TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña
IDA, Linköping University, Sweden

Föreläsning 5

Översikt

- **Stora talen lag**
- **Centrala gränsvärdessatsen**
- **Simulering**
- **Monte Carlo metoder**

Stora talens lag

- Medelvärde: $\bar{X}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$
- Medelvärdet av många oberoende slumpvariabler med samma väntevärde μ och varians kommer att ligga allt närmare μ.
- **Stora talens lag** (law of the large numbers, på engelska)

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| > \epsilon\right) = 0$$

- **Bevis** via Chebyshevs olikhet. Låt $X = \bar{X}_n$. Då $\mathbb{E}(X) = \mu$. Då

$$\boldsymbol{P}(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

eftersom σ^2 är $Var(X) = Var(\bar{X}_n) = Var(X_i)/n \to 0$ när $n \to \infty$.

Centrala gränsvärdessatsen

- Hur är $\bar{X}_n$ fördelad ?
- **Centrala gränsvärdessatsen** (central limit theorem, på engelska). Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende variabler med samma väntevärde μ och standardavvikelse σ, och låt

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

När $n \to \infty$ så kommer den standardiserade summan

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathrm{Std}(S_n)}$$

att **konvergera i fördelning** till en $N(0,1)$ variabel, dvs

$$F_{Z_n}(z) = \boldsymbol{P}\Big(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z\Big) \to \Phi(z)$$

- Då S_n och $\bar{X}_n$ konvergerar i fördelning till $N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ och $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$. Vanlig tumregel: $n > 30$. Se Example 4.13 i Baron.
- Man kan approximera en binomialfördelning med $N(np, \sqrt{npq})$ för $n > 30$ pga CLT och faktumet att en binomial är en summa av n lika Bernoulli variabler. Samma gäller för negativa binomialfördelningen (summa av k geometriska variabler), och gamma fördelningen (summa av α exponentiala variabler).

Simulering

- **Pseudoslumptalsgenerator**: Datorer kan generera en lång sekvens tal som ser ut som $U(0,1)$ slumptal. Good enough.
- R: `runif(1)`. Matlab: `rand`. Python: `numpy.random.uniform()`.
- Från $U \sim U(0,1)$ kan vi skapa slumptal från andra fördelningar.
- Exempel: **Bernoulli** med sannolikhet p att lyckas:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{om } U < p \\ 0 & \text{om } U \geq p \end{cases}$$

  - R kod Bernoulli: `U=runif(1); X=(U<p)`
- Exempel: **Binomial**. Summan av Bernoullis
  - R-kod för Binomial(n,p): `U=runif(n); X=sum(U<p)`
- See Example 5.14 i Baron.

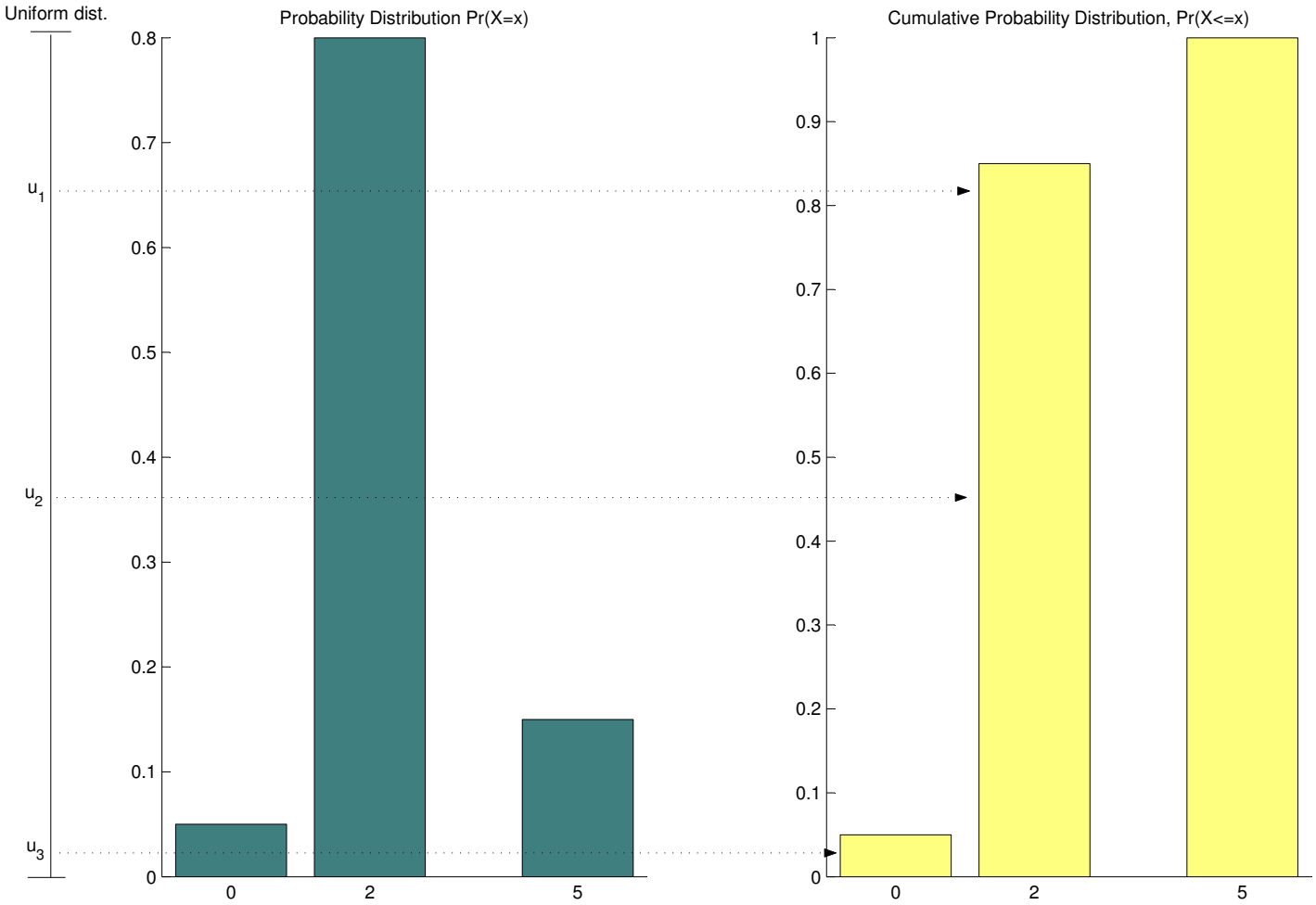
Simulering från diskret fördelning

- Simulering från allmän diskret fördelning, dvs

$$p_i = \boldsymbol{P}(X = x_i), \quad \sum_{i=1} p_i = 1$$

  - Dela upp intervallet $[0, 1]$ i delintervall:
    - $A_1 = [0, p_1)$
    - $A_2 = [p_1, p_2)$
    - $\vdots$
    - $A_n = [p_{n-1}, 1)$
  - Slumpa $U \sim U(0, 1)$.
  - Om $U \in A_i$ låt $X = x_i$.
- Se Example 5.9 i Baron.

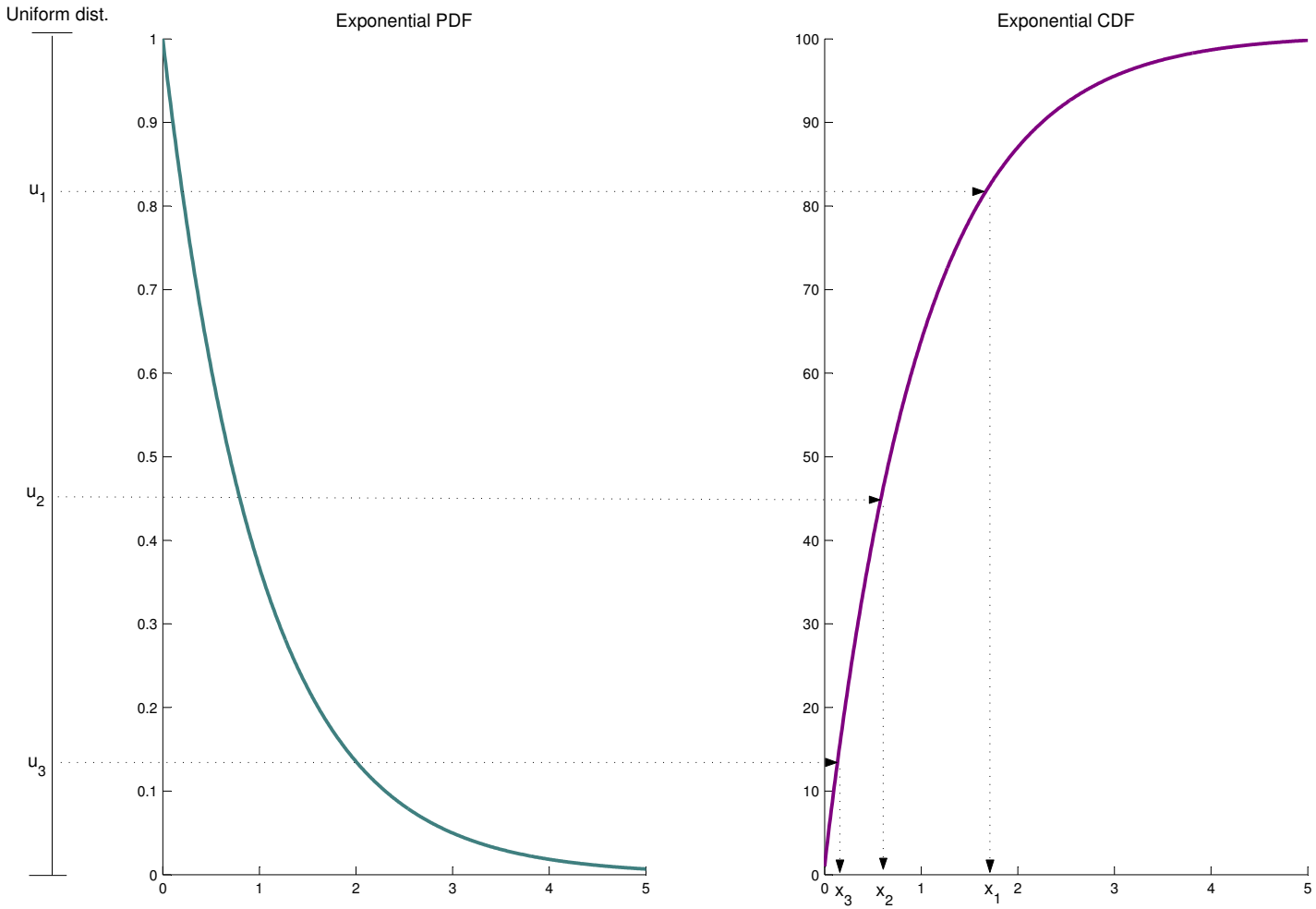
Inversa cdf metoden: Diskreta fallet



Inversa cdf metoden: Kontinuerliga fallet

- **Theorem**. Låt X vara en kontinuerlig variabel med cdf $F_X(x)$ och låt $U = F_X(X)$ vara en ny slumpvariabel. Då gäller att $U \sim U(0,1)$.
  - **Inversa transformationsmetoden**: Antag att X har cdf $F(X)$. X kan då simuleras med hjälp av en $U \sim U(0,1)$ variabel, dvs
  $$X = F^{-1}(U)$$
  - Dvs, lös ut X från ekvationen $U = F(X)$.
- Exempel: $X \sim Exp(\lambda)$. Då
$$U = 1 - e^{\lambda X}$$
$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$$

Inversa cdf metoden: Kontinuerliga fallet



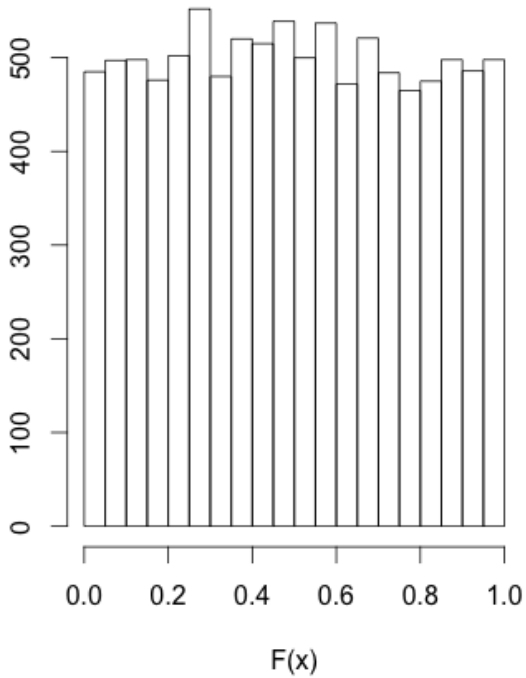
Simulering i R

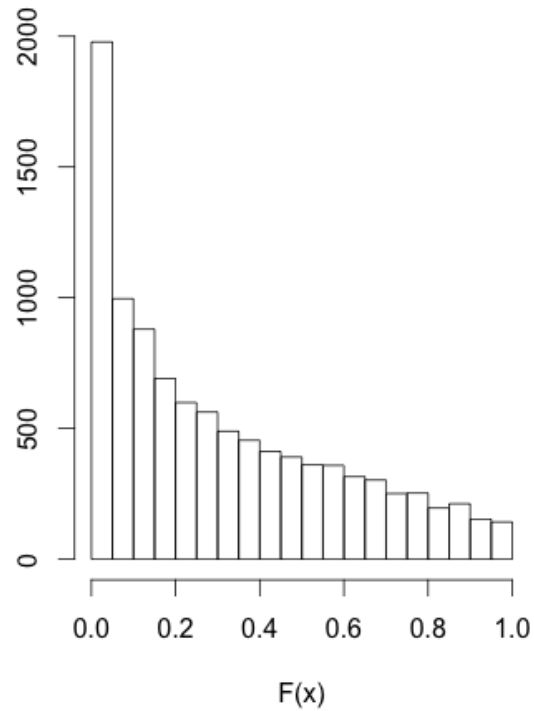
- n **slumptal** från $N(\mu = 2, \sigma^2 = 3^2)$ simuleras med `rnorm(n, mean = 2, sd = 3)`
- n **slumptal** från $Gamma(\alpha = 2, \lambda = 3)$ simuleras med `rgamma(n, shape = 2 , rate = 3)`

- Beräkna **pdf:en** i punkten $x = 1.5$ för $N(\mu = 2, \sigma^2 = 3^2)$: `dnorm(x=1.5, mean = 2, sd = 3)`
- Beräkna **cdf:en** i punkten $x = 1.5$ för $N(\mu = 2, \sigma^2 = 3^2)$: `pnorm(x=1.5, mean = 2, sd = 3)`

Testar inversa CDF metoden

- Följande funkar (dvs Fx blir likformigt fördelad):
  - `x = rgamma(10000, shape = 2, rate = 3)`
  - `Fx = pgamma(x, shape = 2, rate = 3)`
  - `hist(Fx,30)`





- Följande funkar inte (dvs Fx blir **inte** likformigt fördelad):
  - `x = rgamma(10000, shape = 2, rate = 3)`
  - `Fx = pgamma(x, shape = 1, rate = 3)`
  - `hist(Fx,30)`

Monte Carlo metoder

- Simulering från fördelningar kan användas för att approximera t ex olika sannolikheter.
- Låt $X_1, X_2, \ldots, X_N$ vara oberoende dragningar från en sannolikhetsfördelning. Vi kan t ex approximera sannolikheten $p = \boldsymbol{P}\{X < 2\}$ med

$$\hat{p} = \hat{\boldsymbol{P}}\{X < 2\} = \frac{\text{antal av } X_1, X_2, \ldots, X_N \text{ som är mindre än } 2}{N}$$

- $\hat{\theta}$ (t ex $\hat{p}$) är en **estimator** (uppskattning) av kvantiteten θ (t ex p).
- `x = rnorm(10000, mean = 1, sd = 2)`
  `pHat = sum(x<2)/10000`

- Men $\hat{p}$ är bara en **skattning** av p. Varierar från stickprov till stickprov.
- Om vi upprepar hela receptet flera gånger, varje gång med ett nytt stickprov av storleken N, kommer vi då att ha rätt i genomsnitt? Dvs, är $\mathbb{E}(\hat{p}) = p$?
- Hur mycket kommer $\hat{p}$ att variera från stickprov till stickprov? Hur stor är $Var(\hat{p})$?
- Y = Antal $X_1, \ldots, X_N$ som är mindre än 2. Då $Y \sim Bin(N, p)$. Så

$$\mathbb{E}(\hat{p}) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{N}\right) = \frac{1}{N} N \cdot p = p$$

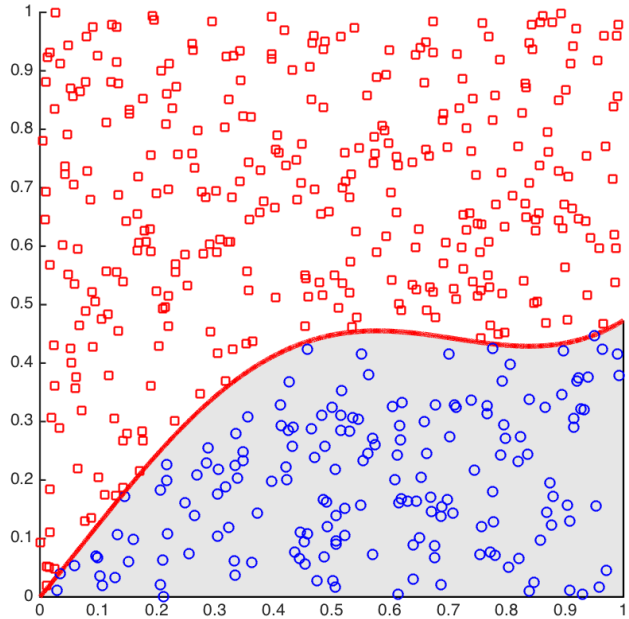
så $\hat{p}$ är en **väntevärdesriktig** (unbiased på engelska) estimator av p.

$$Var(\hat{p}) = Var\left(\frac{Y}{N}\right) = \frac{1}{N^2} Np(1-p) = \frac{p(1-p)}{N}.$$

- Se Baron sidor 115-116 om hur man kan välja N för att nå given exakthet $\mathrm{P}\{|\hat{p} - p| > \varepsilon\} \leq \alpha$.

Monte Carlo integration

- Mål: $\mathcal{I} = \int_0^1 g(x)dx$ där $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq g(x) \leq 1$.



- Simulera likformigt fördelade tal $U_1, \ldots, U_N$ och $V_1, \ldots, V_N$.
- Monte Carlo skattning

$$\hat{\mathcal{I}} = \frac{\text{Antal dragningar där } V_i < g(U_i)}{N}$$

- ```
  u = runif(10000)
  v = runif(10000)
  IHat = mean(v < g(u))
  ```
  ```

Importance sampling

- **Importance sampling** räknar integraler som väntevärden, dvs

$$\mathcal{I} = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x)dx = \mathbb{E}\left(\frac{g(X)}{f(X)}\right)$$

  där väntevärdet beräknas med avseende på $f(x)$.
- **Importance sampling estimatorn**: $X_1, \ldots, X_N$ oberoende från $f(X)$. Då

$$\hat{\mathcal{I}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{g(X_i)}{f(X_i)}$$

- IS estimatorn är också väntevärdesriktig med har mindre varians än MC estimatorn.

Översikt

- **Stora talen lag**
- **Centrala gränsvärdessatsen**
- **Simulering**
- **Monte Carlo metoder**