

TDAB01 SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK

TENTAMEN 2019-10-23

EXAMINATOR

Jose M. Peña. Besöker salen. Nås på telefon också.

BETYG

För full poäng i varje delfråga krävs tydliga och välmotiverade svar.

Maximalt antal poäng: 20 poäng

Betyg 5 = 17-20 poäng

Betyg 4 = 13-16 poäng

Betyg 3 = 9-12 poäng

TILLÅTNA HJÄLPMEDEL

Miniräknare med tomt minne. Tabell- och formelsamling (ingår i tentamen).

UPPGIFTER

- (1) Ett företag som tillverkar elektroniska komponenter har tillverkningen förlagd till tre olika fabriker där A står för 50% av tillverkningen, B för 30% och C för 20%. Man vet att en komponent från fabrik A blir defekt med sannolikhet 0.05. Motsvarande siffra för B är 0.1 och för C är den 0.08.

- (a) Alla tillverkade komponenter samlas i ett centralt lager. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald komponent i lagret är defekt?

Lösning: $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) = 0.05 * 0.5 + 0.1 * 0.3 + 0.08 * 0.2 = 0.071$

- (b) En slumpmässigt vald komponent i lagret visar sig vara defekt. Vad är sannolikheten att komponenten har tillverkats i fabrik B ?

Lösning: $P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{0.1*0.3}{0.071} = 0.422$.

- (2) På en tenta förekommer tryckfel ganska slumpmässigt, och man kan anta att antalet tryckfel per tenta är en stokastisk variabel X med en Poissonfördelning med väntevärdet 0.5.

- (a) Beräkna $P(X > 1)$.

Lösning: $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.9098 = 0.09$

- (b) I en tentasamling med 445 tentor, låt Y vara antalet tentor med fler än ett tryckfel. Antalet tryckfel på olika tentor antas vara oberoende stokastiska variabler. Ange den exakta fördelningen för Y .

Lösning: Om Y är antalet tentor med fler än 1 tryckfel bland 445 oberoende tentor, så är $Y \sim \text{Bin}(n = 445, 0.09)$.

- (c) Beräkna sannolikheten att det finns fler än 6 tentor i samlingen med mer än 1 tryckfel. Lämpliga approximationer får göras.

Lösning: $Y \sim N(\mu = 445 * 0.09, \sigma^2 = 445 * 0.09 * 0.9098)$. Detta ger att $P(Y > 6) = 1 - P(Y \leq 6) = 1 - \Phi(-0.63) = 1 - 0.26$

- (3) Hushållens inkomst i ett viss land följer en normalfördelning med väntevärde 20 (tusen kr) och varians 16 (tusen kr). (Bortse ifrån att inkomsterna kan vara negativa).

- (a) Om ett hushåll tjänar mindre än 14 (tusen kr) så får hushållet en fruktpåse varje dag. Hur stor andel av populationen kommer att få en fruktpåse?

Lösning: 0.0668

- (b) Hushåll som tjänar mindre än 5% av populationen får fria luncher på helgerna. Vad tjänar hushåll som får fria luncher?

Lösning: ≤ 13420 kr.

- (4) Livslängden för en viss elektronisk komponent följer en exponentialfördelning med parametern λ . Anta att vi beräknat medellivslängden för 500 oberoende komponenter och fått att det är 2 år.

- (a) Härled maximumlikelihood skattningen för väntevärdet.

Lösning: Likelihoodfunktionen är

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$$

och log-likelihooden är därför

$$\log L(\lambda) = n \log \lambda - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

. Vilket ger lösningen $\frac{1}{\lambda} = \bar{x}$.

- (b) Konstruera ett 95% tvåsidigt konfidensintervall för väntevärdet och tolka intervallet.

Lösning: Eftersom vi har 500 oberoende observationer är stickprovsmedelvärdet approximativt normalfördelat. Ett dubbelsidigt konfidensintervall ges av $2 \pm 1.96 * 2 * \frac{1}{\sqrt{500}}$

- (c) Finns det stöd att väntevärdet är större än 1.5?

Lösning: Ja, $Z = 5.59$. Gör ett hypotestest!.

- (5) Låt X_1, X_2, \dots, X_n vara oberoende observationer från en Exponentialfördelning med parameter λ .

- (a) Antag att din apriorifördelning för λ är en *Gamma*(2,1) fördelning. Härled aposteriorifördelningen för λ .

Lösning: *Gamma*(2 + n, 1 + $\sum_{i=1}^n x_i$) fördelning.

- (b) Antag att man har observerat 5 oberoende observationer x_1, \dots, x_5 från modellen ovan och beräknat medelvärdet $\bar{x} = 0.2$. Bestäm aposteriori väntevärdet och aposteriori variansen. Skatta λ med aposteriori väntevärdet. Vad blir skattningen?

Lösning: $\lambda = 3.5$.

- (c) Finns det stöd att λ är större än 1.5?

Lösning: Gör ett Bayesiankt hypotestest med hjälp av den aposteriori fördelningen.

Lycka till!