

# TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña  
IDA, Linköping University, Sweden

## Föreläsning 4

- ▶ Täthetsfunktion
- ▶ Likformig fördelning
- ▶ Exponentialfördelningen
- ▶ Gammafördelningen
- ▶ Normalfördelningen
- ▶ Betafördelningen
- ▶ t-fördelningen

## Kontinuerliga slumpvariabler

- ▶ Kontinuerliga slumpvariabler kan anta alla reella värden på ett intervall  $(a, b)$ , speciellt  $(-\infty, \infty)$ .
- ▶  $X$  kontinuerlig  $\Rightarrow P(x) = 0$  för alla  $x$ . Pmf inte användbar.
- ▶ Fördelningsfunktionen funkar dock:  $F(x) = \mathbf{P}\{X \leq x\}$ .
- ▶ Eftersom  $P(x) = 0$  för alla  $x$ , så gäller  $\mathbf{P}\{X \leq x\} = \mathbf{P}\{X < x\}$ .
- ▶ Om  $X$  kontinuerlig slumpvariabel:  $F(x)$  **kontinuerlig**. Inga hopp.  
**Icke-avtagande.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \text{ och } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

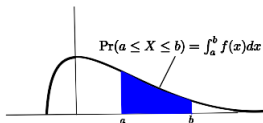
# Täthetsfunktion

**Definition.** **Täthetsfunktionen**  $f(x)$  för en kontinuerlig slumpvariabel  $X$  är derivatan av cdf:en, dvs

$$f(x) = F'(x)$$

- ▶ Täthetsfunktion heter **probability density function, pdf** på engelska.
- ▶ cdf:en  $F(x)$  är antiderivatan av pdf:en.
- ▶ Sannolikheter för intervall ges av ytor under pdf:en

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x) dx$$



# Täthetsfunktion

- ▶  $f(x) = F'(x)$  så

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = F(b) - F(-\infty) = F(b) - 0 = F(b)$$

- ▶ Täthetsfunktioner integrerar till ett

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

- ▶ Täthetsfunktionens värden, t ex  $f(2)$ , är inte en sannolikhet.  $f(2) > 1$  helt ok. Men  $f(x) \geq 0$  måste gälla.
- ▶ För litet  $\epsilon$ :  $P\left(a - \frac{\epsilon}{2} \leq X \leq a + \frac{\epsilon}{2}\right) \approx \epsilon \cdot f(a)$ .
- ▶ Exempel: Triangelfördelningen över support  $[0, a]$ . Se också Example 4.1 i Baron.
- ▶ Se Table 4.1 i Baron för en jämförelse av diskreta och kontinuerliga fördelningar.

## Väntevärde och varians

- ▶ För diskreta slumpvariabler

$$\mathbb{E}(X) = \mu = \sum_x x \cdot P(x) \text{ och } \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 P(x)$$

- ▶ För kontinuerliga slumpvariabler

$$\mathbb{E}(X) = \mu = \int x \cdot f(x) dx \text{ och } \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \int (x - \mu)^2 f(x) dx$$

- ▶ Exempel: Triangelfördelning.

# Simultanfördelning för kontinuerliga variabler

- ▶ **Simultan fördelningsfunktion**

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \mathbf{P}\{X \leq x \cap Y \leq y\}$$

- ▶ **Simultan täthetsfunktion**

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{(X,Y)}(x,y)$$

- ▶ Ofta skriver man bara  $f(x,y)$  istället för  $f_{(X,Y)}(x,y)$ .

- ▶ **Kovarians**

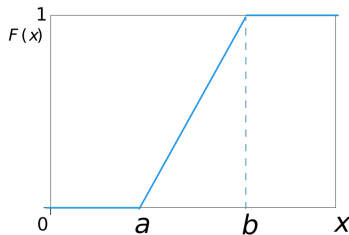
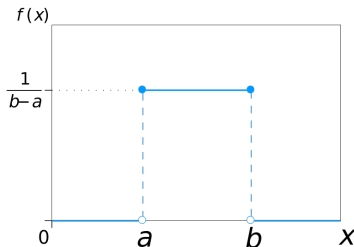
$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \int \int (X - \mu_X)(Y - \mu_Y) f(x,y) dx dy \end{aligned}$$

# Likformig fördelning

**Definition.** En **likformig fördelad** variabel, dvs  $X \sim U(a, b)$ , har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{för } a \leq x \leq b, \text{ och } f(x) = 0 \text{ annars}$$

- Likformig heter uniform på engelska.





## Likformig fördelning

► **Väntevärde:**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int x \cdot f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int x dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_a^b \\ &= \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

► **Varians:**  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int x^2 \cdot f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int x^2 dx = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3}$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3} - \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Alternativ härledning, se Baron sid 81. Alla likformiga variabler kan genereras från **standardmedlemmen**:  $Y \sim U(0,1)$  genom följande resultat

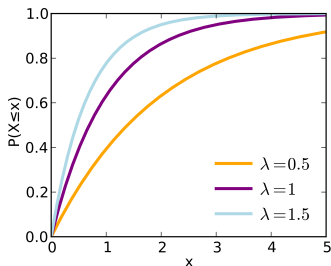
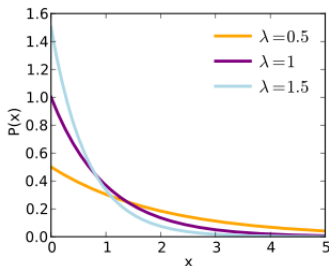
$$X = a + (b-a)Y \text{ där } Y \sim U(0,1) \implies X \sim U(a,b)$$

# Exponentialfördelningen

**Definition.** En **exponentialfördelad** variabel, dvs  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , har täthetsfunktionen

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ för } x > 0$$

- ▶ Egenskaper av  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ 
  - ▶  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
  - ▶  $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
  - ▶  $F(x) = \int_0^x f(y) dy = 1 - e^{-\lambda x}$  eftersom  $(e^{g(z)})' = e^{g(z)} g'(z)$  och  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .
- ▶ Parametern  $\lambda$  betyder det samma som i en Poisson fördelning, dvs förväntat antal händelser i en tidsperiod. Se Example 4.5 i Baron.



# Exponentialfördelningen

- ▶ Tiden mellan Poissonhändelser är exponentialfördelad.
- ▶ Låt  $Po(\lambda t)$  räkna antalet händelser i tidsintervallet  $[0, t)$ .
- ▶ Låt  $T$  vara tiden till nästa händelse

$$\begin{aligned}P(T \leq t) &= 1 - P(T > t) \\&= 1 - P(\text{inga händelser i intervallet } [0, t)) \\&= 1 - \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

vilket är cdf:en för en  $Exp(\lambda)$  variabel.

- ▶ Exponentialfördelade variabler är **minneslösa**:

$$P(T > t + x | T > t) = e^{-\lambda(t+x)} / e^{-\lambda t} = e^{-\lambda x} = P(T > x)$$

- ▶ Geometrisk fördelningen är också minneslös. Den är faktiskt den diskreta motsvarande av exponentialfördelningen.

## Gammafördelningen

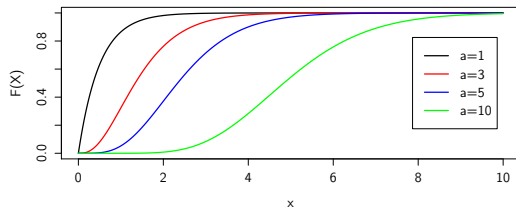
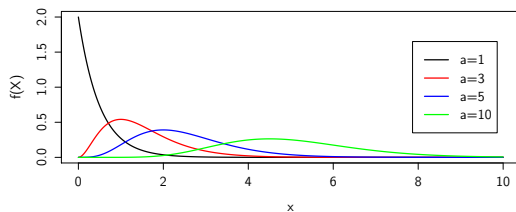
- ▶ Antag att tiden för att ladda ner en fil är  $Exp(\lambda)$  fördelad. Tiden för att ladda ner  $\alpha$  filer följer en  $Gamma(\alpha, \lambda)$  fördelning om nedladdningstiderna är oberoende.

**Definition.** Om  $X_1, X_2, \dots, X_\alpha$  är  $\alpha$  stycken **oberoende**  $Exp(\lambda)$  variabler, då

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_\alpha \sim Gamma(\alpha, \lambda)$$

- ▶  $\alpha$  kallas för en **shape**parameter, och  $\lambda$  är en **frekvens**parameter.
- ▶  $Exp(\lambda) = Gamma(1, \lambda)$
- ▶ Egenskaper av  $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$ 
  - ▶  $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$
  - ▶  $Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$
- ▶  $\alpha$  och  $\lambda$  kan faktiskt anta vilka positiva reella värden som helst. Då, funkar inte den tolkingen ovanpå, men ovanpå väntevärdet och variansen stämmer ändå. Se sid 85 i Baron.
- ▶ Se Examples 4.7 och 4.8 i Baron.

# Gammafördelningen



# Normalfördelningen

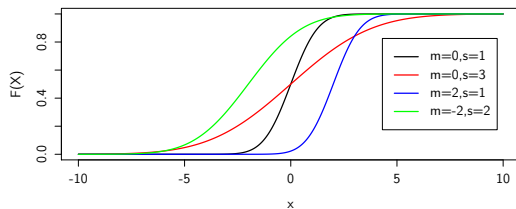
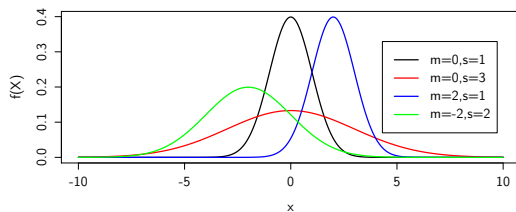
**Definition.** En **normalfördelad** variabel, dvs  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \text{för } -\infty < x < \infty$$

- ▶ Egenskaper av  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 
  - ▶  $\mathbb{E}(X) = \mu$
  - ▶  $\text{Var}(X) = \sigma^2$
- ▶ cdf:en finns inte i sluten form. Om  $Z \sim N(0, 1)$  så är cdf:en

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

# Normalfördelningen



# Normalfördelningen

- ▶ **Standardmedlem:**  $Z \sim N(0, 1)$

$$X = \mu + \sigma Z \text{ där } Z \sim N(0, 1) \implies X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- ▶ **Standardisering**

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

- ▶ Standardisering är praktiskt. Låt  $X \sim N(\mu = 900, \sigma = 200)$

$$\begin{aligned} P\{600 < X < 1200\} &= P\left\{\frac{600 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{1200 - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= P\{-1.5 < Z < 1.5\} \\ &= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 0.9332 - 0.0668 = 0.8664 \end{aligned}$$

- ▶ Se Example 4.11 i Baron.



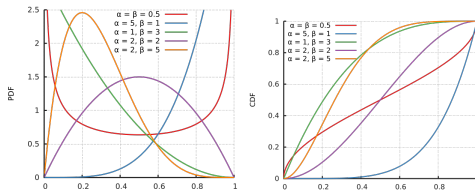
# Betafördelningen

**Definition.** En **betafördelad** variabel, dvs  $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ , har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad \text{för } 0 \leq x \leq 1$$

där  $B(,)$  är **betafunktionen**.

- ▶ Egenskaper av  $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ 
  - ▶  $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
  - ▶  $\text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
- ▶ Passar **kontinuerliga** variabler i intervallet  $[0, 1]$ , t ex andelar eller sannolikheter.



## t-fördelningen

- ▶ Normalfördelningen har **tunna svansar**. Mycket osannolikt att observera extrema observationer.
- ▶ t-fördelningen är en generalisering av normalfördelningen med en parameter  $\nu$  (**frihetsgrader**) som modellerar hur tunga svansarna är.

**Definition.** En **t-fördelad** variabel, dvs  $X \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$ , har täthetsfunktionen

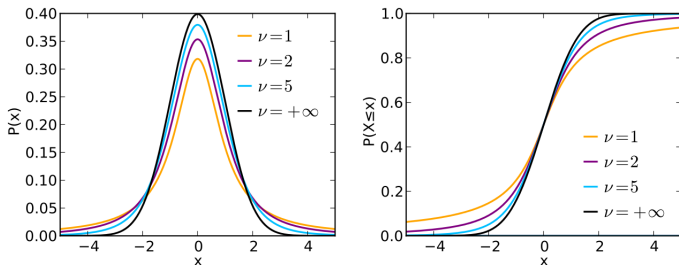
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu\sigma^2}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad \text{för } -\infty < x < \infty$$

där  $\Gamma()$  är **gammafunktionen**.

- ▶ Egenskaper av  $X \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$ 
  - ▶  $\mathbb{E}(X) = \mu$  om  $\nu > 1$ , odefinierad annars
  - ▶  $\text{Var}(X) = \sigma^2 \frac{\nu}{\nu-2}$  om  $\nu > 2$ ,  $\text{Var}(X) = \infty$  om  $1 < \nu \leq 2$ , odefinierad annars
- ▶  $t_\nu(0, 1)$  är standardmedlemmen.

## t-fördelningen

- ▶ **Cauchy-fördelningen** är specialfallet med  $\nu = 1$ .
- ▶ Normalfördelningen fås när  $\nu \rightarrow \infty$ .



- ▶ Viktig koppling mellan  $t$ -fördelning och normalfördelning:
  - ▶  $X_1, \dots, X_n | \mu, \sigma^2 \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ .  $\sigma^2$  **känd**.  $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$
  - ▶  $X_1, \dots, X_n | \mu, \sigma^2 \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ .  $\sigma^2$  **okänd**, skattas med  $s^2$ .  
 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}(0, 1)$ .
- ▶ Vi återkommer till detta koppling senare i kursen.

- ▶ Täthetsfunktion
- ▶ Likformig fördelning
- ▶ Exponentialfördelningen
- ▶ Gammafördelningen
- ▶ Normalfördelningen
- ▶ Betafördelningen
- ▶ t-fördelningen