

# TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña  
IDA, Linköpings Universitet

Föreläsning 2

- ▶ **Slumpvariabler**
- ▶ **Sannolikhetsfördelning**
- ▶ **Väntevärde** och **varians**
- ▶ **Kovarians** och **korrelation**
- ▶ **Chebyshevs olikhet**

**Definition.** En **slumpvariabel**  $X$  är en funktion från utfallsrummet  $\Omega$  till  $\mathbb{R}$

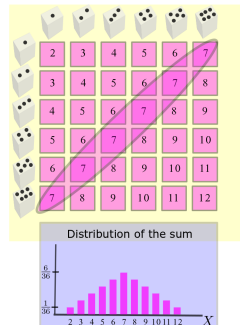
$$X = f(\omega)$$

där  $\omega \in \Omega$  är ett utfall.

- ▶ Obs.  $X$ s värden är disjunkta och uttämmande, dvs utfall.
- ▶ Slumpvariabler är **praktiska**: Vi bryr oss ofta bara om ett enklare experiment ( $X$ ) vars utfall är en funktion av den underliggande slumpen  $\omega$ .
- ▶ Två typer av slumpvariabler:
  - ▶ **Kontinuerlig**:  $X$  antar värden i  $\mathbb{R}$  (eller  $(0, 1)$ ). Längdhopp.
  - ▶ **Diskret**:  $X$  antar ett ändligt (t ex  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ ) eller uppräkneligt ( $\{0, 1, 2, \dots\}$ ) antal värden. Höjdhopp.
- ▶ Ett annat ord för slumpvariabel är **stokastisk variabel**.

# Slumpvariabler: Några exempel

- ▶ Exempel: Kasta två tärningar.
  - ▶  $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$ .
  - ▶  $X$  = antalet prickar på två kast.
- ▶ Exempel: Singla två mynt.
  - ▶  $\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$ .
  - ▶  $X$  = antalet  $H$  (krona).
- ▶ Exempel: Flyga quadcopter.
  - ▶  $\Omega$  = abstrakt utfallsrum med alla möjliga utfall på faktorer som bestämmer quadcopterns resväg.
  - ▶  $X$  = tre-dimensionella koordinater  $(x, y, z)$  över quadcopterns position vid tidpunkt  $t$ .



**Definition.** **(Sannolikhets)fördelningen** för en slumpvariabel  $X$  är sannolikheterna för alla dess utfall, dvs

$$P(x) = \mathbf{P}(X = x)$$

för alla möjliga utfall  $x$ .

- ▶ Stora och små bokstäver spelar roll:
  - ▶  $X$  är **slumpvariabeln**. Exempel: Summan av två tärningarna.
  - ▶  $x$  är ett **givet utfall**. Exempel: 7 prickar.
- ▶ Fet stil eller ej spelar roll:
  - ▶  $\mathbf{P}$  är sannolikheten för ett givet utfall.  $\mathbf{P}(X = x)$  betyder egentligen "Sannolikheten för alla de utfall  $((1, 6), (2, 5), \text{ etc})$  som ger summan 7".
  - ▶  $P(x)$  är en enkel reellvärd funktion, precis som i vanlig analys.
- ▶ För **diskreta** slumpvariabler kallas  $P(x)$  ofta för **pmf** (probability mass function).
- ▶ Slumpvariabelns **support**:  $\{x : P(x) > 0\}$

**Definition.** **Fördelningsfunktionen** för en slumpvariabel  $X$  definieras som

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} P(y)$$

- ▶ En sannolikhetsfördelning summerar till 1:

$$\sum_{\text{alla } x} P(x) = \sum_{\text{alla } x} P(X = x) = 1$$

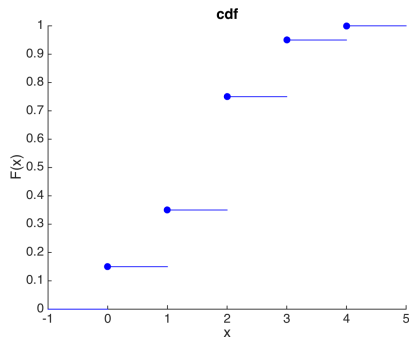
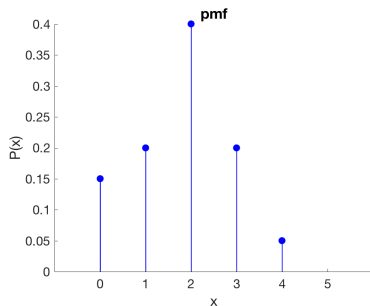
- ▶ Fördelningsfunktionen är icke-avtagande mellan 0 och 1:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

- ▶ Fördelningsfunktionen kallas också för den **kumulativa täthetsfunktionen** eller **cdf** (cumulative density function).

# Sannolikhets- och fördelningsfunktion

$x$	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.15	0.20	0.40	0.20	0.05
$F(x)$	0.15	0.35	0.75	0.95	1.00



► Obs.  $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ .

# Simultanfördelning

- ▶ Låt  $X$  och  $Y$  vara slumpvariabler.
- ▶  $(X, Y)$  är en **slumpvektor** med typiskt utfall  $(x, y)$ .
- ▶ Fördelningen för  $(X, Y)$  kallas **simultanfördelning**.

$$P(x, y) = \mathbf{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbf{P}(X = x \cap Y = y)$$

- ▶ Simultanfördelningen är en sannolikhetsfördelning:

$$\sum_x \sum_y P(x, y) = 1$$

- ▶ Exempel:  $X = \text{Spam/Ham}$  och  $Y = \text{Inbox/Spambox}$ .

	Spam	Ham
Inbox	0.02	0.88
Spambox	0.09	0.01

- ▶ Simultanfördelningen: "Vad är sannolikheten att få ett ham-mejl **och** att det hamnar i spamboxen?"



# Simultanfördelning

- ▶ Exempel:  $X$  = avkastning aktie X, och  $Y$  = avkastning aktie Y.

		Aktie Y		
		Låg	Medel	Hög
Aktie X	Låg	0.05	0.05	0.15
	Medel	0.10	0.30	0.20
	Hög	0.05	0.05	0.05

- ▶ Aktieportfölj: 50% i aktie X och 50% i aktie Y.
- ▶ Simultanfördelningen: "Vad är sannolikheten att min aktieportfölj får medelavkastning?"

# Marginalfördelning

- ▶ Fördelningen för bara  $X$  kallas **marginalfördelningen** (för  $X$ ).
- ▶ Fördelningen för bara  $Y$  kallas marginalfördelningen (för  $Y$ ).
- ▶ Marginalfördelningen: "Vad är sannolikheten att få ett spam-mejl (oavsett var det hamnar) ?"
- ▶ Marginalfördelningen fås genom att summera ut den andra variabeln:

$$P_X(x) = \sum_y P(x, y)$$

$$P_Y(y) = \sum_x P(x, y)$$

- ▶ Jämför med lagen om total sannolikhet (Fö1).
- ▶ Exempel:  $X$  =Spam/Ham och  $Y$  =Inbox/Spambox.

	Spam	Ham	
Inbox	0.02	0.88	0.9
Spambox	0.09	0.01	0.1
	0.11	0.89	

## Marginalfördelning

- ▶ Exempel:  $X$  = avkastning aktie X, och  $Y$  = avkastning aktie Y.

		Aktie Y			
		Låg	Medel	Hög	
Aktie X	Låg	0.05	0.05	0.15	0.25
	Medel	0.10	0.30	0.20	0.6
	Hög	0.05	0.05	0.05	0.15
		0.20	0.40	0.40	

- ▶ Vilka portföljandelar är optimala ? Beslut under osäkerhet.

**Definition.** Slumpvariablerna  $X$  och  $Y$  är **oberoende** om

$$P(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

för **alla** värden på  $x$  och  $y$ .

- ▶ Exempel:  $X = \text{Spam/Ham}$  och  $Y = \text{Inbox/Spambox}$ .

	Spam	Ham	
Inbox	0.02	0.88	0.9
Spambox	0.09	0.01	0.1
	0.11	0.89	

- ▶ Valet av box är inte oberoende av om mejlet är ham eller spam:

$$P(\text{inbox}) \cdot P(\text{ham}) = 0.9 \cdot 0.89 = 0.801 \neq 0.88 = P(\text{inbox}, \text{ham})$$

- ▶ Alternativt,  $P(\text{inbox}|\text{ham}) = \frac{P(\text{inbox}, \text{ham})}{P(\text{ham})} = \frac{0.88}{0.89} = 0.988 > 0.9 = P(\text{inbox})$ ,  
dvs lättare att gissa box om man vet att mejlet är ham.

# Lägesmått

- ▶ En sannolikhetsfördelning  $P(x)$  beskriver **all** osäkerhet om  $X$ .
- ▶ Kan vara komplicerat att förmedla hela  $P(x)$ , speciellt om  $X$  är en fler-dimensionell slumpvektor.
- ▶ Naturliga **lägesmått**:
  - ▶ **Median**,  $m$ .  $P(X \leq m) = 0.5$ . Hälften av sannolikhetsmassan ligger till vänster om  $m$ .
  - ▶ **Väntevärdet**,  $\mu$  eller  $\mathbb{E}(X)$ , är det genomsnittliga värdet för  $X$ :

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_x x \cdot P(x).$$

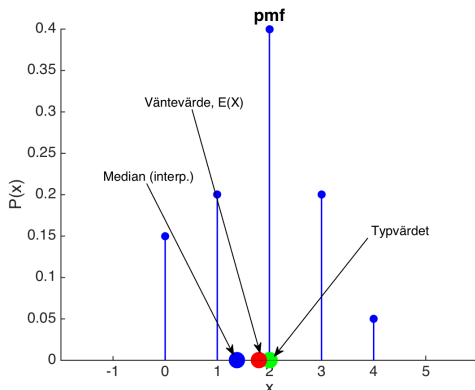
- ▶ **Typvärdet** är det mest sannolika värdet, dvs  $\arg \max_x P(x)$ .

## Lägesmått: Exempel

$x$	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.15	0.20	0.40	0.20	0.05

### ► Väntevärdet

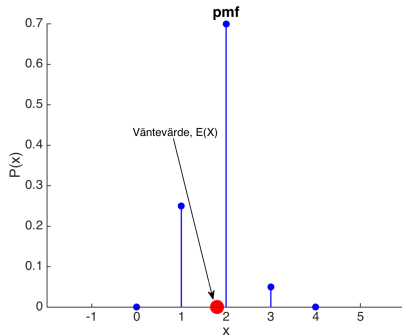
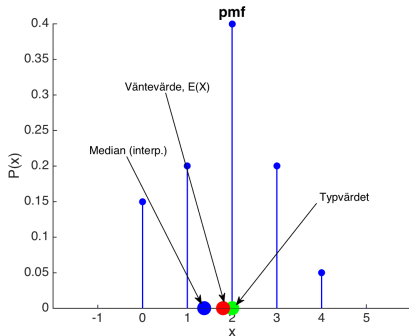
$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.20 + 2 \cdot 0.40 + 3 \cdot 0.20 + 4 \cdot 0.05 = 1.8$$



- Alternativ definition av median  $m$ :  $p(X \leq m) \geq 1/2$  och  $p(X \geq m) \geq 1/2$ .  
Då,  $m = 2$ .

# Lägesmått säger inget om spridningen

- Väntevärdet är ett lägesmått. Ingen info om fördelningens spridning.



# Varians

- ▶ Storleken på avvikelserna  $x - \mathbb{E}(X)$  säger något om spridningen.
- ▶ Idé till spridningsmått: Den förväntade avvikelserna

$$\mathbb{E}(X - \mu) = \sum_x P(x) \cdot (X - \mu)$$

- ▶ Problem:  $\mathbb{E}(X - \mu)$  är alltid exakt noll, eftersom positiva och negativa avvikelser tar ut varandra.
- ▶ **Varians**: Förväntade kvadrerade avvikelserna

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 \cdot P(x)$$

- ▶ Alternativ formel

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$$

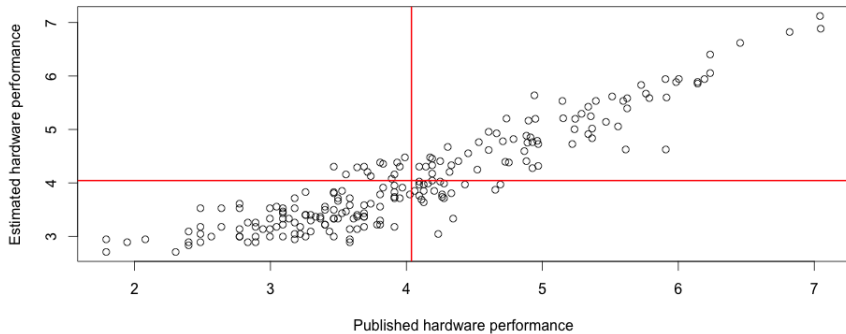
- ▶ **Standardavvikelse**:  $\sigma = \text{Std}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ . Samma skala som  $X$ .



## Egenskaper hos väntevärde och varians

- ▶  $\mathbb{E}(c) = c$ , där  $c$  är en konstant.
- ▶  $\mathbb{E}(aX + b) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b$  med  $a, b$  konstanter.
- ▶  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- ▶  $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y) + c$  med  $a, b, c$  konstanter.
- ▶  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$
- ▶ Om  $X$  och  $Y$  oberoende:  $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
- ▶ Om  $X$  och  $Y$  oberoende:  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

## Kovarians och korrelation



## Kovarians och korrelation

- ▶ Mått på **samvariation**. Sammanfattning av simultanfördelning.
- ▶ **Kovarians** mellan  $X$  och  $Y$ :

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$$

- ▶ Positiv kovarians:
  - ▶  $X$  tenderar att vara större än  $\mathbb{E}(X)$  samtidigt som  $Y$  tenderar att vara större än  $\mathbb{E}(Y)$ .
  - ▶  $X$  tenderar att vara mindre än  $\mathbb{E}(X)$  samtidigt som  $Y$  tenderar att vara mindre än  $\mathbb{E}(Y)$ .
- ▶ Negativ kovarians:  $X$  tenderar att vara större än  $\mathbb{E}(X)$  samtidigt som  $Y$  tenderar att vara mindre än  $\mathbb{E}(Y)$ , och tvärtom.
- ▶  $\sigma^2 = \sigma_{XX} = \text{Cov}(X, X)$ .
- ▶ **Korrelationskoefficienten** mellan  $X$  och  $Y$

$$\rho = \text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Std}(X) \cdot \text{Std}(Y)}$$

- ▶ Obs.  $-1 \leq \rho \leq 1$  och utan skala (jfr. med  $\sigma_{XY}$  som har skala  $X \cdot Y$ ).
- ▶ Om  $|\rho| = 1$ , då  $Y$  är en linjär funktion av  $X$ .

## Egenskaper hos kovarians

- ▶  $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- ▶  $Var(aX + bY + c) = a^2 \cdot Var(X) + b^2 \cdot Var(Y) + 2 \cdot a \cdot b \cdot Cov(X, Y)$  med  $a, b, c$  konstanter.
- ▶  $Cov(a \cdot X + b, c \cdot Y + d) = a \cdot c \cdot Cov(X, Y)$
- ▶ Om  $X$  och  $Y$  oberoende, då  $Cov(X, Y) = 0$  and  $\rho(X, Y) = 0$ .
- ▶ Men  $Cov(X, Y) = 0$  eller  $\rho(X, Y) = 0$  innebär **inte** att  $X$  och  $Y$  är oberoende.

## Chebyshevs olikhet

- ▶ Väntevärdet  $\mu$  och variansen  $\sigma^2$  innehåller information om sannolikhetsfördelningen.
- ▶ Chebyshevs olikhet: Givet  $\mu$  och  $\sigma^2$  så kommer  $X$  ligga i intervallet  $[\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$  med en sannolikhet som är åtminstone  $1 - (\sigma/\varepsilon)^2$ .

### Chebyshevs olikhet

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

- ▶ Notera att Chebyshevs olikhet endast kräver vetskap om  $\mu$  och  $\sigma^2$ . Inget andra egenskaper behövs (symmetri, skevhet).
- ▶ Men den lilla information har sitt pris:  $\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$  är ofta bra mycket större än den sanna sannolikheten  $P(|X - \mu| > \varepsilon)$ .
- ▶ Chebyshevs olikhet är ofta nyttig i teoretiska sammanhang.
- ▶ Se Example 3.12 i Baron.

- ▶ **Slumpvariabler**
- ▶ **Sannolikhetsfördelning**
- ▶ **Väntevärde** och **varians**
- ▶ **Kovarians** och **korrelation**
- ▶ **Chebyshevs olikhet**