

TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

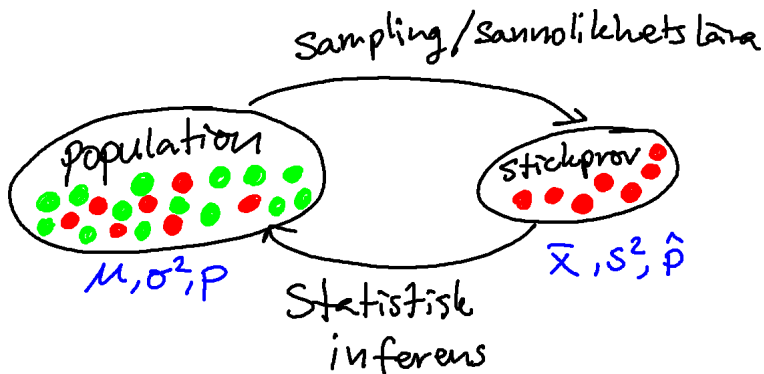
Jose M. Peña
IDA, Linköpings Universitet

Föreläsning 7

- ▶ **Population, parametrar, stickprov och statistik**
- ▶ **Deskriptiv statistik**
- ▶ **Introduktion till parameterestimation och samplingfördelningar**
- ▶ **Grafiska metoder - demo**

Grundläggande begrepp

- ▶ **Population** = **alla** enheter av intresse.
 - ▶ Sveriges befolkning.
 - ▶ Alla möjliga handskrivna siffror.
 - ▶ Alla producerade enheter vid en fabrik.
- ▶ **Parameter** = numerisk beskrivning av **populationen**.
 - ▶ Genomsnittsinkomst (μ) eller inkomstspridning (σ^2).
 - ▶ Medelintensitet i gråskala vid en viss pixel i bilderna av en 8:a.
 - ▶ Andelen trasiga produkter.
- ▶ **Stickprov** (eng. sample) = en **delmängd** av observerade enheter från populationen.
 - ▶ 1000 slumpmässigt valda personer.
 - ▶ 1000 handskrivna siffror (0-9) av olika personer i olika åldrar.
 - ▶ 10 utvalda lådor med produkter.
- ▶ **Statistika** (eng. statistic) = sammanfattande funktion av **stickprovet**.
 - ▶ Medelvärdet \bar{X} , stickprovsvariansen s^2 , eller andelen trasiga produkter \hat{p} .



Estimator

- ▶ **Populationsparameter:** θ . Okänd. **Inferens/learning:** Lära sig om θ från data.
- ▶ $\hat{\theta}$ är en **estimator** av θ . För ett givet stickprov får vi ett **estimat** (ett värde) av $\hat{\theta}$ som representerar vår **bästa "gissning"** av θ baserat på information i stickprovet.
- ▶ Exempel: $\theta = p$, sannolikheten i en sekvens Bernoulliförsök:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \text{andelen lyckade}$$

- ▶ \hat{p} är **rätt i genomsnitt** sett över alla möjliga stickprov av storleken n

$$\mathbb{E}(\hat{p}) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n p}{n} = \frac{np}{n} = p$$

- ▶ En estimator $\hat{\theta}$ av θ är **väntevärdesriktig** (eng. unbiased) om

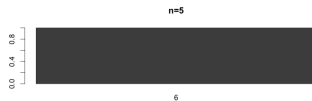
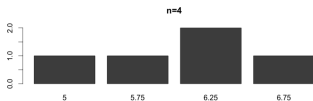
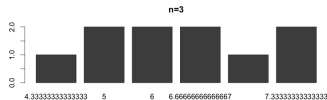
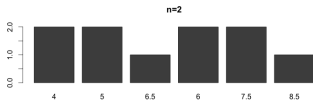
$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$$

- ▶ **Bias:**

$$\text{Bias}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta$$

Samplingfördelning

- ▶ Men hur fel kan det bli i ett givet stickprov ?
- ▶ **Samplingfördelning** för $\hat{\theta}$ beskriver hur $\hat{\theta}$ kan variera från stickprov till stickprov.
- ▶ Exempel: Population $\{3, 5, 5, 7, 10\}$. $\theta = \frac{3+5+5+7+10}{5} = 6$.
- ▶ Stickprov av storleken $n = 3$:
 - ▶ Stickprov 1: $\{3, 5, 5\}$ med $\bar{x} = 4.333$.
 - ▶ Stickprov 2: $\{3, 5, 7\}$ med $\bar{x} = 5.000$.
 - ▶ \vdots
 - ▶ Stickprov 10: $\{5, 7, 10\}$ med $\bar{x} = 7.333$.
- ▶ Samplingfördelning för \bar{X} med $n = 2, 3, 4, 5$:



Medelvärdesestimatorn

- ▶ Medelvärde: $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$
- ▶ Medelvärdet är en väntevärdesriktig estimator av $\mu = E(X)$, dvs $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$.
- ▶ **Enkelt slumpmässigt urval** eller **oberoende likafördelade dragningar** (eng. independent and identically distributed eller **iid** samples):
Samplingdesign där enheter väljs **oberoende** av varandra från populationen och med **lika sannolikheter**.
- ▶ **Samplingvarians** eller **standardfel** för \bar{X} om X_1, \dots, X_n är **iid** med väntevärde μ och varians σ^2 :

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Konsistens och centralgränsvärdessatsen

- ▶ \bar{X} är en **konsistent** estimator av μ om samplingfördelningen blir alltmer koncentrerad kring μ när stickprovsstorleken n ökar.
- ▶ Formellt är estimatoren $\hat{\theta}$ konsistent för θ om, för alla $\varepsilon > 0$

$$P\{|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \text{ när } n \rightarrow \infty$$

- ▶ **Sats:** För ett iid stickprov är \bar{X} en konsistent estimator av $\mu = \mathbb{E}(X)$.
- ▶ **Bevis** via Chebyshevs olikhet:

$$P\{|\bar{X} - \mu| > \varepsilon\} \leq \frac{\text{Var}(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2} \rightarrow 0 \text{ när } n \rightarrow \infty.$$

- ▶ **Centralgränsvärdessatsen** säger att samplingfördelningen för \bar{X} är approximativt $N(\mu, \sigma^2/n)$ för stora n (tumregel: $n > 30$).
- ▶ Formellt, cdf:en för

$$Z = \frac{\bar{X} - \mathbb{E}(\bar{X})}{\text{Std}(\bar{X})} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

konvergerar mot cdf:en för en standard normal $N(0, 1)$.

Konsistens och centralagränsvärdessatsen

- ▶ **Sats:** Om $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ och $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ är oberoende så gäller att

$$aX + bY \sim N(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

- ▶ Om X och Y är beroende är $aX + bY$ fortfarande normalfördelad, men med annan varians.
- ▶ Detta resultat gäller även för flera variabler. Speciellt gäller för $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ att

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Då, i denna fall är \bar{X} inte approximativt normalfördelad (pga CLT) utan **exakt** normalfördelad.

Median och kvantiler

- ▶ Medelvärdet är känsligt till extrema mätvärden, s k **outliers**.
- ▶ **Medianen** M är mer **robust**:

$$P(X < M) \leq 0.5$$

$$P(X > M) \leq 0.5$$

- ▶ Median = hälften av sannolikhetsmassan till vänster, hälften till höger.
- ▶ **Samplemedianen**:

$$\hat{M} = \begin{cases} \left(\frac{n+1}{2}\right)\text{:te minsta observationen} & \text{om } n \text{ udda} \\ \text{medelvärdet av } \left(\frac{n}{2}\right)\text{:te och } \left(\frac{n+2}{2}\right)\text{:te observationerna} & \text{om } n \text{ jämnt} \end{cases}$$

- ▶ Generalisering av median: **p -kvantil** är ett tal c som löser

$$P(X < c) \leq p$$

$$P(X > c) \leq 1 - p$$

- ▶ **Percentiler**: 5%, 37% etc. **Kvartiler**: 25%, 50%, 75%.
- ▶ R kod: `qnorm(p=0.05, mean=1, sd =2)` returnerar `-2.289707`.

Stickprovsvariansen

- ▶ Populationsvarians: $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$. Hur skattar man σ^2 från ett stickprov ?
- ▶ **Stickprovsvariansen:**

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

- ▶ s^2 verkar vara en naturlig estimator, men **varför division med $n - 1$?**
- ▶ **Svar:** Därför att bara med $n - 1$ får man $\mathbb{E}(s^2) = \sigma^2$.
- ▶ **Bevis:** Vi kan skriva om s^2 som

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i^2 + \bar{X}^2 - 2\bar{X}X_i)}{n - 1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 + n\bar{X}^2 - 2n\bar{X}^2}{n - 1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n - 1} \end{aligned}$$

Då

$$\mathbb{E}(s^2) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) - n\mathbb{E}(\bar{X}^2)}{n - 1}$$

Dessutom

$$\text{Var}(X_i) = \sigma^2 = \mathbb{E}(X_i^2) - \mu^2 \text{ och } \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \mathbb{E}(\bar{X}^2) - \mathbb{E}(\bar{X})^2 = \mathbb{E}(\bar{X}^2) - \mu^2$$

Så

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) - n\mathbb{E}(\bar{X}^2) = n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \sigma^2(n - 1)$$

Grafiska metoder - demo

- ▶ Se `SS7GraferDemo.R`.

- ▶ **Population, parametrar, stickprov och statistik**
- ▶ **Deskriptiv statistik**
- ▶ **Introduktion till parameterestimation och samplingfördelningar**
- ▶ **Grafiska metoder - demo**