Sannolikhetslära och Statistik
Föreläsning 10

Mattias Villani

Avdelningen för Statistik och Maskininlärning
Institutionen för datavetenskap
Linköpings universitet

Översikt

- Bayesiansk inferens
- Binomialmodell med beta prior
- Normalmodell med normal prior
- Multinomialmodell med Dirichlet prior

Frekventistisk inferens

- Hittills på kursen: **frekventistisk inferens**.
  - **Parametrar θ är fixa** (icke slumpmässiga) storheter.
  - **Data** är **slumpvariabler**: $f(X_1, ..., X_n|\theta)$.
- Frekventistisk inferens: hur en **metod** beter sig över **upprepade stickprov** från populationen.
- **Samplingfördelningar** är i fokus. 'Vilka värden kan min estimator förväntas anta för olika stickprov?'
- **Väntevärderiktighet**: 'min skattningsmetod kommer att vara korrekt i genomsnitt' (sett över alla möjliga stickprov).
- **Konfidensintervall**: 'min intervallskattningsmetod kommer att täcka det sanna parametervärdet θ i 95% av alla möjliga stickprov från populationen'.
- **Hypotestest**: 'min testmetod kommer bara att dra fel slutsats i 5% av alla stickprov om nollhypotesen är sann'.

Subjektiva sannolikheter

- Du **vet inte** värdet på en populationsparameter θ. Du är **osäker** om θ. Påståendet $P(\theta \leq 2)$ är meningsfullt.
- **Det är osäkerheten som är relevant**. Om θ är en fix, konstant, storhet eller ej spelar ingen roll.
- Jag vet inte 10:e decimalen av π. Då kan jag säga

$$P(10 : e \text{ decimal av } \pi = 9) = 1/10.$$

- Det är **min** osäkerhet som spelar roll. Du kanske vet 10:e decimalen av π. För mig är π osäker och jag kan prata om sannolikhetsfördelningen för 10:e decimalen av π.
- Sannolikheter är ett **subjektivt** mått på personlig **grad av tilltro**.
- **Bayesiansk statistik** bygger på ett subjektivt sannolikhetsbegrepp.

Thomas Bayes 1701-1761

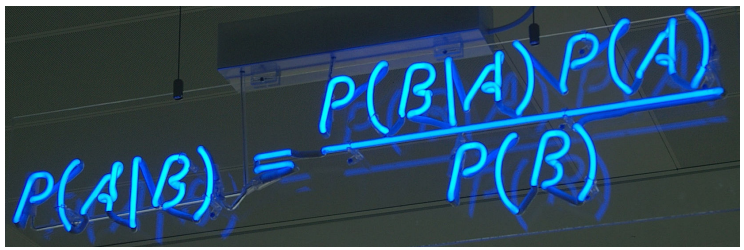
SUBJEKTIVITET I VETENSKAPEN!

Bayesiansk inferens

- Bernoullimodellen: $X_1, ..., X_n|\theta \sim \text{Bern}(\theta)$. T ex slantsingling.
- Sannolikheten för krona, θ, är okänd.
- Innan vi har börjat singla slant beskriver jag min osäkerhet om θ med min **apriorifördelning**: $\pi(\theta)$.
- **a priori = före** (före jag har observerat data).
- Antag nu att vi har observerat ett antal slantsinglingar: $X_1 = x_1, ..., X_n = x_n$ (t ex $0, 0, 1, 1, 0$).
- Hur bör vi **uppdatera** vår aprioriförderlning med denna datainformation? Hur lär vi oss från data? **Learning**.
- **Aposteriorifördelning**: $\pi(\theta|x_1, ..., x_n)$. Posterior = efter (data).
- Bayesiansk inferens **betingar på observerade data**. $P(\text{Okänt} \mid \text{Känt})$.

BAYES SATS UPPDATERAR PRIOR TILL POSTERIOR

- Antag att θ bara kan anta värdena: $0.1, 0.2, \ldots, 0.9$ (diskretisering).
- Kom ihåg: **Bayes sats** för händelser A och B:



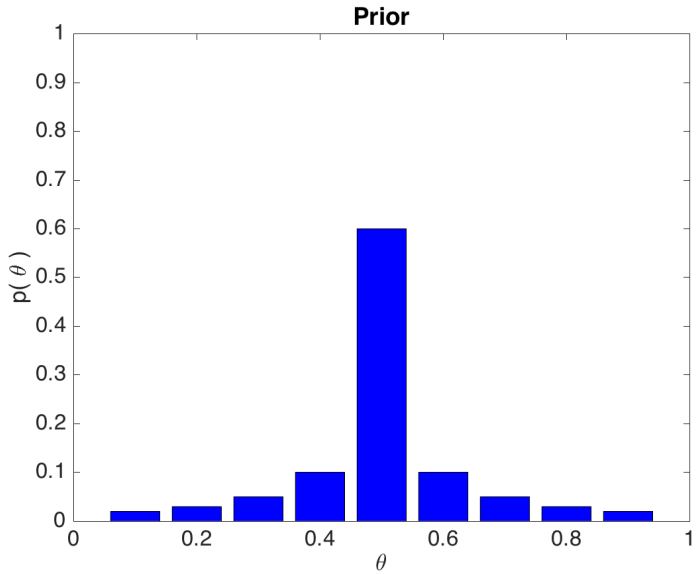
- Låt t ex $A = \{\theta = 0.1\}$ och $B = \{\mathbf{X} = \mathbf{x}\}$.
- Bayes sats ger **posteriorfördelningen**:

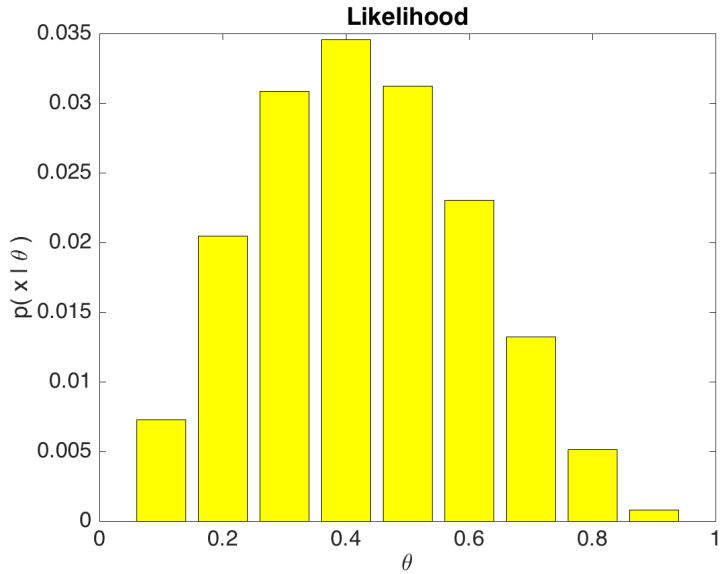
$$P(\theta = 0.1|\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x}|\theta = 0.1)P(\theta = 0.1)}{P(\mathbf{x})}$$

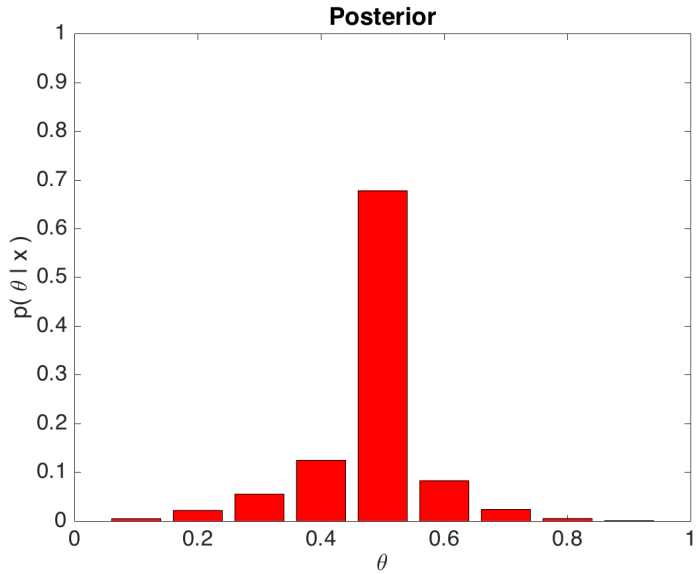
där satsen om total sannolikhet ger

$$P(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}|\theta = 0.1)P(\theta = 0.1) + \ldots + P(\mathbf{x}|\theta = 0.9)P(\theta = 0.9)$$

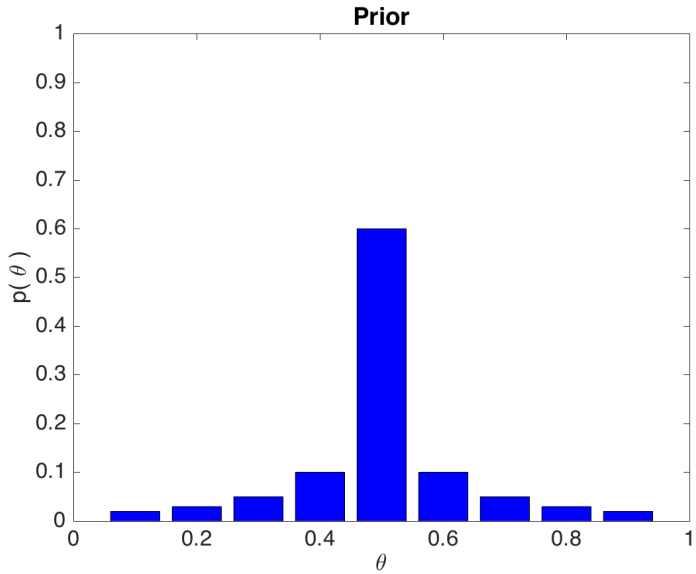
BERNOULLIMODELL - S=2, F=3

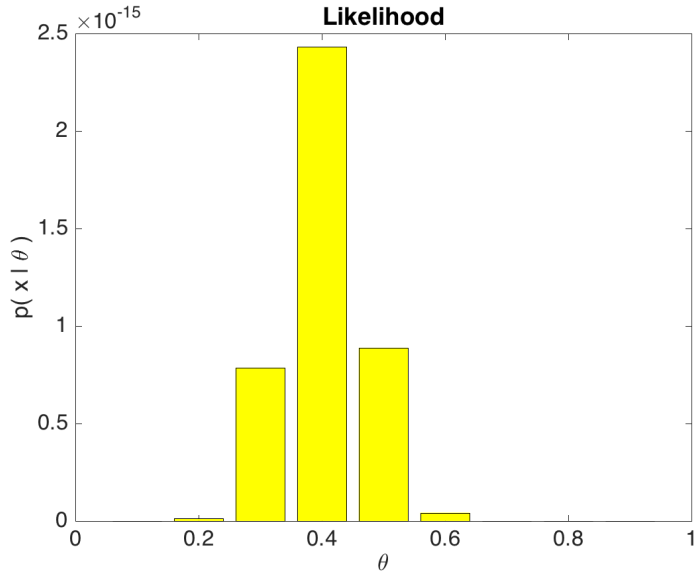


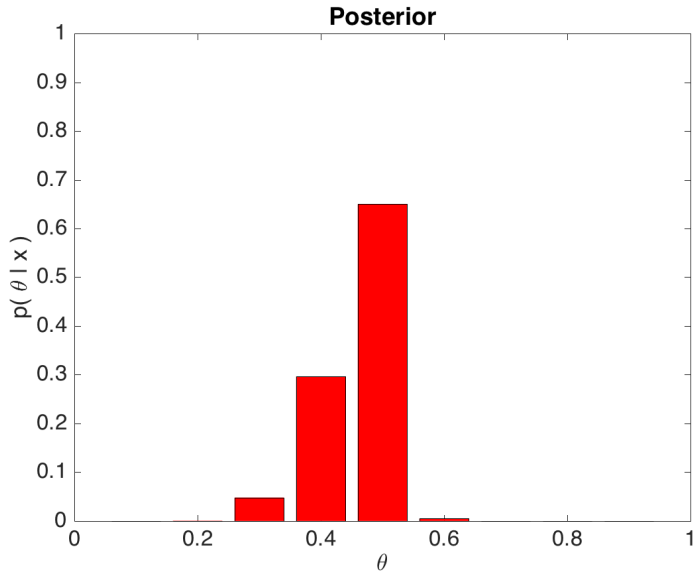




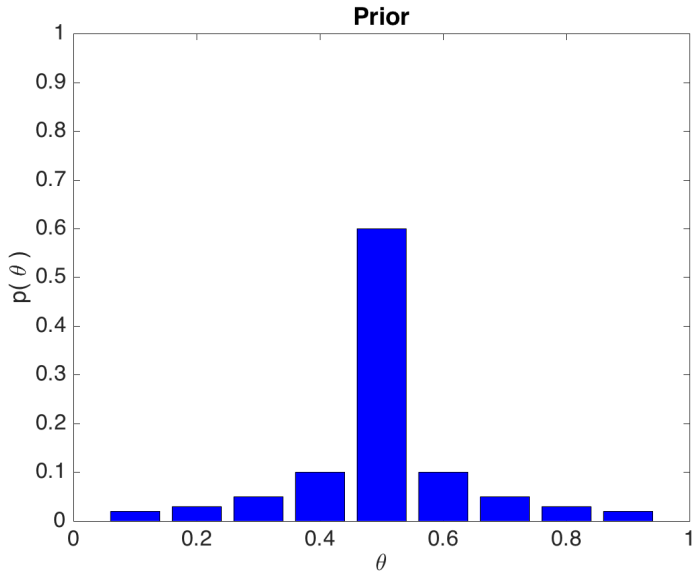
BERNOULLIMODELL - S=20, F=30

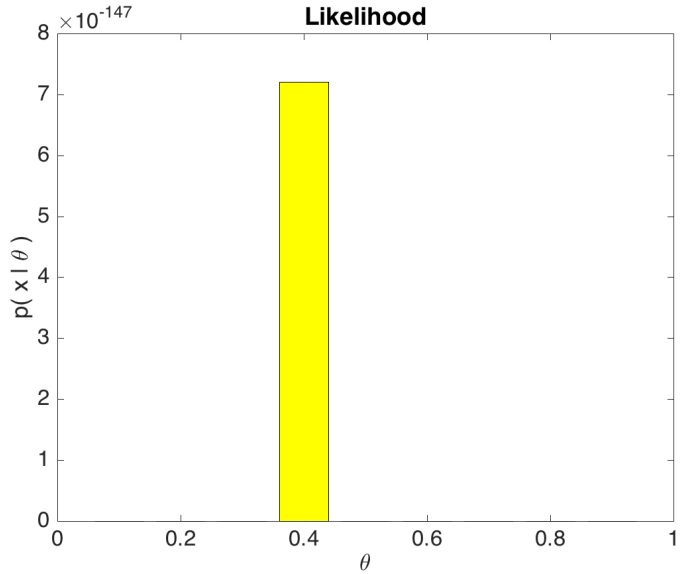


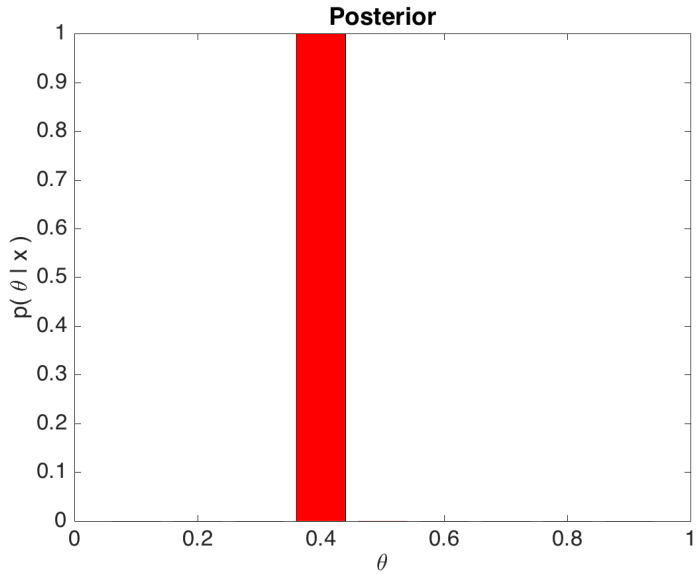




BERNOULLIMODELL - S=200, F=300







BAYES SATS FÖR KONTINERLIGA VARIABLER

- Diskretisering $\theta \in \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K\}$

$$P(\theta = \theta_i|\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x}|\theta = \theta_i)P(\theta = \theta_i)}{\sum_{j=1}^{K} P(\mathbf{x}|\theta = \theta_j)P(\theta = \theta_j)}$$

- Finare och finare grid ($\theta_{i+1} - \theta_i \to 0$) ger

$$f(\theta|\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x}|\theta)f(\theta)}{\int P(\mathbf{x}|\theta)f(\theta)d\theta},$$

- **Bayes sats** för **kontinuerlig** parameter θ

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

  - **Prior**: $\pi(\theta)$
  - **Likelihood**: $f(\mathbf{x}|\theta)$
  - **Posterior**: $\pi(\theta|\mathbf{x})$

Subjektivitet och objektivitet

- $\pi(\theta)$ är en **subjektiv** fördelning som varierar från person till person baserat på erfarenhet etc.
- **Hur vi lär oss från data**, dvs uppdaterar från prior till posterior, bestäms av Bayes sats.
- **Uppdateringmekanismen är objektiv** (matematik).
- Resultat: när $n \to \infty$ (**stora datamängder**) kommer alla personers posteriors att konvergera till samma fördelning. Objektivitet genom **subjektivt konsensus**.
- Vid rapportering av resultat kan man använda **icke-informativa apriorifördelningar** (dvs svag information) eller priorinformation som är lättförståelig.
- Machine learning: mycket vanligt med aprioriinformation av typen: 'Jag tror att den okända funktionen är **mjuk**, men jag vet inte mycket mer om den exakta funktionsformen'.

Bernoulli med Beta prior

- Bernoullimodellen: $X_1, ..., X_n|\theta \sim \text{Bern}(\theta)$. **Likelihood:** $\theta^s(1-\theta)^f$.
- $\theta \in [0,1]$. Lämplig **prior**: $\theta \sim Beta(\alpha, \beta)$:

$$\pi(\theta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}\theta^{\beta-1}$$

- **Posterior**

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \frac{\theta^s(1-\theta)^f \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}\theta^{\beta-1}}{\int \theta^s(1-\theta)^f \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}\theta^{\beta-1}d\theta}$$

$$= \frac{\theta^{\alpha+s-1}(1-\theta)^{\beta+f-1}}{\int \theta^{\alpha+s-1}(1-\theta)^{\beta+f-1}d\theta} = c \cdot \theta^{\alpha+s-1}(1-\theta)^{\beta+f-1}$$

där $c = 1/\int \theta^{\alpha+s-1}(1-\theta)^{\beta+f-1}d\theta$ är en konstant (beror inte på θ).

- En täthet på formen $c \cdot \theta^{\alpha+s-1}(1-\theta)^{\beta+f-1}$ känns igen som en $Beta(\alpha+s, \beta+f)$:

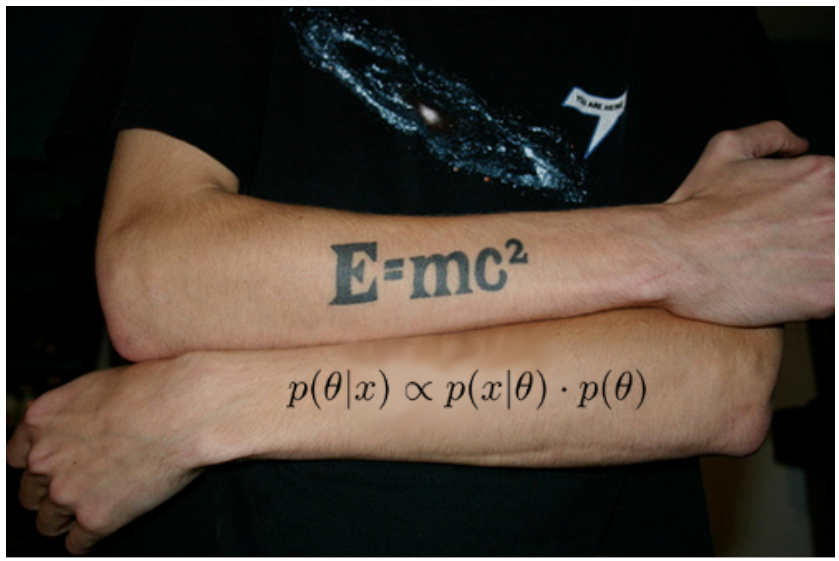
$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{1}{B(\alpha+s,\beta+f)}\theta^{(\alpha+s)-1}\theta^{(\beta+f)-1}.$$

Bayes sats på proportionell form

- Notera att vi aldrig behövde räkna ut nämnaren i Bayes sats: $\int f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta$. Vi kände igen Beta-fördelningen ändå.
- Tätheter måste integrera till ett. Proportionalitetskonstanter kan vi "strunta i".
- Enklare form av Bayes sats:

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

$$\text{Posterior} \propto \text{Likelihood} \times \text{Prior}$$

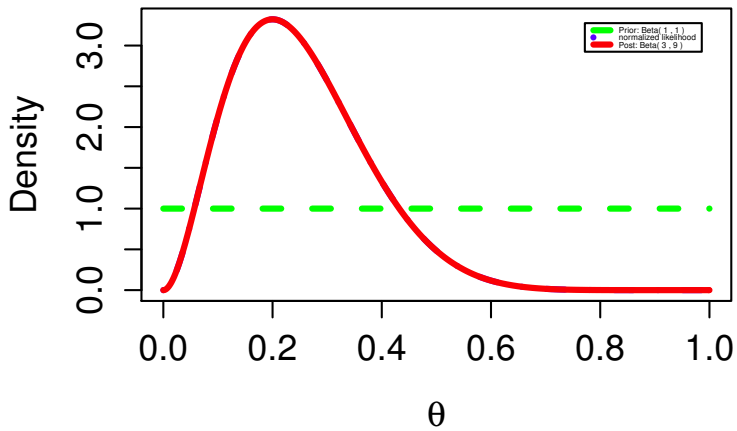


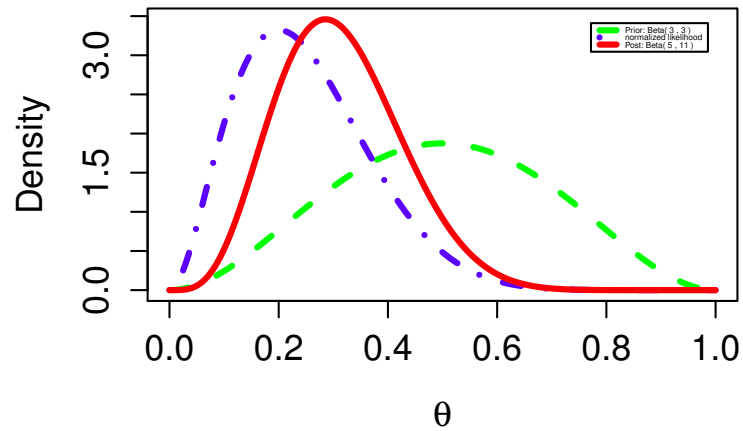
Bernoulli-exempel: spam

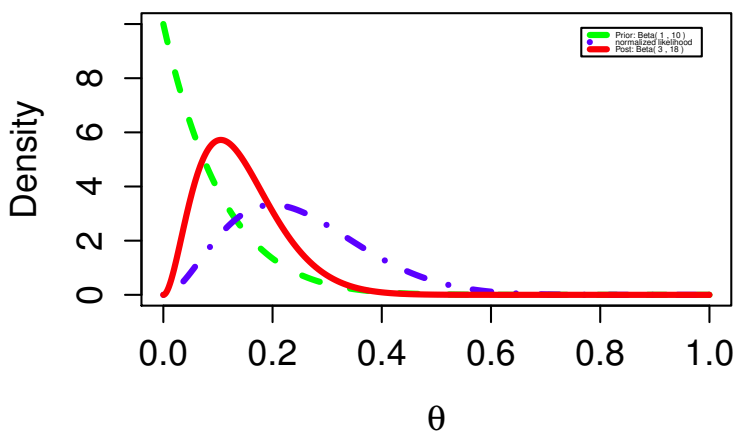
- George har gått igenom 4601 e-mail (elbrev). 1813 av dessa var spam.
- **Modell**: Låt $x_i = 1$ om det i:te elbrevet var spam. Antag $x_i|\theta \overset{iid}{\sim} Bernoulli(\theta)$
- **Prior**: $\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.
- **Posterior**

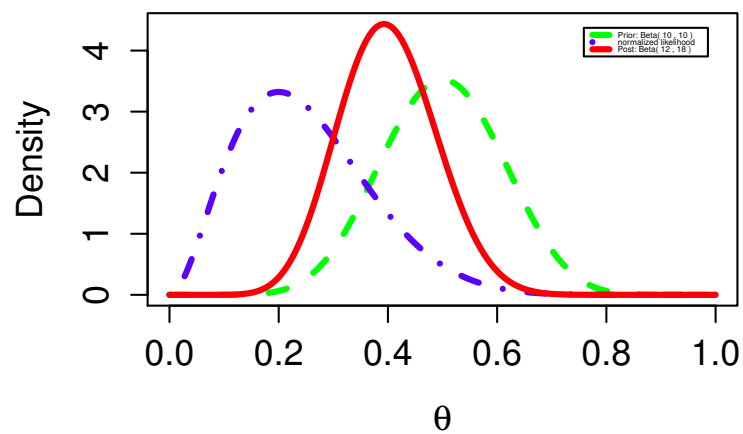
$$\theta|\mathbf{x} \sim Beta(\alpha + 1813, \beta + 2788)$$

Spam data (n=10): fyra olika priors

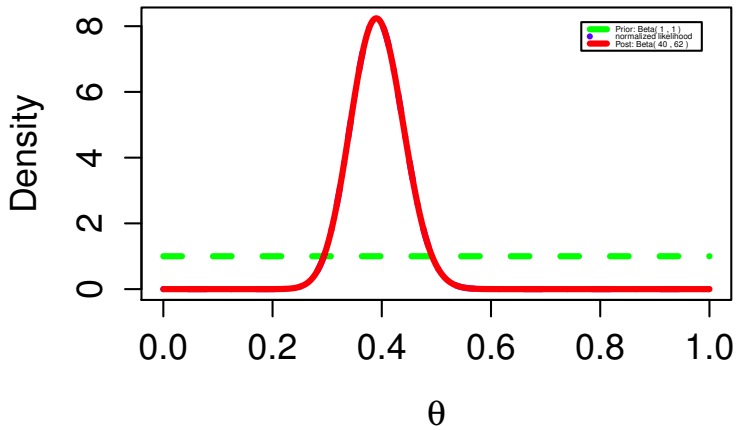


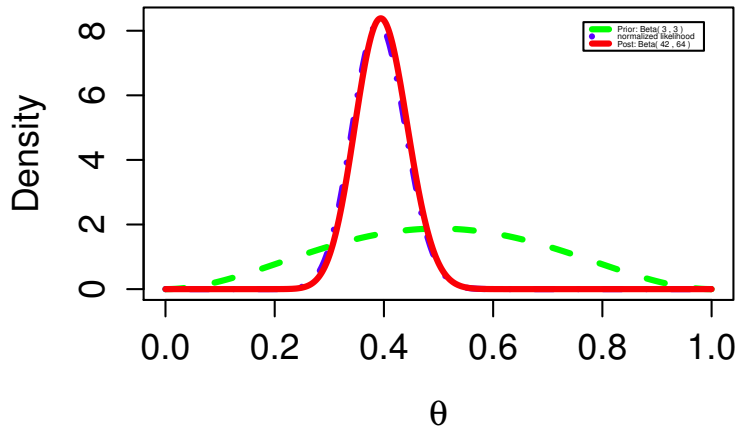


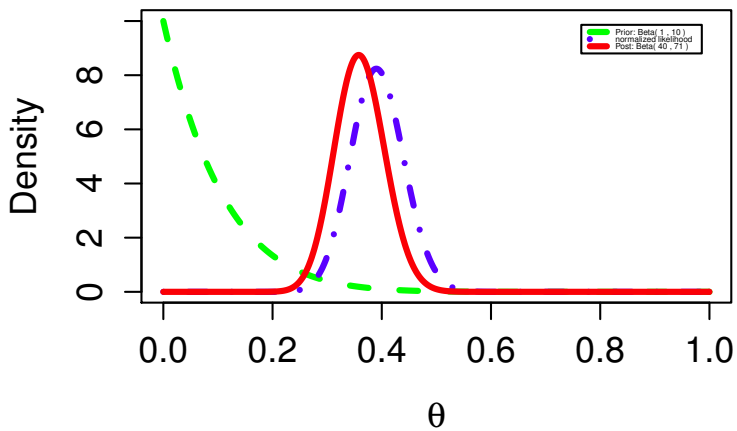


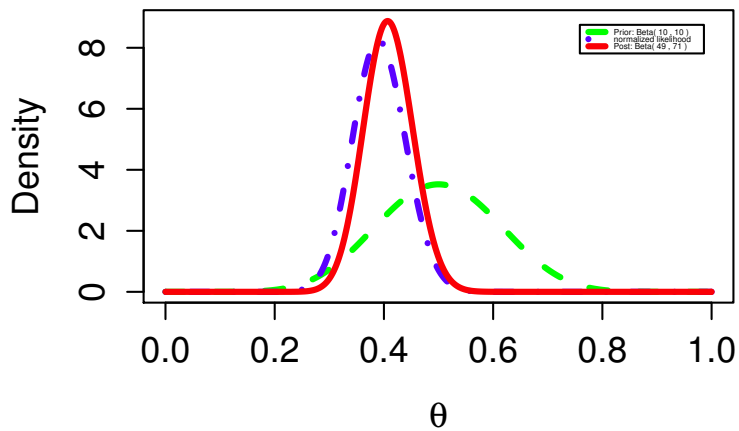


SPAM DATA (N=100): FYRA OLIKA PRIORS

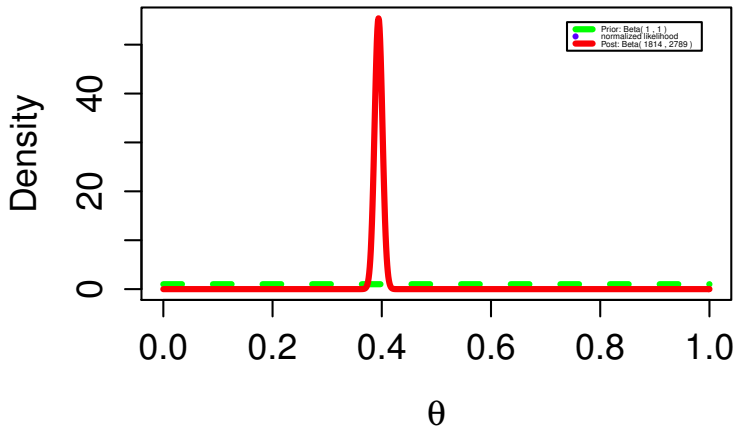


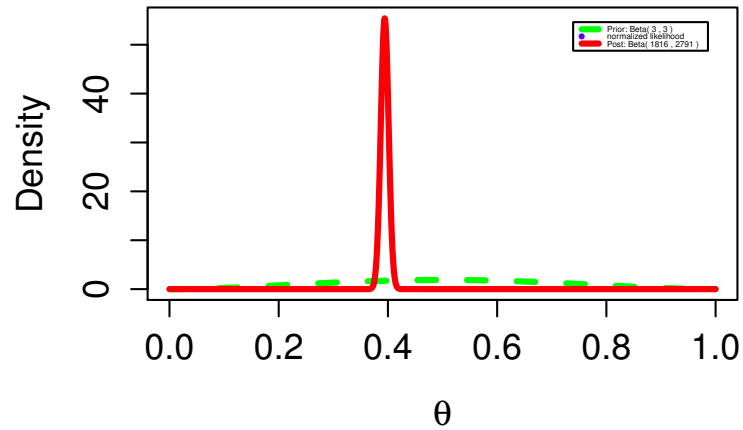


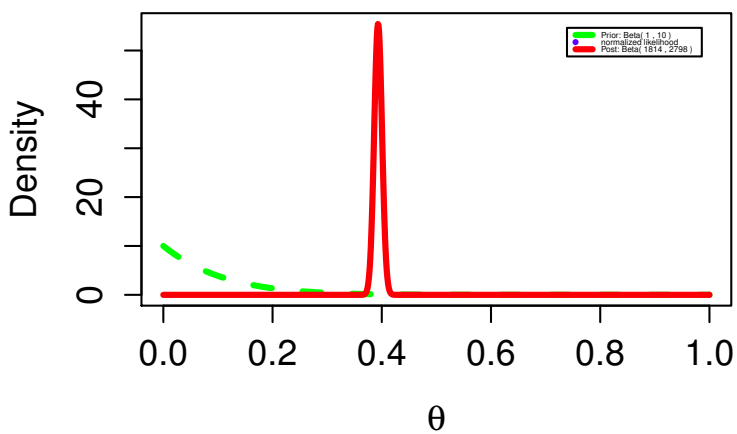


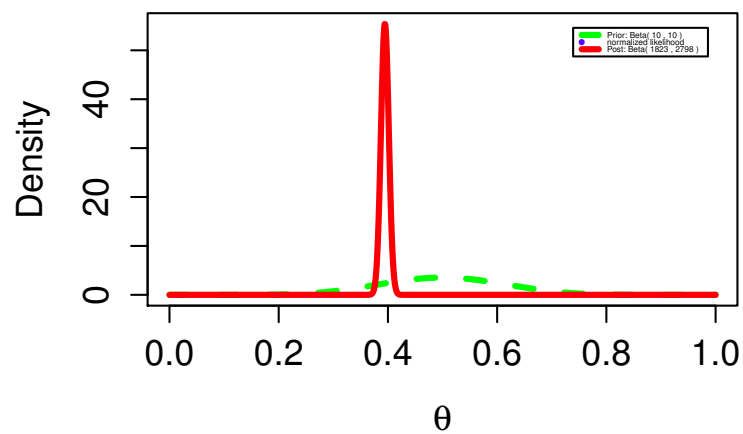


SPAM DATA (N=4601): FYRA OLIKA PRIORS









Normal data, känd varians - normal prior

- **Modell**: $X_1, ..., X_n \overset{iid}{\sim} N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 känd.
- **Prior**

$$\theta \sim N(\mu, \tau^2)$$

- **Posterior**

$$\begin{aligned} p(\theta|x_1, ..., x_n) &\propto p(x_1, ..., x_n|\theta, \sigma^2)p(\theta) \\ &\propto N(\theta|\mu_x, \tau_x^2), \end{aligned}$$

där

$$\frac{1}{\tau_x^2} = \frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2},$$

$$\mu_x = w\bar{x} + (1 - w)\mu,$$

och

$$w = \frac{\frac{n}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}.$$

- Se Baron s. 344 för en härledning.

Normal data, känd varians - normal prior

$$\theta \sim N(\mu, \tau^2) \overset{x_1,\ldots,x_n}{\Longrightarrow} \theta|\mathbf{x} \sim N(\mu_x, \tau_x^2).$$

$$\text{Posterior precision} = \text{Data precision} + \text{Prior precision}$$

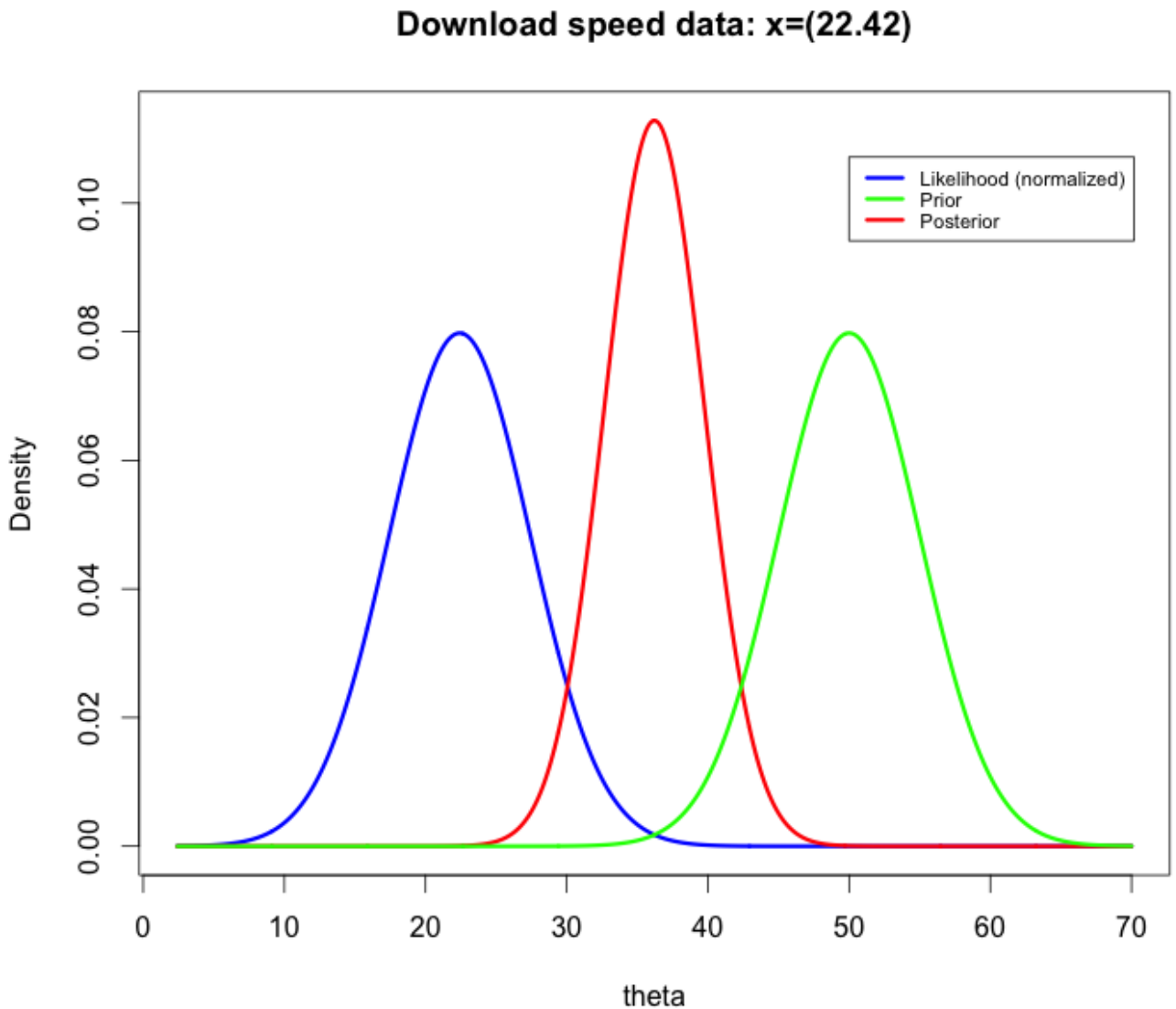
$$\text{Posterior väntevärde} =$$

$$\frac{\text{Data precision}}{\text{Posterior precision}}(\text{Data medelvärde}) + \frac{\text{Prior precision}}{\text{Posterior precision}}(\text{Prior väntevärde})$$

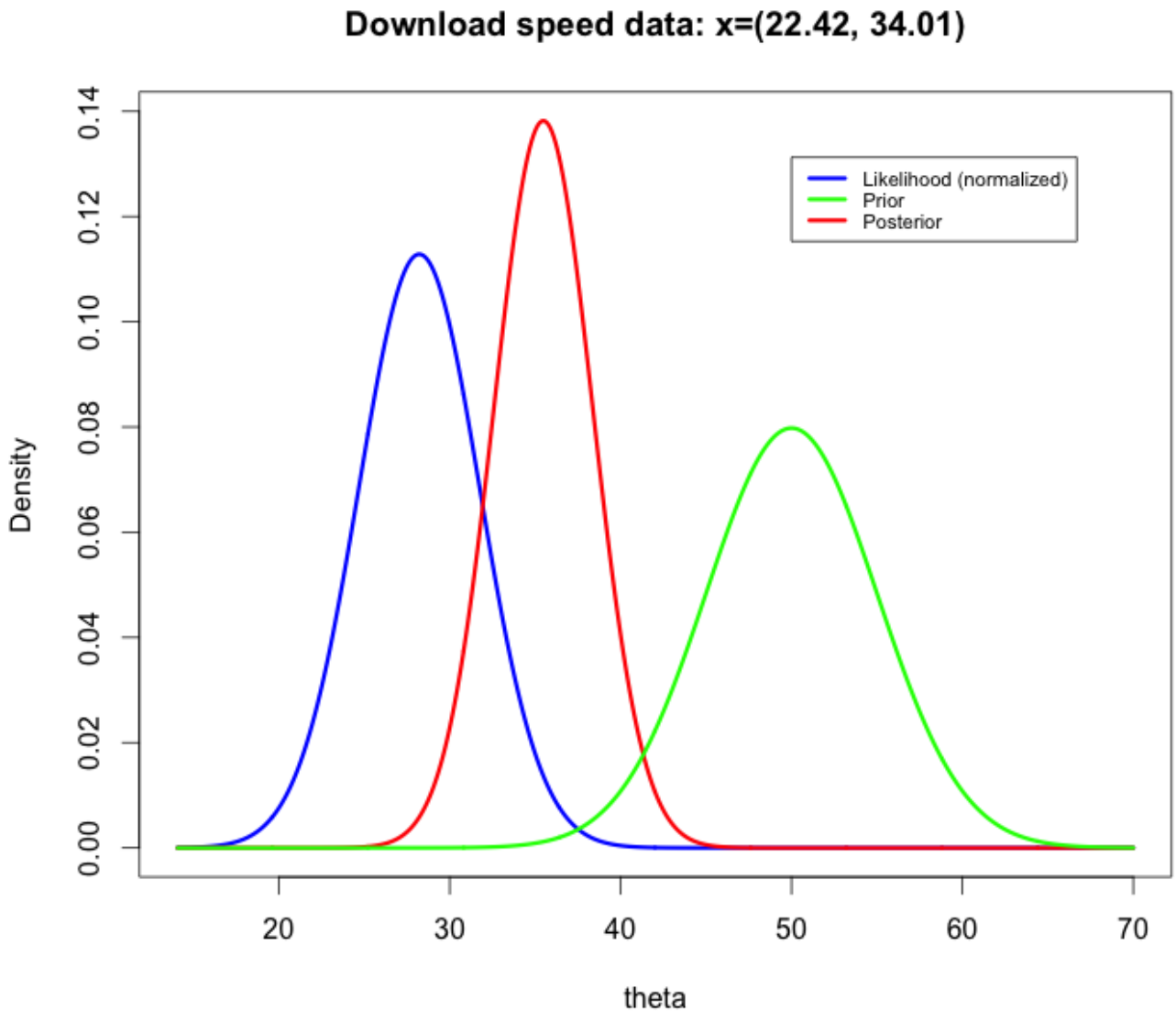
Nedladdningshastigheter

- Data: $\mathrm{x} = (22.42, 34.01, 35.04, 38.74, 25.15)$.
- Modell: $X_1, ..., X_5 \sim N(\theta, \sigma^2)$.
- Antag $\sigma = 5$ (mätningar kan variera $\pm$10MBit med 95% sannolikhet)
- Min prior: $\theta \sim N(50, 5^2)$.

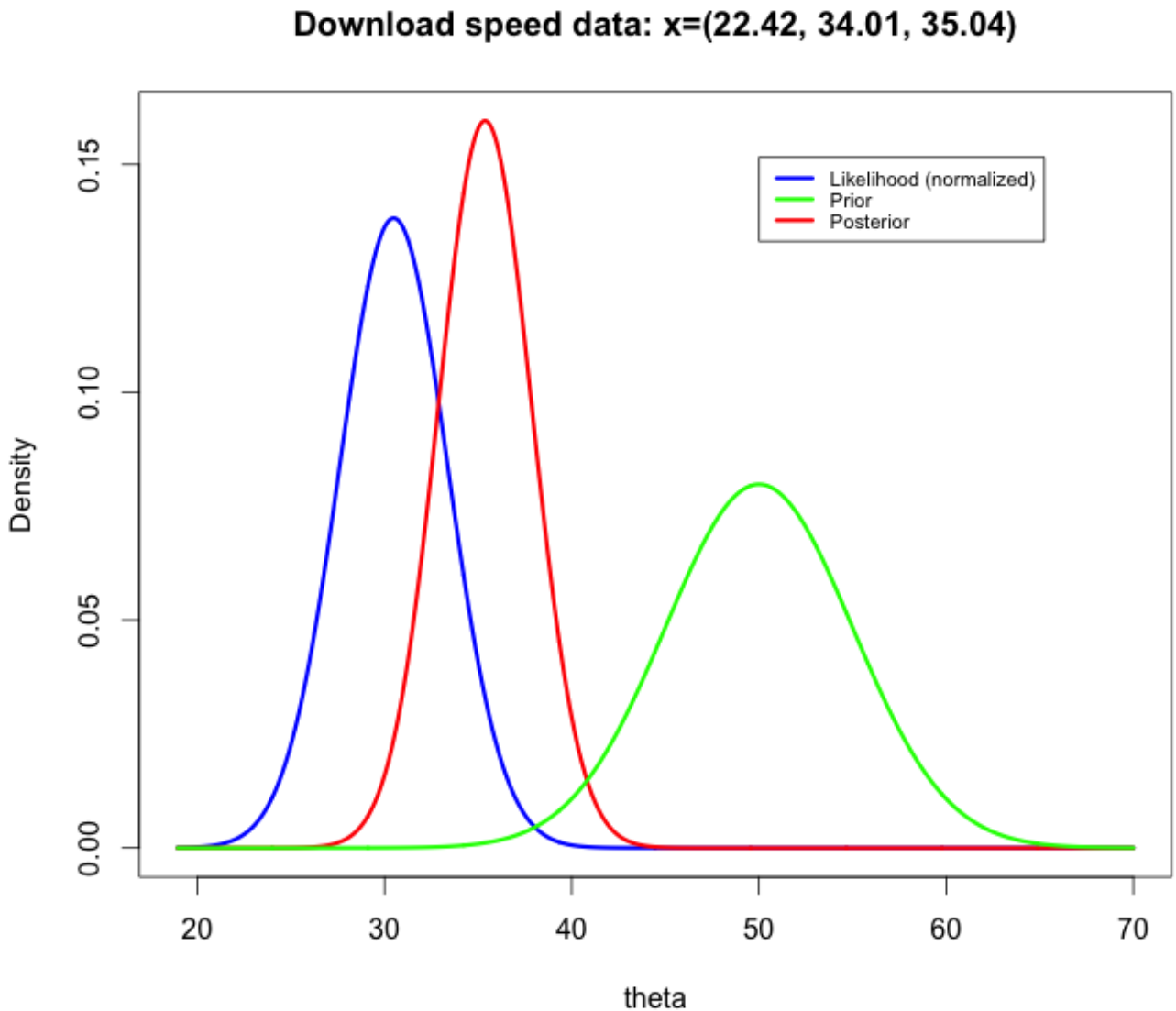
NEDLADDNINGSHASTIGHETER N=1



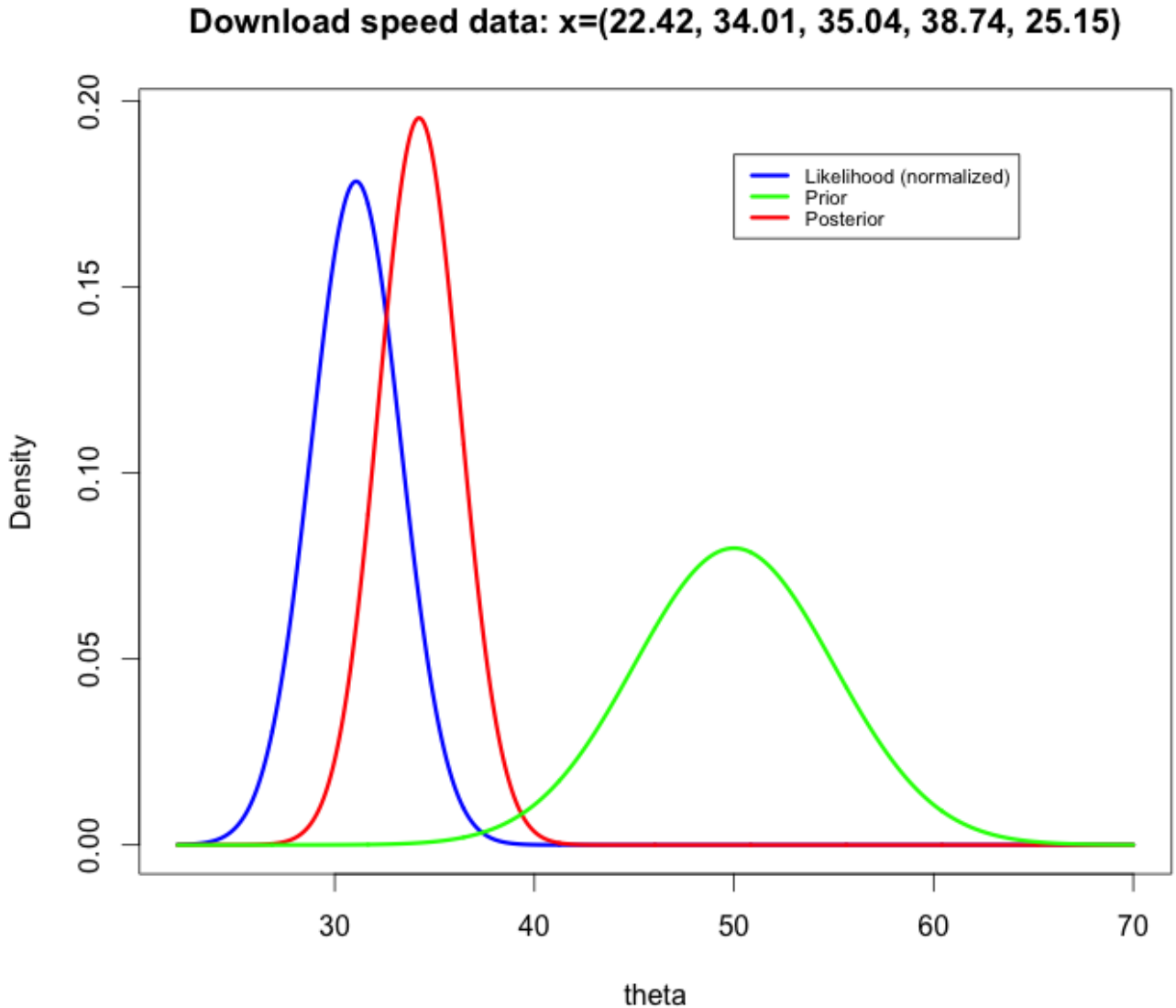
NEDLADDNINGSHASTIGHETER N=2



NEDLADDNINGSHASTIGHETER N=3



NEDLADDNINGSHASTIGHETER N=5



Multinomial modell med Dirichlet prior

- *Data*: $y = (y_1, ...y_K)$. $y_k =$ antalet obs i den k:te klassen.
- Exempel: $K = 8$, y_k antal som röstar på parti k i en valundersökning med $n = \sum_{k=1}^{K} y_k$ tillfrågade personer.
- **Multinomial modell**:

$$p(y|\theta) \propto \prod_{k=1}^{K} \theta_k^{y_k}, \text{ where } \sum_{k=1}^{K} \theta_j = 1.$$

- ***Konjugerad prior***: $\text{Dirichlet}(\alpha_1, ..., \alpha_K)$

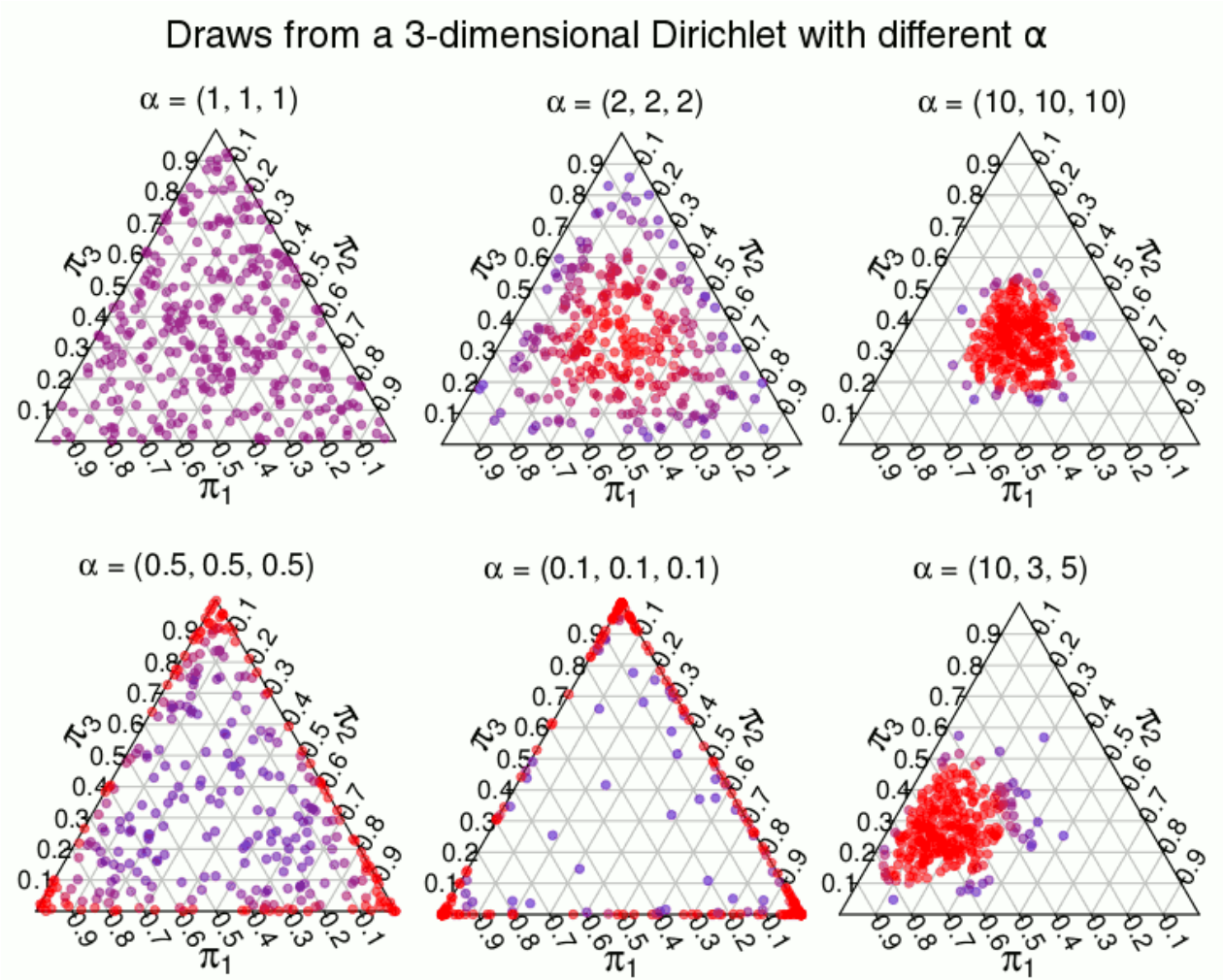
$$p(\theta) \propto \prod_{k=1}^{K} \theta_j^{\alpha_j - 1}.$$

- **Väntevärde** och **varians** för $\theta = (\theta_1, ..., \theta_K)' \sim Dirichlet(\alpha_1, ..., \alpha_K)$

$$\mathbb{E}(\theta_k) = \frac{\alpha_k}{\sum_{j=1}^{K} \alpha_j}$$

- Variansen minskar för större α-värden. **Icke-informativ** prior har små värden, t ex $\alpha_k = 1$ för alla k.

DIRICHLETFÖRDELNINGEN



Multinomial model with Dirichlet prior

- ***Uppdatering från prior till posterior**:*

$$\begin{aligned}
\textit{Modell}: \quad & y = (y_1, ...y_K) \sim \text{Multin}(n; \theta_1, ..., \theta_K) \\
\textit{Prior}: \quad & \theta = (\theta_1, ..., \theta_K) \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, ..., \alpha_K) \\
\textit{Posterior}: \quad & \theta | y \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1 + y_1, ..., \alpha_K + y_K).
\end{aligned}$$

- **Simulering** från en Dirichlet-fördelning:
  - Slumpa $x_1 \sim \textit{Gamma}(\alpha_1, 1), ..., x_K \sim \textit{Gamma}(\alpha_K, 1)$.
  - Beräkna $y_k = x_k / (\sum_{j=1}^{K} x_j)$.
  - $y = (y_1, ..., y_K)$ är nu en slumpvektor från $\text{Dirichlet}(\alpha_1, ..., \alpha_K)$-fördelningen.

Exempel: marknadsandelar

- En undersökning bland 513 smartphone-ägare gav:
  - 180 föredrar en iPhone
  - 230 föredrar en Androidtelefon
  - 62 föredrar en Blackberrytelefon
  - 41 föredrar något annat märke
- Tidigare undersökning: iPhone 30%, Android 30%, Blackberry 20% och Annat 20%.
- P(Android har störst marknadsandel | Data)
- Prior: $\alpha_1 = 15, \alpha_2 = 15, \alpha_3 = 10$ och $\alpha_4 = 10$ (prior info motsvarar en undersökning med 50 svarande)
- Posterior: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)|\mathbf{y} \sim \text{Dirichlet}(195, 245, 72, 51)$

R KOD FÖR MARKNADSANDELAR

```r
# Setting up data and prior
y <- c(180,230,62,41) # The cell phone survey data (K=4)
alpha <- c(15,15,10,10) # Dirichlet prior hyperparameters
nIter <- 1000 # Number of posterior draws

# Defining a function that simulates from a Dirichlet distribution
SimDirichlet <- function(nIter, param){
  nCat <- length(param)
  thetaDraws <- as.data.frame(matrix(NA, nIter, nCat)) # Storage.
  for (j in 1:nCat){
    thetaDraws[,j] <- rgamma(nIter,param[j],1)
  }
  for (i in 1:nIter){
    thetaDraws[i,] = thetaDraws[i,]/sum(thetaDraws[i,])
  }
  return(thetaDraws)
}

# Posterior sampling from Dirichlet posterior
thetaDraws <- SimDirichlet(nIter,y + alpha)
```

R KOD FÖR MARKNADSANDELAR

```
# Posterior mean and standard deviation of Androids share (in %)
message(mean(100*thetaDraws[,2]))


## 43.4434717783303

message(sd(100*thetaDraws[,2]))

## 2.11107456586701

# Computing the posterior probability that Android is the largest
PrAndroidLargest <- sum(thetaDraws[,2] > max(thetaDraws[,c(1,3,4)]))/nIter
message(paste('Pr(Android has the largest market share) = ', PrAndroidLargest))

## Pr(Android has the largest market share) =  0.838
```

R CODE FOR MARKET SHARE EXAMPLE, CONT