Sannolikhetslära och Statistik
Föreläsning 12

Mattias Villani

Avdelningen för Statistik och Maskininlärning
Institutionen för datavetenskap
Linköpings universitet

Översikt

- **Prediktion**
- **Beslut**

Prediktion

- **Prediktion**: inferens för okända men potentiellt observerbara kvantiteter.
  - antalet buggar i en kod.
  - sjukdom.
  - mängden brytbara mineraler.

- **Prognos**: prediktion av framtida utfall.
  - lägenhetspriserna i Linköping Jan 2020.
  - framtida försäljning.
  - slutpris i en eBay auktion.

Prediktion för att utvärdera modeller

- Prediktion är också ett utmärkt sätt att **utvärdera** och **jämföra modeller**. En korrekt modell predikterar bra.

- **Träningsdata** - **testdata**.

- **Accuracy**: antal korrekt klassificeringar / totala antalet test data observationer.

- Handwritten digits data (3000 obs för träning, 10000 för test):
  - Multinomial regression med elastic net: accuracy = 88.49%
  - Support vector machine: accuracy: 89.42%

Prediktion i regression

- Linjär regression

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon,\ \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

- Vad blir **prediktionen** av Y för ett nytt x-värde, $x_\star$?

$$\mu_\star = E\left(Y|X = x_\star\right) = \beta_0 + \beta_1 x_\star$$

som vi skattar med

$$\hat{y}_\star = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_\star$$

- Se Baron s. 377-378 för härledning av samplingfördelning, standardfel och konfidensintervall för $\hat{y}_\star$.
- Ett konfidensintervall för $\hat{y}_\star$ är osäkerheten om **populationens vänteväarde** vid $x = x_\star$. Dvs osäkerheten om regressionslinjen.
- Men hur ser osäkerheten för ett faktiskt y-värde ut om $x = x_\star$?
- Prognosintervall för Y när $x = x_\star$

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_\star \pm t_{\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_\star - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$$

Bayesiansk prediktion

- **Prediktiv fördelning** för ny observation $\tilde{X}$:

$$p(\tilde{x}|x_1, ..., x_n) = \int f(\tilde{x}|x_1, ..., x_n, \theta)\pi(\theta|x_1, ..., x_n)d\theta$$

- Exempel: $x_1, ..., x_n|\theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ och σ^2 känd.
- Prediktiv fördelning

$$\tilde{x}|x_1, ..., x_n \sim N\left(\mu_x, \tau_x^2 + \sigma^2\right)$$

- Vår bästa prognos: $\mu_x = \mathbb{E}(\theta|x_1, ..., x_n)$.
- **Prediktionsvarians** = Varians pga osäkerhet om θ (τ_x^2) + Varians pga osäkerhet i populationen kring $\theta(\sigma^2)$.
- Prediktiv fördelning genom **simulering**:
  1. Simulera parameter $\theta^{(1)} \sim \pi(\theta|x_1, ..., x_n)$
  2. Simulera observeration $\tilde{x} \sim f(\tilde{x}|\theta^{(1)})$
  3. Upprepa Steg 1 och 2 många ggr

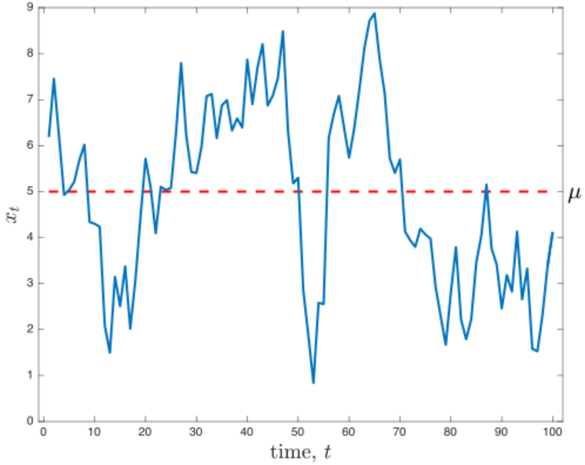
Bayesiansk prediktion - AR-process

- **Autoregressiv process** av första ordningen

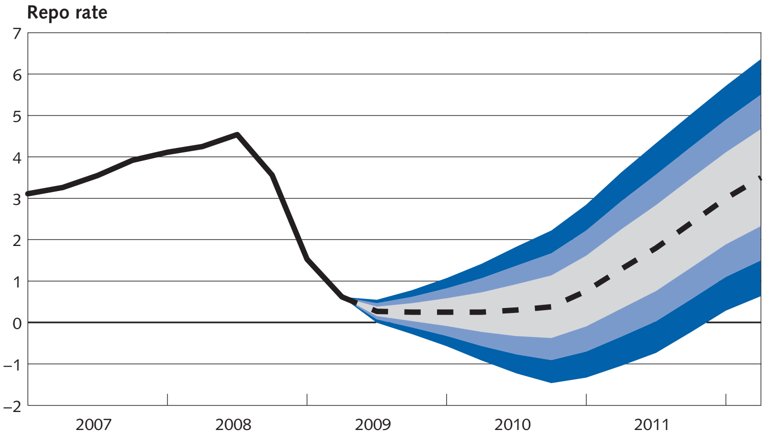
$$y_t = \mu + \phi(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

- Posterior: $\pi(\phi, \mu, \sigma | y_1, ..., y_T)$.
- Vi är intresserade av h-**stegs prognosfördelningen**: $p(y_{T+1}, y_{T+2}, ..., y_{T+h} | y_1, ..., y_T)$.
- **Simulering** från $p(y_{T+1}, y_{T+2}, ..., y_{T+h} | y_1, ..., y_T)$:
  1. Simulera $\theta^{(1)} = (\phi^{(1)}, \mu^{(1)}, \sigma^{(1)})$ från posteriorn $\pi(\phi, \mu, \sigma | y_1, ..., y_T)$
  2. Betingat på $\theta = \theta^{(1)}$ simulera en **prognosbana**
     - $\tilde{y}_{T+1}^{(1)} \sim f(y_{T+1} | y_T, \theta^{(1)})$
     - $\tilde{y}_{T+2}^{(1)} \sim f(y_{T+2} | \tilde{y}_{T+1}^{(1)}, \theta^{(1)})$
     - ...
     - $\tilde{y}_{T+h}^{(1)} \sim f(y_{T+h} | \tilde{y}_{T+h-1}^{(1)}, \theta^{(1)})$
- Upprepa steg 1 och 2 ett stort antal gånger.

AR(1)-PROCESS



Bayesian *h*-step ahead predictive distribution



Beslutsteori

- Låt $\theta \in \Theta$ vara en **okänd kvantitet**, **tillstånd**.
  Exempel: Sjukdom, Global temperaturökning, antalet buggar.

- Låt $a \in \mathcal{A}$ vara ett **beslut** (eng. action).
  Ex: operation, energisskatt, releasedatum.

- Välja beslut a när tillståndet visar sig vara θ ger dig **nyttan** (eng. utility)

$$U(a, \theta)$$

- Alternativt: **förlust** (eng. loss):

$$L(a, \theta) = -U(a, \theta)$$

.

Diskreta tillstånd, diskreta beslut

- Förlusttabell för problem med två möjliga θ-utfall och två möjliga beslut:

	θ_1	θ_2
a_1	$L(a_1, \theta_1)$	$L(a_1, \theta_2)$
a_2	$L(a_2, \theta_1)$	$L(a_2, \theta_2)$

- Exempel:

	Regnigt	Soligt
Paraply	20	10
Inget paraply	50	0

Beslut

- **Tillståndrummet** Θ kan vara diskret eller kontinuerligt.
- **Beslutsrummet** $\mathcal{A}$ kan vara diskret eller kontinuerligt.
- Kontinuerligt Θ, diskret $\mathcal{A}$:
  - Brobygge: $\theta =$grad av miljöpåverkan och $\mathcal{A} = \{\text{bygga}, \text{ej bygga}\}$.
- Diskret Θ, kontinuerligt $\mathcal{A}$:
  - $\theta =$antalet buggar. $\theta \in \{0, 1, 2, ...\}$ och $\mathcal{A} =$ releasetid.
  - brottsdom. $\theta \in \{\text{oskyldig}, \text{skyldig}\}$. $\mathcal{A} = \{\text{tid i fängelse}\}$.
- Kontinuerligt Θ, Kontinuerligt $\mathcal{A}$:
  - $\theta =$ efterfrågan på produkt, $\mathcal{A} = \{\text{hur många enheter i lager?}\}$

Kontinuerliga tillstånd, kontinuerliga beslut

- Exempel på **förlustfunktioner** när både a och θ är kontinuerliga:
  - **Linjär**: $L(a,\theta) = |a-\theta|$
  - **Kvadratisk**: $L(a,\theta) = (a-\theta)^2$
  - **Lin-Lin**:

$$L(a,\theta) = \begin{cases} c_1 \cdot |a-\theta| & \text{if } a \leq \theta \\ c_2 \cdot |a-\theta| & \text{if } a > \theta \end{cases}$$

- Exempel:
  - θ antalet efterfrågade produkter
  - a antal produkter i lager
  - Nytta

$$U(a,\theta) = \begin{cases} p \cdot \theta - c_1(a-\theta) & \text{om } a > \theta \text{ [för stort lager]} \\ p \cdot a - c_2(\theta - a)^2 & \text{om } a \leq \theta \text{ [för litet lager]} \end{cases}$$

Optimala beslut

- Exempel på vanlig beslutsregel: **Minimax**. Välj det beslut som minimerar den maximala förlusten.
- Bayes: Välj det beslut som **maximerar förväntad nytta** a posteriori:

$$a_{bayes} = \text{argmax}_{a \in \mathcal{A}} \, \mathbb{E}[U(a, \theta)],$$

  där $\mathbb{E}$ är väntevärdet med avseende på aposteriorn $p(\theta|Data)$.
- I praktiken: simulera $\theta^{(1)}$,$\theta^{(2)}$, ..., $\theta^{(N)}$ från $p(\theta|Data)$ och approximera

$$\mathbb{E}[U(a, \theta)] \approx N^{-1} \sum_{i=1}^{N} U(a, \theta^{(i)})$$

- **Separationsprincipen**:

1. Ta först fram $p(\theta|Data)$ ...
2. därefter $U(a, \theta)$ och slutligen ...
3. välj det $a \in \mathcal{A}$ som maximerar $\mathbb{E}[U(a, \theta)]$.

Väntevärde, median eller typvärde?

- Hur kan vi bäst sammanfatta en aposteriorifördelning $p(\theta|Data)$ med ett enda tal?
- Att välja en punktskattning är ett beslutsproblem.
- Valet beror på din förlustfunktion:
  - **Linjär förlust** $\rightarrow$ Posterior median är optimal
  - **Quadratic loss** $\rightarrow$ Posteriorväntevärdet $\mathbb{E}(\theta|Data)$ är optimal
  - **Lin-Lin loss** $\rightarrow$ $c_1/(c_1+c_2)$ kvantilen i posteriorn är optimal
  - **Noll-ett förlust** $\rightarrow$ Posterior typvärdet är optimalt

Förlustfunktioner