SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK
FÖRELÄSNING 5

Mattias Villani

Avdelningen för Statistik och Maskininlärning
Institutionen för datavetenskap
Linköpings universitet

Översikt

- Stora talen lag
- Centrala gränsvärdessatsen
- Simulering
- Monte Carlo metoder

Stora talens lag

- Medelvärde: $\bar{X}_n = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$
- Medelvärden av många oberoende slumpvariabler med samma fördelning kommer att ligga allt närmare variablernas väntevärde.
- **Stora talens lag**:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon\right) = 0$$

- Bevis via Chebyshevs olikhet

$$P\left\{|X - \mu| > \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

eftersom σ^2 i detta fall är $Var(\bar{X}_n) = Var(X_i)/n \to 0$ när $n \to \infty$.

Centrala gränsvärdessatsen

- Hur är summan $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ utav n oberoende variabler fördelad?
- Demo av
  - S_n $\quad Var(S_n) = n\sigma^2 \to \infty$
  - S_n/n $\quad Var(S_n/n) = \sigma^2/n \to 0$
  - $S_n/\sqrt{n}$ $\quad Var(S_n/\sqrt{n}) = \sigma^2$.
- **CLT: Medelvärden** av n oberoende variabler med godtycklig fördelning **blir alltmer normalfördelade när** n **ökar**.
- $n > 30$ är en vanlig tumregel.

CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN

THEOREM

Låt $X_1, X_2, ..., X_n$ vara oberoende variabler med väntevärde $\mu = \mathbb{E}X_i$ och standardavvikelse $\sigma = \mathrm{Std}(X_i)$ och låt

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

När $n \to \infty$ så kommer den standardiserade summan

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\mathrm{Std}(S_n)}$$

*att **konvergera i fördelning** till en $N(0,1)$ variabel, dvs*

$$F_{Z_n}(z) = P\left\{ \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z \right\} \longrightarrow \Phi(z)$$

Simulering

- **Pseudoslumptalsgenerator**: Datorer kan generera en lång sekvens tal som ser ut som $U(0,1)$ slumptal. Good enough.
- R: `runif(1)`. Matlab: `rand`. Python: `numpy.random.uniform()`.
- Från $U \sim U(0,1)$ kan vi skapa slumptal från andra fördelningar.
- Ex. **Bernoulli** med sannolikhet p att lyckas:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{om } U < p \\ 0 & \text{om } U \geq p \end{cases}$$

  - R kod Bernoulli: `U=runif(1); X=(U<p)`
- Ex. **Binomial**. Summan av Bernoullis
  - R-kod för Binomial(n,p): `U=runif(n); X=sum(U<p`

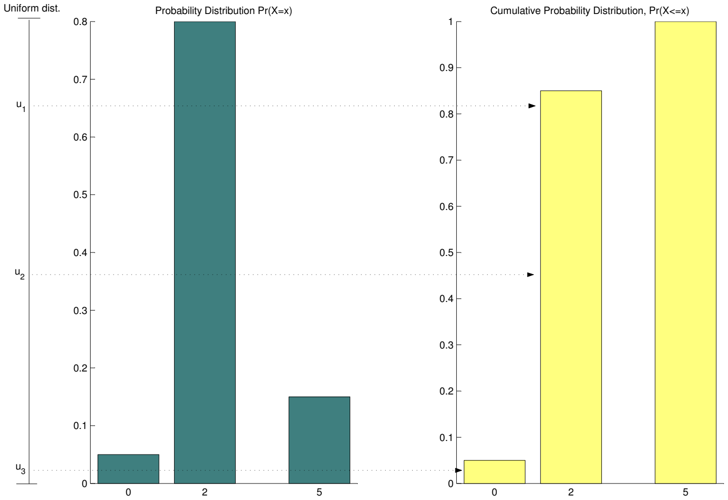
Simulering från diskret fördelning

- Simulering från allmän diskret fördelning:

$$p_i = \mathbf{P}\{X = x_i\}, \quad \sum_{i=1} p_i = 1$$

- Dela upp intervallet $[0, 1]$ i delintervall:
  - $A_1 = [0, p_1)$
  - $A_2 = [p_1, p_2)$
  - $\vdots$
  - $A_n = [p_{n-1}, 1)$
- Slumpa $U \sim U(0, 1)$
- Om $U \in A_i$ låt $X = x_i$

INVERSA CDF METODEN - DISKRETA FALLET



Inversa transformationsmetoden

- Simulering från allmän **kontinuerlig** fördelning.

Theorem

Låt X vara en kontinuerlig variabel med cdf $F_X(x)$ och låt $U = F_X(X)$ vara en ny slumpvariabel. Då gäller att $U \sim U(0,1)$.

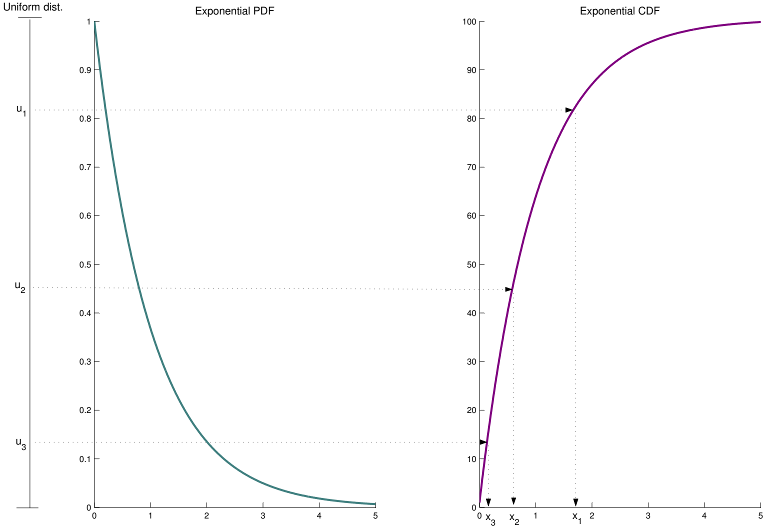
- ***Inversa transformationsmetoden**: Antag att X har cdf $F(X)$. X kan då simuleras med hjälp av en $U \sim U(0,1)$ variabel: $X = F^{-1}(U)$.*
- *Dvs lös ut X från ekvationen $U = F(X)$.*
- *Ex. $X \sim Exp(\lambda)$.*

$$U = 1 - e^{\lambda X}$$

vilket har lösningen

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$$

INVERSA CDF METODEN - KONTINUERLIGA FALLET



Simulering i R

- n **slumptal** från $N(\mu = 2, \sigma^2 = 3^2)$ simuleras med
`rnorm(n, mean = 2, sd = 3)`
- n **slumptal** från $Gamma(\alpha = 2, \lambda = 3)$ simuleras med
`rgamma(n, shape = 2 , rate = 3)`

- Beräkna **pdf:en** i punkten $x = 1.5$ för $N(\mu = 2, \sigma^2 = 3^2)$:
`dnorm(x=1.5, mean = 2, sd = 3)`
- Beräkna **cdf:en** i punkten $x = 1.5$ för $N(\mu = 2, \sigma^2 = 3^2)$:
`pnorm(x=1.5, mean = 2, sd = 3)`

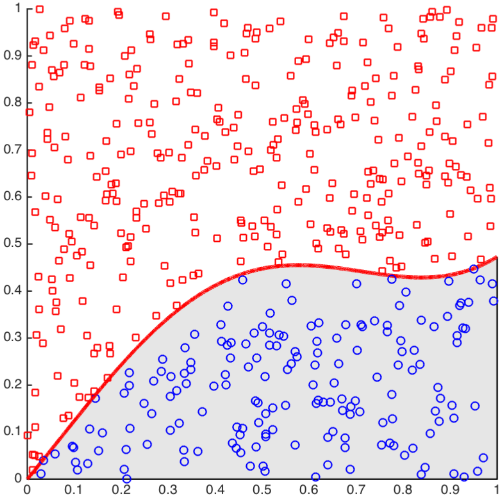
Monte Carlo metoder

- Simulering från fördelningar kan användas för att approximera t ex olika sannolikheter.
- Låt $X_1, X_2, ..., X_N$ vara oberoende dragningar från en sannolikhetsfördelning. Vi kan t ex approximera sannolikheten $p = \mathbf{P}\{X < 2\}$ med

$$\hat{p} = \hat{\mathbf{P}}\{X < 2\} = \frac{\text{antal av } X_1, X_2, ..., X_N \text{ som är mindre än 2}}{N}$$

- $\hat{\theta}$ (t ex $\hat{p}$) är en estimator (uppskattning) av kvantiteten θ (t ex p).
- ```
  x = rnorm(10000, mean = 1, sd = 2);
  pHat = sum(x<2)/10000
  ```
  ```

Monte Carlo metoder, forts.

- Men $\hat{p}$ är bara en **skattning** av p. Varierar från stickprov till stickprov.
- Om vi upprepar hela receptet flera ggr, varje gång med ett nytt stickprov av storleken N, kommer vi då att ha rätt i genomsnitt? Dvs är $E(\hat{p}) = p$?
- Hur mycket kommer $\hat{p}$ att variera från stickprov till stickprov? Dvs hur stor är $Var(\hat{p})$?
- $Y =$Antal $X_1, ..., X_N$ som är mindre än 2. $Y \sim Bin(N, p)$. Så

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{Y}{N}\right) = \frac{1}{N} N \cdot p = p$$

  så $\hat{p}$ är en **väntevärdesriktig (unbiased)** estimator.

$$Var(\hat{p}) = \frac{1}{N^2} Np(1-p) = \frac{p(1-p)}{N}.$$

- Se Baron s. 115-116 om hur man kan välja N för att given exakthet $\mathbf{P}\left\{|\hat{p} - p| > \varepsilon\right\} \leq \alpha$.

Monte Carlo integration

- Mål: $\mathcal{I} = \int_0^1 g(x)dx$ där $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq g(x) \leq 1$.
- Simulera likformigt fördelade tal $U_1, ..., U_N$ och $V_1, ..., V_N$.
- Monte Carlo skattning

$$\hat{\mathcal{I}} = \frac{\text{Antal dragningar där } V_i < g(U_i)}{N}$$

- ```
  u = runif(10000);
  v = runif(10000);
  IHat = mean(v < g(u))
  ```
  ```

Monte Carlo integration



Importance sampling

- Räkna **integraler som väntevärden**

$$\mathcal{I} = \int_a^b g(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (b-a)g(x)dx = \mathbb{E}\left\{(b-a)g(X)\right\}$$

- Stora talens lag: Om $X_1, ..., X_N$ dras från $U(a, b)$ så kommer

$$\frac{(b-a)g(X_1) + ... + (b-a)g(X_N)}{N}$$

  vara nära $\mathbb{E}\left\{(b-a)g(X)\right\}$ när N är stort (konvergerar i sannolikhet).
- **Importance sampling**. Samma trick, med godtycklig pdf $f(x)$

$$\mathcal{I} = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x)dx = \mathbb{E}\left(\frac{g(X)}{f(X)}\right)$$

  där väntevärdet beräknas med avseende på $f(x)$.
- **Importance sampling estimatorn**: $X_1, ..., X_N$ oberoende från $f(X)$:

$$\hat{\mathcal{I}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{g(X_i)}{f(X_i)}$$