## 3.3 Inverse matrix of Matrix$_{3x3}$

การหา inverse matrix ของ matrix ขนาด 3x3

เราจะสอน 2 วิธี
โดยถนัดใช้วิธีไหนหา inverse matrix ก็ใช้วิธีนั้นเลย
แต่ทำเป็นทั้ง 2 วิธีเลยก็จะดีมาก :)

วิธีที่ 1 Cofactor of adjoint หรือ Adjugent.

- ต้องหา determinant ให้เป็น

วิธีที่ 2. Linear row reduction

ทำ row reduction
(ใช้ augmented matrix)

* ทบทวนเรื่องการหา determinant ของ matrix*

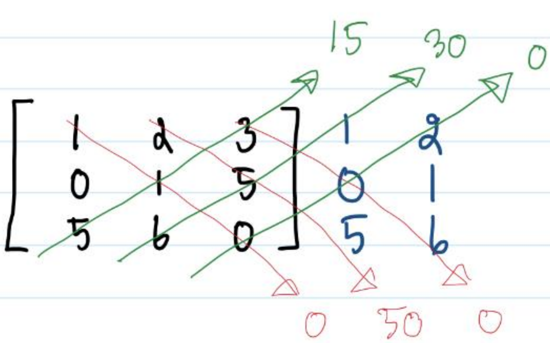
(สอนในบทที่ 2.)

determinant หรือ $|A|$ หาได้จาก

(ผลคูณแนวทแยงลง) − (ผลคูณแนวทแยงขึ้น)

<u>ตัวอย่าง</u> หา $|A|$ ของ matrix A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$




ดังนั้น

$$|A| = (0+50+0) - (15+30+0)$$

$$= 5.$$

ตัวอย่าง หา inverse ของ matrix A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีที่ 1 : Adjugate matrix

มี 6 ขั้นตอน

1. หา $|A|$

เราเคยคำนวณแล้ว $|A| = 5$.

เก็บค่านี้ไว้ใช้ขั้นตอนสุดท้าย.

2. สร้าง matrix เล็ก ขนาด 2x2. (Adjoint matrix)

จาก matrix A. โดยการลด row, column

จะได้ 9. matrix เล็ก.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} [\quad] & [\quad] & [\quad] \\ [\quad] & [\quad] & [\quad] \\ [\quad] & [\quad] & [\quad] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

ทำให้ครบทั้ง 9. ตำแหน่ง จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

3. หาค่า determinant ของ matrix เล็กๆ นั้น

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -30 & -25 & -5 \\ -18 & -15 & -4 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

4. คูณค่าใน matrix ด้วย +, -, +, ....

เรียก matrix ใหม่นี้ว่า N. ละกันนะ

$$\begin{bmatrix} +\,-30 & -\,-25 & +\,-5 \\ -\,-18 & +\,-15 & -\,-4 \\ +\,7 & -\,5 & +\,1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -30 & 25 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

5. ทำ transpose ของ N. หรือ N'
โดยการ สลับจาก column เป็น row.

$$\begin{bmatrix} -30 & 25 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -30 & 18 & 7 \\ 25 & -15 & -5 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้

$$N = \begin{bmatrix} -30 & 18 & 7 \\ 25 & -15 & -5 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

6. ขั้นตอนสุดท้าย คูณด้วย $\frac{1}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} N.$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -30 & 18 & 7 \\ 25 & -15 & -5 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 18/5 & 7/5 \\ 5 & -3 & -1 \\ -1 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 3.6 & 1.4 \\ 5 & -3 & -1 \\ -1 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$ ❊❊

Mind blowing 🤯

ลองอีกตัวอย่าง

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1.) คำนวณ $|A|$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{matrix}$$

$$= (2 + 40 + 0) - (30 + 8 + 0)$$

$$= 42 - 38$$

$$= 4$$

2.) สร้าง matrix เล็กๆ (Adjoint)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

3. คำนวณ determinant ของ matrix

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{matrix}\Bigg] & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -6 & -20 & -10 \\ -4 & -14 & -8 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

4. คูณค่าใน matrix ด้วย +, -, +, ....

$$\begin{bmatrix} +-6 & --20 & +-10 \\ --4 & +-14 & --8 \\ +2 & -4 & +2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 20 & -10 \\ 4 & -14 & 8 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

5. ทำ transpose.

$$\begin{bmatrix} -6 & 20 & -10 \\ 4 & -14 & 8 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 20 & -14 & -4 \\ -10 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

6. คำนวณ $A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot N$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 20 & -14 & -4 \\ -10 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0.5 \\ 5 & -3.5 & -1 \\ -2.5 & 2 & 0.5 \end{bmatrix} \quad **$$

Mind blowing 🤯 !!!

## วิธีที่ 2. linear row reduction

ตัวอย่าง

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

หา $A^{-1}$

1. สร้าง adjoin ด้วย identity matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

② ทำ row deduction จนกระทั่ง
matrix เดิมเปลี่ยนเป็น identity matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_1 - R_2 \to R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$2R_1 - R_2 \to R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_{23}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$R_3 \cdot \frac{1}{10} \to R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 & -0.3 & 0 \end{array}\right]$$

$-R_3 + R_2 \to R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.2 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 & -0.3 & 0 \end{array}\right]$$

$-4R_3 + R_1 \to R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.2 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 & -0.3 & 0 \end{array}\right]$$

③ inverse matrix ก็คือ matrix ด้านขวานั่นเอง!

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.3 & 1 \\ 0.2 & -0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

Cool.

## ลองอีกตัวอย่าง

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$-5R_1 + R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$4R_2 + R_3 \rightarrow R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$\frac{1}{5}R_3 \rightarrow R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$-5R_3 + R_2 \rightarrow R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$-3R_3 + R_1 \rightarrow R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & -12/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$-2R_2 + R_1 \rightarrow R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 3.6 & 1.4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 3.6 & 1.4 \\ 5 & -3 & -1 \\ -1 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Cool!!

## แบบฝึกหัด Inverse matrix ของ $matrix_{3x3}$

หา inverse matrix ต่อไปนี้โดยใช้ทั้งวิธี adjugate และ low linear reduction

A-1 คือมีเฉลยให้ดูว่า ทำแล้วจะได้ต้อง matrix นี้

แต่ที่ต้องการให้หัดทำคือขั้นตอนว่าทำยังไงจะได้ inverse matrix

| ข้อ | matrix A | $A^{-1}$ |
|---|---|---|
| 1. | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.5 & 0.75 & 0 \\ 0.5 & -0.25 & 1 \\ -0.5 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$ |
| 2. | $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 2.25 & 0.75 & 1.75 \end{bmatrix}$ |
| 3. | $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -4 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1 & 0.25 & 0 \\ \mathbf{-0.2} & 0.05 & 0.2 \\ -1.4 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$ |
| 4. | $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2.2 & -1.6 & 1.4 \\ 4.8 & -3.4 & 3.6 \\ 0.8 & -0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$ |
| 5. | $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & -0.2 & -0.4 \\ -0.4 & -0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$ |
| 6. | $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0.67 & 1.33 & 1 \\ -1.33 & -3.67 & -3 \end{bmatrix}$ |