

# TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña  
IDA, Linköping University, Sweden

## Föreläsning 3

# Översikt

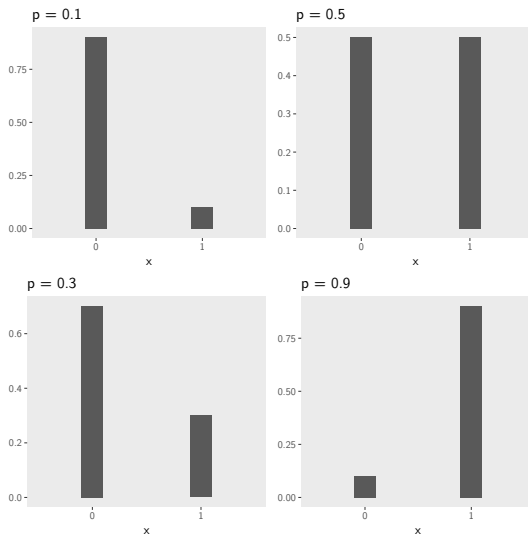
- ▶ **Fördelningsfamiljer för diskreta variabler**
- ▶ **Bernoulli, binomial, multinomial**
- ▶ **Geometrisk, negativ binomial**
- ▶ **Poisson**

- ▶ En fördelningsfamilj är en mängd olika sannolikhetsfördelningar som indexeras med en eller flera parametrar.

**Definition.** En **Bernoullivariabel**  $X$  kan anta två olika värden, 0 och 1. Om  $X$  är **Bernoullifördelad**, dvs  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ , så gäller att  $P(X = 1) = P(1) = p$  och  $P(X = 0) = P(0) = q = 1 - p$ .

- ▶ Genom att ändra parametern  $p$  får vi en mängd olika sannolikhetsfördelningar på  $\{0, 1\}$ . Se **ManipDistributions.R**.

# Bernoullifördelningen



# Bernoullifördelningen

- ▶ Pmf för  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$P(x) = \begin{cases} q = 1 - p & \text{om } x=0 \\ p & \text{om } x=1 \end{cases}$$

- ▶ Om  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$\text{Var}(X) = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 p = p - p^2 = p \cdot q$$

- ▶ Bernoulliförsök: Utfallet av en Bernoullivariabel.

# Binomialfördelningen

**Definition.** Låt  $X_1, X_2, \dots, X_n$  vara en sekvens av  $n$  **oberoende** Bernoulliförsök med sannolikhet  $p$ . Låt  $X =$  **antalet lyckade försök i sekvensen**. Då är  $X$  **binomialfördelad** med parametrar  $n$  och  $p$ , dvs  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$  med pmf

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},$$

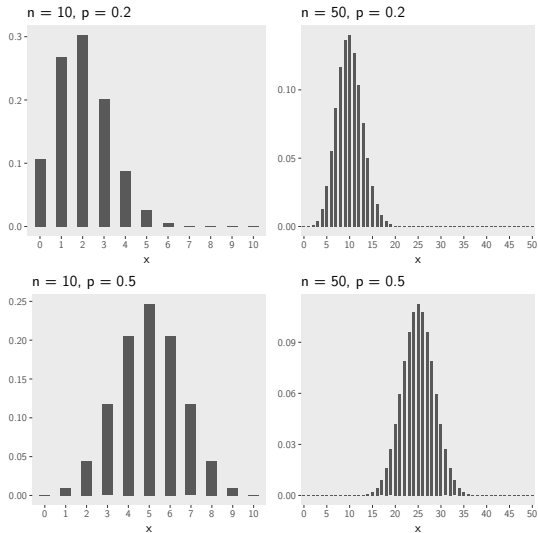
för  $x = 0, 1, 2, \dots, n$ .

- ▶  $\binom{n}{x}$  är antalet sekvenser av längd  $n$  med exakt  $x$  lyckade försök, så kallad **binomialkoefficienten**.
- ▶ Om t ex  $n = 3$  och  $x = 2$ , så leder alla tre sekvenserna  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$  och  $(1, 1, 0)$  till utfallet  $x = 2$ .
  - ▶ Sekvensen  $(0, 1, 1)$  har sannolikheten  $q \cdot p \cdot p = p^2 q$ .
  - ▶ Sekvensen  $(1, 0, 1)$  har sannolikheten  $p \cdot q \cdot p = p^2 q$ .
  - ▶ Sekvensen  $(1, 1, 0)$  har sannolikheten  $p \cdot p \cdot q = p^2 q$ .
- ▶ Antalet misslyckade försök i sekvensen följer  $\text{Binomial}(n, q)$ .

# Binomialfördelningen

- ▶ Binomialfördelningen passar data:
  - ▶ som är **diskreta icke-negativa heltal**.
  - ▶ som kan anta alla **heltal mellan 0 och  $n$** .
- ▶ Passande: Hur många elever i klass 5A kan simma ?
- ▶ Inte passande: Hur många mål gör IFK Norrköping på lördag ? (pga ingen naturlig övre gräns) eller längdmätningar (kontinuerliga).
- ▶ Egenskaper för  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ 
  - ▶  $\mathbb{E}(X) = n \cdot p$
  - ▶  $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q$
- ▶ **Bevis:**  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$  innebär att  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , dvs  $X$  är en summa av  $n$  oberoende Bernoullivariabler med sannolikhet  $p$ . Dessutom, väntevärdet och variansen av en summa av oberoende variabler är summan av variablernas väntevärden och varianser. Se sid 59 i Baron.
- ▶ Se Example 3.17 i Baron.

# Binomialfördelningen

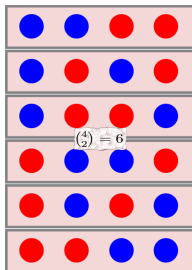




## Multinomialfördelningen

- ▶ Bernoullidata:  $n$  personer utfrågas om vilket partiblock de föredrar (röd eller blå).  $n_1$  personer svarar röd,  $n_2$  personer svarar blå.
- ▶ Antal sätt vi kan få dessa data:  $\binom{n}{n_1} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$
- ▶ Sannolikheten för att få  $n_1$  röda i  $n$  försök:

$$P(n_1) = \binom{n}{n_1} p^{n_1} q^{n_2},$$

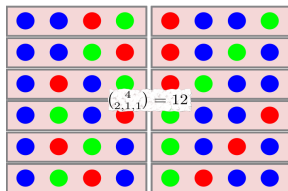


# Multinomialfördelningen

- ▶ Multinomiala data:  $n$  personer utfrågas om vilket partiblock de föredrar (röd, blå eller grön).  $n_1$  personer svarar blå,  $n_2$  personer svarar röd och  $n_3$  personer svarar grön.
- ▶ Antal sätt vi kan få dessa data ges av **multinomialkoefficienten**:  
$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ n_3} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$$
 och

$$P(n_1, n_2, n_3) = \binom{n}{n_1 \ n_2 \ n_3} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3},$$

- ▶ Notera att multinomialfördelningen är en simultanfördelning för **tre** slumpvariabler:  $N_1$ ,  $N_2$  och  $N_3$ .



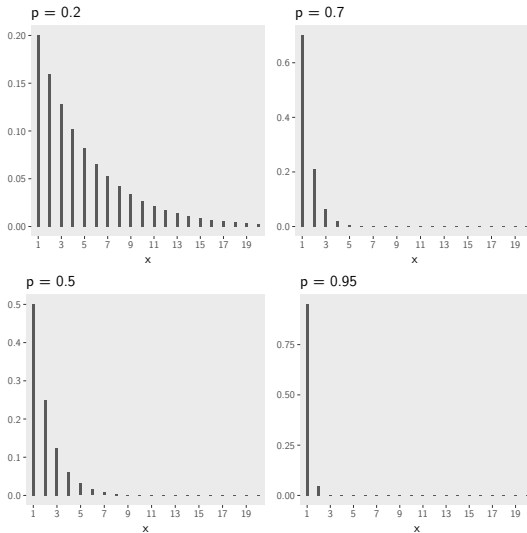
**Definition.** Låt  $X_1, X_2, \dots$  vara en sekvens av **oberoende** Bernoulliförsök med sannolikhet  $p$ . Låt  $X$  = **antalet Bernoulliförsök för att få ett lyckat försök**. Då är  $X$  **geometrisk fördelad**, dvs  $X \sim \text{Geo}(p)$  med pmf

$$P(x) = (1 - p)^{x-1} p$$

för  $x = 1, 2, \dots$

- ▶ Geometrisk fördelningen passar data:
  - ▶ som antar **diskreta positiva heltal**:  $1, 2, 3, \dots$
  - ▶ som **inte har en övre gräns** (jfr binomial).
  - ▶ med **monotont avtagande pmf**.
- ▶ Egenskaper för  $X \sim \text{Geo}(p)$ 
  - ▶  $\mathbb{E}(X) = 1/p$
  - ▶  $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
  - ▶ Väntevärdet och variansen beräknas med hjälp av den geometriska serien.
- ▶ Slantsingling (lyckat=krona):  $\mathbb{E}(X) = 2$ ,  $\text{Var}(X) = 2$ .
- ▶ Kasta tarning (lyckat=en prick):  $\mathbb{E}(X) = 6$ ,  $\text{Var}(X) = 30$ .

# Geometrisk fördelning



## Negativa binomialfördelningen

**Definition.** Låt  $X_1, X_2, \dots$  vara en sekvens av **oberoende** Bernoulliförsök med sannolikhet  $p$ . Låt  $X =$  **antalet Bernoulliförsök för att få  $k$  lyckade försök**. Då är  $X$  **negativ binomialfördelad**, dvs  $X \sim \text{NegativBinomial}(k, p)$  med pmf

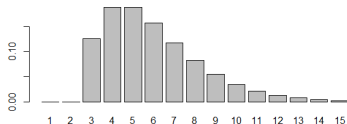
$$P(x) = \binom{x-1}{k-1} (1-p)^{x-k} p^k$$

för  $x = 1, 2, \dots$

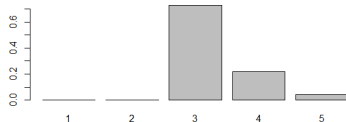
- ▶  $\text{NegativBinomial}(1, p) = \text{Geo}(p)$ .
- ▶ Negativa binomialfördelningen är rak motsats till binomialfördelningen: Den sista modellerar hur många gånger man lyckas i en sekvens av  $n$  Bernoulliförsök, och den första modellerar antalet Bernoulliförsök för att lyckas  $k$  gånger. Se Example 3.21 i Baron.
- ▶ Negativa binomialfördelningen passar samma data som geometriska fördelningen.
- ▶ Egenskaper för  $X \sim \text{NegativBinomial}(k, p)$ 
  - ▶  $\mathbb{E}(X) = k/p$
  - ▶  $\text{Var}(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$
- ▶ **Bevis:**  $X \sim \text{NegativBinomial}(k, p)$  innebär att  $X$  är en summa av  $k$  oberoende geometriska variabler med sannolikhet  $p$ . Dessutom, väntevärdet och variansen av en summa av oberoende variabler är summan av variablernas väntevärden och varianser. Se sid 63 i Baron.

# Negativa binomialfördelningen

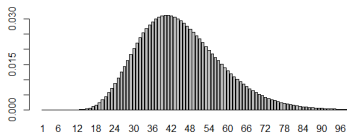
NegativBinomial(3,0.5)



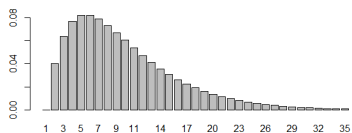
NegativBinomial(3,0.9)



NegativBinomial(9,0.2)



NegativBinomial(2,0.2)



# Poissonfördelningen

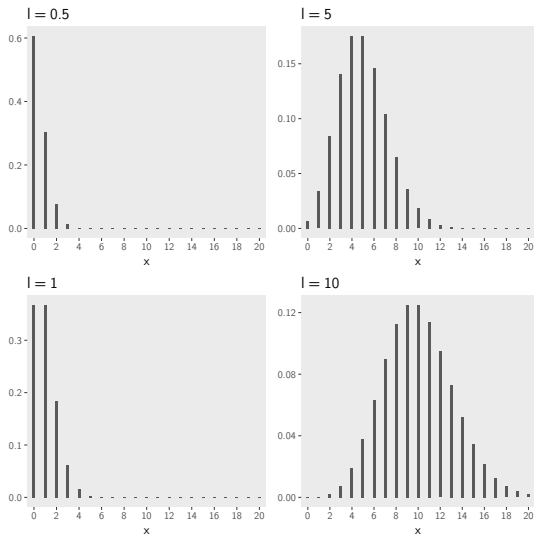
**Definition.** En **Poissonfördelad** slumpvariabel med frekvens  $\lambda$ , dvs  $X \sim Po(\lambda)$ , har pmf

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

för  $x = 0, 1, 2, \dots$

- ▶ Egenskaper för  $X \sim Po(\lambda)$ 
  - ▶  $\mathbb{E}(X) = \lambda$
  - ▶  $Var(X) = \lambda$
  - ▶ Väntevärdet och variansen beräknas med Taylorutvecklingen.
- ▶ Poissonfördelningen passar data:
  - ▶ som antar **diskreta icke-negativa heltal**:  $0, 1, 2, \dots$
  - ▶ som **inte har en övre gräns** (jfr binomial).
  - ▶ vars väntevärde och varians är ungefär lika.
- ▶ Poissonfördelningen passar som modell av ovanliga händelser, dvs osannolikt att flera händelser samtidigt eller nära varandra i tiden. T ex
  - ▶ Antalet upptäckta buggar i en kod.
  - ▶ Antalet döda i trafiken under år 2014.
  - ▶ Se Example 3.22 i Baron.
- ▶ Poissonfördelningen med  $\lambda = n \cdot p$  kan användas för att approximera binomialfördelningen när  $n \geq 30$  and  $p \leq 0.05$ . Se **ManipDistributions.R**.

# Poissonfördelningen





# Översikt

- ▶ **Fördelningsfamiljer för diskreta variabler**
- ▶ **Bernoulli, binomial, multinomial**
- ▶ **Geometrisk, negativ binomial**
- ▶ **Poisson**