TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña
IDA, Linköping University, Sweden

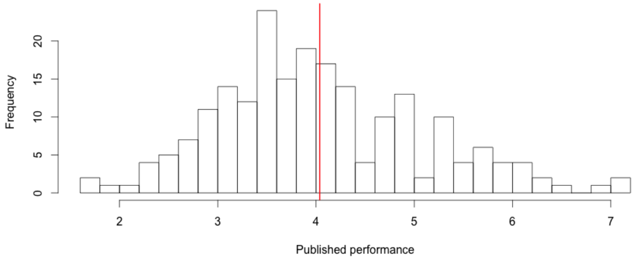
Föreläsning 2

Översikt

- **Deskriptiv statistik**
- **Slumpvariabler**
- **Sannolikhetsfördelning**
- **Väntevärde** och **varians**
- **Kovarians** och **korrelation**
- **Chebyshevs olikhet**

Deskriptiv statistik

- **Mätningar**: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Exempel: Prestanda för $n = 209$ datorer.
- **Medelvärde**: $\bar{x} = 4.037$.
- **Histogram**.



- 10 mätningar > 6, dvs ca 2.8% (10/209) av mätningarna hade hög prestanda (> 6).

Slumpvariabler

Definition. En **slumpvariabel** X är en funktion från utfallsrummet Ω till $\mathbb{R}$

$$X = f(\omega)$$

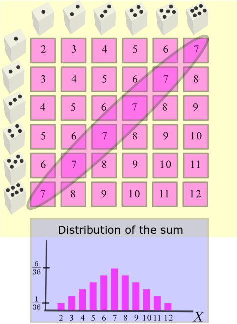
där $\omega \in \Omega$ är ett utfall.

- Obs. Xs värden är disjunkta och uttämmande, dvs utfall.
- Slumpvariabler är **praktiska**: Vi bryr oss ofta bara om enklare variabler (X) vars utfall är en funktion av den underliggande slumpen ω.
- Två typer av slumpvariabler:
  - **Kontinuerlig**: X antar värden i $\mathbb{R}$ (eller $(0,1)$). Längdhopp.
  - **Diskret:** X antar ett ändligt (t ex $\{0,1,2,\ldots,n\}$) eller uppräkneligt ($\{0,1,2,\ldots\}$) antal värden. Höjdhopp.
- Ett annat ord för slumpvariabel (eng. random variable) är **stokastisk variabel** (eng. stochastic variable).
- Funktionen $f()$ måste vara **mätbar.** Teknikalitet. Hänger ihop med **sigma-algebra** (se sid 14-15 i Baron). **Måtteori**.

Slumpvariabler: Några exempel

Ex Kasta två tärningar.

- $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$.
- X = antalet prickar på två kast.



Ex Singla två mynt.

- $\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$.
- X = antalet H (krona). X kan anta värdena $0,1,2$.
  - $\boldsymbol{P}(X=0) = 1/4$
  - $\boldsymbol{P}(X=1) = 1/2$
  - $\boldsymbol{P}(X=2) = 1/4$.

Ex Flyga quadcopter.

- Ω = abstrakt utfallsrum med alla möjliga utfall på faktorer som bestämmer quadcopterns resväg.
- X = tre-dimensionella koordinater (x,y,z) över quadcopterns position vid tidpunkt t.

Sannolikhetsfördelning

Definition. **(Sannolikhets)fördelningen** för en slumpvariabel X är sannolikheterna för alla dess utfall, dvs

$$P(x) = \boldsymbol{P}\{X = x\}$$

för alla möjliga utfall x.

- Stora och små bokstäver spelar roll:
  - X är **slumpvariabeln**. Ex. summan av två tärningarna
  - x är ett **givet utfall**. Ex. 7 prickar.
- Fet stil eller ej spelar roll:
  - $\boldsymbol{P}$ är sannolikheten för ett givet utfall. $\boldsymbol{P}\{X = x\}$ betyder egentligen "Sannolikheten för alla de utfall $((1,6),(2,5),$ etc) som ger summan 7".
  - $P(x)$ är en enkel reellvärd funktion, precis som i vanlig analys.
- För diskreta slumpvariabler kallas $P(x)$ ofta för **pmf** (probability mass function).
- Slumpvariabelns **support**: $\{x : P(x) > 0\}$.

Fördelningsfunktion

Definition. **Fördelningsfunktionen** för en slumpvariabel X defineras som

$$F(x) = \boldsymbol{P}\{X \leq x\} = \sum_{y \leq x} P(y).$$

- En sannolikhetsfördelning summerar till 1:

$$\sum_{\text{alla } x} P(x) = \sum_{\text{alla } x} \boldsymbol{P}\{X = x\} = 1.$$

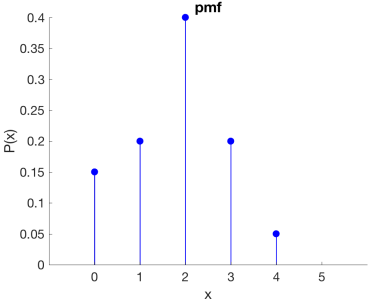
- Fördelningsfunktionen är icke-avtagande mellan 0 och 1:

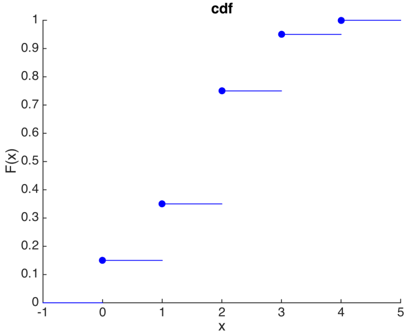
$$\lim_{x \downarrow -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \uparrow +\infty} F(x) = 1.$$

- Fördelningsfunktionen kallas också för den **kumulativa täthetsfunktionen** (cumulative density function), eller **cdf**.

Sannolikhets- och fördelningsfunktion

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.15	0.20	0.40	0.20	0.05
$F(x)$	0.15	0.35	0.75	0.95	1.00





- Obs. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Simultanfördelning

- Låt X och Y vara slumpvariabler.
- (X, Y) är en **slumpvektor** med typiskt utfall (x, y).
- Fördelningen för (X, Y) kallas **simultanfördelning**.

$$P(x, y) = \boldsymbol{P}\{(X, Y) = (x, y)\} = \boldsymbol{P}\{X = x \cap Y = y\}.$$

- Simultanfördelningen är en sannolikhetsfördelning:

$$\sum_x \sum_y P(x, y) = 1.$$

Ex X = Spam/Ham och Y = Inbox/Spambox.

	Spam	Ham
Inbox	0.02	0.88
Spambox	0.09	0.01

- Simultanfördelningen: "Vad är sannolikheten att få ett ham-mejl **och** att det hamnar i spamboxen ?"

Simultanfördelning

Ex X = avkastning aktie X och Y = avkastning aktie Y.

		Aktie Y		
		Låg	Medel	Hög
	Låg	0.05	0.05	0.15
Aktie X	Medel	0.10	0.30	0.20
	Hög	0.05	0.05	0.05

- Aktieportfölj: 50% i aktie X och 50% i aktie Y.
- Simultanfördelningen: “Vad är sannolikheten att min aktieportfölj får medelavkastning ?”

Marginalfördelning

- Fördelningen för bara X kallas **marginalfördelningen** (för X).
- Fördelningen för bara Y kallas marginalfördelningen (för Y).
- Marginalfördelningen: "Vad är sannolikheten att få ett spam-mejl (oavsett var det hamnar) ?"
- Marginalfördelningen fås genom att summera ut den andra variabeln:

$$P_X(x) = \sum_y P(x, y)$$

$$P_Y(y) = \sum_x P(x, y)$$

- Jämför med lagen om total sannolikhet (Fö1).

Ex X =Spam/Ham och Y =Inbox/Spambox.

	Spam	Ham	
Inbox	0.02	0.88	0.9
Spambox	0.09	0.01	0.1
	0.11	0.89	

Marginalfördelning

Ex X = avkastning aktie X och Y = avkastning aktie Y.

		Aktie Y			
		Låg	Medel	Hög	
	Låg	0.05	0.05	0.15	0.25
Aktie X	Medel	0.10	0.30	0.20	0.6
	Hög	0.05	0.05	0.05	0.15
		0.20	0.40	0.40	

- Vilka portföljandelar är optimala ? Beslut under osäkerhet.

Oberoende

Definition. Slumpvariablerna X och Y är **oberoende** om

$$P(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

för **alla** värden på x och y.

Ex X = Spam/Ham och Y = Inbox/Spambox.

	Spam	Ham	
Inbox	0.02	0.88	0.9
Spambox	0.09	0.01	0.1
	0.11	0.89	

- Valet av box är inte oberoende av om mejlet är ham eller spam:

$$P(\text{inbox}) \cdot P(\text{ham}) = 0.9 \cdot 0.89 = 0.801 \neq 0.88 = P(\text{inbox}, \text{ham})$$

- $P(\text{inbox}|\text{ham}) = \frac{P(\text{inbox},\text{ham})}{P(ham)} = \frac{0.88}{0.89} = 0.988 > 0.9 = P(\text{inbox})$.
- Lättare att gissa box om man vet att mejlet är ham.

Lägesmått

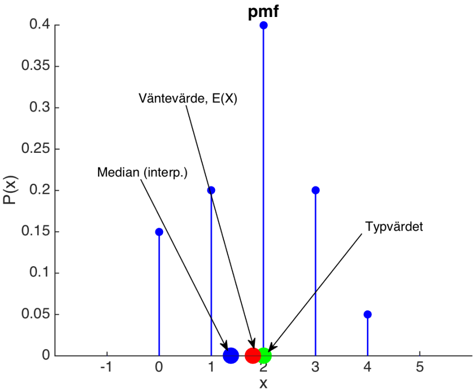
- En sannolikhetsfördelning $P(x)$ beskriver **all** osäkerhet om X.
- Kan vara komplicerat att förmedla hela $P(x)$, speciellt om X är en fler-dimensionell slumpvektor.
- Naturliga **lägesmått**:
  - **Median**, m. $P(X \leq m) = 0.5$. Hälften av sannolikhetsmassan ligger till vänster om m.
  - **Väntevärdet** (eng. expected value), μ eller $\mathbb{E}(X)$, är det genomsnittliga värdet för X:
    $$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_x x \cdot P(x).$$
  - **Typvärdet** (eng. mode) är det mest sannolika värdet, dvs $\arg\max_x P(x)$.

Lägesmått: Exempel

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.15	0.20	0.40	0.20	0.05

- Väntevärdet

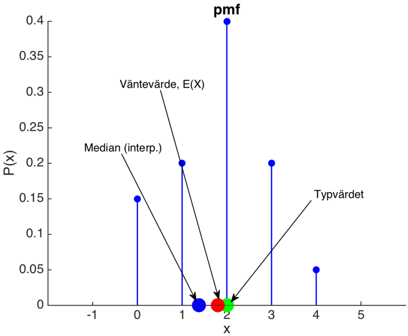
$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.20 + 2 \cdot 0.40 + 3 \cdot 0.20 + 4 \cdot 0.05 = 1.8$$

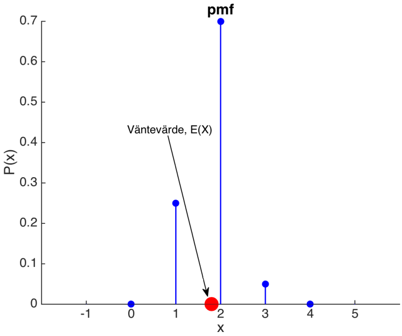


- Alternativ definition av median m: $p(X \leq m) \geq 1/2$ och $p(X \geq m) \geq 1/2$. Då, $m = 2$.

Lägesmått säger inget om spridningen

- Väntevärdet är ett lägesmått. Ingen info om fördelningens spridning.





Varians

- Storleken på avvikelserna $x - \mathbb{E}(X)$ säger något om spridningen.
- Idé till spridningsmått: Den förväntade avvikelsen

$$\mathbb{E}\left(X - \mu\right) = \sum_x P(x) \cdot \left(X - \mu\right)$$

- Problem: $\mathbb{E}\left(X - \mu\right)$ är alltid exakt noll, eftersom positiva och negativa avvikelser tar ut varandra.
- **Varians**: Förväntade kvadrerade avvikelsen

$$\sigma^2 = Var(X) = \mathbb{E}\left(X - \mu\right)^2 = \sum_x \left(x - \mu\right)^2 \cdot P(x).$$

- Alternativ formel

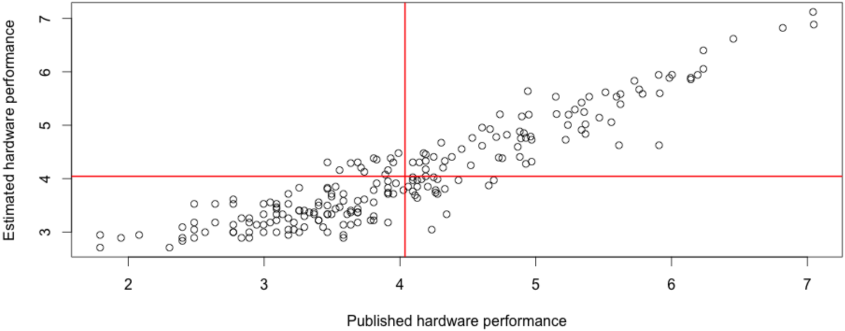
$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2.$$

- **Standardavvikelse**: $\sigma = Std(X) = \sqrt{Var(X)}$. Samma skala som X.

Egenskaper hos väntevärde och varians

- $\mathbb{E}(c) = c$, där c är en konstant.
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ med a, b konstanter.
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c$ med a, b, c konstanter.
- $Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$
- Om X och Y oberoende: $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
- Om X och Y oberoende: $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Deskriptiv statistik: Beroende



Kovarians och korrelation

- Mått på **samvariation**. Sammanfattning av simultanfördelning.
- **Kovarians** mellan X och Y:

$$\sigma_{XY} = Cov(X, Y) = \mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\}$$

- Positiv kovarians:
  - X tenderar att vara större än $\mathbb{E}(X)$ samtidigt som Y tenderar att vara större än $\mathbb{E}(Y)$.
  - X tenderar att vara mindre än $\mathbb{E}(X)$ samtidigt som Y tenderar att vara mindre än $\mathbb{E}(Y)$.
- Negativ kovarians: X tenderar att vara större än $\mathbb{E}(X)$ samtidigt som Y tenderar att vara mindre än $\mathbb{E}(Y)$, och tvärtom.
- **Korrelationskoefficienten** mellan X och Y

$$\rho = Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{Std(X) \cdot Std(Y)}.$$

- Obs. $-1 \leq \rho \leq 1$.
- Om $|\rho| = 1$, då Y är en linjär funktion av X.

Egenskaper hos kovarians

- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Var(aX + bY + c) = a^2 \cdot Var(X) + b^2 \cdot Var(Y) + 2a \cdot b \cdot Cov(X, Y)$ med a, b, c konstanter.
- $Cov(a \cdot X + b, c \cdot Y + d) = a \cdot c \cdot Cov(X, Y)$
- Om X och Y oberoende, då $Cov(X, Y) = 0$ and $\rho(X, Y) = 0$.
- Men $Cov(X, Y) = 0$ eller $\rho(X, Y) = 0$ innebär **inte** att X och Y är oberoende.

Chebyshevs olikhet

- Väntevärdet μ och variansen σ^2 innehåller information om sannolikhetsfördelningen.
- Chebyshevs olikhet: Givet μ och σ^2 så kommer X ligga i intervallet $[\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$ med en sannolikhet som är åtminstone $1 - (\sigma/\varepsilon)^2$.
- **Chebyshevs olikhet**
$$P\{|X - \mu| > \varepsilon\} \leq \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$
- Notera att Chebyshevs olikhet endast kräver vetskap om μ och σ^2. Inget andra egenskaper behövs (symmetri, skevhet).
- Men den lilla information har sitt pris: $\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$ är ofta bra mycket större än den sanna sannolikheten $P\{|X - \mu| > \varepsilon\}$.
- Chebyshevs olikhet är ofta nyttig i teoretiska sammanhang.

Översikt

- **Deskriptiv statistik**
- **Slumpvariabler**
- **Sannolikhetsfördelning**
- **Väntevärde** och **varians**
- **Kovarians** och **korrelation**
- **Chebyshevs olikhet**