

TDAB01 Sannolikhetslära och Statistik

Jose M. Peña
IDA, Linköpings Universitet

Föreläsning 9

- ▶ **Hypotesttest**
- ▶ **Z-test**
- ▶ **T-test**
- ▶ **χ^2 -test för populationsvarians**
- ▶ **χ^2 -test för modellutvärdering**

Hypotestest

- ▶ Exempel 1. Genomsnittshastigheten på ditt bredband är sämre än leverantören utlovat.

Nollhypotes: $H_0 : \mu \geq 8 \text{ Mbit/s}$

Alternativhypotes: $H_A : \mu < 8 \text{ Mbit/s}$

- ▶ Exempel 2. En ny medicin påverkar blodtrycket.

Nollhypotes: $H_0 : \mu = 0$

Alternativhypotes: $H_A : \mu \neq 0$

- ▶ Exempel 3. En UI-förändring ökar andelen nöjda användare.

Nollhypotes: $H_0 : p \leq p_0$

Alternativhypotes: $H_A : p > p_0$

- ▶ Exempel 4. Andelen KD-väljare är under 4%-spärren.

Nollhypotes: $H_0 : p \geq 0.04$

Alternativhypotes: $H_A : p < 0.04$

Hypotestest

- ▶ **Tvåsidigt test** förkastar H_0 om μ är större **eller** mindre än μ_0

Nollhypotes: $H_0 : \mu = \mu_0$

Alternativhypotes: $H_A : \mu \neq \mu_0$

- ▶ **Ensidigt test**

Nollhypotes: $H_0 : \mu \leq \mu_0$

Alternativhypotes: $H_A : \mu > \mu_0$

eller

Nollhypotes: $H_0 : \mu \geq \mu_0$

Alternativhypotes: $H_A : \mu < \mu_0$

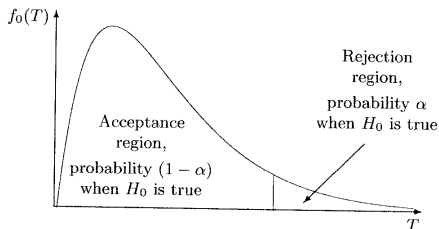
- ▶ Ensidiga test skrivs ibland så här (**det ger samma resultat**):

Nollhypotes: $H_0 : \mu = \mu_0$

Alternativhypotes: $H_A : \mu < \mu_0$

Steg vid hypotestest

1. Välj **teststatistika**, $T = T(X_1, \dots, X_n)$.
2. Beräkna **nollfördelningen** för T , dvs samplingfördelningen F_0 för T om H_0 är sann.
3. Bestäm **förkastningsregionen** \mathcal{R} i nollfördelningen så att $P(T \in \mathcal{R} | H_0) = \alpha$.
4. Förkasta H_0 på **signifikansnivån** α om $T_{obs} \in \mathcal{R}$, där T_{obs} är det **observerade** värdet på T .



- ▶ H_0 gäller populationen. Då, H_0 är sann eller ej. Då, acceptera H_0 betyder inte att H_0 är sann med sannolikhet $1 - \alpha$. Det betyder att stickprovet stödjer H_0 tillräckligt för att inte förkasta den.
- ▶ Se Example 9.25 i Baron.

Hypotestest fel

- ▶ **Typ I fel**

$$\alpha = P(\text{Förkasta } H_0 | H_0 \text{ är sann})$$

Vi vill **kontrollera** att α hålls på en förbestämd låg nivå.

- ▶ **Typ II fel**

$$P(\text{Acceptera } H_0 | H_0 \text{ är falsk})$$

	Acceptera H_0	Förkasta H_0
H_0 sann	Korrekt beslut	Typ I fel
H_A sann	Typ II fel	Korrekt beslut

- ▶ **Styrka** (power): $P(\text{Förkasta } H_0 | H_A \text{ är sann}) = 1 - \text{typ II fel}$.
- ▶ Rent formellt, förkastar man H_0 eller ej. Man aldrig accepterar den.

Steg vid hypotestest

► Allmänt: H_0 vs H_A

1. Välj **teststatistika**, $T = T(X_1, \dots, X_n)$.
2. Beräkna **nollfördelningen** för T , dvs samplingfördelningen för T om H_0 är sann.
3. Bestäm **förkastningsregionen** \mathcal{R} i nollfördelningen så att $\mathbf{P}(T \in \mathcal{R} | H_0) = \alpha$.
4. Förkasta H_0 på **signifikansnivån** α om $T_{obs} \in \mathcal{R}$, där T_{obs} är det **observerade** värdet på T .

► Bernoulliexempel: $H_0 : p \leq 0.6$ vs $H_A : p > 0.6$.

1. **Teststatistika**, $T = S = \sum_{i=1}^n X_i$.
2. **Nollfördelningen** för T : $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, 0.6)$.
3. Låt $\alpha = 0.05$. Då, `qbinom(p=0.05,size=100,prob=0.6, lower.tail=F)` ger $\mathcal{R} = [68, 100]$ ungefär.
4. Säg $T_{obs} = 70$. Då, $T_{obs} \in \mathcal{R}$ och $H_0 : p \leq 0.6$ förkastas på signifikansnivån 0.05.

Z-test

- ▶ **Z-test** används när nollfördelningen är normalfördelad, dvs samplingfördelningen för teststatistikan om H_0 är sann är normalfördelad.

- ▶ Exempel 1. $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ och

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

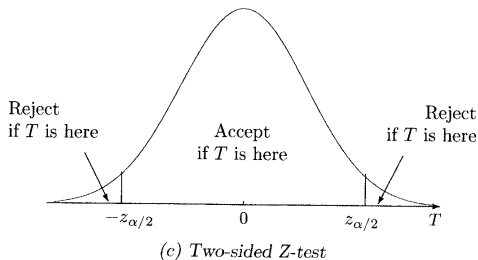
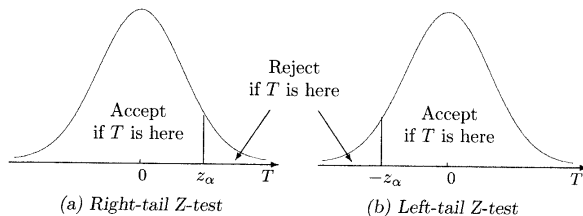
- ▶ Exempel 2. CLT.
- ▶ Ensidigt Z-test: $H_0 : \mu = \mu_0$ och $H_A : \mu > \mu_0$.

$$\begin{cases} \text{Förkasta } H_0 & \text{om } Z \geq z_\alpha \\ \text{Acceptera } H_0 & \text{om } Z < z_\alpha \end{cases}$$

- ▶ Tvåsidigt Z-test: $H_0 : \mu = \mu_0$ och $H_A : \mu \neq \mu_0$.

$$\begin{cases} \text{Förkasta } H_0 & \text{om } |Z| \geq z_{\alpha/2} \\ \text{Acceptera } H_0 & \text{om } |Z| < z_{\alpha/2} \end{cases}$$

Z-test



- Återbesök Example 9.25 i Baron.

Z-test för skillnad mellan väntevärdena av två populationer

- ▶ Vi kan också testa om **två** populationer har samma väntevärde:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_A : \mu_X \neq \mu_Y$$

- ▶ Exempel: Är andelen KD-sympatisörer lika stor i Stockholm och Göteborg?
- ▶ Låt X_1, \dots, X_n vara ett slumpmässigt stickprov från $N(\mu_X, \sigma_X^2)$.
- ▶ Låt Y_1, \dots, Y_m vara ett slumpmässigt stickprov från $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.
- ▶ **Teststatistika:** $\bar{X} - \bar{Y}$. Samplingfördelning under H_0 ?
 - ▶ Linjärkombination av normalvariabler är normalfördelade, dvs $\bar{X} - \bar{Y}$ är normalfördelad.
 - ▶ $E(\bar{X} - \bar{Y}) = \mu_X - \mu_Y = 0$ under H_0 .
 - ▶ $Var(\bar{X} - \bar{Y}) = Var(\bar{X}) + Var(\bar{Y}) = \sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m$.
 - ▶ Då,

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

- ▶ Se Example 9.26 i Baron.

T-test

- ▶ Z-test används när nollfördelningen är normalfördelad, dvs samplingfördelningen för teststatistikan om H_0 är sann är normalfördelad.
- ▶ Om σ^2 **inte** är känd utan skattas med s^2 blir inte

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

längre normalfördelad utan **t-fördelad** med $n - 1$ frihetsgrader.

- ▶ Och z_α blir istället t_α och hämtas från Tabell A5 i Byron.

Koppling mellan hypotestest och konfidensintervall

Ett Z-test eller T-test av $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_A : \theta \neq \theta_0$ på signifikansnivån α accepterar nollhypotesen om och endast om θ_0 ingår i ett symmetriskt $(1 - \alpha)100\%$ konfidensintervall för θ .

- ▶ Hur väljer vi α ?
- ▶ **Lågt** α ställer mycket **stora krav** på bevisningen: Teststatistikan måste anta mycket stora (positiva eller negativa) värden för att vi ska kunna förkasta H_0 .
- ▶ **Stort** α ställer **låga krav**: Vi förkastar H_0 baserat på väldigt lite bevis.
- ▶ Idé: Presentera resultat för alla α .
- ▶ **P-värde** = den lägsta signifikansnivån α där vi kan förkasta H_0 .
- ▶ Alternativ definition: Sannolikheten att få en teststatistika som är lika extrem eller ännu mer extrem än T_{obs} .
- ▶ Exempel: Ensidigt Z-test. Då,

$$p\text{-värde} = P(Z \geq Z_{obs})$$

- ▶ Se Example 9.38 i Baron.

χ^2 -test for populationsvarians

- ▶ Väntevärdesriktig estimator av σ^2

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

- ▶ **Samplingfördelning** för s^2 om $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

- ▶ χ^2 -fördelningen kan användas för konfidensintervall och hypotestest för σ^2 . Se Sections 9.5.2 och 9.5.3 i Baron.
- ▶ $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$ och $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$ hämtas från Tabell A6 i Baron. Obs. båda behövs eftersom χ_ν^2 -fördelningen är **inte symmetrisk**.
- ▶ χ^2 (**Chi-två**) **fördelningen** med ν frihetsgrader

$$f(x) = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0$$

- ▶ Om $X \sim \chi_\nu^2$ så gäller

$$\mathbb{E}(X) = \nu \text{ och } \text{Var}(X) = 2\nu$$

- ▶ χ_ν^2 -fördelningen är ett specialfall av gamma: $\text{Gamma}(\nu/2, 1/2)$.

χ^2 goodness of fit test

- ▶ Antag att populationen har följande diskreta fördelning F_0 , dvs $\mathbf{P}(X = 1) = p_1, \mathbf{P}(X = 2) = p_2, \dots, \mathbf{P}(X = m) = p_m$.
- ▶ Om du har observerat n observationer så förväntar du dig $n \cdot p_k$ observationer där $X = k$.
- ▶ Låt $Exp(k)$ beteckna förväntat antal observationer med värde k om F_0 är en korrekt populationsmodell.
- ▶ Låt $Obs(k)$ beteckna faktiskt antal observationer med värde k .

χ^2 goodness of fit test

► χ^2 -statistika

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^m \frac{[Obs(k) - Exp(k)]^2}{Exp(k)}$$

- Om χ^2 är för stort så drar vi slutsatsen att data inte kommer från populationen med fördelningen F_0 ovan.
- Men hur stort är för stort ? Jämför med samplingfördelningen för χ^2 under $H_0 : F = F_0$ mot $H_A : F \neq F_0$.
- Vid stora stickprov följer χ^2 -statistikan en χ^2 -fördelning med $m - 1$ frihetsgrader, om $Exp(k) > 5$ för alla k .
- Vi kan även testa om data kommer från $F_0(\theta)$ där θ är en **okänd** parameter som skattas med en konsistent estimator. Då, χ^2 -statistikan följer en χ^2 -fördelning med $m - d - 1$ frihetsgrader där d är dimensionen av θ . **Hela fördelningsfamiljen** testas på en gång. Se Section 10.1.2 i Baron.
- **Kontinuerliga fördelningar** kan hanteras genom diskretisering (men se till att $Exp(k) > 5$ för alla k).

- ▶ Hypotesttest
- ▶ Z-test
- ▶ T-test
- ▶ χ^2 -test för populationsvarians
- ▶ χ^2 -test för modellutvärdering