TDAB01 SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK

TENTAMEN 2018-10-24

Lärare

Jose M. Peña. Besöker lokalen. Nås vid telefon också.

Betyg

För full poäng i varje delfråga krävs tydliga och väl motiverade svar.
Maximalt antal poäng: 20 poäng
Betyg 5 = 17-20 poäng
Betyg 4 = 13-16 poäng
Betyg 3 = 9-12 poäng

Tillåtna Hjälpmedel

Miniräknare med tomt minne. Tabell- och formelsamling (ingår i tentamen).

Uppgifter

(1) (3 p) Ett program består av kodblock 1 och kodblock 2. Kodblock 1 har en bugg med sannolikhet 0.2, och kodblock 2 har en bugg med sannolikhet 0.4 oberoende av kodblock 1. Om det finns en bugg bara i kodblock 1, då kraschar programmet med sannolikhet 0.5. Om det finns en bugg bara i kodblock 2, då kraschar programmet med sannolikhet 0.8. Om det finns en bugg i båda kodblock 1 och 2, då kraschar programmet med sannolikhet 0.9. Anta att programmet har kraschat. Beräkna sannolikheten att det finns en bugg i båda kodblock 1 och 2.

Hjälp: Tilllämpa Bayes sats och lagen om total sannolikhet:

$$p(krasch) = \sum_i p(krasch|buggPlats_i)p(buggPlats_i).$$

Lösning: Se exempel 2.35 i boken.

(2) (3 p) Operativsystemet A kraschar 0.5 gånger per år, medan operativsystemet B kraschar en gång per år. Båda systemen är lika populära. En dator har inte kraschat i det senaste året. Beräkna sannolikheten att datoren kör operativesystemet A. Efter tre år, datoren har kraschat bara en gång. Beräkna igen sannolikheten att datoren kör operativesystemet A.

Lösning I:

Först, senaste året.

Antal krasch för OS A: $p(K=k|S=A) = Po(k;0.5) = 0.5^k \exp(-0.5)/k!$.

Antal krasch för OS B: $p(K=k|S=B) = Po(k;1) = 1^k \exp(-1)/k!$.

OS A och B är lika populära: $p(S=A) = p(S=B) = 0.5$.

Bayes sats: $p(S=A|K=0) = \frac{p(K=0|S=A)p(S=A)}{p(K=0|S=A)p(S=A)+p(K=0|S=B)p(S=B)}$

$= \frac{Po(0;0.5)\cdot 0.5}{Po(0;0.5)\cdot 0.5+Po(0;1)\cdot 0.5}$.

Nu, senaste tre åren.

Antal krasch för OS A: $p(K=k|S=A) = Po(k;1.5) = 1.5^k \exp(-1.5)/k!$.

Antal krasch för OS B: $p(K=k|S=B) = Po(k;3) = 3^k \exp(-3)/k!$.

OS A och B är lika populära: $p(S=A) = p(S=B) = 0.5$.

Bayes sats: $p(S=A|K=1) = \frac{p(K=1|S=A)p(S=A)}{p(K=1|S=A)p(S=A)+p(K=1|S=B)p(S=B)}$

$= \frac{Po(1;1.5)\cdot 0.5}{Po(1;1.5)\cdot 0.5+Po(1;3)\cdot 0.5}$.

Lösning II:

Först, senaste året.

Antal krasch för OS A: $p(K \le k|S=A) = CumulativePo(k;0.5)$.

Antal krasch för OS B: $p(K \le k|S=B) = CumulativePo(k;1)$.

OS A och B är lika populära: $p(S=A) = p(S=B) = 0.5$.

Bayes sats: $p(S=A|K=0) = \frac{p(K=0|S=A)p(S=A)}{p(K=0|S=A)p(S=A)+p(K=0|S=B)p(S=B)}$

$= \frac{CumulativePo(0;0.5)\cdot 0.5}{CumulativePo(0;0.5)\cdot 0.5+CumulativePo(0;1)\cdot 0.5} = \frac{0.6065\cdot 0.5}{0.6065\cdot 0.5+0.3679\cdot 0.5}$ med hjälp av tabell A3 i boken.

Nu, senaste tre åren.

Antal krasch för OS A: $p(K \le k|S=A) = CumulativePo(k;1.5)$.

Antal krasch för OS B: $p(K \le k|S=B) = CumulativePo(k;3)$.

OS A och B är lika populära: $p(S=A) = p(S=B) = 0.5$.

Bayes sats: $p(S=A|K=1) = \frac{p(K=1|S=A)p(S=A)}{p(K=1|S=A)p(S=A)+p(K=1|S=B)p(S=B)}$

$= \frac{[CumulativePo(1;1.5)-CumulativePo(0;1.5)]\cdot 0.5}{[CumulativePo(1;1.5)-CumulativePo(0;1.5)]\cdot 0.5+[CumulativePo(1;3)-CumulativePo(0;3)]\cdot 0.5}$

$= \frac{[0.5578-0.2231]\cdot 0.5}{[0.5578-0.2231]\cdot 0.5+[0.1991-0.0498]\cdot 0.5}$.

(3) (2 p) Härled väntevärdet och variansen för en slumpvariable som är (a) Bernoulli fördelad, (b) binomial fördelad, och (c) likformig fördelad i intervallen $[0,1]$.

Lösning: Se sidor 58, 59 och 81 i boken.

(4) (2 p) Slumpvariabeln X är normal fördelad med $E(X) = -3$ och $var(X) = 4$. Beräkna (a) $p(X = -3)$, (b) $p(X \leq 2.39)$, (c) $p(-2.39 < X < 2.39)$, och (d) värdet a så att $p(X > a) = 0.33$.

Lösning:
(a) $p(X = -3) = 0$.
(b) $p(X \leq 2.39) = p(\frac{X+3}{2} \leq \frac{2.39+3}{2}) = p(Z \leq 2.695) = \Phi(2.695) = 0.9965$ med $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
(c) $p(-2.39 < X < 2.39) = p(\frac{-2.39+3}{2} < \frac{X+3}{2} < \frac{2.39+3}{2}) = p(0.305 < Z < 2.695) = \Phi(2.695) - \Phi(0.305) = 0.9965 - 0.6179$.
(d) $0.33 = p(X > a) = 1 - p(X \leq a) \Rightarrow p(X \leq a) = 0.67 = p(\frac{X+3}{2} \leq \frac{a+3}{2}) = p(Z \leq \frac{a+3}{2}) = \Phi(\frac{a+3}{2}) \Rightarrow \frac{a+3}{2} = 0.44 \Rightarrow a = -2.12$.

(5) (2 p) Varje dag tar Norah samma väg från universitetet till träningshallen. Det finns fyra stoppsignaler på vägen och hon noterar följande: Om en stoppsignal visar grönt, kommer nästa stoppsignal att visa grönt med sannolikheten 0.5 och rött med sannolikheten 0.5. Om stoppsignalen däremot visar rött kommer nästa stoppsignal att visa rött med sannolikheten 0.6 och grönt med sannolikheten 0.4.

(a) Ange transitionsmatrisen som tillhör Markovkedjan. (b) Ange 2-stegs transitionsmatrisen och förklara vad den innebär. (c) Om det första stoppet visar grön, vad är sannolikheten att tredje stoppet visar röd ?

Lösning: Se uppgift 3 i den tentan som gick 2016-08-25.

(6) (4 p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende och likafördelade $Binomial(4, p)$ slumpvariabler och anta vidare att apriorifördelningen för p är $Beta(\alpha, \beta)$. (a) Härled aposteriorifördelningen för p. (b) Beräkna aposteriorivväntevärdet för p. (c) Ett 95 % highest posterior density (HPD) intervall är ett Bayesianskt osäkerhetsintervall för en parameter p som innehåller de värden på parametern som har högst aposterioritäthet, och där sannolikheten att p tillhör intervallet är 0.95. Beräkna ett HPD intervall för p givet $n = 2$, $\alpha = \beta = 1$ och $\sum_{i=1}^{n} x_i = 8$.
Hjälp: $\Gamma(n + 1) = n!$ för icke-negativt heltal n.

Lösning: Se uppgift 4 i den tentan som gick 2016-10-28.

(7) (4 p) Ett företag har haft den följande budgeten under åren:

år (20xx)	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13
budget (MSEK)	17	23	31	29	33	39	39	40	41	44	47

(a) Bygg en linjär regression modell från datan. (b) Testa hypotesen att budgeten ökar mer än 1.8 MSEK per år i genomsnitt. (c) Bygg en 95 % konfidensintervall för budgeten för 2017. (d) Förklara vad intervallet innebär. (e) Nämn de tre viktigaste antaganden som gjordes för att bygga intervallet.
Hjälp: $std(b_1) = \frac{\sigma}{\sqrt{S_{xx}}}$ och $std(\hat{y}_*) = \sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_* - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$ där $\hat{y}_*$ är prediktionen för observationen x_*.

Lösning:
(a) $b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{292}{110} = 2.655$ och $b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 34.82 - 2.655 \cdot 8 = 13.58$.

(b) $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2}\sum_i (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = \frac{66.52}{9} = 7.39$ och då $std(b_1) = \sqrt{\frac{7.39}{110}} = 0.27$. Nu kan vi köra ett vanligt t-test (9 frihetsgrader) med $H_0 : \beta_1 = 1.8$ och $H_A : \beta_1 > 1.8$, dvs. $t = \frac{2.655-1.8}{0.27} = 3.30$ och p-värde < 0.005 enligt tabell A5 i boken.

(c) $\hat{y}_* = b_0 + b_1 x_* = 13.58 + 2.655 \cdot 17 = 58.72$ och då 95 % prediktionsintervallen är $58.72 \pm t_{0.025} \cdot std(\hat{y}_*) = 58.72 \pm 2.262 \cdot \sqrt{7.39}\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{(17-8)^2}{110}}$.

(d) Se sida 248 i boken.

(e) Normal fördelning, konstant varians, och linjärt väntevärde.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Institutionen för datavetenskap
Avdelningen för statistik
Mattias Villani

2015-10-12

TBAB01

TABELL- OCH FORMELSAMLING

SANNOLIKHETSFÖRDELNINGAR

- **Binomialfördelning**

$$X \sim Bin(n,p)$$

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0,1,\ldots,n$$

$$\mathbb{E}X = np, \qquad Var(X) = np(1-p).$$

- **Poissonfördelning**

$$X \sim Po(\mu)$$

$$P(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

$$\mathbb{E}X = \mu, \qquad Var(X) = \mu.$$

- **Geometrisk fördelning**

$$X \sim Ge(p)$$

$$P(x) = (1-p)^{x-1} p, \qquad x = 1,2,\ldots$$

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{p}, \qquad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

- **Multinomialfördelning**

$$(X_1,...,X_k) \sim Multinomial(n,p_1,...,p_k)$$

$$P(x_1,...,x_k) = \frac{n!}{x_1!\cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}, \qquad x_i = 0,1,2,...,n \text{ och } \sum_{i=1}^{n} x_i = n.$$

$$\mathbb{E}X_i = np_i, \qquad Var(X_i) = np_i(1-p_i), \qquad Cov(X_i,X_j) = -np_ip_j \ (i \neq j).$$

- **Likformig (rektangulär) fördelning på intervallet (a,b)**

$$X \sim U(a,b)$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \leq x \leq b$$

$$\mathbb{E}\mathbb{X} = \frac{a+b}{2}, \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- **Exponentialfördelning**

$$X \sim Exp(\lambda),$$

där λ betecknar intensiteten. Ibland används väntevärdet $\mu = \frac{1}{\lambda}$ som parameter.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0$$

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}, \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- **Normalfördelning**

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\mathbb{E}X = \mu, \qquad Var(X) = \sigma^2.$$

- **χ^2-fördelning**

$$Y \sim \chi^2(\nu)$$

Uppkomst: Om $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende, var och en $N(0,1)$, gäller att $Y = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ får en χ^2 fördelning med ν frihetsgrader.

$$f(x) = \frac{x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2}}{2^{(\nu/2)}\Gamma(\nu/2)}, \qquad x \geq 0,$$

där $\Gamma(\cdot)$ är gammafunktionen

$$\Gamma(c) = \int_0^\infty x^{c-1} e^{-x} dx, \quad \text{där } c > 0.$$

$$\mathbb{E}Y = \nu, \qquad Var(Y) = 2\nu.$$

- **t-fördelning**

$$Z \sim t(\nu)$$

Uppkomst: Om $X \sim N(0,1)$ och $Y \sim \chi^2(\nu)$ samt X och Y är oberoende, så gäller att $Z = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ får en t-fördelning med ν frihetsgrader.

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

- **Gammafördelning**

$$Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$$

Uppkomst: Om $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende, var och en $Exp(\lambda)$, så blir $Y = X_1 + \ldots + X_n$ gammafördelad med parametrarna n och λ.

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0$$

$$\mathbb{E}Y = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad Var(Y) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

- **Betafördelning**

$$X \sim Beta(\alpha, \beta)$$

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad 0 < x < 1$$

$$\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

- **Dirichletfördelningen**

$$(X_1, ..., X_k) \sim Dirichlet(\alpha_1, ..., \alpha_k)$$

$$P(x_1, ..., x_k) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^k \alpha_i)}{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)} x_1^{\alpha_1 - 1} \cdots x_k^{\alpha_k - 1}, \qquad 0 < x_i < 1 \text{ och } \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

$$\mathbb{E}X_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_0}, \text{ där } \alpha_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \qquad Var(X_i) = \frac{\alpha_i(\alpha_0 - \alpha_i)}{\alpha_0^2(\alpha_0+1)}, \qquad Cov(X_i, X_j) = -\frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_0^2(\alpha_0+1)} (i \neq j).$$

DIVERSE DEFINITIONER OCH RESULTAT

- Kovarians: $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$, där $\mu_X = \mathbb{E}X]$ och $\mu_Y = \mathbb{E}Y$
- Korrelation: $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$, där $\sigma_X^2 = Var(X)$ och $\sigma_Y^2 = Var(Y)$
- Generellt gäller att

$$\mathbb{E}(a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n + b) = a_1 \mathbb{E}X_1 + \ldots + a_n \mathbb{E}X_n + b.$$

- För *oberoende* slumpvariabler $X_1, \ldots, X_n$ gäller att

$$Var(a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n + b) = a_1^2 Var(X_1) + \ldots + a_n^2 Var(X_n).$$

- Generellt gäller att

$$Var(a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n + b) = \sum_{j=1}^n a_j^2 Var(X_j) + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} a_j a_k Cov(X_j, X_k).$$

- $X \sim Bin(n,p)$ och $n \geq 10$, $p \leq 0.1 \quad \Rightarrow \quad X \approx Po(np)$
- $X \sim Bin(n,p)$ och $np(1-p) \geq 10 \quad \Rightarrow \quad X \approx N(np, np(1-p))$,
- $X \sim Po(\mu)$ och $\mu \geq 15 \quad \Rightarrow \quad X \approx N(\mu, \mu)$.
- Om $X_1, ..., X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, gäller följande:

    1. $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$,
    2. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

3. $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

- Vid **enkel linjär regression** ges modellen av

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \qquad \text{för } i = 1, \ldots, n,$$

där $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$ och oberoende.
Minsta kvadrat-skattningar

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}},$$
$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x},$$
$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i \right)^2$$

där

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$
$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \bar{y})$$

- χ^2 **goodness of fit-test**.

  - H_0: Fördelningsfunktioner är $F_0(x)$ (inga okända parametrar).

Låt $p_i = F_0(a_i) - F_0(a_{i-1})$ och N_i antalet x_i i intervallet $(a_{i-1}, a_i]$.

Teststatistika: $T = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \approx \chi^2(k-1)$-fördelad under H_0.

  - H_0: Given parametrisk fördelningsklass med fördelningsfunktion $F(x)$.

Teststatistika: $T = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$,

där p_i beräknas som enligt föregående punkt sedan parametrarna i $F(x)$ har skattats. T är approximativt $\chi^2(k-1-r)$-fördelad under H_0 där r = antalet skattade parametrar i $F(x)$.
I båda fallen krävs att alla $np_i \geq 5$.

BAYESIANSK INFERENS

Bernoulli data - Beta prior

- Modell: $X_1, ..., X_n|\theta \sim Bernoulli(\theta)$
- Prior: $\theta \sim Beta(\alpha, \beta)$
- Posterior: $\theta|x_1, ..., x_n \sim Beta(\alpha + s, \beta + f)$, där $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$ och $f = n - s$.

Normal data - Normal prior

- Modell: $X_1, ..., X_n|\theta, \sigma^2 \sim N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 känd.
- Prior: $\theta \sim N(\mu, \tau^2)$
- Posterior: $\theta|x_1, ..., x_n \sim N\left(\mu_x, \tau_x^2\right)$, där $\frac{1}{\tau_x^2} = \frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}$, $\mu_x = w\bar{x} + (1 - w)\mu$ och $w = \frac{\frac{n}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}$.

Multinomial data - Dirichlet prior

- Modell: $X_1, ..., X_K|\theta_1, ..., \theta_K \sim Multinomial(n, \theta_1, ..., \theta_K)$.
- Prior: $(\theta_1, ..., \theta_K) \sim Dirichlet(\alpha_1, ..., \alpha_K)$
- Posterior: $(\theta_1, ..., \theta_K)\,|x_1, ..., x_k \sim Dirichlet(\alpha_1 + x_1, ..., \alpha_K + x_K)$.

Normalfördelning

Tabell för $\Phi(x) = P(X \leq x)$, där $X \sim N(0,1)$. För $x < 0$, använd att $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

t-fördelning

Tabell för $F(x) = P(X \leq x)$, där $X \sim t(\nu)$. För $F(x) < 0.5$, använd att $F(x) = 1 - F(-x)$.

	$F(x)$							
ν	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.9995
1	1.00	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	127.32	636.62
2	0.82	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	14.09	31.60
3	0.76	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	7.45	12.92
4	0.74	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	5.60	8.61
5	0.73	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	4.77	6.87
6	0.72	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	4.32	5.96
7	0.71	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.03	5.41
8	0.71	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	3.83	5.04
9	0.70	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	3.69	4.78
10	0.70	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	3.58	4.59
11	0.70	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	3.50	4.44
12	0.70	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.43	4.32
13	0.69	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.37	4.22
14	0.69	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.33	4.14
15	0.69	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.29	4.07
16	0.69	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.25	4.01
17	0.69	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.22	3.97
18	0.69	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.20	3.92
19	0.69	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.17	3.88
20	0.69	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.15	3.85
21	0.69	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.14	3.82
22	0.69	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.12	3.79
23	0.69	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.10	3.77
24	0.68	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.09	3.75
25	0.68	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.08	3.73
26	0.68	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78	3.07	3.71
27	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.06	3.69
28	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.05	3.67
29	0.68	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.04	3.66
30	0.68	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.03	3.65
40	0.68	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	2.97	3.55
50	0.68	1.30	1.68	2.01	2.40	2.68	2.94	3.50
60	0.68	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	2.91	3.46
100	0.68	1.29	1.66	1.98	2.36	2.63	2.87	3.39
∞	0.67	1.28	1.65	1.96	2.33	2.58	2.81	3.29

χ^2-fördelning

Tabell för $F(x) = P(X \leq x)$, där $X \sim \chi^2(\nu)$.

	$F(x)$										
ν	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.06	0.15	0.27	0.45
2	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.45	0.71	1.02	1.39
3	0.02	0.02	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.01	1.42	1.87	2.37
4	0.06	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.65	2.19	2.75	3.36
5	0.16	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.34	3.00	3.66	4.35
6	0.30	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	4.57	5.35
7	0.48	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	5.49	6.35
8	0.71	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	6.42	7.34
9	0.97	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	7.36	8.34
10	1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	8.30	9.34
11	1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	9.24	10.34
12	1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	10.18	11.34
13	2.31	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	11.13	12.34
14	2.70	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.82	12.08	13.34
15	3.11	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.31	11.72	13.03	14.34
16	3.54	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.15	12.62	13.98	15.34
17	3.98	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.00	13.53	14.94	16.34
18	4.44	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	12.86	14.44	15.89	17.34
19	4.91	5.41	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	13.72	15.35	16.85	18.34
20	5.40	5.92	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	14.58	16.27	17.81	19.34
21	5.90	6.45	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	15.44	17.18	18.77	20.34
22	6.40	6.98	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	16.31	18.10	19.73	21.34
23	6.92	7.53	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	17.19	19.02	20.69	22.34
24	7.45	8.08	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	18.06	19.94	21.65	23.34
25	7.99	8.65	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	18.94	20.87	22.62	24.34
26	8.54	9.22	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	19.82	21.79	23.58	25.34
27	9.09	9.80	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	20.70	22.72	24.54	26.34
28	9.66	10.39	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	21.59	23.65	25.51	27.34
29	10.23	10.99	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	22.48	24.58	26.48	28.34
30	10.80	11.59	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	23.36	25.51	27.44	29.34
40	16.91	17.92	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	32.34	34.87	37.13	39.34
50	23.46	24.67	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	41.45	44.31	46.86	49.33
60	30.34	31.74	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	50.64	53.81	56.62	59.33
100	59.90	61.92	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	87.95	92.13	95.81	99.33

χ^2-fördelning, forts.

Tabell för $F(x) = P(X \leq x)$, där $X \sim \chi^2(\nu)$.

	$F(x)$									
ν	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.71	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83	12.12
2	1.83	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82	15.20
3	2.95	3.66	4.64	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27	17.73
4	4.04	4.88	5.99	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47	20.00
5	5.13	6.06	7.29	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52	22.11
6	6.21	7.23	8.56	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46	24.10
7	7.28	8.38	9.80	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32	26.02
8	8.35	9.52	11.03	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12	27.87
9	9.41	10.66	12.24	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88	29.67
10	10.47	11.78	13.44	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59	31.42
11	11.53	12.90	14.63	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26	33.14
12	12.58	14.01	15.81	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91	34.82
13	13.64	15.12	16.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53	36.48
14	14.69	16.22	18.15	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12	38.11
15	15.73	17.32	19.31	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70	39.72
16	16.78	18.42	20.47	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25	41.31
17	17.82	19.51	21.61	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79	42.88
18	18.87	20.60	22.76	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31	44.43
19	19.91	21.69	23.90	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82	45.97
20	20.95	22.77	25.04	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31	47.50
21	21.99	23.86	26.17	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80	49.01
22	23.03	24.94	27.30	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27	50.51
23	24.07	26.02	28.43	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73	52.00
24	25.11	27.10	29.55	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18	53.48
25	26.14	28.17	30.68	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62	54.95
26	27.18	29.25	31.79	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05	56.41
27	28.21	30.32	32.91	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48	57.86
28	29.25	31.39	34.03	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89	59.30
29	30.28	32.46	35.14	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30	60.73
30	31.32	33.53	36.25	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70	62.16
40	41.62	44.16	47.27	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40	76.09
50	51.89	54.72	58.16	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66	89.56
60	62.13	65.23	68.97	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61	102.69
100	102.95	106.91	111.67	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45	153.17

Binomialfördelning

Tabell för $P(X \leq k)$ där $X \sim Bin(n, p)$.
För $p > 0.5$, använd att $P(X \leq k) = P(Y \geq n - k)$ där $Y \sim Bin(n, 1 - p)$.

		p									
n	k	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9928	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5747	0.5000
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	0.9978	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563
	4	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
	4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980

Poissonfördelning

Tabell för $P(X \leq k)$ där $X \sim Po(\mu)$.

k	μ = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

k	μ = 1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4337	0.4060
2	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

k	μ = 2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9379	0.9275	0.9162	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000