TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña
IDA, Linköpings Universitet

Föreläsning 3

Översikt

- **Fördelningsfamiljer för diskreta variabler**
- **Bernoulli, binomial, multinomial**
- **Geometrisk, negativ binomial**
- **Poisson**

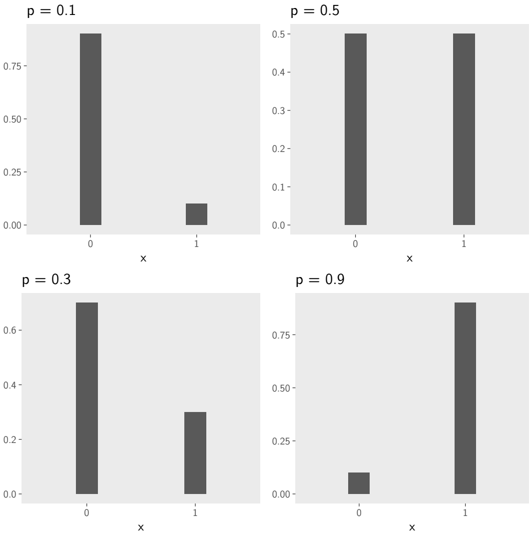
Bernoullifördelningen

- En fördelningsfamilj är en mängd olika sannolikhetsfördelningar som indexeras med en eller flera parametrar.

Definition. En **Bernoullivariabel** X kan anta två olika värden, 0 och 1. Om X är **Bernoullifördelad**, dvs $X \sim Bernoulli(p)$, så gäller att $\boldsymbol{P}(X = 1) = P(1) = p$ och $\boldsymbol{P}(X = 0) = P(0) = q = 1 - p$.

- Genom att ändra parametern p får vi en mängd olika sannolikhetsfördelningar på $\{0, 1\}$. Se `ManipDistributions.R`.

Bernoullifördelningen



Bernoullifördelningen

- Pmf för $X \sim Bernoulli(p)$

$$P(x) = \begin{cases} q = 1 - p & \text{om x=0} \\ p & \text{om x=1} \end{cases}$$

- Om $X \sim Bernoulli(p)$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$
$$Var(X) = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 p = p - p^2 = p \cdot q$$

- Bernoulliförsök: Utfallet av en Benoullivariabel.

Binomialfördelningen

Definition. Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara en sekvens av n **oberoende** Bernoulliförsök med sannolikhet p. Låt X = **antalet lyckade försök i sekvensen**. Då är X **binomialfördelad** med parametrar n och p, dvs $X \sim Binomial(n, p)$ med pmf

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},$$

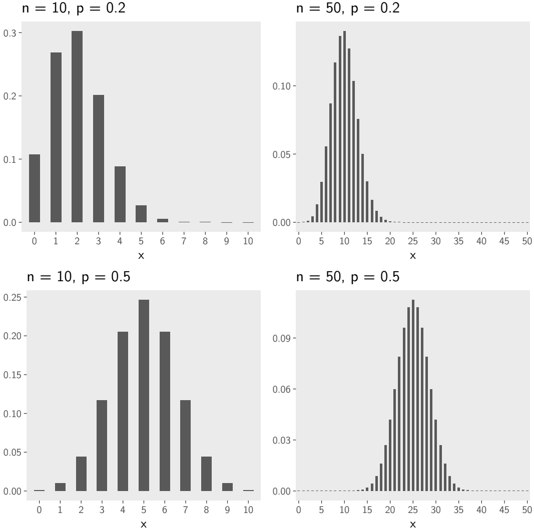
för $x = 0, 1, 2, \ldots, n$.

- $\binom{n}{x}$ är antalet sekvenser av längd n med exakt x lyckade försök, så kallad **binomialkoefficienten**.
- Om t ex $n = 3$ och $x = 2$, så leder alla tre sekvenserna $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ och $(1, 1, 0)$ till utfallet $x = 2$.
  - Sekvensen $(0, 1, 1)$ har sannolikheten $q \cdot p \cdot p = p^2 q$.
  - Sekvensen $(1, 0, 1)$ har sannolikheten $p \cdot q \cdot p = p^2 q$.
  - Sekvensen $(1, 1, 0)$ har sannolikheten $p \cdot p \cdot q = p^2 q$.
- Antalet misslyckade försök i sekvensen följer $Binomial(n, q)$.

Binomialfördelningen

- Binomialfördelningen passar data:
  - som är **diskreta icke-negativa heltal**.
  - som kan anta alla **heltal mellan** 0 **och** n.
- Passande: Hur många elever i klass 5A kan simma ?
- Inte passande: Hur många mål gör IFK Norrköping på lördag ? (pga ingen naturlig övre gräns) eller längdmätningar (kontinuerliga).
- Egenskaper för $X \sim Binomial(n, p)$
  - $\mathbb{E}(X) = n \cdot p$
  - $Var(X) = n \cdot p \cdot q$
- **Bevis**: $X \sim Binomial(n, p)$ innebär att $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, dvs X är en summa av n oberoende Bernoullivariabler med sannolikhet p. Dessutom, väntevärdet och variansen av en summa av oberoende variabler är summan av variablernas väntevärden och varianser. Se sid 59 i Baron.
- Se Example 3.17 i Baron.

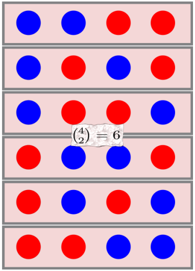
Binomialfördelningen



Multinomialfördelningen

- Bernoullidata: n personer utfrågas om vilket partiblock de föredrar (röd eller blå). n_1 personer svarar röd, n_2 personer svarar blå.
- Antal sätt vi kan få dessa data: $\binom{n}{n_1} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$
- Sannolikheten för att få n_1 röda i n försök:

$$P(n_1) = \binom{n}{n_1} p^{n_1} q^{n_2},$$

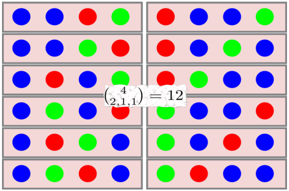


Multinomialfördelningen

- Multinomiala data: n personer utfrågas om vilket partiblock de föredrar (röd, blå eller grön). n_1 personer svarar blå, n_2 personer svarar röd och n_3 personer svarar grön.
- Antal sätt vi kan få dessa data ges av **multinomialkoefficienten**: $\binom{n}{n_1\ n_2\ n_3} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$ och

$$P(n_1, n_2, n_3) = \binom{n}{n_1\ n_2\ n_3} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3},$$

- Notera att multinomialfördelningen är en simultanfördelning för **tre** slumpvariabler: N_1, N_2 och N_3.



Geometriska fördelningen

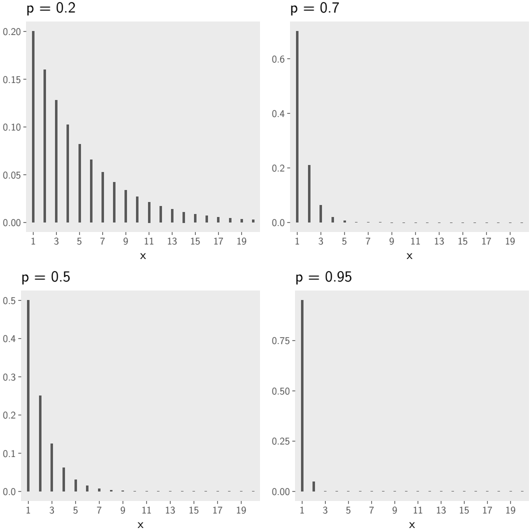
Definition. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en sekvens av **oberoende** Bernoulliförsök med sannolikhet p. Låt X = **antalet Bernoulliförsök för att få ett lyckat försök**. Då är X **geometrisk fördelad**, dvs $X \sim Geo(p)$ med pmf

$$P(x) = (1-p)^{x-1} p$$

för $x = 1, 2, \ldots$

- Geometriska fördelningen passar data:
  - som antar **diskreta positiva heltal:** $1, 2, 3, \ldots$
  - som **inte har en övre gräns** (jfr binomial).
  - med **monotont avtagande pmf**.
- Egenskaper för $X \sim Geo(p)$
  - $\mathbb{E}(X) = 1/p$
  - $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$
  - Väntevärdet och variansen beräknas med hjälp av den geometriska serien.
- Slantsingling (lyckat=krona): $\mathbb{E}(X) = 2$, $Var(X) = 2$.
- Kasta tarning (lyckat=en prick): $\mathbb{E}(X) = 6$, $Var(X) = 30$.

Geometriska fördelningen



Negativa binomialfördelningen

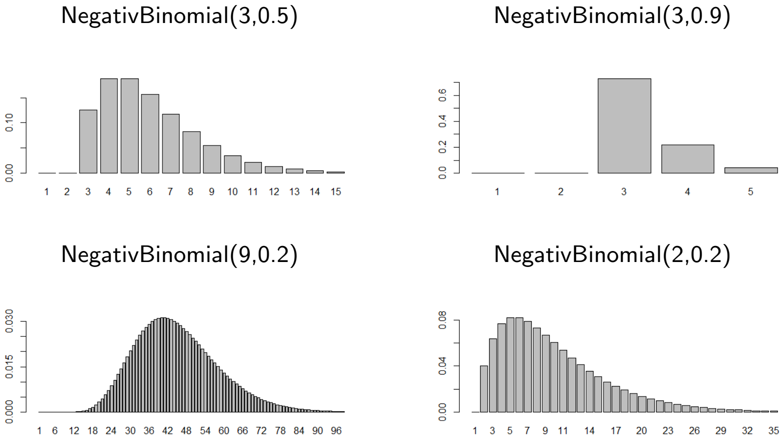
Definition. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en sekvens av **oberoende** Bernoulliförsök med sannolikhet p. Låt X = **antalet Bernoulliförsök för att få k lyckade försök**. Då är X **negativ binomialfördelad**, dvs $X \sim NegativBinomial(k, p)$ med pmf

$$P(x) = \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k$$

för $x = 1, 2, \ldots$

- $NegativBinomial(1, p) = Geo(p)$.
- Negativa binomialfördelningen är rak motsats till binomialfördelningen: Den sista modellerar hur många gånger man lyckas i en sekvens av n Bernoulliförsök, och den första modellerar antalet Benouilliförsök för att lyckas k gånger. Se Example 3.21 i Baron.
- Negativa binomialfördelningen passar samma data som geometriska fördelningen.
- Egenskaper för $X \sim NegativBinomial(k, p)$
  - $\mathbb{E}(X) = k/p$
  - $Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$
- **Bevis**: $X \sim NegativBinomial(k, p)$ innebär att X är en summa av k oberoende geometriskvariabler med sannolikhet p. Dessutom, väntevärdet och variansen av en summa av oberoende variabler är summan av variablernas väntevärden och varianser. Se sid 63 i Baron.

Negativa binomialfördelningen



Poissonfördelningen

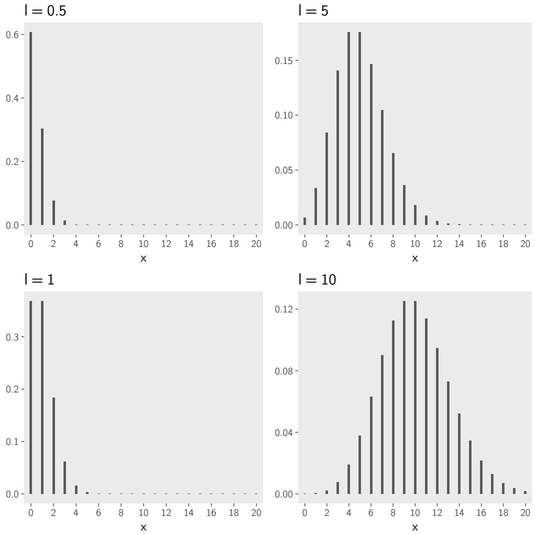
Definition. En **Poissonfördelad** slumpvariabel med frekvens λ, dvs $X \sim Po(\lambda)$, har pmf

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

för $x = 0, 1, 2, \ldots$

- Egenskaper för $X \sim Po(\lambda)$
  - $\mathbb{E}(X) = \lambda$
  - $Var(X) = \lambda$
  - Väntevärdet och variansen beräknas med Taylorutvecklingen.
- Poissonfördelningen passar data:
  - som antar **diskreta icke-negativa heltal:** $0, 1, 2, \ldots$
  - som **inte har en övre gräns** (jfr binomial).
  - vars väntevärde och varians är ungefär lika.
- Poissonfördelningen passar som modell av antalet ovanliga händelser i en tidsperiod, dvs osannolikt att flera händer samtidigt eller nära varandra i tiden. T ex
  - Antalet upptäckta buggar i en kod.
  - Antalet döda i trafiken under år 2014.
  - Se Example 3.22 i Baron.
- Poissonfördelningen med $\lambda = n \cdot p$ kan användas för att approximera binomialfördelningen när $n \geq 30$ and $p \leq 0.05$. Se `ManipDistributions.R`.

Poissonfördelningen



Översikt

- **Fördelningsfamiljer för diskreta variabler**
- **Bernoulli, binomial, multinomial**
- **Geometrisk, negativ binomial**
- **Poisson**