

# TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña  
IDA, Linköpings Universitet

Föreläsning 6

# Översikt

- ▶ **Stokastiska processer**
- ▶ **Markovkedjor**
- ▶ **Binomialprocess**
- ▶ **Poissonprocess**

# Stokastiska processer

- ▶ **Stokastisk process:** En **sekvens** av slumpvariabler  $X_1, X_2, \dots, X_T$  **observerade över tid**.
  - ▶ Example:  $X_t$  = antalet påträffade buggar under dag  $t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ .
  - ▶ Example:  $X_t$  = slutkursen på Ericsson aktie vid dag  $t$ .
  - ▶ Example:  $X_t$  = temperaturen vid en viss plats vid tidpunkt  $t$ .
- ▶ **Stokastisk process:** En slumpvariabel  $X(t, \omega)$  som också beror av tiden, där
  - ▶  $t \in \mathcal{T}$  och  $\mathcal{T}$  är en mängd tidpunkter, t ex  $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .
  - ▶  $\omega \in \Omega$  är utfallet i ett experiment (precis som förut).
  - ▶ Värdet på  $X(t, \omega)$  kallas **tillstånd**.
  - ▶ Härefter  $X(t) = X(t, \omega)$  (precis som förut).
- ▶ Uppdelning av processer:
  - ▶ Diskreta eller kontinuerliga **tillstånd**.
  - ▶ Diskret eller kontinuerlig **tid**.
- ▶ Diskret tillstånd, kontinuerlig tid: Väljarsympatier över tid.
- ▶ Diskret tillstånd, diskret tid: Väljarsympatier på valdagen.
- ▶ Kontinuerligt tillstånd, diskret tid: Dagens högsta temperatur.
- ▶ Kontinuerligt tillstånd, kontinuerlig tid: Temperaturen över tid.

- ▶ **Markovprocess:** Prognosen för morgondagen beror endast på idag:

$$P(\text{framtiden}|\text{nu, historiken}) = P(\text{framtiden}|\text{nu})$$

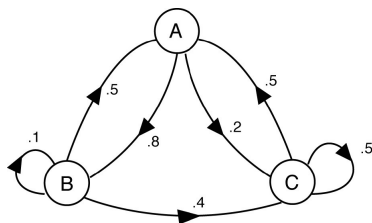
- ▶ **Markovprocess:** För alla tidpunkter  $t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$  och händelser  $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$  gäller att

$$P(X(t_{n+1}) \in A_{n+1} | X(t_1) \in A_1, \dots, X(t_n) \in A_n) = P(X(t_{n+1}) \in A_{n+1} | X(t_n) \in A_n)$$

- ▶ Många processer är inte Markov. Praktiskt **antagande**.

- ▶ **Markovkedja**: Markovprocess med **diskret tid** och **diskreta tillstånd**.
- ▶ **Transitionssannolikheter (en-steps)**

$$p_{ij}(t) = \mathbf{P} \{X(t+1) = j | X(t) = i\}$$



- ▶ **Transitionssannolikheter (h-steps)**

$$p_{ij}^{(h)}(t) = \mathbf{P} \{X(t+h) = j | X(t) = i\}$$

# Markovkedjor

- ▶ **Homogen Markovkedja:** Transitionssannolikheterna är konstanta över tiden, dvs

$$p_{ij}(t) = p_{ij}$$

- ▶ **Transitionsmatris**

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

- ▶ Example:  $\Omega = \{\text{sol, regn}\}$

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

- ▶ Example:  $\Omega = \{\text{RödGröna, Alliansen, SD}\}$

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$$

- ▶ Se `SimulateMarkovChain.R`.

## ► Transitionssannolikheter (h-steps)

$$p_{ij}^{(h)}(t) = \mathbf{P} \{X(t+h) = j | X(t) = i\}$$

- Komplex. Det finns många vägar som tar oss  $i \rightarrow j$  när  $h > 1$ .
- Example:  $\Omega = \{1, 2\}$ . Om  $h = 2$  kan vi göra resan  $1 \rightarrow 2$  på två sätt:
  - $1 \rightarrow 1 \rightarrow 2$
  - $1 \rightarrow 2 \rightarrow 2$
- 2-steps transitionssannolikhet  $1 \rightarrow 2$ :

$$p_{12}^{(2)} = p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22}$$

- 3-steps transitionssannolikhet  $1 \rightarrow 2$ :

$$\begin{aligned} p_{12}^{(3)} &= p_{11}p_{11}p_{12} + p_{11}p_{12}p_{22} + p_{12}p_{21}p_{12} + p_{12}p_{22}p_{22} \\ &= p_{11}(p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22}) + p_{12}(p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22}) \\ &= p_{11}p_{12}^{(2)} + p_{12}p_{22}^{(2)} \end{aligned}$$

- ▶ Transitionsmatris 1-steg

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

- ▶ Transitionsmatris  $h$ -steg

$$P^{(h)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(h)} & p_{12}^{(h)} & \cdots & p_{1n}^{(h)} \\ p_{21}^{(h)} & p_{22}^{(h)} & \cdots & p_{2n}^{(h)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^{(h)} & p_{n2}^{(h)} & \cdots & p_{nn}^{(h)} \end{pmatrix}$$

- ▶ **Resultat:**  $P^{(h)}$  är  $h$ :te matrispotensen av  $P$

$$P^{(h)} = P \cdots P \cdots P = P^h$$

- ▶ Se Example 6.9 i Baron.



## Marginalfördelning

- ▶ **Initialfördelning** vid  $t = 0$  är radvektorn

$$P_0 = (P_0(1), P_0(2), \dots, P_0(n))$$

- ▶ **Sannolikhetsfördelning över tillstånden** efter  $h$  steg

$$P_h = (P_h(1), P_h(2), \dots, P_h(n))$$

- ▶ **Resultat:**

$$P_h = P_0 P^{(h)} = P_0 P^h$$

- ▶ Example:  $P_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$  och

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Då

$$P_3 = (1/3, 1/3, 1/3) \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}^3 = (0.333, 0.407, 0.259)$$

- ▶ Se Example 6.10 i Baron.

# Stationärfördelning

- ▶ Vad är sannolikhetsfördelningen över tillstånden efter många steg ?
- ▶ **Stationärfördelning** är radvektorn

$$\pi = \lim_{h \rightarrow \infty} P_h$$

- ▶ Obs.  $\pi P = \pi$ .
- ▶ En Markovkedja är **reguljär** om det finns en  $h$  så att

$$p_{ij}^{(h)} > 0$$

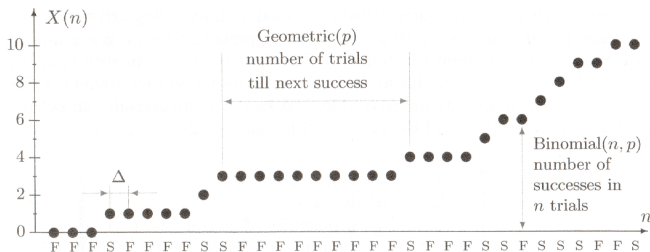
för alla  $i, j$ .

- ▶ **En reguljär Markov kedja har en stationärfördelning.** Man hittar den genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_x \pi_x = 1 \end{cases}$$

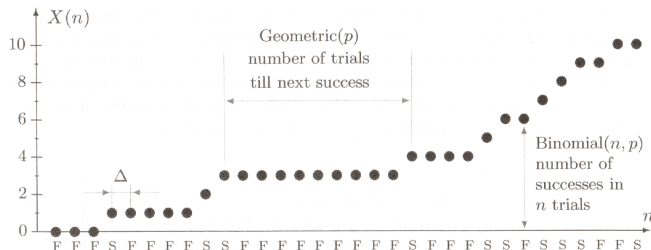
# Binomialprocess

- ▶ **Räkneprocesser:**  $X(t)$  är antalet räknade saker t o m tidpunkt  $t$ .
- ▶ **Binomialprocess:**  $X(n)$  är **antalet lyckade försök i de  $n$  första** i en sekvens av oberoende Bernoulliförsök med sannolikhet  $p$ .
- ▶  $X(n) \sim \text{Binomial}(n, p)$
- ▶  $Y =$  antalet försök mellan två lyckade.
- ▶  $Y \sim \text{Geometrisk}(p)$



- ▶ Se `SimulateBinomialProcess.R`.

# Binomialprocess



- ▶ Ett nytt Bernoulliförsök var  $\Delta$  sekund.  $\Delta =$  **time frame**.
- ▶  $n$  försök tar  $t = n\Delta$  sekunder att utföra. Så,  $n = t/\Delta$ .
- ▶ Processen kan defineras som funktion av (klock)tid, dvs  $X(n) = X(t/\Delta)$ .
- ▶ Förväntat antal lyckade under hela tidsperioden  $t$  är  $\mathbb{E}(X(n)) = np$ .
- ▶ **Förväntat antal lyckade försök under  $t$  sekunder:**

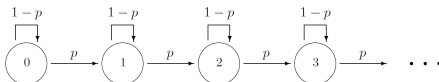
$$\mathbb{E}(X(t/\Delta)) = tp/\Delta,$$

dvs  $\lambda = p/\Delta$  förväntat antal lyckade per sekund, också kallad **ankomstfrekvens**.

## Binomialprocess

- ▶ **Interarrival time**  $T$  är **tiden** mellan lyckade försök.
- ▶  $Y$  = **antalet** försök mellan två lyckade.
- ▶  $Y \sim \text{Geometrisk}(p)$
- ▶  $T = Y\Delta$ . Följer en skalad geometrisk fördelning med support  $\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots$ . Då,  $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(Y\Delta) = \Delta\mathbb{E}(Y) = \Delta/p = 1/\lambda$ .
- ▶ Binomialprocessen innebär en diskret tid, diskreta tillstånd, Markov- och homogenprocess. Så, den kan representeras som Markovkedja med transitionssannolikheter

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{om } j = i + 1 \\ 1 - p & \text{om } j = i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

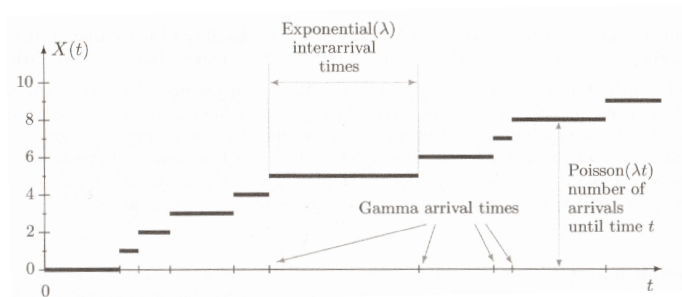


Obs. Markovkedjan är icke-reguljär, dvs ingen stationärfördelning. Obs. flera vägar till 1, 2, ..., vilken innebär binomialfördelningen.

- ▶ Notera att Binomialprocessen kan vara restriktiv om  $\Delta$  väljs för stort, eftersom endast en Bernoullihändelse kan inträffa i varje time frame  $\Delta$ .
- ▶ Se Example 6.18 i Baron.

# Poissonprocess

- ▶ **Poissonprocessen** fås genom att låta  $\Delta \rightarrow 0$  samtidigt som  $\lambda$  hålls konstant, dvs  $n \rightarrow \infty$  och  $p \rightarrow 0$ .
- ▶ **Kom ihåg:**  $X(t) \sim \text{Binomial}(n, p) \rightarrow \text{Poisson}(\lambda)$  när  $n \rightarrow \infty$  och  $p \rightarrow 0$  och  $\lambda = np$  är konstant.



- ▶ Poissonprocessen är en process i **kontinuerlig tid**.
- ▶ Interarrival time  $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Används vid simulering, se [SimulatePoissonProcess.R](#).
- ▶ Interarrival för  $k$  framtida händelser  $T_k \sim \text{Gamma}(k, \lambda)$ .
- ▶ Se Example 6.20 i Baron.

# Översikt

- ▶ **Stokastiska processer**
- ▶ **Markovkedjor**
- ▶ **Binomialprocess**
- ▶ **Poissonprocess**