskreta variabler**
- ▶ **Bernoulli, binomial, multinomial**
- ▶ **Geometrisk, negativ binomial**
- ▶ **Poisson**