Sannolikhetslära och Statistik Föreläsning 3

Mattias Villani

Avdelningen för Statistik och Maskininlärning
Institutionen för datavetenskap
Linköpings universitet

ÖVERSIKT

- **Fördelningsfamiljer för diskreta variabler**
- **Bernoulli, binomial, multinomial**
- **Geometrisk**
- **Poisson**

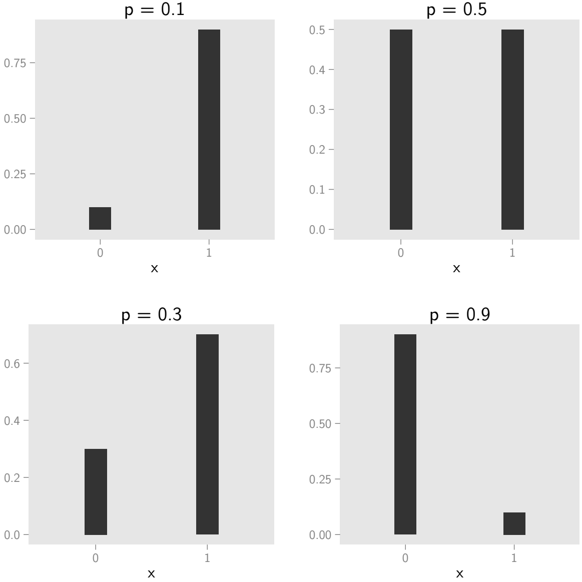
BERNOULLIFÖRDELNINGEN

- En fördelningsfamilj är en mängd olika sannolikhetsfördelningar som indexeras med en eller flera parametrar.

> Definition. En **Bernoullivariabel** X kan anta två olika värden, 0 och 1. Om X är **Bernoullifördelad** ($X \sim \text{Bernoulli}(p)$) så gäller att $P(X = 1) = p$ och $P(X = 0) = q = 1 - p$.

- Genom att ändra parametern p får vi en mängd olika sannolikhetsfördelningar på $\{0, 1\}$. Se `ManipDistributions.R`

Bernoullifördelningen



Bernoullifördelningen

- Pmf för $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$P(x) = \begin{cases} q = 1 - p & \text{om x=0} \\ p & \text{om x=1} \end{cases}$$

- Om $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$\mathbb{E}X = p$$

$$Var(X) = p \cdot q.$$

- Bernoulliförsök: en sekvens av oberoende Bernoulli variabler, alla med sannolikhet p. Slantsingling.

Binomialfördelningen

Definition. Antalet lyckade $(X = 1)$ i en sekvens av n Bernoulliförsök med sannolikheten p följer en **binomialfördelning** med parametrar n och p.
$X \sim \text{Binomial}(n, p)$.

- Pmf
$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},$$
för $x = 0, 1, 2, ..., n$.
- $\binom{n}{x}$ är antalet sekvenser av längd n med exakt x lyckade försök. **Binomialkoefficienten**.
- Om t ex $n = 3$ och $x = 2$, så leder alla tre sekvenserna $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ och $(1, 1, 0)$ till utfallet $x = 2$.
- `Sekvensen` $(0, 1, 1)$ `har sannolikheten` $q \cdot p \cdot p = p^2 q$.
- `Sekvensen` $(1, 0, 1)$ `har sannolikheten` $p \cdot q \cdot p = p^2 q$.
- `Sekvensen` $(1, 1, 0)$ `har sannolikheten` $p \cdot p \cdot q = p^2 q$.
- Se `dbinom(x, size, prob)` och `ManipDistributions.R`

Binomialfördelningen

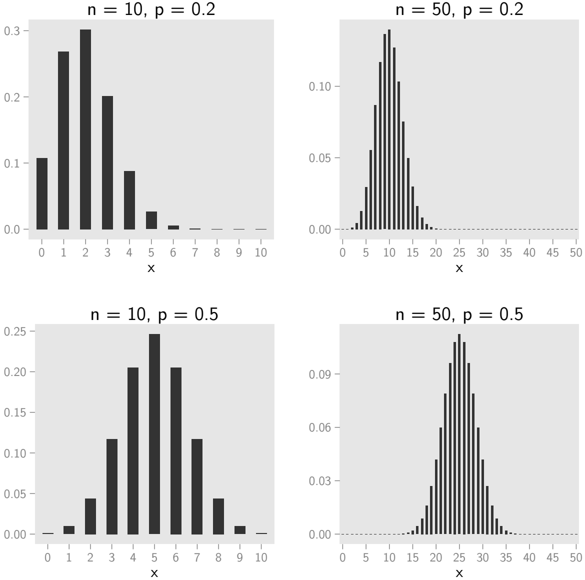
- Binomialfördelningen passar data som:
  - **diskreta icke-negativa heltal**
  - kan anta alla **heltal mellan** 0 **och** n.
- Passande: hur många elever i klass 5A kan simma?
- Inte passande: hur många mål gör IFK Norrköping på lördag? (ingen naturlig övre gräns) eller längdmätningar (kontinuerliga).
- **Väntevärde** och **varians** för $X \sim Binomial(n, p)$:

$$\mathbb{E}X = n \cdot p$$

$$Var(X) = n \cdot p \cdot q$$

- Bevis: $X \sim Binomial(n, p)$ innebär att X är en summa av n oberoende Bernoullivariabler. Väntevärde och varians av summan av oberoende variabler.

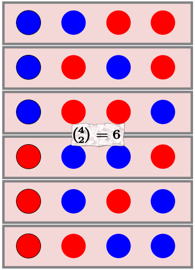
Binomialfördelningen



MULTINOMIALFÖRDELNINGEN

- Bernoullidata: n personer utfrågas om deras vilket partiblock de föredrar (röd eller blå). n_1 personer svarar röd, n_2 personer svarar blå.
- Antal sätt vi kan få dessa data: $\binom{n}{n_1} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$
- Sannolikheten för att få n_1 röda i n försök:

$$P(n_1) = \binom{n}{n_1} p^{n_1} q^{n_2},$$

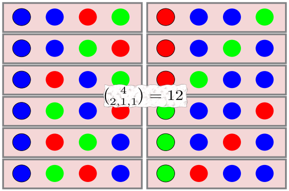


Multinomialfördelningen

- Multinomiala data: $n = 4$ personer utfrågas om deras vilket partiblock de föredrar (röd, blå eller grön). n_1 personer svarar blå, n_2 personer svarar blå och n_3 personer svarar grön.
- Antal sätt vi kan få dessa data ges av **multinomialkoefficienten**: $\binom{n}{n_1\; n_2\; n_3} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$ och

$$P(n_1, n_2, n_3) = \binom{n}{n_1\; n_2\; n_3} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3},$$

- Notera att multinomialfördelningen är en simultanfördelning för **tre** slumpvariabler: N_1, N_2 och N_3.



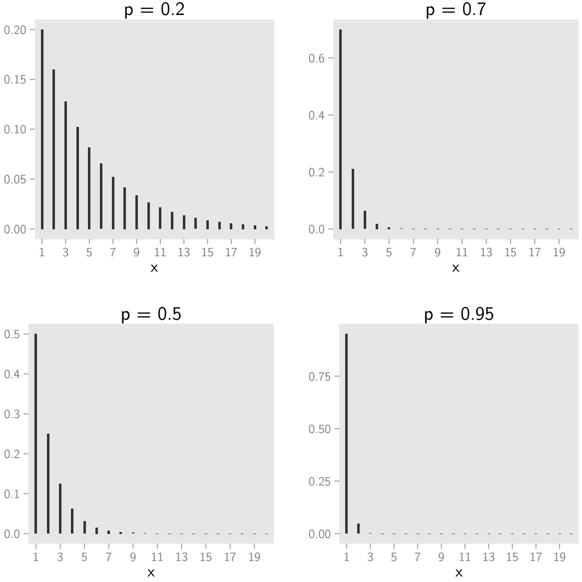
Geometrisk fördelning

- Låt $X_1, X_2, ...$ vara en sekvens Bernoulli försök med sannolikhet p.
- $Y =$ **antalet misslyckade försök innan första lyckade** försöket.
- $Y \sim Geo(p)$ med **pmf**

$$P(x) = (1-p)^{x-1}p \quad , x = 1, 2, ...$$

- Geometrisk fördelning passar data:
  - som antar **diskreta icke-negativa heltal:** 0,1,2,...
  - som **inte har en övre gräns** (jfr binomial)
  - med **monotont avtagande pmf**.
- Egenskaper för $X \sim Geo(p)$
  - $\mathbb{E}X = 1/p$
  - $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- Den enda **minneslösa fördelningen** för diskreta variabler.

Geometrisk fördelning



Exempel: level up!

- Sannolikheten att du klarar en nivå på ett spel är p. De olika försöken är oberoende. Förväntat antal spel innan du klarar nivån? Svar: $1/p$.
- Antag nu att du klarar en nivå vid r :te försöket med sannolikheten $1-(1-p)^r$. Förväntat antal spel? Svar: inte geometrisk.

```r
# Function that simulates the number of game plays when you get better over
# time.
SimGameVaryingProbs <- function(p) {
    success <- FALSE
    r <- 0
    while (success == FALSE) {
        r = r + 1
        if (runif(1) < 1 - (1 - p)^r)
            success = TRUE
    }
    return(r)
}

nSim <- 500  # Number of simulations
numberOfTries <- matrix(NA, nSim, 1)  # Setting up storage
for (i in 1:nSim) {
    numberOfTries[i] <- SimGameVaryingProbs(p = 0.01)
}
mean(numberOfTries)


## [1] 13.3
```

POISSONFÖRDELNING

Definition. En Poissonfördelad slumpvariabel med frekvens λ, $X \sim Po(\lambda)$, har pmf

$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, ...$

- Egenskaper: Om $X \sim Po(\lambda)$
  - $\mathbb{E}X = \lambda$
  - $Var(X) = \lambda$
- Poissonfördelningen passar data:
  - som antar **diskreta icke-negativa heltal:** 0,1,2,...
  - som **inte har en övre gräns** (jfr binomial)
  - vars väntevärde och varians är ungefär lika

Poissonfördelning

- Exempel 1: antalet upptäckta buggar i en kod.
- Exempel 2: antalet döda i trafiken under år 2014.
- Poissonfördelning med $\lambda = n \cdot p$ kan användas för att approximera binomialfördelningen när $n \geq 30$ and $p \leq 0.05$.

Poissonfördelning