

SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK

FÖRELÄSNING 2

Mattias Villani

**Avdelningen för Statistik och Maskininlärning
Institutionen för datavetenskap
Linköpings universitet**



ÖVERSIKT

- ▶ Slumpvariabler
- ▶ Sannolikhetsfördelning
- ▶ Väntevärde och varians
- ▶ Kovarians och korrelation
- ▶ Chebyshevs olikhet

SLUMPVARIABLER

Definition. En **slumpvariabel** X är en funktion från utfallsrummet Ω till \mathbb{R}

$$X = f(\omega)$$

där $\omega \in \Omega$ är ett utfall.

- ▶ Slumpvariabler är **praktiska**: vi bryr oss ofta bara om enklare variabler (X) vars utfall är en funktion av den underliggande slumpen ω .
- ▶ Två typer av slumpvariabler:
 - ▶ **Kontinuerlig**: X antar värden i \mathbb{R} (eller $(0, 1)$). Längdhopp.
 - ▶ **Diskret**: X antar ett ändligt (t ex $\{0, 1, 2, \dots, n\}$) eller uppräkneligt ($\{0, 1, 2, \dots\}$) antal värden. Höjdhopp.
- ▶ Ett annat ord för slumpvariabel (eng. random variable) är **stokastisk variabel** (eng. stochastic variable).
- ▶ Funktionen $f()$ måste vara **mätbar**. Teknikalitet. Hänger ihop med **sigma-algebra** (se sid 14-15 i Baron). **Mätteori**.

SLUMPVARIABLER - NÅGRA EXEMPEL

Ex Kasta två tärningar.

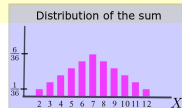
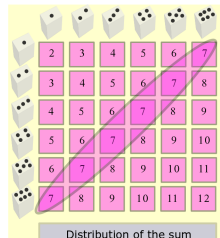
- ▶ $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}.$
- ▶ $X =$ antalet prickar på två kast.

Ex Singla två mynt.

- ▶ $\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}.$
- ▶ $X =$ antalet H (krona). X kan anta värdena 0, 1, 2.
 - ▶ $P(X = 0) = 1/4$
 - ▶ $P(X = 1) = 1/2$
 - ▶ $P(X = 2) = 1/4.$

Ex Flyga quadcopter.

- ▶ $\Omega =$ Abstrakt utfallsrum med alla möjliga utfall på faktorer som bestämmer quadcopterns resväg.
- ▶ $X =$ Tre-dimensionella koordinater (x, y, z) över quadcopterns position vid tidpunkt t .



SANNOLIKHETSFÖRDELNING

Definition. (sannolikhets)fördelningen för en slumpvariabel X är sannolikheterna för alla dess utfall, dvs

$$P(x) = \mathbf{P}\{X = x\}$$

för alla möjliga utfall x .

- ▶ Stora och små bokstäver spelar roll:
 - ▶ X är **slumpvariabeln**. Ex. summan av två tärningarna
 - ▶ x är ett **givet utfall**. Ex. 7 prickar.
- ▶ Fet stil eller ej spelar roll:
 - ▶ \mathbf{P} är sannolikheten för ett givet utfall. $\mathbf{P}\{X = x\}$ betyder egentligen 'Sannolikheten för alla de utfall $[(1, 6), (2, 5)]$ etc] som ger summan 7'.
 - ▶ $P(x)$ är en enkel reel-värd funktion, precis som i vanlig analys.
- ▶ För diskreta slumpvariabler kallas $P(x)$ ofta för **pmf**:en (probability mass function).
- ▶ Slumpvariabelns **support**: $\{x : P(x) > 0\}$.

FÖRDELNINGSFUNKTION

Definition. **Fördelningsfunktionen** för en slumpvariabel X definieras som

$$F(x) = \mathbf{P}\{X \leq x\} = \sum_{y \leq x} P(y).$$

- ▶ En sannolikhetsfördelning summerar till 1:

$$\sum_{\text{alla } x} P(x) = \sum_{\text{alla } x} \mathbf{P}\{X = x\} = 1.$$

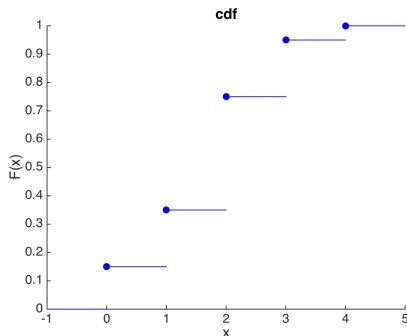
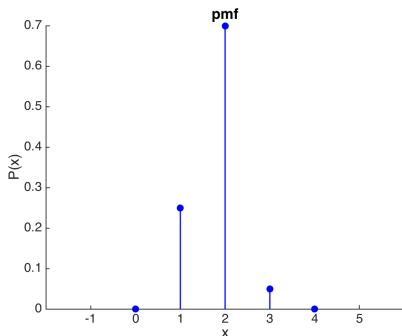
- ▶ Fördelningsfunktionen är icke-avtagande mellan 0 och 1:

$$\lim_{x \downarrow -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \uparrow +\infty} F(x) = 1.$$

- ▶ Fördelningsfunktionen kallas också för den **kumulativa täthetsfunktionen** (cumulative density function), eller **cdf**.

SANNOLIKHETS- OCH FÖRDELNINGSFUNKTION

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.15	0.20	0.40	0.20	0.05
$F(x)$	0.15	0.35	0.75	0.95	1.00



SIMULTANFÖRDELNING

- ▶ Låt X och Y vara slumpvariabler.
- ▶ (X, Y) är en **slumpvektor** med typiskt utfall (x, y) .
- ▶ Fördelningen för (X, Y) kallas **simultanfördelning**.

$$P(x, y) = \mathbf{P}\{(X, Y) = (x, y)\} = \mathbf{P}\{X = x \cap Y = y\}.$$

- ▶ Simultanfördelningen är en sannolikhetsfördelning:

$$\sum_x \sum_y P(x, y) = 1.$$

Ex $X = \text{Spam/Ham}$ och $Y = \text{Inbox/Spambox}$.

	Spam	Ham
Inbox	0.02	0.88
Spambox	0.09	0.01

- ▶ Simultanfördelningen: 'Vad är sannolikheten att få ett ham-mejl och att det hamnar i spamboxen?'

SIMULTANFÖRDELNING

Ex X =avkastning aktie X och Y =avkastning aktie Y.

		Aktie Y		
		Låg	Medel	Hög
Aktie X	Låg	0.05	0.05	0.15
	Medel	0.10	0.30	0.20
	Hög	0.05	0.05	0.05

- ▶ Aktieportfölj: 50% i aktie X och 50% i aktie Y.
- ▶ Simultanfördelningen: 'Vad är sannolikheten att min aktieportfölj får medelavkastning?'

MARGINALFÖRDELNING

- ▶ Fördelningen för bara X kallas **marginalfördelningen** (för X).
- ▶ Fördelningen för bara Y kallas marginalfördelningen (för Y).
- ▶ Marginalfördelningen: 'Vad är sannolikheten att få ett spam-mejl (oavsett var det hamnar)?'
- ▶ Marginalfördelningen fås genom att summera ut den andra variabeln:

$$P_X(x) = \sum_y P(x, y)$$

$$P_Y(y) = \sum_x P(x, y)$$

- ▶ Jämför med Lagen om total sannolikhet (F1).

Ex $X = \text{Spam/Ham}$ och $Y = \text{Inbox/Spambox}$.

	Spam	Ham	
Inbox	0.02	0.88	0.9
Spambox	0.09	0.01	0.1
	0.11	0.89	

MARGINALFÖRDELNING

Ex X = avkastning aktie X och Y = avkastning aktie Y.

		Aktie Y			
		Låg	Medel	Hög	
Aktie X	Låg	0.05	0.05	0.15	0.25
	Medel	0.10	0.30	0.20	0.6
	Hög	0.05	0.05	0.05	0.15
		0.20	0.40	0.40	

- Vilka portföljandelar är optimala? Beslut under osäkerhet.

OBEROENDE

Definition. Slumpvariablerna X och Y är **oberoende** om

$$P(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

för **alla** värden på x och y .

Ex $X = \text{Spam/Ham}$ och $Y = \text{Inbox/Spambox}$.

	Spam	Ham	
Inbox	0.02	0.88	0.9
Spambox	0.09	0.01	0.1
	0.11	0.89	

- ▶ Valet av box är inte oberoende av om mejlet är ham eller spam:

$$P(\text{inbox}) \cdot P(\text{ham}) = 0.9 \cdot 0.89 = 0.801 \neq 0.88 = P(\text{inbox, ham})$$

- ▶ $P(\text{inbox}|\text{ham}) = \frac{P(\text{inbox, ham})}{P(\text{ham})} = \frac{0.88}{0.89} = 0.988 > 0.9 = P(\text{inbox})$.
- ▶ Lättare att gissa box om man vet att mejlet är ham.

LÄGESMÅTT

- ▶ En sannolikhetsfördelning $P(x)$ beskriver **all** osäkerhet om X .
- ▶ Kan vara komplicerat att förmedla hela $P(x)$, speciellt om X är en fler-dimensionell slumpvektor.
- ▶ Naturliga **lägesmått**:
 - ▶ **Median**, m . $P(X \leq m) = 0.5$. Hälften av sannolikhetsmassan ligger till vänster om m .
 - ▶ **Väntevärdet** (eng. expected value), μ eller $\mathbb{E}(X)$, är det genomsnittliga värdet för X :

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_x x \cdot P(x).$$

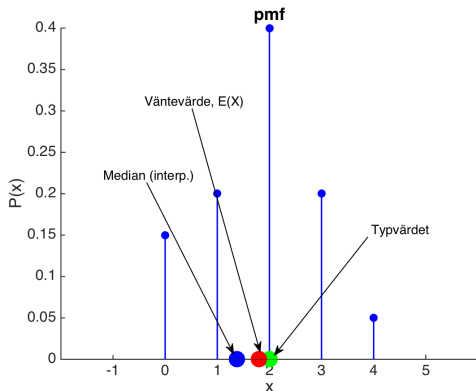
- ▶ **Typvärdet** (eng. mode) är det mest sannolika värdet, dvs $\operatorname{argmax}_x P(x)$.

LÄGESMÅTT - EXEMPEL

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.15	0.20	0.40	0.20	0.05

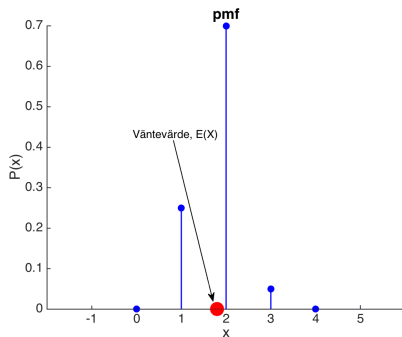
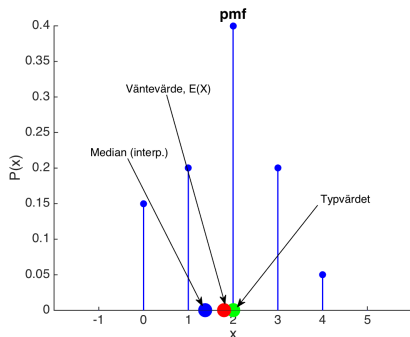
► Väntevärdet

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.20 + 2 \cdot 0.40 + 3 \cdot 0.20 + 4 \cdot 0.05 = 1.8$$



LÄGESMÅTT SÄGER INGET OM SPRIDNINGEN

- Väntevärdet är ett lägesmått. Ingen info om fördelningens spridning.



VARIANS

- ▶ Storleken på avvikelserna $x - \mathbb{E}(X)$ säger något om spridningen.
- ▶ Idé till spridningsmått: den förväntade avvikelserna:

$$\mathbb{E}(X - \mu) = \sum_x P(x) \cdot (X - \mu)$$

- ▶ Problem: $\mathbb{E}(X - \mu)$ är alltid exakt noll ... Positiva och negativa avvikelser tar ut varandra.
- ▶ **Varians**: förväntade kvadrerade avvikelserna:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mu)^2 = \sum_x (x - \mu)^2 \cdot P(x).$$

- ▶ Alternativ formel

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}X^2 - \mu^2.$$

- ▶ **Standardavvikelse**: $\sigma = \text{Std}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$. Samma skala som X .

EGENSKAPER HOS VÄNTEVÄRDE OCH VARIANS

- ▶ $\mathbb{E}(c) = c$, där c är en konstant.
- ▶ $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$, a, b konstanter.
- ▶ $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$
- ▶ $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c$, a, b, c konstanter.
- ▶ $\text{Var}(aX + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$
- ▶ Om X och Y oberoende: $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
- ▶ Om X och Y oberoende: $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

KOVIARIANS OCH KORRELATION

- ▶ Mått på **samvariation**. Sammanfattning av simultanfördelning.
- ▶ **Kovarians** mellan X och Y :

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E} \{ (X - \mathbb{E}X) (Y - \mathbb{E}Y) \}$$

- ▶ Positiv kovarians:
 - ▶ X tenderar att vara större än $\mathbb{E}X$ samtidigt som Y tenderar att vara större än $\mathbb{E}Y$.
 - ▶ X tenderar att vara mindre än $\mathbb{E}X$ samtidigt som Y tenderar att vara mindre än $\mathbb{E}Y$.
- ▶ **Korrelationskoefficienten** mellan X och Y

$$\rho = \text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Std}(X) \cdot \text{Std}(Y)}.$$

- ▶ $-1 \leq \rho \leq 1$.

EGENSKAPER HOS KOVARIANS

- ▶ $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- ▶ $\text{Var}(aX + bY + c) = a^2 \cdot \text{Var}(X) + b^2 \cdot \text{Var}(Y) + 2a \cdot b \cdot \text{Cov}(X, Y)$,
 a, b, c konstanter.
- ▶ $\text{Cov}(a \cdot X + b, c \cdot Y + d) = a \cdot c \cdot \text{Cov}(X, Y)$
- ▶ Om X och Y oberoende: $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
- ▶ Om X och Y oberoende: $\rho(X, Y) = 0$.

Chebyshevs Olikhet

- ▶ Väntevärdet μ och Variansen σ^2 innehåller information om sannolikhetsfördelningen.
- ▶ Chebyshevs olikhet: givet μ och σ^2 så kommer X ligga i intervallet $[\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$ med en sannolikhet som är åtminstone $1 - (\sigma/\varepsilon)^2$.
- ▶ **Chebyshevs olikhet**

$$P\{|X - \mu| > \varepsilon\} \leq \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2.$$

- ▶ Notera att Chebyshevs olikhet endast kräver vetskap om μ och σ^2 . Inget andra egenskaper behövs (symmetri, skevhet).
- ▶ Men den lilla information har sitt pris: $\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$ är ofta bra mycket större än den sanna sannolikheten $P\{|X - \mu| > \varepsilon\}$.
- ▶ Chebyshevs olikhet är ofta nyttig i teoretiska sammanhang.