TDAB01 SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK

TENTAMEN 2019-10-23

Examinator

Jose M. Peña. Besöker salen. Nås på telefon också.

Betyg

För full poäng i varje delfråga krävs tydliga och välmotiverade svar.
Maximalt antal poäng: 20 poäng
Betyg 5 = 17-20 poäng
Betyg 4 = 13-16 poäng
Betyg 3 = 9-12 poäng

Tillåtna Hjälpmedel

Miniräknare med tomt minne. Tabell- och formelsamling (ingår i tentamen).

UPPGIFTER

(1) Ett företag som tillverkar elektroniska komponenter har tillverkningen förlagd till tre olika fabriker där A står för 50% av tillverkningen, B för 30% och C för 20%. Man vet att en komponent från fabrik A blir defekt med sannolikhet 0.05. Motsvarande siffra för B är 0.1 och för C är den 0.08.

(a) Alla tillverkade komponenter samlas i ett centralt lager. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald komponent i lagret är defekt?

Lösning:$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) = 0.05 * 0.5 + 0.1 * 0.3 + 0.08 * 0.2 = 0.071$

(b) En slumpmässigt vald komponent i lagret visar sig vara defekt. Vad är sannolikheten att komponenten har tillverkats i fabrik B?

Lösning:$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{0.1*0.3}{0.071} = 0.422$.

(2) På en tenta förekommer tryckfel ganska slumpmässigt, och man kan anta att antalet tryckfel per tenta är en stokastisk variabel X med en Poissonfördelning med väntevärdet 0.5.

(a) Beräkna $P(X > 1)$.

Lösning:$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.9098 = 0.09$

(b) I en tentasamling med 445 tentor, låt Y vara antalet tentor med fler än ett tryckfel. Antalet tryckfel på olika tentor antas vara oberoende stokastiska variabler. Ange den exakta fördelningen för Y .

Lösning: Om Y är antalet tentor med fler än 1 tryckfel bland 445 oberoende tentor, så är $Y \sim Bin(n = 445, 0.09)$.

(c) Beräkna sannolikheten att det finns fler än 6 tentor i samlingen med mer än 1 tryckfel. Lämpliga approximationer får göras.

Lösning: $Y \sim N(\mu = 445 * 0.09, \sigma^2 = 445 * 0.09 * 0.9098)$. Detta ger att $P(Y > 6) = 1 - P(Y \leq 6) = 1 - \Phi(-5.64) = 1$

(3) Hushållens inkomst i ett viss land följer en normalfördelning med väntevärde 20 (tusen kr) och varians 16 (tusen kr) . (Bortse ifrån att inkomsterna kan vara negativa).

(a) Om ett hushåll tjänar mindre än 14 (tusen kr) så får hushållet en fruktpåse varje dag. Hur stor andel av populationen kommer att få en fruktpåse?

Lösning: 0.0668

(b) Hushåll som tjänar mindre än 5% av populationen får fria luncher på helgerna. Vad tjänar hushåll som får fria luncher?

Lösning: ≤ 13420 kr.

(4) Livslängden för en viss elektronisk komponent följer en exponentialfördelning med parametern λ. Anta att vi beräknat medellivslängden för 500 oberoende komponenter och fått att det är 2 år.

(a) Härled maximumlikelihood skattningen för väntevärdet.

Lösning: Likelihoodfunktionen är

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

och log-likelihooden är därför

$$\log L(\lambda) = n \log \lambda - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

. Vilket ger lösningen $\frac{1}{\lambda} = \bar{x}$.

(b) Konstruera ett 95% tvåsidigt konfidensintervall för väntevärdet och tolka intervallet.

Lösning: Eftersom vi har 500 oberoende observationer är stickprovsmedelvärdet approximativt normalfördelat. Ett dubbelsidigt konfidenintervall ges av $2 \pm 1.96 * 2 * \frac{1}{\sqrt{500}}$

(c) Finns det stöd att väntevärdet är större än 1.5?

Lösning: Ja, $Z = 5.59$. Gör ett hypotestest!.

(5) Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende observationer från en Exponentialfördelning med parameter λ.

(a) Antag att din apriorifördelning för λ är en $Gamma(2, 1)$ fördelning. Härled aposteriorifördelningen för λ.

Lösning: $Gamma(2 + n, 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i)$ fördelning.

(b) Antag att man har observerat 5 oberoende observationer $x_1, \ldots, x_5$ från modellen ovan och beräknat medelvärdet $\bar{x} = 0.2$. Bestäm aposteriori väntevärdet och aposteriori variansen. Skatta λ med aposteriori väntevärdet. Vad blir skattningen?

Lösning:$\lambda = 3.5$.

(c) Finns det stöd att λ är större än 1.5?

Lösning: Gör ett Bayesiankt hypotestest med hjälp av den aposteriori fördelningen.

Lycka till!