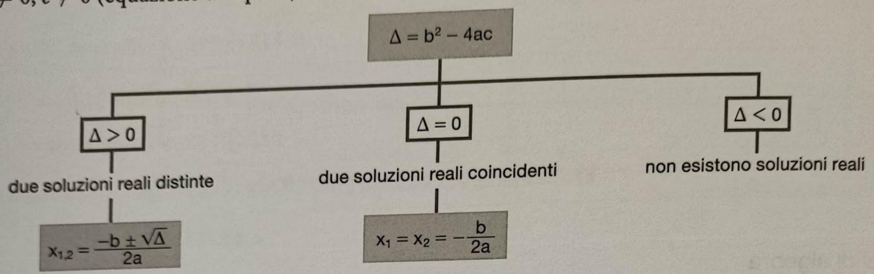
RICHIAMI DI ALGEBRA

Le equazioni di secondo grado

Un'equazione di secondo grado è riconducibile alla forma normale: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

- $b = 0, c \neq 0$ (equazione pura) $\rightarrow ax^2 + c = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$
  - se $-\frac{c}{a} < 0$: impossibile
  - se $-\frac{c}{a} > 0$: $\rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
- $c = 0, b \neq 0$ (equazione spuria) $\rightarrow ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$
- $b = c = 0$ (equazione monomia) $\rightarrow ax^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$
- $b \neq 0, c \neq 0$ (equazione completa). Il discriminante è $\Delta = b^2 - 4ac$.



Formula ridotta: b pari $\rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$.

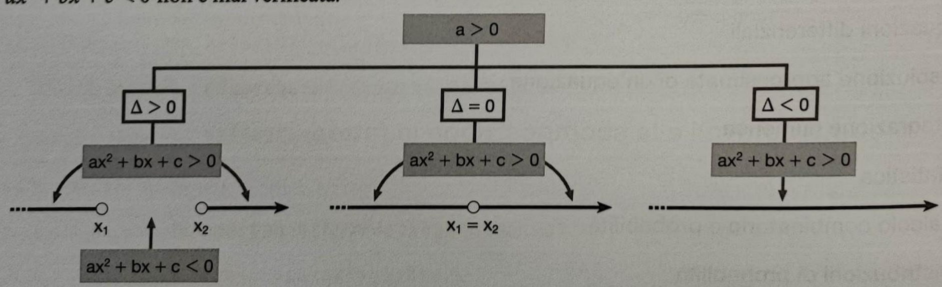
Le disequazioni di secondo grado

Per risolvere le disequazioni $ax^2 + bx + c > 0$ e $ax^2 + bx + c < 0$ (con $a > 0$), si considera l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$.

Se $\mathbf{\Delta > 0}$, la disequazione:
- $ax^2 + bx + c > 0$ è verificata dai valori esterni all'intervallo individuato dalle radici dell'equazione associata;
- $ax^2 + bx + c < 0$ è verificata dai valori interni.

Se $\mathbf{\Delta = 0}$, la disequazione:
- $ax^2 + bx + c > 0$ è sempre verificata tranne che per il valore della radice doppia dell'equazione associata;
- $ax^2 + bx + c < 0$ non è mai verificata.

Se $\mathbf{\Delta < 0}$, la disequazione:
- $ax^2 + bx + c > 0$ è sempre verificata;
- $ax^2 + bx + c < 0$ non è mai verificata.



Le equazioni e le disequazioni con il valore assoluto

$|A(x)| = k$
- se $k < 0$: non ha soluzione
- se $k \geq 0$: $A(x) = \pm k$

$|A(x)| < k$
- se $k > 0$: $-k < A(x) < k \rightarrow \begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k \end{cases}$
- se $k \leq 0$: non ha soluzione

$|A(x)| > k$
- se $k > 0$: $A(x) < -k \vee A(x) > k$
- se $k = 0$: $A(x) \neq 0$
- se $k < 0$: sempre verificata

Le equazioni e le disequazioni irrazionali

$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$
- se n è dispari: $A(x) = [B(x)]^n$
- se n è pari: $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$

$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$
- se n è dispari: $A(x) < [B(x)]^n$
- se n è pari: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases}$

$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$
- se n è dispari: $A(x) > [B(x)]^n$
- se n è pari: $\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases}$

Le proprietà delle potenze

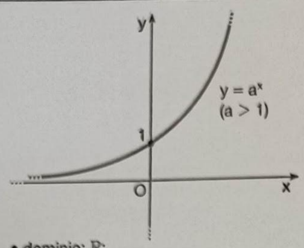
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$ con $a \neq 0$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
- $a^m : b^m = (a : b)^m$ con $b \neq 0$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ con $a \neq 0$

I prodotti notevoli e la scomposizione in fattori

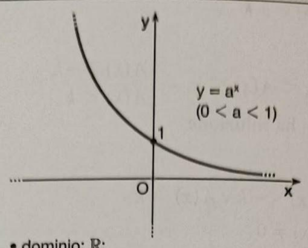
- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$
- $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$
- $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$
- $A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$

FUNZIONE ESPONENZIALE E FUNZIONE LOGARITMO

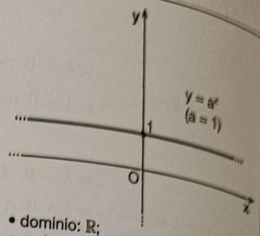
La funzione esponenziale



- dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\mathbb{R}^+$;
- funzione crescente in $\mathbb{R}$;
- corrispondenza biunivoca;
- $a^x \to 0$ per $x \to -\infty$.
- $a^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

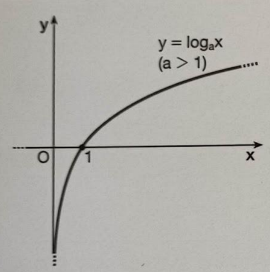


- dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\mathbb{R}^+$;
- funzione decrescente in $\mathbb{R}$;
- corrispondenza biunivoca;
- $a^x \to 0$ per $x \to +\infty$.
- $a^x \to +\infty$ per $x \to -\infty$.

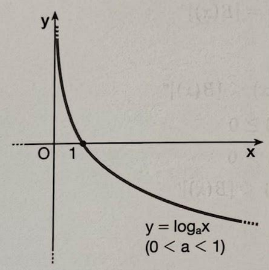


- dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\{1\}$;
- funzione costante;
- funzione non iniettiva.

La funzione logaritmo



- dominio: $\mathbb{R}^+$;
- codominio: $\mathbb{R}$;
- funzione crescente in $\mathbb{R}^+$;
- corrispondenza biunivoca;
- $\log_a x \to -\infty$ per $x \to 0$;
- $\log_a x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.



- dominio: $\mathbb{R}^+$;
- codominio: $\mathbb{R}$;
- funzione decrescente in $\mathbb{R}^+$;
- corrispondenza biunivoca;
- $\log_a x \to +\infty$ per $x \to 0$;
- $\log_a x \to -\infty$ per $x \to +\infty$.

Logaritmo di un prodotto

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \quad (b > 0, c > 0)$$

Logaritmo di un quoziente

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad (b > 0, c > 0)$$

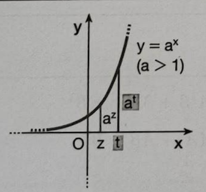
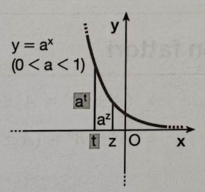
Logaritmo di una potenza

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b, \quad (b > 0, n \in \mathbb{R})$$

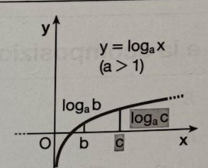
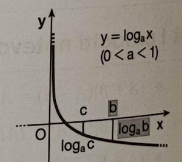
Cambiamento di base nei logaritmi

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad a > 0, b > 0, c > 0 \quad a \neq 1, c \neq 1$$

Disequazioni esponenziali

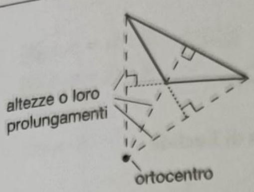
$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^t > a^z \Leftrightarrow t > z$	$a^t > a^z \Leftrightarrow t < z$
	

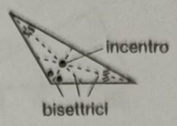
Disequazioni logaritmiche

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a b < \log_a c \Leftrightarrow b < c$	$\log_a b < \log_a c \Leftrightarrow b > c$
	

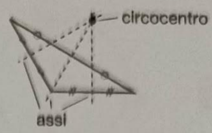
RICHIAMI DI GEOMETRIA

I punti notevoli di un triangolo

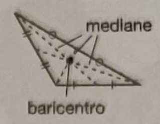




L'incentro è il centro della circonferenza inscritta.



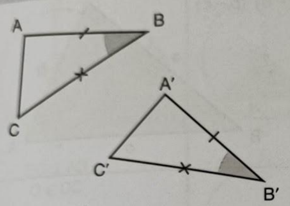
Il circocentro è il centro della circonferenza circoscritta.



Il baricentro divide ogni mediana in due parti di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra

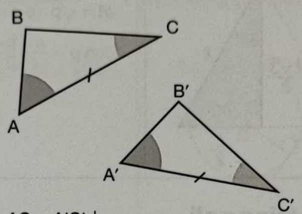
I criteri di congruenza dei triangoli

1° criterio



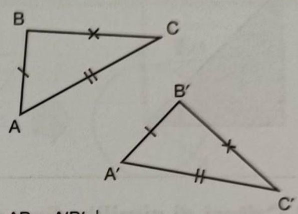
$AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$ $\rightarrow$ $ABC \cong A'B'C'$

2° criterio



$AC \cong A'C'$, $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$, $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$ $\rightarrow$ $ABC \cong A'B'C'$

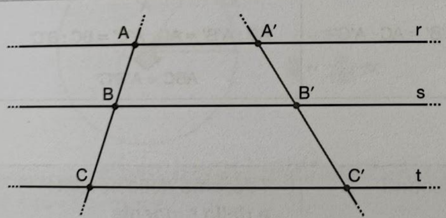
3° criterio



$AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$ $\rightarrow$ $ABC \cong A'B'C'$

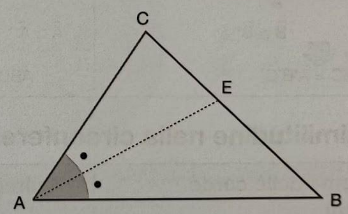
Il teorema di Talete

Teorema di Talete



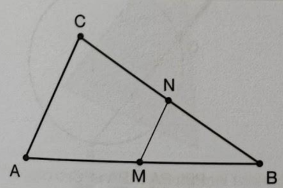
$r \parallel s \parallel t \Rightarrow AB : BC = A'B' : B'C'$

Teorema della bisettrice di un angolo interno di un triangolo



$BE : CE = AB : AC$

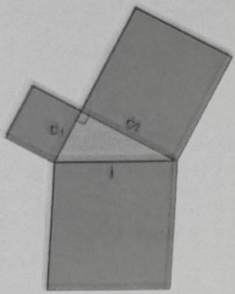
Conseguenza del teorema di Talete



$AM \cong MB$, $CN \cong NB$ $\rightarrow$ $MN \parallel AC$, $MN \cong \frac{1}{2} AC$

L'equivalenza e la similitudine

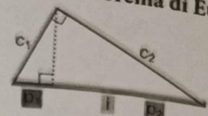
Il teorema di Pitagora



$c_1^2 + c_2^2 = i^2$

I teoremi di Euclide

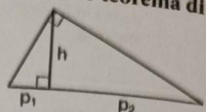
- **Primo teorema di Euclide**



$i : c_1 = c_1 : p_1$

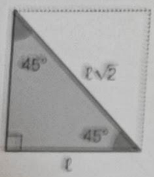
$i : c_2 = c_2 : p_2$

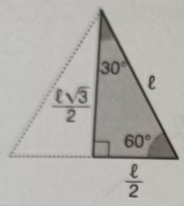
- **Secondo teorema di Euclide**



$p_1 : h = h : p_2$

Relazioni fra i lati di triangoli notevoli

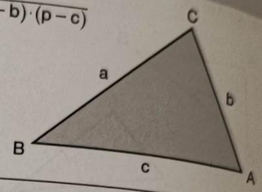




Formula di Erone

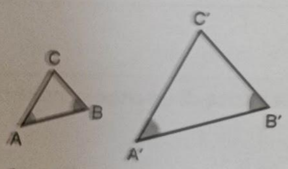
$\mathcal{A} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$

con $p = \dfrac{a+b+c}{2}$



Criteri di similitudine dei triangoli

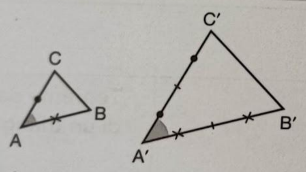
1° criterio



$\widehat{A} \cong \widehat{A'}$ $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$

$ABC \approx A'B'C'$

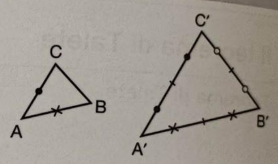
2° criterio



$\widehat{A} \cong \widehat{A'}$ $AB : A'B' = AC : A'C'$

$ABC \approx A'B'C'$

3° criterio

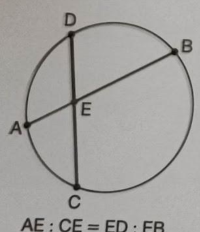


$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$

$ABC \approx A'B'C'$

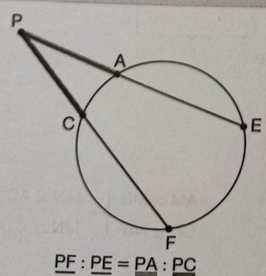
La similitudine nella circonferenza

Teorema delle corde secanti



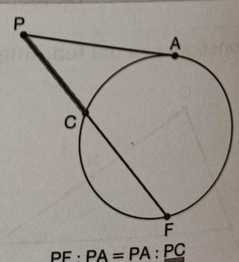
$\underline{AE} : \underline{CE} = \underline{ED} : \underline{EB}$

Teorema delle secanti



$\underline{PF} : \underline{PE} = \underline{PA} : \underline{PC}$

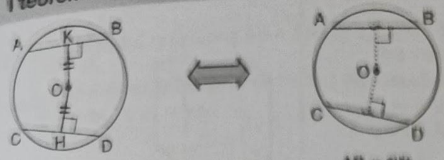
Teorema della secante e della tangente



$\underline{PF} : \underline{PA} = \underline{PA} : \underline{PC}$

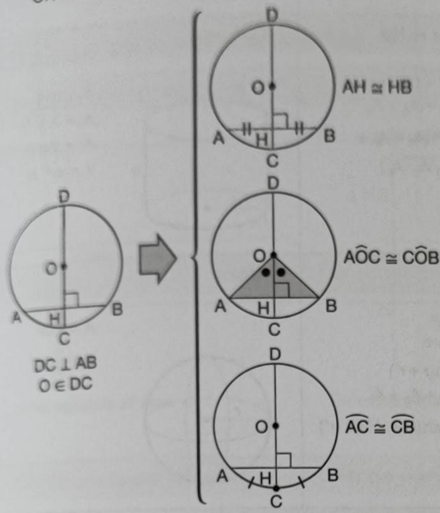
La circonferenza

I teoremi sulle corde



$OH \cong OK$

$AB \cong CD$



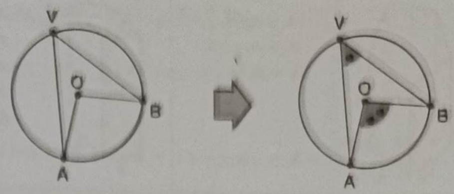
$DC \perp AB$
$O \in DC$

$AH \cong HB$

$A\widehat{O}C \cong C\widehat{O}B$

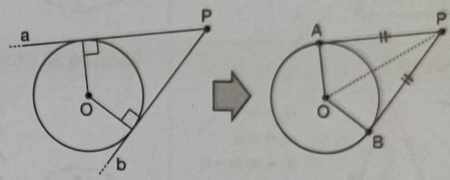
$\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{CB}$

Angoli alla circonferenza e angoli al centro



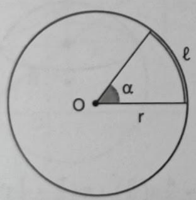
Ogni angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro corrispondente.

Tangente a una circonferenza da un punto esterno



Se da un punto esterno a una circonferenza si conducono le rette tangenti, i segmenti di tangente risultano congruenti.

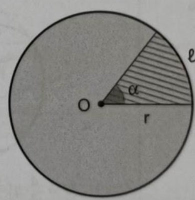
La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio



$c = 2\pi r$

$\ell = \frac{\alpha}{180}\pi r$

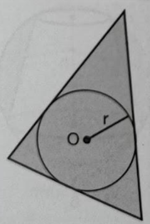
Misure della circonferenza (c) e dell'arco di angolo al centro α (ℓ).



$C = \pi r^2$

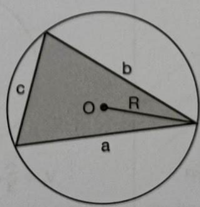
$S = \frac{\alpha}{360}\pi r^2 = \frac{1}{2}\ell r$

Misure dell'area del cerchio (C) e dell'area del settore circolare di angolo al centro α (S).



$r = \frac{\mathcal{A}}{p}$

Raggio del cerchio inscritto nel triangolo.

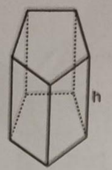


$R = \frac{abc}{4\mathcal{A}}$

Raggio del cerchio circoscritto al triangolo.

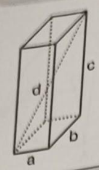
Formule di geometria solida

Prisma retto



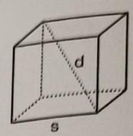
$A_\ell = 2p \cdot h$
$A_t = A_\ell + 2A_b$
$V = A_b \cdot h$

Parallelepipedo rettangolo



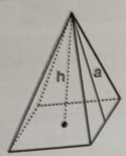
$A_b = ab$
$A_\ell = 2(ac + bc)$
$A_t = 2(ac + ab + bc)$
$V = a \cdot b \cdot c$
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Cubo



$A_b = s^2$
$A_t = 6s^2$
$V = s^3$
$d = s\sqrt{3}$

Piramide retta

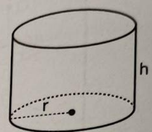


$A_\ell = p \cdot a$
$A_t = A_\ell + A_b$
$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$

Tronco di piramide retta

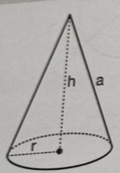
$A_\ell = (p + p') \cdot a$
$A_t = A_\ell + A_b + A_b'$
$V = \frac{1}{3} h (A_b + A_b' + \sqrt{A_b \cdot A_b'})$

Cilindro



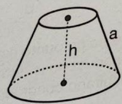
$A_b = \pi r^2$
$A_\ell = 2\pi r \cdot h$
$A_t = 2\pi r (h + r)$
$V = \pi r^2 \cdot h$

Cono



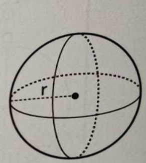
$A_b = \pi r^2$
$A_\ell = \pi r a$
$A_t = \pi r (a + r)$
$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

Tronco di cono



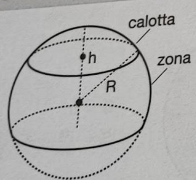
$A_b = \pi r^2$
$A_b' = \pi r'^2$
$A_\ell = \pi a (r + r')$
$A_t = A_\ell + A_b + A_b'$
$V = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + r'^2 + r \cdot r')$

Sfera



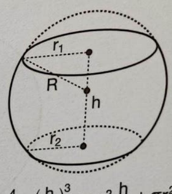
$A = 4\pi r^2$
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Calotta e zona sferica



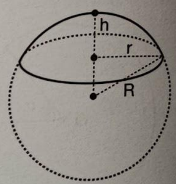
$S = 2\pi R h$

Segmento sferico a due basi



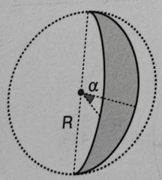
$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r_1^2 \frac{h}{2} + \pi r_2^2 \frac{h}{2}$$

Segmento sferico a una base



$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r^2 \frac{h}{2} = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$$

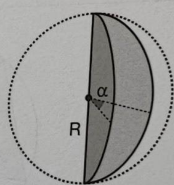
Fuso sferico



$$S_f = 2R^2 \alpha^{rad} = \frac{\alpha°}{90°} \cdot \pi R^2$$

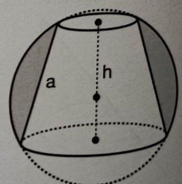
α^{rad}: ampiezza del diedro in radianti
$\alpha°$: ampiezza del diedro in gradi

Spicchio sferico



$$V_s = \frac{2}{3}\alpha^{rad} R^3 = \frac{\alpha°}{270°} \pi R^3$$

Anello sferico



$$V_a = \frac{1}{6}\pi a^2 h$$

GEOMETRIA ANALITICA NEL PIANO

La distanza fra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ è data da: $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Il punto medio del segmento AB è $M(x_M; y_M)$ con: $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $\quad y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

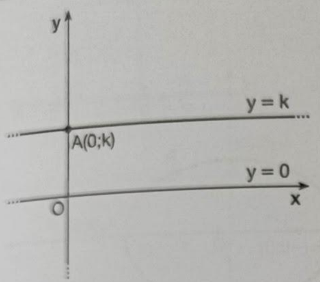
Il baricentro di un triangolo di vertici $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ è $G(x_G; y_G)$ con:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

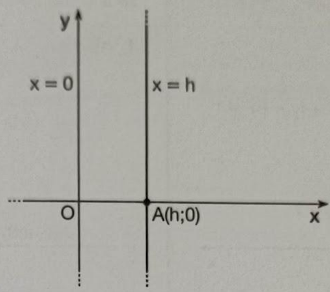
La distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta r di equazione $ax + by + c = 0$ è uguale a: $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Il piano cartesiano e la retta

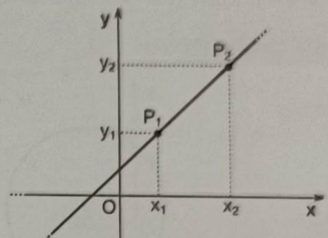
L'equazione di una retta



Retta parallela all'asse x.



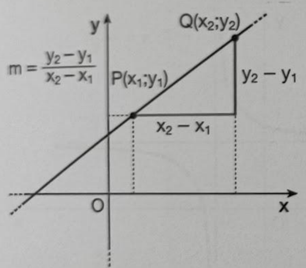
Retta parallela all'asse y.



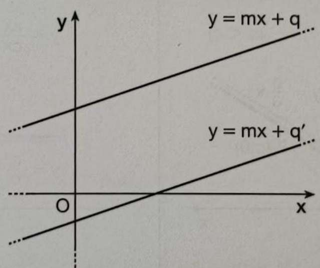
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Retta non parallela agli assi passante per i punti $P_1(x_1;y_1)$ e $P_2(x_2;y_2)$

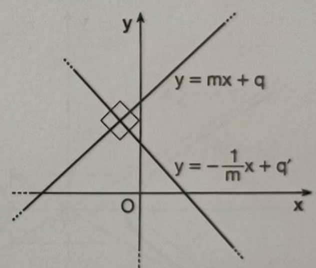
Coefficiente angolare



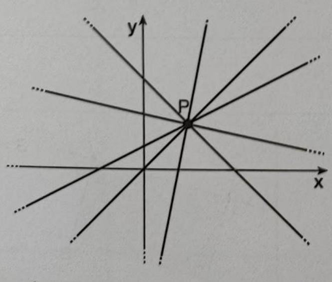
Rette parallele



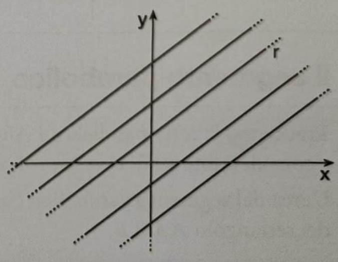
Rette perpendicolari



I fasci di rette



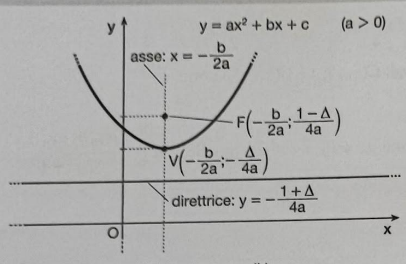
Fascio proprio di rette per un punto P: insieme di tutte le rette del piano passanti per P. P è detto **centro del fascio**.



Fascio improprio di rette parallele a una retta r.

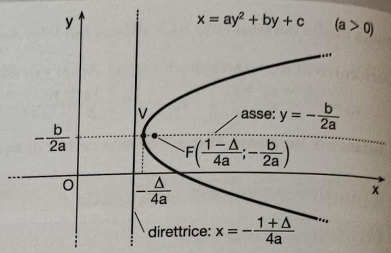
Le coniche

La parabola con asse parallelo all'asse y



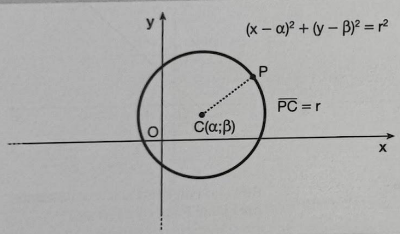
se a < 0 la concavità è rivolta verso il basso

La parabola con asse parallelo all'asse x

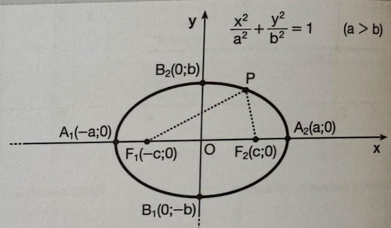


se a < 0 la concavità è rivolta nel verso opposto

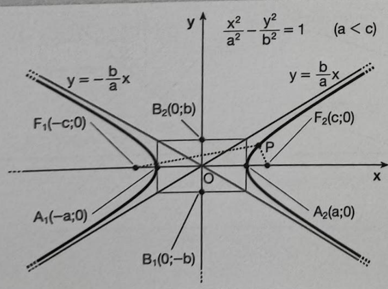
La circonferenza



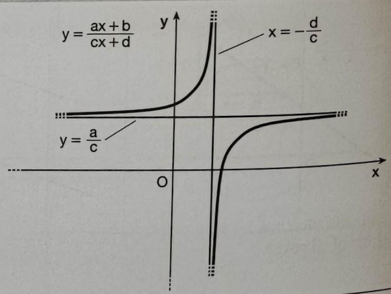
L'ellisse



L'iperbole

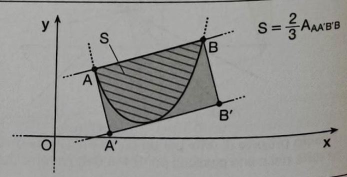


La funzione omografica



Il segmento parabolico

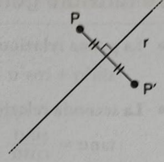
Tracciamo la retta parallela ad *AB* e tangente alla parabola, e consideriamo su di essa le proiezioni *A′* e *B′* di *A* e *B*. L'area del segmento parabolico è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo *AA′B′B*.



La simmetria assiale

Fissata nel piano una retta r, la **simmetria assiale rispetto alla retta r** è quella isometria che a ogni punto del piano P fa corrispondere il punto P' del semipiano opposto rispetto a r, in modo che r sia l'asse del segmento PP', ossia:

- r passa per il punto medio di PP';
- PP' è perpendicolare alla retta r.

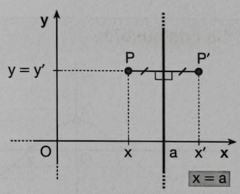


La retta r è detta **asse di simmetria.**

Nel piano cartesiano prendiamo in esame le seguenti simmetrie assiali, fornendo le relative equazioni.

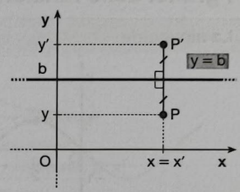
Simmetria con asse $x = a$ (asse parallelo all'asse y)

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$



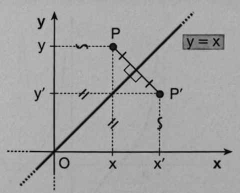
Simmetria con asse $y = b$ (asse parallelo all'asse x)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$



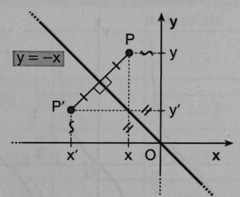
Simmetria con asse $y = x$ (bisettrice del primo e terzo quadrante)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



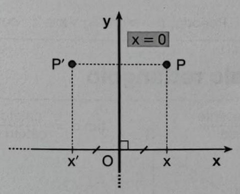
Simmetria con asse $y = -x$ (bisettrice del secondo e quarto quadrante)

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$



Simmetria con asse $x = 0$ (asse y)

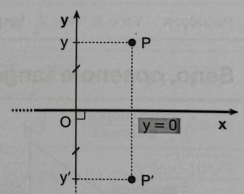
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



Due punti simmetrici rispetto all'asse y hanno ascisse opposte e la stessa ordinata.

Simmetria con asse $y = 0$ (asse x)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



Due punti simmetrici rispetto all'asse x hanno la stessa ascissa e ordinate opposte.

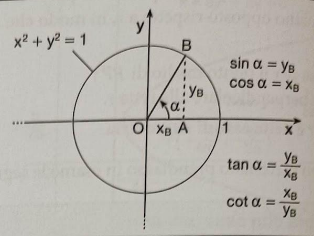
Le funzioni goniometriche

- **La prima relazione fondamentale**

  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

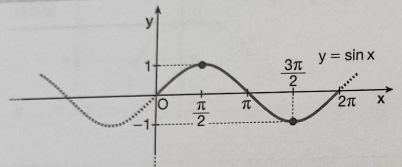
- **La seconda relazione fondamentale**

  $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



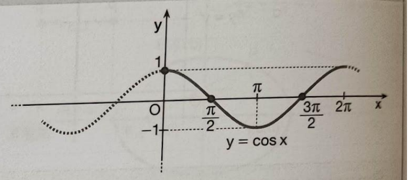
I grafici delle funzioni goniometriche

La sinusoide



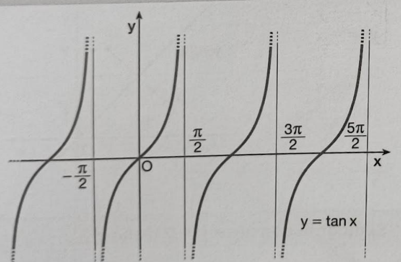
Periodo: 2π $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$ $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$

La cosinusoide



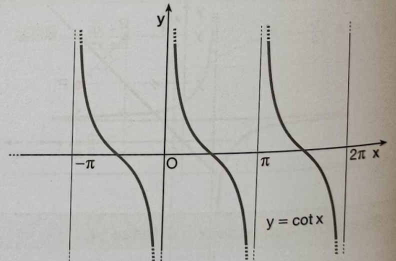
Periodo: 2π $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$ $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$

La tangentoide



Periodo: π $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$ $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$

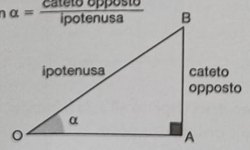
La cotangentoide



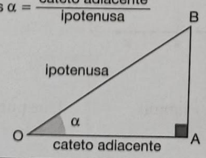
Periodo: π $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$ $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$

Seno, coseno e tangente su un triangolo rettangolo

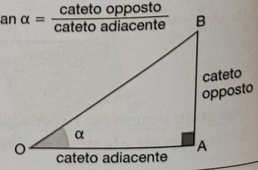
$\sin\alpha = \dfrac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}$



$\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}$

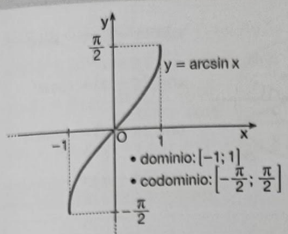


$\tan\alpha = \dfrac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}$

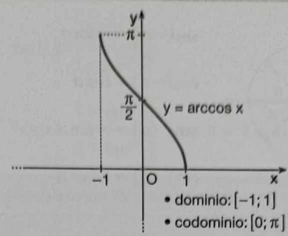


Le funzioni goniometriche inverse

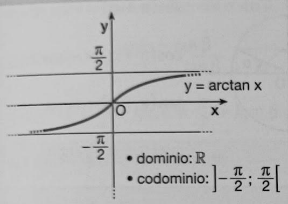
Arcoseno



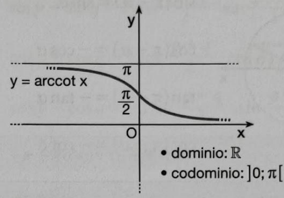
Arcocoseno



Arcotangente



Arcocotangente

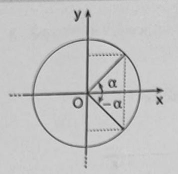


Seno, coseno, tangente e cotangente di angoli notevoli

radianti	gradi	seno	coseno	tangente	cotangente
0	0	0	1	0	non esiste
$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{8}$	22°30′	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{5}$	36°	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{3}{10}\pi$	54°	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{2}{5}\pi$	72°	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
$\frac{5}{12}\pi$	75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	non esiste	0

Funzioni goniometriche di angoli associati

α e $-\alpha$



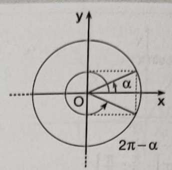
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

α e $2\pi - \alpha$



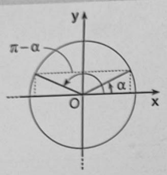
$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$

$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

α e $\pi - \alpha$



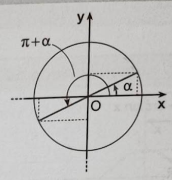
$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

α e $\pi + \alpha$



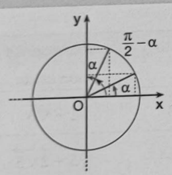
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$



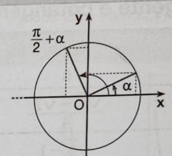
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

α e $\frac{\pi}{2} + \alpha$



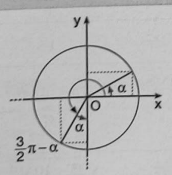
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$

α e $\frac{3}{2}\pi - \alpha$



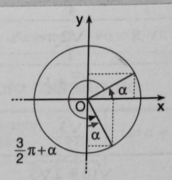
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \cot\alpha$

$\cot\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \tan\alpha$

α e $\frac{3}{2}\pi + \alpha$



$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cot\alpha$

$\cot\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\tan\alpha$

Le formule goniometriche

Le formule di addizione

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
con $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi, \beta\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi$

Le formule parametriche

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \text{ con } \alpha\neq\pi+2k\pi$$

Le formule di sottrazione

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
con $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi, \beta\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi$

Le formule di prostaferesi

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

Le formule di duplicazione

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Le formule di Werner

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

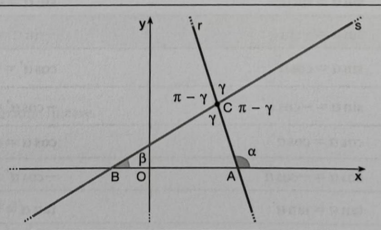
Le formule di bisezione

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

L'angolo fra due rette

$r: y=mx+q$, con $m=\tan\alpha$
$s: y=m'x+q'$, con $m'=\tan\beta$

$$\tan\gamma=\tan(\alpha-\beta)=\frac{m-m'}{1+mm'}.$$

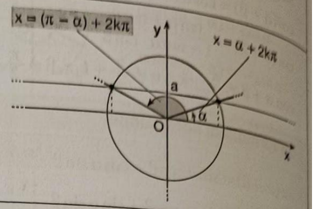


Equazioni goniometriche elementari

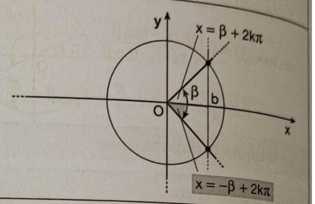
Un'**equazione** si dice **goniometrica** se contiene almeno una funzione goniometrica dell'incognita.
Si chiamano **elementari** le equazioni goniometriche del tipo:

$\sin x = a$, $\cos x = b$, $\tan x = c$.

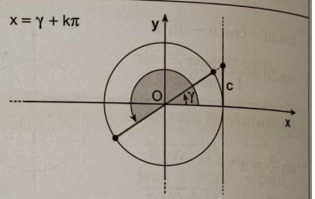
$\sin x = a$ — determinata se $-1 \leq a \leq 1$; impossibile se $a < -1 \vee a > 1$



$\cos x = b$ — determinata se $-1 \leq b \leq 1$; impossibile se $b < -1 \vee b > 1$



$\tan x = c$ — determinata $\forall c \in \mathbb{R}$



Ci sono particolari equazioni elementari che si possono risolvere con le proprietà della seguente tabella.

Tipo di equazione	Proprietà
$\sin\alpha = \sin\alpha'$	$\sin\alpha = \sin\alpha' \leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi \vee \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$
$\sin\alpha = -\sin\alpha'$	$-\sin\alpha' = \sin(-\alpha')$
$\sin\alpha = \cos\alpha'$	$\cos\alpha' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$
$\sin\alpha = -\cos\alpha'$	$-\cos\alpha' = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha'\right)$
$\cos\alpha = \cos\alpha'$	$\cos\alpha = \cos\alpha' \leftrightarrow \alpha = \pm\alpha' + 2k\pi$
$\cos\alpha = -\cos\alpha'$	$-\cos\alpha' = \cos(\pi - \alpha')$
$\tan\alpha = \tan\alpha'$	$\tan\alpha = \tan\alpha' \leftrightarrow \alpha = \alpha' + k\pi$
$\tan\alpha = -\tan\alpha'$	$-\tan\alpha' = \tan(-\alpha')$

Equazioni lineari in seno e coseno

$a\sin x + b\cos x + c = 0 \qquad a \neq 0, b \neq 0$

Metodo algebrico

- $c = 0 \rightarrow$ si divide per $\cos x \neq 0 \rightarrow \tan x = -\frac{b}{a}$.
- $c \neq 0 \rightarrow$ si determinano le eventuali soluzioni di tipo $x = \pi + 2k\pi$; se $x \neq \pi + 2k\pi$, applicando le formule parametriche si ottiene

$$\begin{cases} t^2(c-b) + 2at + b + c = 0 \\ t = \tan\frac{x}{2} \end{cases}$$

Metodo grafico

Si sostituisce $Y = \sin x$ e $X = \cos x$ e si risolve quindi il sistema seguente:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ aY + bX + c = 0 \end{cases}$$

Metodo dell'angolo aggiunto

Si risolve il sistema seguente:

$$\begin{cases} \sin(x+\alpha) = -\frac{c}{r} \\ r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \tan\alpha = \frac{b}{a} \end{cases}$$

Equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno

$a\sin^2 x + b\cos x\,\sin x + c\cos x^2 = 0$

Primo metodo

- $a = 0 \rightarrow \cos x\,(b\sin x + c\cos x) = 0$
- $c = 0 \rightarrow \sin x(a\sin x + b\cos x) = 0$
- $a \neq 0 \wedge c \neq 0 \rightarrow$ si divide per $\cos^2 x \neq 0 \rightarrow a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$

Secondo metodo

Sostituendo $\begin{cases} \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2} \\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \end{cases}$ si ottiene un'equazione lineare.

Un'equazione lineare della forma

$$a\sin^2 x + b\sin x\,\cos x + c\cos^2 x = d \qquad (d \neq 0)$$

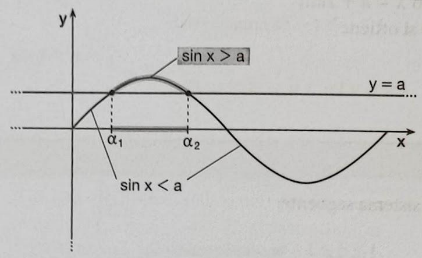
è riconducibile a un'equazione omogenea sostituendo $d = d(\cos^2 x + \sin^2 x)$.

Disequazioni goniometriche

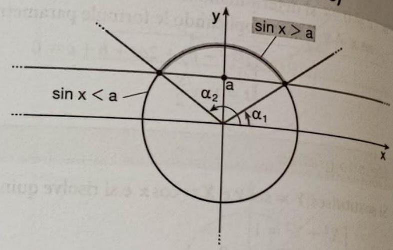
Primo metodo
Si studia la posizione reciproca tra il grafico della funzione goniometrica e la retta $y = a$.

Secondo metodo
Si disegna la circonferenza goniometrica, si risolve l'equazione associata, si determinano gli archi in cui è soddisfatta.

La funzione seno (primo metodo)

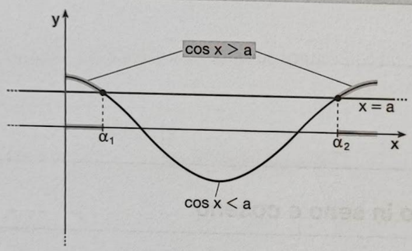


La funzione seno (secondo metodo)

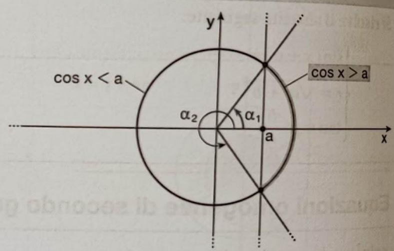


$\sin x > a \rightarrow \alpha_1 + 2k\pi < x < \alpha_2 + 2k\pi$; $\quad \sin x < a \rightarrow 0 + 2k\pi < x < \alpha_1 + 2k\pi \vee \alpha_2 + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$

La funzione coseno (primo metodo)

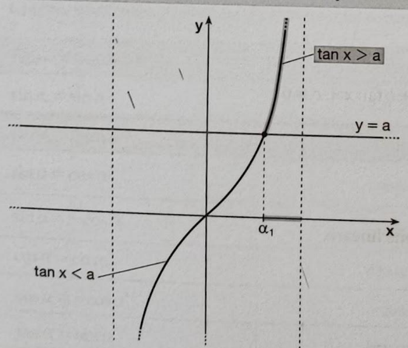


La funzione coseno (secondo metodo)

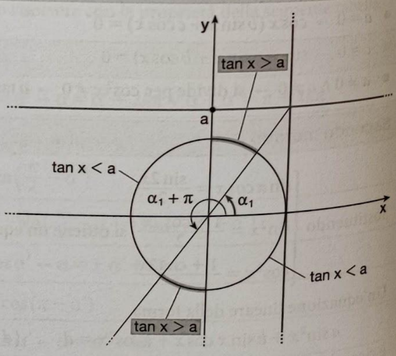


$\cos x > a \rightarrow 0 + 2k\pi < x < \alpha_1 + 2k\pi \vee \alpha_2 + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$; $\quad \cos x < a \rightarrow \alpha_1 + 2k\pi < x < \alpha_2 + 2k\pi$

La funzione tangente (primo metodo)



La funzione tangente (secondo metodo)



$\tan x > a \rightarrow \alpha_1 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\quad \tan x < a \rightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \alpha_1 + k\pi$

GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

Distanza fra due punti e punto medio

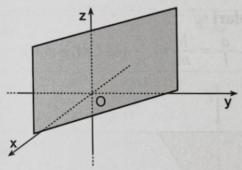
- La **distanza fra due punti** $A(x_A; y_A; z_A)$ e $B(x_B; y_B; z_B)$ è: $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- Le coordinate del **punto medio** M di un segmento AB sono:
  $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$, $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Vettori nello spazio

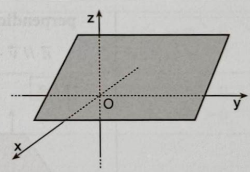
- A ogni punto $A(a_x; a_y; a_z)$ è associato un vettore $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ con modulo
  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.
- Dati i punti $A(x_A; y_A; z_A)$ e $B(x_B; y_B; z_B)$, il vettore da essi individuato è $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- **Operazioni con due vettori** $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ e $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$:
  - somma: $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z)$;
  - differenza: $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$.
  - prodotto per uno scalare: $k\vec{a} = (ka_x; ka_y; ka_z)$.
  - prodotto scalare: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.
- $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono **paralleli** se $\vec{a} = k\vec{b}$, con $k \in \mathbb{R}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ cioè:
  $\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$
- $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono **perpendicolari** se $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, cioè:
  $\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Punti, piani e rette

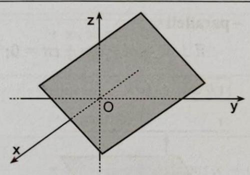
- **L'equazione generale del piano** passante per $P_0(x_0; y_0; z_0)$ con vettore normale $\vec{n}(a; b; c)$ è:
  $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad \rightarrow \quad ax + by + cz + d = 0$.



piano ax + by + d = 0
c = 0: il vettore normale è (a; b; 0), il piano è parallelo all'asse z e perpendicolare al piano Oxy.

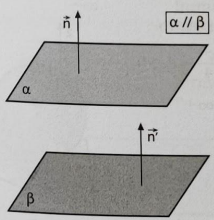


piano ax + cz + d = 0
b = 0: il vettore normale è (a; 0; c), il piano è parallelo all'asse y e perpendicolare al piano Oxz.

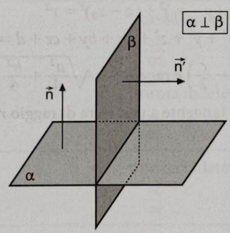


piano by + cz + d = 0
a = 0: il vettore normale è (0; b; c), il piano è parallelo all'asse x e perpendicolare al piano Oyz.

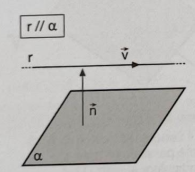
- Due piani di equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono:
  - **paralleli** se
    $\vec{n} \,/\!/\, \vec{n'} \rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (se $a', b', c' \neq 0$);



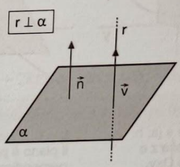
  - **perpendicolari** se
    $\vec{n} \perp \vec{n'} \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0 \rightarrow aa' + bb' + cc' = 0$.



- La **distanza** del **punto** $A(x_A; y_A; z_A)$ dal **piano** α di equazione $ax+by+cz+d=0$ è:
  $$d(A,\alpha)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$
- La **retta** passante per $P_0(x_0; y_0; z_0)$ con vettore direzione $\vec{v}(l; m; n)$ non nullo ha **equazioni parametriche**
  $$\begin{cases} x=x_0+kl \\ y=y_0+km, \quad \text{con } k\in\mathbb{R}, \\ z=z_0+kn \end{cases}$$
  ed **equazioni cartesiane**, valide se $l, m, n \neq 0$,
  $$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$
- La retta passante per due punti $A(x_1; y_1; z_1)$ e $B(x_2; y_2; z_2)$ ha equazioni
  $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$
  che sono le **condizioni di allineamento** di tre punti A, B e $P(x; y; z)$.
- Una retta può essere individuata come intersezione di due piani non paralleli:
  $$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0. \end{cases}$$
- Due rette con vettori direzione $\vec{v}(l; m; n)$ e $\vec{w}(l'; m'; n')$ sono:
  - **parallele** se $\vec{v} \,//\, \vec{w} \to \frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}$ (se $l', m', n' \neq 0$);
  - **perpendicolari** se $\vec{v}\perp\vec{w} \to \vec{v}\cdot\vec{w}=0 \to ll'+mm'+nn'=0$.
- Un piano con vettore normale $\vec{n}(a; b; c)$ e una retta con vettore direzione $\vec{v}(l; m; n)$ sono:
  - **paralleli** se
    $\vec{n}\perp\vec{v} \to al+bm+cn=0$;

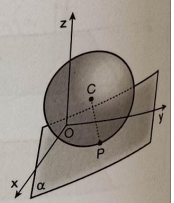


  - **perpendicolari** se
    $\vec{n}\,//\,\vec{v} \to \frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$ (se $l, m, n \neq 0$).



Superficie sferica

- Una **superficie sferica** di centro $C(x_0; y_0; z_0)$ e raggio r ha **equazione**:
  $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$
  L'equazione $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ rappresenta una sfera di centro $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$ e raggio $r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d}$ se $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d\geq 0$.
- Un piano α è tangente a una sfera di raggio r e centro C se $d(C,\alpha)=r$.



LIMITI E FUNZIONI CONTINUE

Le operazioni sui limiti

Indichiamo con α un valore che può essere $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0^+, x_0^-, $+\infty$, $-\infty$.
Per i limiti della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni si ha la seguente tabella.

$\lim_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]$	$\lim_{x\to\alpha}[f(x)\cdot g(x)]$	$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}$
$l \in \mathbb{R}$	$m \in \mathbb{R}$ $m \neq 0$	$m+l$	$m \cdot l$	$\frac{l}{m}$
$l \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$	0	l	0	$+\infty$, se $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ per $x \to \alpha$ $-\infty$, se $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ per $x \to \alpha$
0	0	0	0	forma indeterminata "$\frac{0}{0}$"
$l \in \mathbb{R}$ $l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$, se $l > 0$ $-\infty$, se $l < 0$	0
$l \in \mathbb{R}$ $l \neq 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$, se $l < 0$ $-\infty$, se $l > 0$	0
$+\infty$	$m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$, se $m > 0$ $-\infty$, se $m < 0$	$+\infty$, se $m > 0$ $-\infty$, se $m < 0$
$-\infty$	$m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$, se $m < 0$ $-\infty$, se $m > 0$	$+\infty$, se $m < 0$ $-\infty$, se $m > 0$
$+\infty$ $-\infty$	0	$+\infty$ $-\infty$	forma indeterminata "$0 \cdot \infty$"	$+\infty$, se $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ per $x \to \alpha$ $-\infty$, se $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ per $x \to \alpha$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forma indeterminata "$\frac{\infty}{\infty}$"
$+\infty$	$-\infty$	forma indeterminata "$+\infty-\infty$"	$-\infty$	forma indeterminata "$\frac{\infty}{\infty}$"
$-\infty$	$+\infty$	forma indeterminata "$+\infty-\infty$"	$-\infty$	forma indeterminata "$\frac{\infty}{\infty}$"
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	forma indeterminata "$\frac{\infty}{\infty}$"

Limiti di funzioni polinomiali e funzioni razionali

- $\lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n = \infty$ con segno dato dalla regola dei segni del prodotto.
- $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } n > m \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$

Limiti notevoli

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$, dove e è un numero irrazionale, $e \simeq 2{,}7182\ldots$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Gerarchia degli infiniti

Date le tre famiglie di funzioni:

$$(\log_a x)^\alpha, \quad x^\beta, \quad b^x, \quad \text{con } \alpha, \beta > 0 \text{ e } a, b > 1,$$

allora, per $x \to +\infty$, ognuna è un infinito di ordine inferiore rispetto a quella che si trova a destra, cioè:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0.$$

Sinteticamente, possiamo scrivere:

$$(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x.$$

Le forme indeterminate

La forma indeterminata $+\infty - \infty$

- Limite di funzione polinomiale
  $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 4x + 5) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
- Utilizzare la gerarchia degli infiniti
  $\lim_{x\to+\infty} \ln x - e^x = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\dfrac{\ln x}{e^x} - 1\right) = -\infty$
- Razionalizzazione
  $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+5} = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+5}) \cdot \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+5}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x} + 2 - \cancel{x} - 5}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}} = 0$

La forma indeterminata $0 \cdot \infty$

$\lim_{x\to 0} [(1 - \cos 2x) \cdot \cot x] = \lim_{x\to 0} \left(2\sin^{\cancel{2}} x \cdot \dfrac{\cos x}{\cancel{\sin x}}\right) = \lim_{x\to 0} (2 \sin x \cos x) = 0$

La forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

- Rapporto di funzioni polinomiali

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^3+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}=0$$

- Utilizzare il teorema di De L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x(1+x)}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2x^2}{x^2+1}=2$$

La forma indeterminata $\frac{0}{0}$

- Utilizzare il teorema di Ruffini per scomporre sia il numeratore sia il denominatore

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3}{2}$$

- Utilizzare il teorema di De L'Hospital

$$\lim_{x\to -1}\frac{-x^3+3x^2+9x+5}{x^2-7-6x}=\lim_{x\to -1}\frac{-3x^2+6x+9}{2x-6}=0$$

La forma indeterminata 1^∞

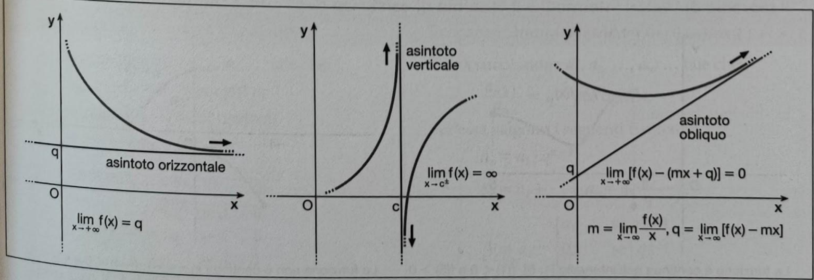
Utilizzare il limite notevole $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{x-2+2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{x-2}\cdot\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^2=e^3\cdot 1=e^3$$

La forma indeterminata ∞^0

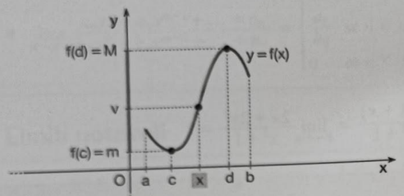
$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=1$ (poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ per la gerarchia degli infiniti)

Gli asintoti e la loro ricerca



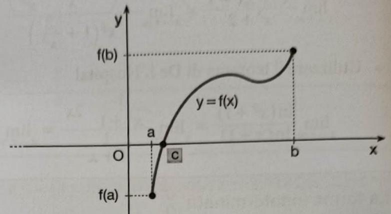
I teoremi sulle funzioni continue

Il teorema di Weierstrass (esistenza massimo e minimo) e il teorema dei valori intermedi



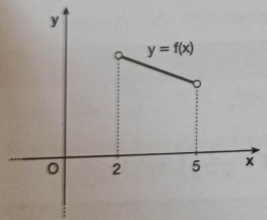
f continua in $[a; b] \Rightarrow \exists\ c, d \in [a; b] \mid f(c) = m, f(d) = M$,
dove m è il minimo assoluto e M il massimo assoluto.
f continua in $[a; b] \Rightarrow \forall\ v : m \leq v \leq M\ \exists\ x \in [a; b] : f(x) = v$

Il teorema di esistenza degli zeri

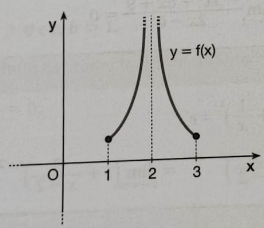


f continua in $[a; b]$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0 \Rightarrow \exists\ c \in\ ]a; b[\ : f(c) = 0$

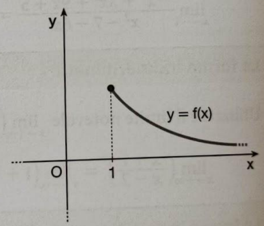
Il teorema di Weierstrass: controesempi



La funzione è continua nell'intervallo limitato aperto $]2; 5[$. Essa è priva di massimo e minimo in questo intervallo.

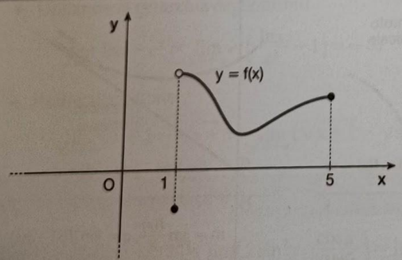


La funzione non è continua nel punto $x = 2$. Nell'intervallo $[1; 3]$ essa assume minimo, ma è priva di massimo.

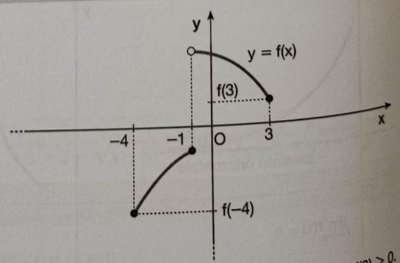


La funzione è continua nell'intervallo illimitato $[1, +\infty[$. Non vale il teorema di Weierstrass e la funzione è priva di minimo assoluto.

Il teorema dei valori intermedi e il teorema di esistenza degli zeri: controesempio



La funzione è continua nell'intervallo $]1; 5]$, $f(1) < 0$ e $f(5) > 0$ ma non esiste alcun punto dell'intervallo in cui essa si annulla.

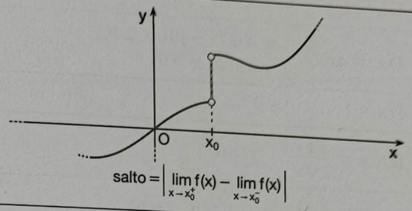


La funzione non è continua in $x = -1$; $f(-4) < 0$ e $f(3) > 0$. Non esiste alcun punto dell'intervallo $[-4; 3]$ in cui essa si annulla.

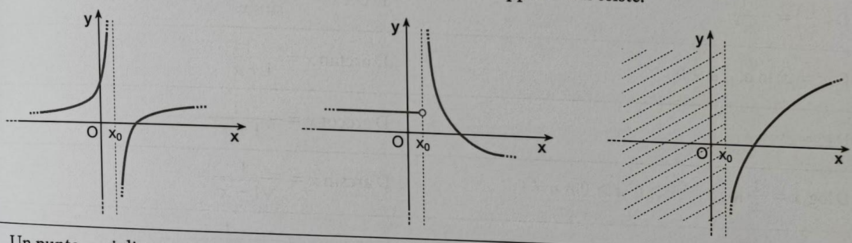
I punti di discontinuità di una funzione

Un punto x_0 di un intervallo $[a; b]$ si dice **punto di discontinuità** (o **punto singolare**) per una funzione $f(x)$ se la funzione non è continua in x_0.

Un punto x_0 si dice **punto di discontinuità di prima specie** per la funzione $f(x)$ quando per $x \to x_0$ il limite destro e il limite sinistro di $f(x)$ sono entrambi finiti ma diversi fra loro.

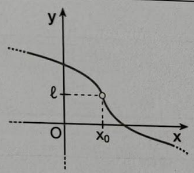


Un punto x_0 si dice **punto di discontinuità di seconda specie** per la funzione $f(x)$ quando per $x \to x_0$ almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di $f(x)$ è infinito oppure non esiste.

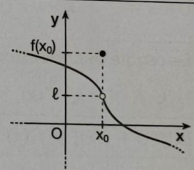


Un punto x_0 si dice **punto di discontinuità di terza specie** per la funzione $f(x)$ quando:

1. esiste ed è finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$;
2. f non è definita in x_0 oppure, se lo è, risulta $f(x_0) \neq l$.



f non è definita in x_0



f è definita in x_0 ma $f(x_0) \neq \ell$

I limiti delle progressioni

Progressione aritmetica di ragione *d*	Progressione geometrica di ragione *q*
È una successione $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tale che: $a_{n+1} - a_n = d$ per ogni n; per essa valgono i seguenti risultati: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ $S_n = a_1 + \ldots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } d > 0 \\ -\infty, & \text{se } d < 0 \\ a_1, & \text{se } d = 0 \end{cases}$	È una successione $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tale che: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ per ogni n; per essa valgono i seguenti risultati: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $S_n = a_1 + \ldots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} a_1, & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{se } \lvert q \rvert < 1 \\ \pm\infty, & \text{se } q > 1 \end{cases}$ Il limite non esiste se $q \leq -1$.

DERIVATE

Le derivate

$\mathrm{D}\,k=0$	$\mathrm{D}\sin x=\cos x$
$\mathrm{D}\,x^a=ax^{a-1}$, se $a\in\mathbb{N}-\{0\}, x\in\mathbb{R}$; se $a\in\mathbb{R}, x>0$	$\mathrm{D}\sin x^\circ=\dfrac{\pi}{180^\circ}\cos x^\circ$
$\mathrm{D}\,x=1$	$\mathrm{D}\cos x=-\sin x$
$\mathrm{D}\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\quad x>0$	$\mathrm{D}\cos x^\circ=-\dfrac{\pi}{180^\circ}\sin x^\circ$
$\mathrm{D}\sqrt[n]{x}=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},\quad x>0, n\in\mathbb{N}$	$\mathrm{D}\tan x=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathrm{D}\cot x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$
$\mathrm{D}\,a^x=a^x\ln a,\quad a>0$	$\mathrm{D}\arctan x=\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{D}\,e^x=e^x$	$\mathrm{D}\,\mathrm{arccot}\,x=-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{D}\log_a x=\dfrac{1}{x}\log_a e,\quad x>0, a>0\wedge a\neq 1$	$\mathrm{D}\arcsin x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{D}\ln x=\dfrac{1}{x},\quad x>0$	$\mathrm{D}\arccos x=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Le regole di derivazione

$\mathrm{D}[k\cdot f(x)]=k\cdot f'(x)$

$\mathrm{D}[f(x)+g(x)]=f'(x)+g'(x)$

$\mathrm{D}[f(x)\cdot g(x)]=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

$\mathrm{D}[f(x)\cdot g(x)\cdot z(x)]=f'(x)\cdot g(x)\cdot z(x)+f(x)\cdot g'(x)\cdot z(x)+f(x)\cdot g(x)\cdot z'(x)$

$\mathrm{D}[f(x)]^a=a[f(x)]^{a-1}\cdot f'(x),\quad a\in\mathbb{R}$

$\mathrm{D}\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$

$\mathrm{D}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$\mathrm{D}[f(g(x))]=f'(z)\cdot g'(x),\quad \text{con } z=g(x)$

$\mathrm{D}[f(g(z(x)))]=f'(u)\cdot g'(t)\cdot z'(x),\quad \text{con } t=z(x), u=g(t)$

$\mathrm{D}[f(x)]^{g(x)}=[f(x)]^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+\dfrac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right]$

$\mathrm{D}[f^{-1}(y)]=\dfrac{1}{f'(x)},\quad \text{con } x=f^{-1}(y)$

La derivata di una funzione

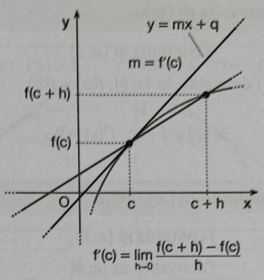
Interpretazione geometrica: la derivata di una funzione in un punto c rappresenta il **coefficiente angolare** della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa c.

- In un punto c, **la derivata sinistra** di una funzione è:

$$f'_-(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h};$$

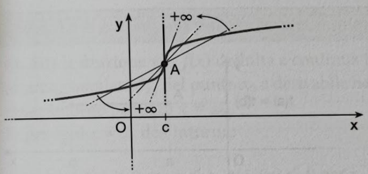
- In un punto c, **la derivata destra** di una funzione è:

$$f'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

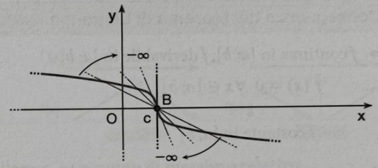


Punti di non derivabilità

Punti a tangente verticale

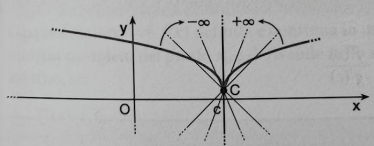


Nel punto di ascissa c la tangente al grafico esiste ed è una retta parallela all'asse y, di equazione $x = c$. In questo caso $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$.

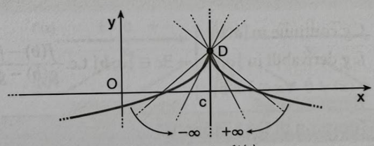


Nel punto di ascissa c la tangente al grafico è ancora una retta parallela all'asse y, di equazione $x = c$, ma in questo caso $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$.

Punti di cuspide

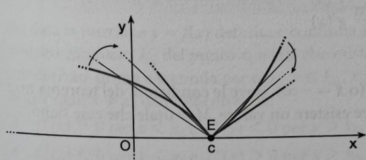


Nel punto di ascissa c la tangente al grafico della funzione è ancora una retta parallela all'asse y, di equazione $x = c$, ma $f'_-(c) = -\infty$, mentre $f'_+(c) = +\infty$, quindi $f'_-(c) \neq f'_+(c)$.

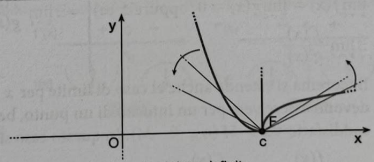


In questo caso $f'_-(c) = +\infty$, mentre $f'_+(c) = -\infty$; quindi abbiamo ancora: $f'_-(c) \neq f'_+(c)$.

Punti angolosi



La derivata sinistra e la derivata destra nel punto c sono finite ma diverse fra loro: $f'_-(c) \neq f'_+(c)$.

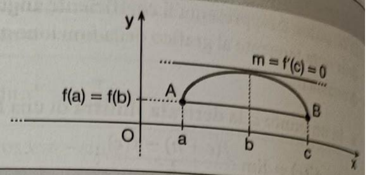


Nel punto c la derivata sinistra è finita, mentre $f'_+(c) = +\infty$.

I teoremi del calcolo differenziale

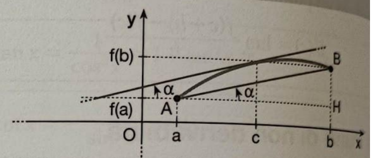
Teorema di Rolle

$$\begin{gathered} f \text{ continua in } [a; b] \\ f \text{ derivabile in }]a; b[, f(a) = f(b) \\ \Downarrow \\ \exists c \in]a; b[\text{ t.c. } f'(c) = 0 \end{gathered}$$



Teorema di Lagrange

$$\begin{gathered} f \text{ continua in } [a; b], \\ f \text{ derivabile in }]a; b[\\ \Downarrow \\ \exists c \in]a; b[\text{ t.c. } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \end{gathered}$$

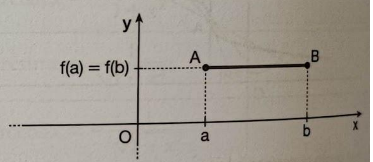


$f'(c) = m = \tan\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Conseguenze del teorema di Lagrange

- f continua in $[a; b]$, f derivabile in $]a; b[$

$$\begin{gathered} f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a; b[\\ \Downarrow \\ f \text{ costante in } [a; b] \end{gathered}$$



$f'(x) = 0 \; \forall x \in]a; b[$

- $$\left.\begin{array}{l} f, g \text{ continue in } [a; b] \\ f, g \text{ derivabili in }]a; b[\\ f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in]a; b[\end{array}\right| \Rightarrow f(x) = g(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Teorema di Cauchy

$$\left.\begin{array}{l} f, g \text{ continue in } [a; b] \\ f, g \text{ derivabili in }]a; b[\\ g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a; b[\end{array}\right| \Rightarrow \exists c \in]a; b[\text{ t.c. } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Teorema di De L'Hospital

Siano f, g definite in un intorno I di c, escluso al più il punto c;

$$\left.\begin{array}{l} f, g \text{ derivabili in } I \\ g'(x) \neq 0 \text{ in } I \\ \lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0 \text{ (oppure } \pm\infty) \\ \exists \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \end{array}\right| \Rightarrow \exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Il teorema si estende anche al caso di limite per $x \to +\infty$ (o $x \to -\infty$), dove le condizioni del teorema non devono essere vere per un intorno di un punto, bensì deve esistere un valore $M > 0$ tale che esse siano soddisfatte $\forall x > M$ (o $x < -M$). In questo caso si ha:

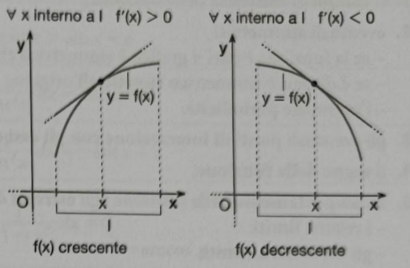
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

MASSIMI, MINIMI E FLESSI

Le funzioni crescenti e decrescenti e le derivate

Una funzione $y = f(x)$, continua in un intervallo I e derivabile nei suoi punti interni, è:

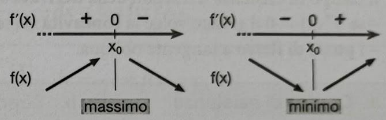
- **crescente** in I, se in ogni punto interno di I la sua **derivata prima è positiva**;
- **decrescente** in I, se in ogni punto interno di I la sua **derivata prima è negativa**.



La ricerca dei massimi, dei minimi e dei flessi orizzontali con lo studio della derivata prima

Condizione sufficiente per i massimi e minimi relativi

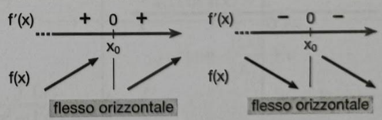
Sia data la funzione $y = f(x)$ definita e continua in un intorno completo I_{x_0} del punto x_0 e derivabile nello stesso intorno per ogni $x \neq x_0$.
Se per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno:



- si ha $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x > x_0$, allora x_0 è un punto di **massimo relativo**;
- si ha $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$, allora x_0 è un punto di **minimo relativo**;
- il segno della derivata prima è sempre lo stesso, allora x_0 non è un punto estremante.

Condizione sufficiente per i flessi orizzontali

Data la funzione $y = f(x)$ definita e continua in un intorno completo del punto x_0 e derivabile nello stesso intorno, se:

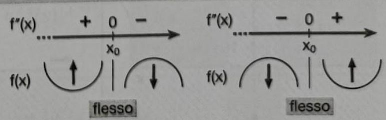


- $f'(x) = 0$;
- il segno della derivata prima è lo stesso per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno, allora x_0 è un punto di **flesso orizzontale**.

La ricerca dei flessi con lo studio della derivata seconda

Condizione sufficiente per i flessi

Sia data la funzione $y = f(x)$ definita e continua in un intorno completo I_{x_0} del punto x_0 e tale che esistano le sue derivate prima e seconda per ogni $x \in I_{x_0}$, $x \neq x_0$.
Se per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno si ha:



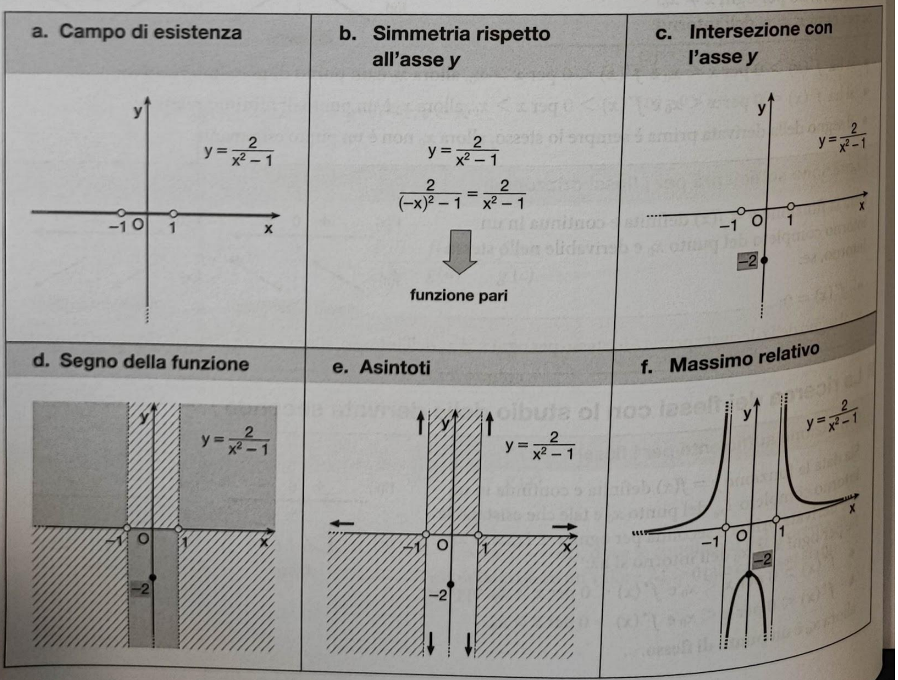
- $f''(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) < 0$ per $x > x_0$, oppure
- $f''(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) > 0$ per $x > x_0$,

allora x_0 è un **punto di flesso**.

STUDIO DELLE FUNZIONI

Per **tracciare il grafico** di una funzione $y = f(x)$ **studiamo:**

1. il **campo di esistenza** della funzione;
2. eventuali **simmetrie**:
   - se la funzione è pari il grafico è simmetrico rispetto all'asse y;
   - se è dispari è simmetrico rispetto all'origine;
   - l'eventuale **periodicità**;
3. gli eventuali **punti di intersezione con gli assi cartesiani**;
4. il **segno della funzione**;
5. il **comportamento** della funzione agli **estremi del campo di esistenza**, calcolando:
   - i relativi **limiti**;
   - gli eventuali **asintoti**;
   - gli eventuali punti di **discontinuità**;
6. il campo di esistenza e il segno della **derivata prima**:
   - se $f'(x) > 0$ la funzione è **crescente**, se $f'(x) < 0$ è **decrescente**;
   - gli eventuali punti di **massimo** o **minimo relativo** e di **flesso orizzontale** e i punti singolari di $f'(x)$ (**flessi verticali**, **cuspidi** e **punti angolosi**);
7. il campo di esistenza e il segno della **derivata seconda**:
   - se $f''(x) > 0$ il grafico volge la **concavità** verso l'alto, se $f''(x) < 0$ il grafico volge la **concavità** verso il basso;
   - i **punti di flesso** a tangente obliqua.



INTEGRALI

Integrali immediati delle funzioni fondamentali	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\})$	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + c$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \arctan x + c \\ -\text{arccot}\, x + c \end{cases}$

Integrali la cui primitiva è una funzione composta	
$\int [f(x)]^\alpha f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\})$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = in\|f(x)\| + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\cot f(x) + c$
$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \begin{cases} \arcsin f(x) + c \\ -\arccos f(x) + c \end{cases}$
$\int f'(x) a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \begin{cases} \arctan f(x) + c \\ -\text{arccot}\, f(x) + c \end{cases}$
$\int f'(x) \sin f(x)\, dx = -\cos f(x) + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}} dx = \begin{cases} \arcsin \frac{f(x)}{\|a\|} + c \\ -\arccos \frac{f(x)}{\|a\|} + c \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R} - \{0\})$
$\int f'(x) \cos f(x)\, dx = \sin f(x) + c$	$\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \arctan \frac{f(x)}{a} + c \\ -\frac{1}{a} \text{arccot}\, \frac{f(x)}{a} + c \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R} - \{0\})$

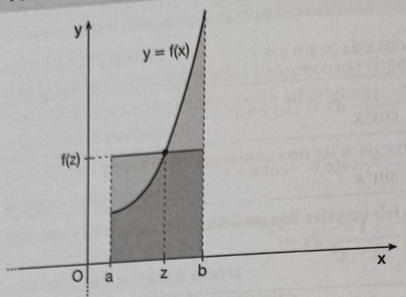
La formula di **integrazione per parti**: $\int f(x) g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$.

Il **metodo di sostituzione**: effettuando il cambiamento di variabile $x = g(t)$, otteniamo

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt.$$

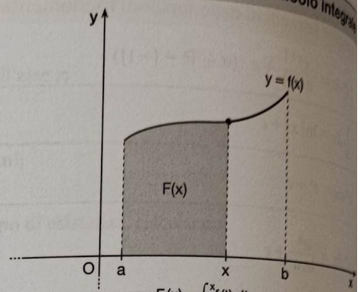
Teoremi sul calcolo integrale

Teorema della media



f continua $\Rightarrow \exists\, z \in [a; b]$ tale che $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(z)$

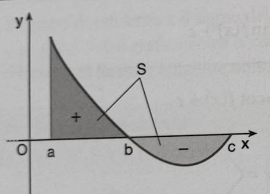
Teorema fondamentale del calcolo integrale



$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

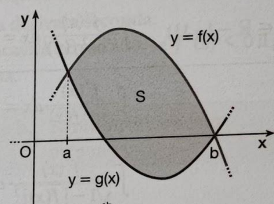
$F'(x) = f(x)$

Calcolo di aree



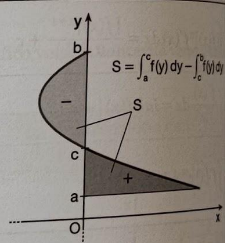
$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$

Area S della parte di piano compresa tra il grafico di una funzione e l'asse x.



$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

Area S della parte di piano compresa tra i grafici di due funzioni f(x) e g(x), con f(x) ≥ g(x).

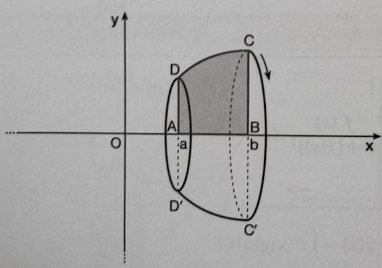


$S = \int_a^c f(y)\,dy - \int_c^b f(y)\,dy$

Area S della parte di piano compresa tra la funzione e l'asse y.

Calcolo di volumi

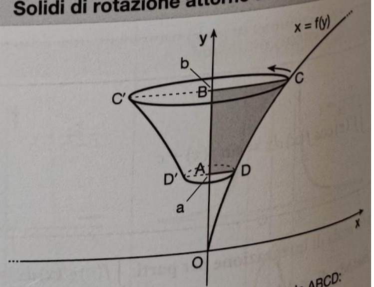
Solidi di rotazione attorno all'asse *x*



Volume del solido di rotazione del trapezoide ABCD:

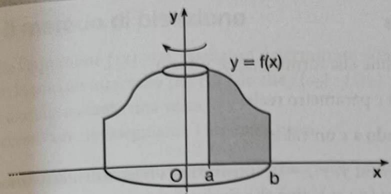
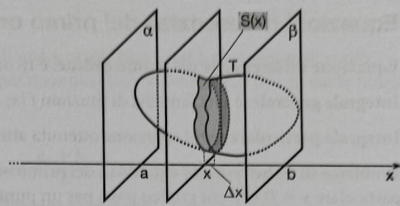
$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx$

Solidi di rotazione attorno all'asse *y*

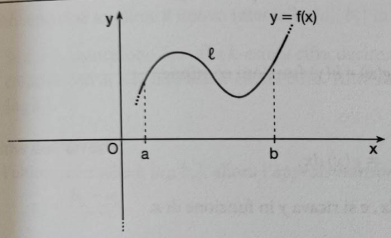


Volume del solido di rotazione del trapezoide ABCD:

$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2\,dy$

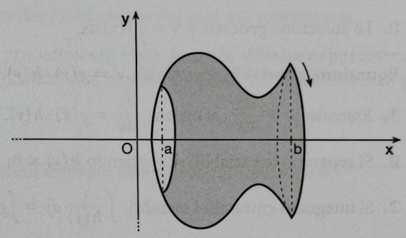
Metodo dei gusci cilindrici	Metodo delle sezioni
	
Volume del solido di rotazione del trapezoide delimitato dal grafico di y = f(x), dall'asse x e dalle rette x = a e x = b $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$	Volume del solido che ha sezione generica S(x) e delimitata dai piani α e β perpendicolari all'asse x $V = \int_a^b S(x)\,dx$

Lunghezza di arco di curva piana e area di una superficie di rotazione



Lunghezza della curva limitata dalle rette x = a e x = b

$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

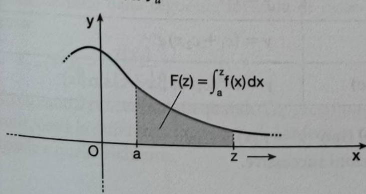


Area della superficie di rotazione completa di una curva

$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

Integrali impropri

- **Discontinuità in un punto**
  - Se $f(x)$ è continua in $[a; b[$ ma discontinua in b: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z \to b^-} \int_a^z f(x)\,dx$.
  - Se $f(x)$ è continua in $]a; b]$ ma discontinua in a: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z \to a^+} \int_z^b f(x)\,dx$.
  - Se $f(x)$ è continua in $[a; b]$ tranne che in $c \in [a; b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z \to c^-} \int_a^z f(x)\,dx + \lim_{z \to c^+} \int_z^b f(x)\,dx$.
- **Intervallo di integrazione illimitato**
  - Se $f(x)$ è continua in $[a; +\infty[$:
    $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)\,dx$.



  - Se $f(x)$ è continua in $]-\infty; a]$:
    $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{z \to -\infty} \int_z^a f(x)\,dx$.