TDAB01 SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK

Jose M. Peña
IDA, Linköpings Universitet

Föreläsning 1

LINKÖPING UNIVERSITY

STATISTIK? ÄR INTE DET TABELLER, TYP?

- Statistik - läran om **osäkerhet**. Kommer det regna imorgon?
- **Sannolikheter** - osäkerhetens språk. Pr(regn imorgon) = 20%
- **Statistisk inferens** - att lära sig om osäkra händelser utifrån **data**. Pr(regn imorgon | regn idag, lågtryck idag) = 45%
- Optimala **beslut** i en osäker värld. Ska jag boka en charterresa?

SANNOLIKHETSLÄRA, STATISTIK OCH BESLUT

- **Sannolikhetslära**: Ett inkommande email är spam med sannolikheten 5%. Efter din semester har du 78 olästa mejl. Vad är sannolikheten att inget email är spam?

- **Statistik**: Efter din semester har du 78 olästa mejl. Två email visar sig vara spam. Vad är sannolikheten att ett godtyckligt email är spam?

- **Beslut under osäkerhet**: Ska nästa inkommande email skickas till spamkorgen?

BYGG DITT EGET SPAMFILTER

- **Samla in träningsdata**: Läs in texten från dina inkomna mejl och beräkna intressanta kvantiteter (features) från varje mejl. T ex hur många $-tecken? hur många 'viagra'? etc.

- **Formulera en sannolikhetsmodell** baserat på features:

$$\Pr(\text{email is spam}) = \exp(\alpha + \beta \cdot nDollar + \gamma \cdot nViagra)$$

- **Estimera modellen** på träningsdata. Hur beror spam-sannolikheten på antalet $-tecken?

- **Prediktion**. Beräkna spam-sannolikheten för ett nytt mejl. [mejl -> features -> Pr(spam)]

- **Beslut**. Hur stor måste spam-sannolikheten vara för att mejlet ska skickas till spamkorgen?

- Se DigitClassification.R.

EXEMPEL - ROBOTIK

- **Lokalisering**. Robot: ‘Var är jag?’
  Sannolikhetsfördelning över positioner som uppdateras vartefter med brusiga sensordata.

- **Räddningsrobot**.
  Ta sig till olycksplats med objekt i vägen, t ex väggar, människor. K olika vägar, alla med olika förväntade färdtider. Osäkerhet. Beslut.

ROBOTIK RIMMAR MED STATISTIK

"*As robotics is now moving into the open world, the issue of* **uncertainty** *has become a major stumbling block for the design of capable robot systems.* ***Managing uncertainty is possibly the most important step towards robust real-world robot systems****.”* från boken "*Probabilistic Robotics*” av Thrun et al.

*“***Statistics** *provides the mathematical glue to integrate models and sensor measurements.”* från boken "*Probabilistic Robotics*” av Thrun et al.

“To date, **probabilistic robotics** is one of the most rapidly growing subfields of robotics. Probabilistic techniques have proven their value in practice. They are at the core of dozens of successful robotic systems to date” från artikeln “*Is Robotics Going Statistics? The Field of Probabilistic Robotics*” av Thrun.

EXEMPEL - MJUKVARUUTVECKLING

- **Hitta programmeringsbuggar**.
  Beslut: Allokera bugg till rätt team.
  Data: Text i buggrapport.
  Osäkerhet: Sannolikhetsfördelning över kodblock.
  Pr(bugg i block 1) = 10%, Pr(bugg i block 2) = 30% osv

- **Release-schema för mjukvara**.
  Beslut: Release om x antal månader.
  Data: Antalet buggar i tidigare releaser, releasedatum, försäljningsdata vid tidigare releaser etc.
  Osäkerhet: Sannolikhetsfördelning över antalet buggar vid olika releasedatum.
  Pr(minst en allvarlig bugg vid release om x månader) = $1/(1+x^2)$
  Sannolikhetsfördelning över antalet sålda licenser vid olika releasedatum.

DATAVETARE MÅSTE FÖRSTÅ STATISTIK

- “I keep saying the **sexy job** in the next ten years will be statisticians.”
  Hal Varian, Chief Economist, Google.

- “But the challenges for **massive data** go beyond the storage, indexing, and querying … and, instead, hinge on the ambitious goal of inference. Inference is the problem of turning data into knowledge … **Statistical rigor is necessary to justify the inferential leap from data to knowledge** …”
  från rapporten *"Frontiers in Massive Data Analysis"*, US National Research Council.

- “**Computer scientists** involved in building big-data systems **must develop a deeper awareness of inferential issues**, while statisticians must concern themselves with scalability, algorithmic issues, and real-time decision-making.“
  från rapporten *"Frontiers in Massive Data Analysis"*, US National Research Council.

SANNOLIKHETER

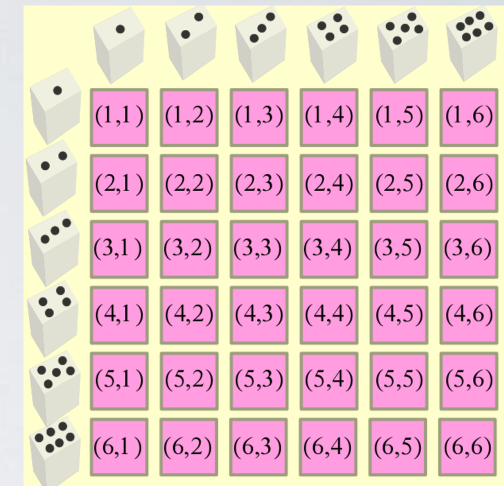
- Intuitivt: En **sannolikhet** beskriver chansen/risken att en händelse inträffar.

  Pr(Norrköping vinner allsvenskan)=0.3
  Pr(inflationen överstiger 2% om ett halvår) = 0.05
  Pr(objektet vid position (x,y) är en bomb) = 0.001
  Pr(person x har cancer) = 0.01

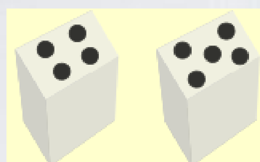
- Några saker att reda ut:
  - Vad är en **händelse** ?
  - Vilka **matematiska egenskaper** måste en sannolikhet ha för att de ska vara användbara (inte leda till paradoxer) ?
  - Hur ska en sannolikhet **tolkas** ?

GRUNDLÄGGANDE TERMINOLOGI FÖR SANNOLIKHETER

- **Experiment**. Kasta två tärningar.



- **Utfall**.



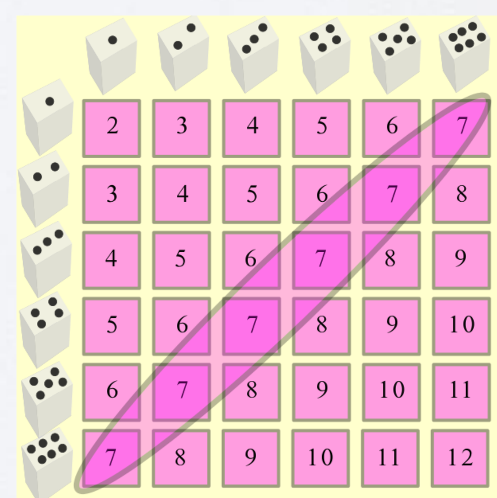
- **Utfallsrum** eller **universalhändelse**. Mängden av alla utfall. S eller Ω

$$S = \{\text{Hammarby vinner, Halmstad vinner, Oavgjort}\}$$

- **Händelse**. En mängd av utfall. En delmängd av utfallsrummet. $A \subset S$

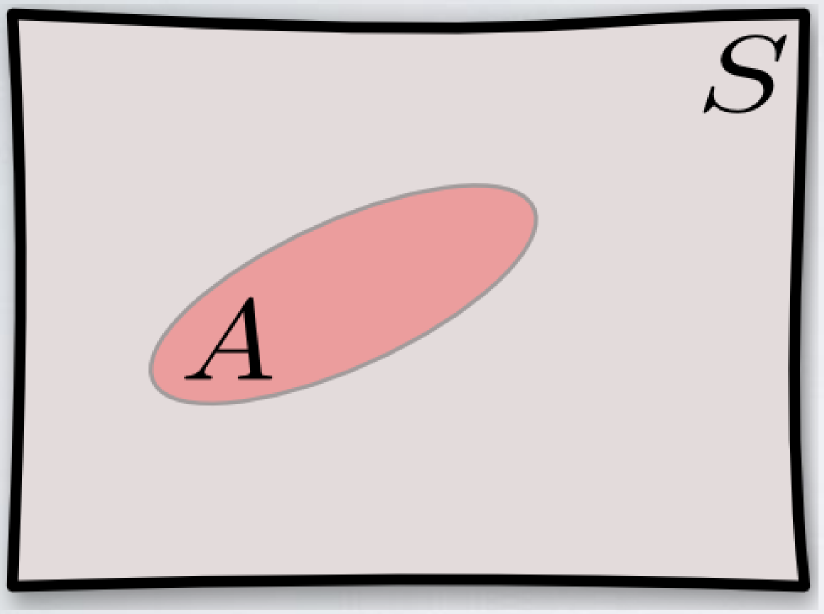
  A = Hammarby tar minst en poäng

  A = "Att få summan 7".

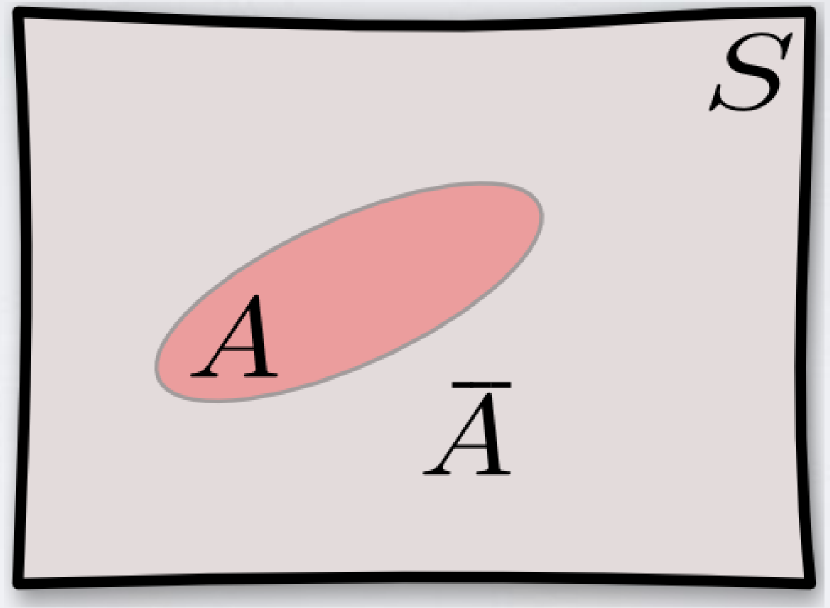


MÄNGDLÄRA

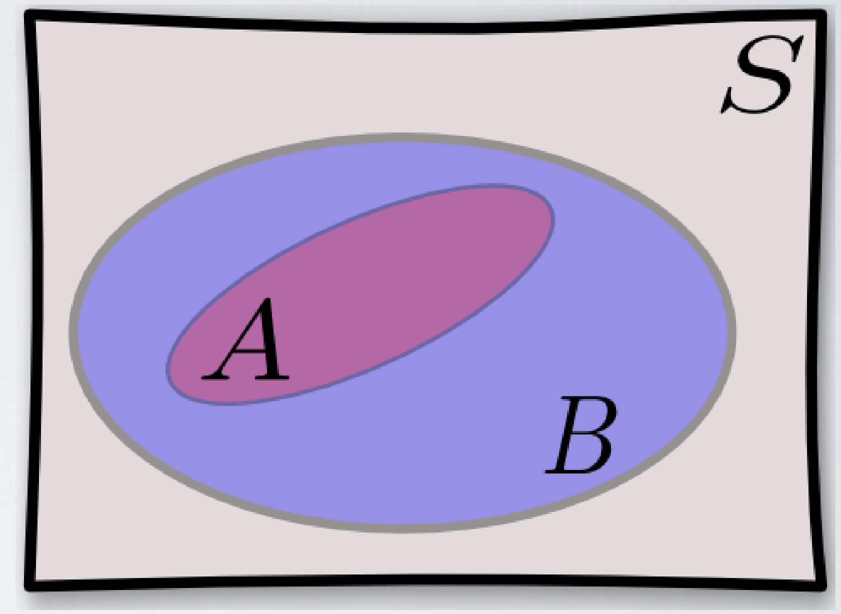
Händelsen A
ingår i **universalhändelsen** S



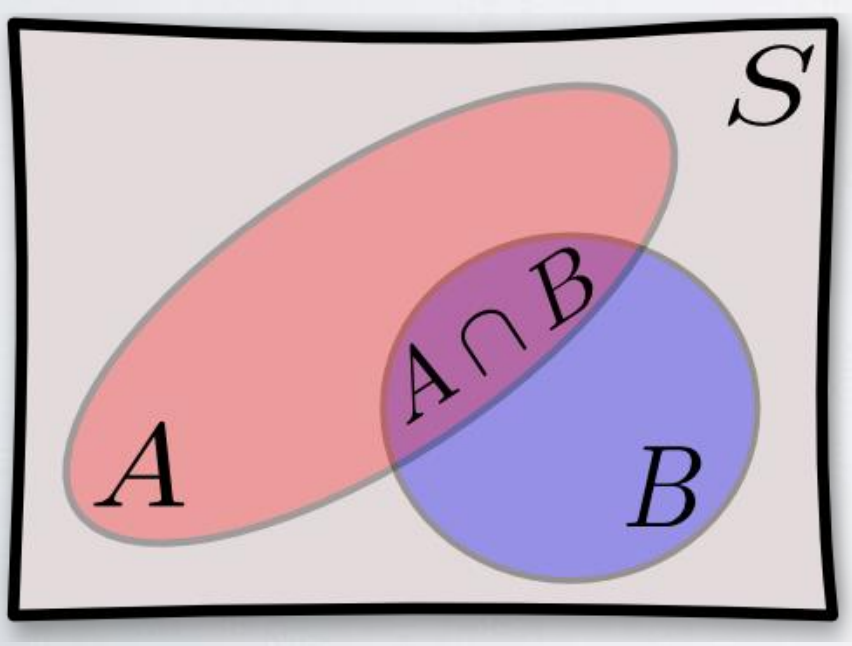
Komplement till A
De element som *inte* ingår i A



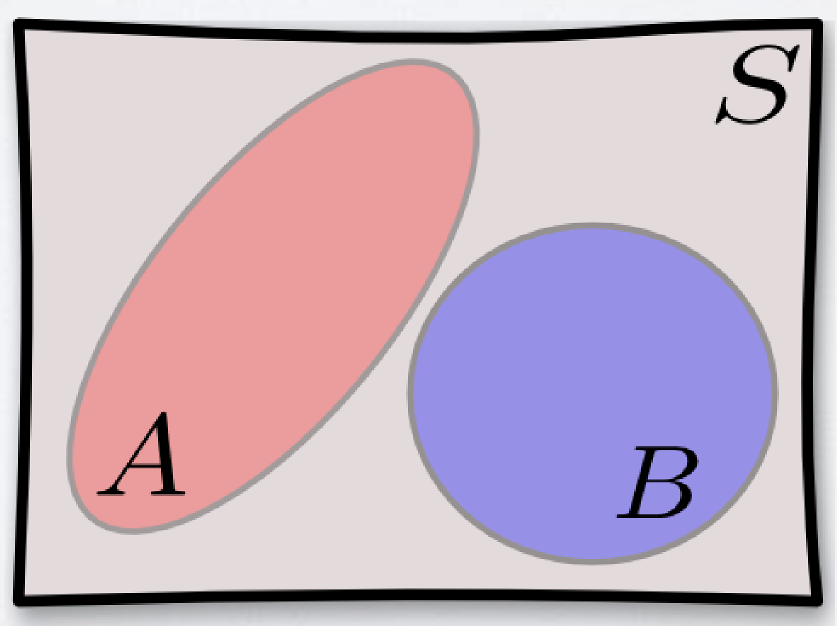
A är en **delmängd** av B
Alla element i A är också i B



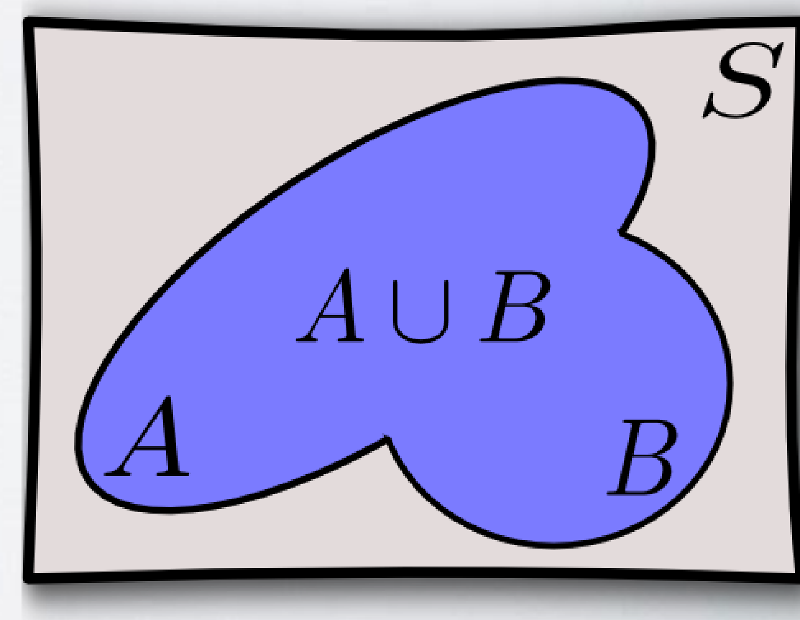
Snittet av A och B
Alla element som är i ***både*** A och B



A och B är **disjunkta** händelser
A och B har inga gemensamma element



Unionen av A och B
Alla element som är i A och/eller B



RÄKNA MED SANNOLIKHETER

- **Universalhändelsen**, utfallsrummet: $\boldsymbol{P}(S) = 1$
- **Komplement**: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- **Union**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- **Disjunkta händelser**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- **Oberoende händelser**: Om *A* har inträffat eller ej påverkar inte $\boldsymbol{P}(B)$.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Från union till snitt. Från snitt till union.

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

EXEMPEL 1

- H = {hårddisk crashar}, A = {backup A crashar} och B = {backup B crashar}.

- $\boldsymbol{P}(H)$=0.01, $\boldsymbol{P}(A)$=0.02 och $\boldsymbol{P}(B)$=0.02.

- Om H, A och B är oberoende, vad är sannolikheten att en fil är sparad ?

$$
\begin{aligned}
P(\text{fil sparad}) = 1 - P(\text{fil borta}) &= 1 - P(H \cap A \cap B) \\
&= 1 - P(H) \cdot P(A) \cdot P(B) \\
&= 1 - 0.01 \cdot 0.02 \cdot 0.02 = 0.999996
\end{aligned}
$$

EXEMPEL 2

- A_1 = {bugg i kodblock 1}, A_2 = {bugg i kodblock 2} och A_3 = {bugg i kodblock 3}.

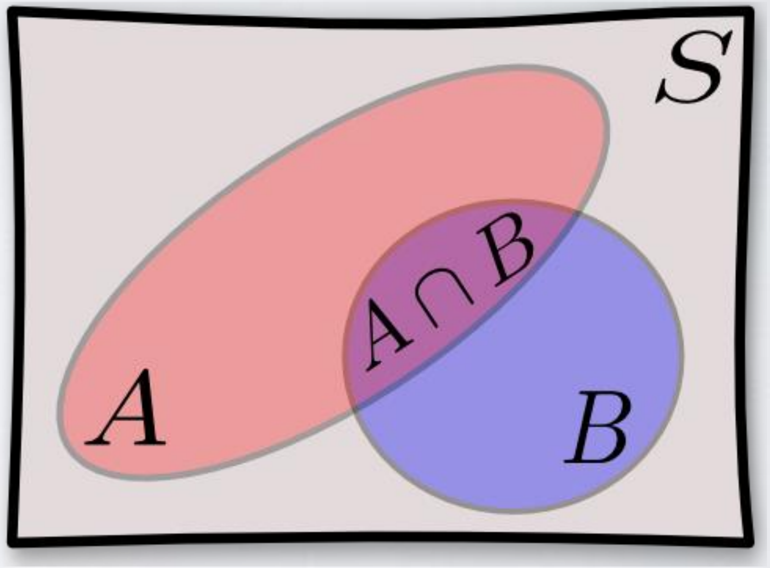
- $\boldsymbol{P}(A_1)$=0.01, $\boldsymbol{P}(A_2)$=0.05 och $\boldsymbol{P}(A_3)$=0.01. Oberoende händelser.

- Vad är sannolikheten att programmet är fritt från buggar ?

$$
\begin{aligned}
P(\text{buggfritt program}) &= P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \\
&= P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) \\
&= (1 - 0.01) \cdot (1 - 0.05) \cdot (1 - 0.01) \\
&= 0.931
\end{aligned}
$$

BETINGADE SANNOLIKHETER

- Sannolikheten att händelse *A* inträffar givet att händelse *B* har inträffat.



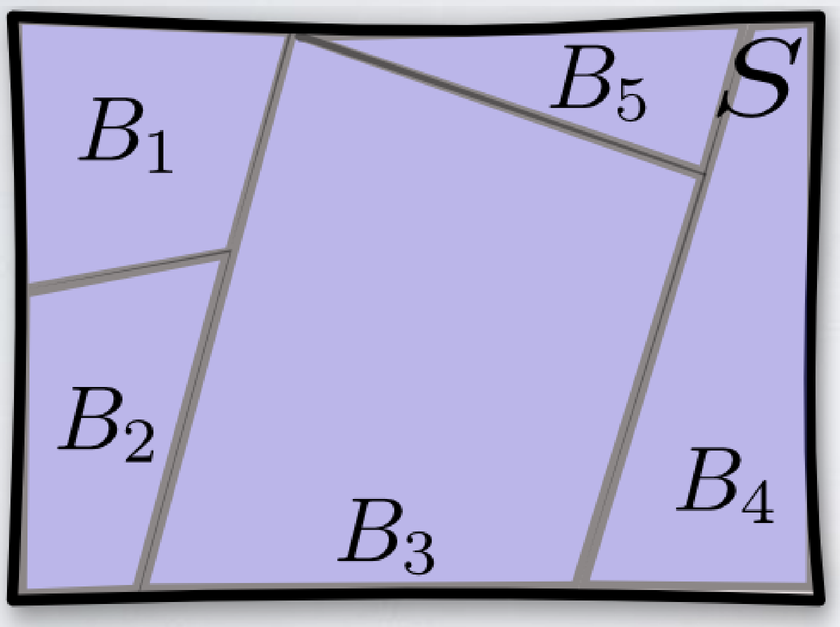
- Notation: ***P***(*A*|*B*)
- Definition: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Händelse *B* har inträffat. **Universalmängden krymper** från *S* till *B*.
- Notera: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$
- **Oberoende** om *B* ger ingen information om *A*: $P(A|B) = P(A)$

BAYES SATS

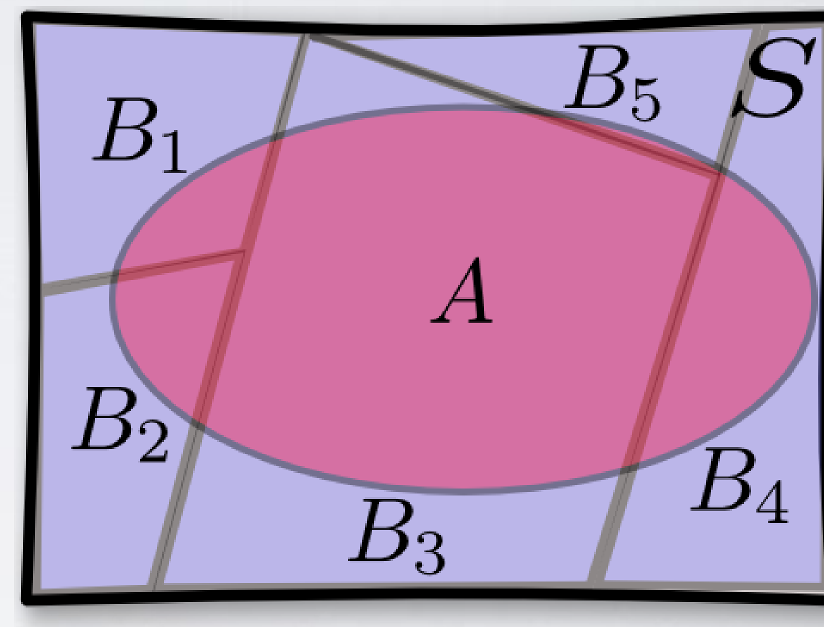
- Ibland vet vi ***P***(*B* | *A*), men är intresserade av ***P***(*A* | *B*).
- Bayes sats: $$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$
- Exempel: *A* = {har sjukdom}, *B* = {test positivt}.
  - ***P***(*A* | *B*) = ***P***(har sjukdom | test positivt)
  - ***P***(*B* | *A*) = ***P***(test positivt | har sjukdom)

LAGEN OM TOTAL SANNOLIKHET

$B_1, \ldots, B_5$ är en **partitionering** av S



Lagen om total sannolikhet



Partitionering = disjunkta och uttömmande delmängder

$$A = (A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_5)$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + \ldots + P(A \cap B_5)$$

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \ldots + P(A|B_5) \cdot P(B_5)$$

BAYES SATS - ALTERNATIV FORM

- Bayes sats: $$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

- Lagen om total sannolikhet ger

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

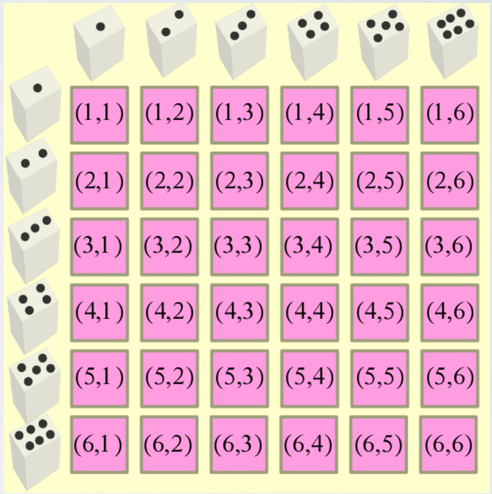
- Alternativ form av Bayes sats:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$$

LIKA SANNOLIKA UTFALL - KOMBINATORIK

- Låt $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ vara utfallsrummet för *n* **lika sannolika** utfall, t ex hasardspel (gambling), kortspel, tärningar, undersökningar.

- Vid lika sannolika utfall:



$$P(E) = \frac{\text{antalet utfall i E}}{\text{antalet utfall i } \Omega}$$

$$P(E) = \frac{\text{antalet lyckade utfall}}{\text{totala antalet utfall}} = \frac{\mathcal{N}_F}{\mathcal{N}_T}$$

- Att räkna antalet möjligheter/utfall blir viktigt. T ex sannolikheten att jag gissar ditt lösenord ? Sannolikheten att 5 av 50 kvinnor är med i en undersökning av 10 av 100 människor ? **Kombinatorik**.

PERMUTATIONER OCH KOMBINATIONER

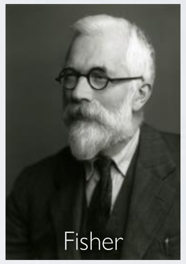
Välj ut *k* element från en mängd med *n* element

	Med återläggning	Utan återläggning
Med ordning	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Utan ordning	$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$	$\frac{n!}{(n-k)!k!}$

OLIKA TOLKNINGAR AV EN SANNOLIKHET

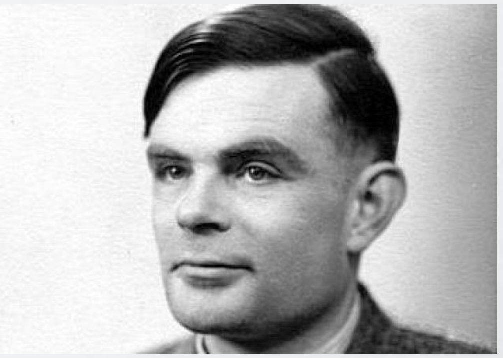
- **Lika sannolika händelser**. **Kombinatorik.**

- **Relativa frekvenser**: $\boldsymbol{P}(A)=0.25$ betyder att händelsen A kommer att inträffa 25% av antalet försök i genomsnitt.
  Frekventistisk statistik.



- **Subjektiv grad av tilltro**. $\boldsymbol{P}(A)=0.4$ betyder att du skulle acceptera vadet ‘vinn 10 kr om A inträffar’ om vadet kostade 4 kr eller mindre.
  Bayesiansk statistik.

Bayes



Turing