Доля П.Г.
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
факультет математики і інформатики
кафедра теоретичної і прикладної інформатики
2019 р.

Вправи до лабораторних робіт по курсу «Комп’ютерна математика».

Збірник вправ складено відповідно до робочої програми курсу «Комп’ютерна математика» та електронного підручника http://geometry.karazin.ua/~dolya/documents: Доля П.Г., Антоненко Г.М. «Розв'язання задач вищої математики на комп'ютері», 2017 р. Збірник є доповненням до курсу лекцій і може бути використаний як при самостійній роботі студентів, так і на практичних заняттях.

Метою пропонованих вправ є отримання слухачами лекційного курсу навичок застосування функцій системи Mathematica. Кінцевим результатом повинно стати вміння виконувати наукові обчислення в цій системі.

Збірник розбито по темам, приблизно відповідних змісту лекцій. Наприкінці збірника наведено додатки, які роз’яснюють окремі питання використання системи Mathematica і доповнюють теми електронного підручника.

Зміст

1. Введення в систему Mathematica.

Призначення пакету Mathematica. Інтерфейс системи. Структура документа. Операції і типи даних. Точні та наближені розрахунки. Використання змінних. Порядок вводу та обчислення виразів. Вбудовані функції та функції користувача.

Завдання:

1.1 Арифметичні обчислення.

1.2 Обчислення виразу з елементарними функціями.

1.1. Арифметичні обчислення.

Приклад 1.1. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити значення арифметичного виразу $\left[125\frac{17}{21}-13\frac{2}{7}\right]\cdot 4{,}6+4\frac{1}{3}\cdot\frac{12+2:0{,}3}{0{,}7\cdot 0{,}3}$. Відповідь: $902\frac{751}{945}$.

Р о з в ' я з а н н я . В системі Mathematica введіть вираз

$$\left(\left(\mathbf{125}+\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{21}}\right)-\left(\mathbf{13}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\right)\right)*\mathbf{4.6}+\left(\mathbf{4}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)\frac{\mathbf{12}+\mathbf{2/0.3}}{\mathbf{0.7\ 0.3}}$$

та натисніть комбінацію клавіш `Shift-Enter`. Ви отримаєте

`902.79471`

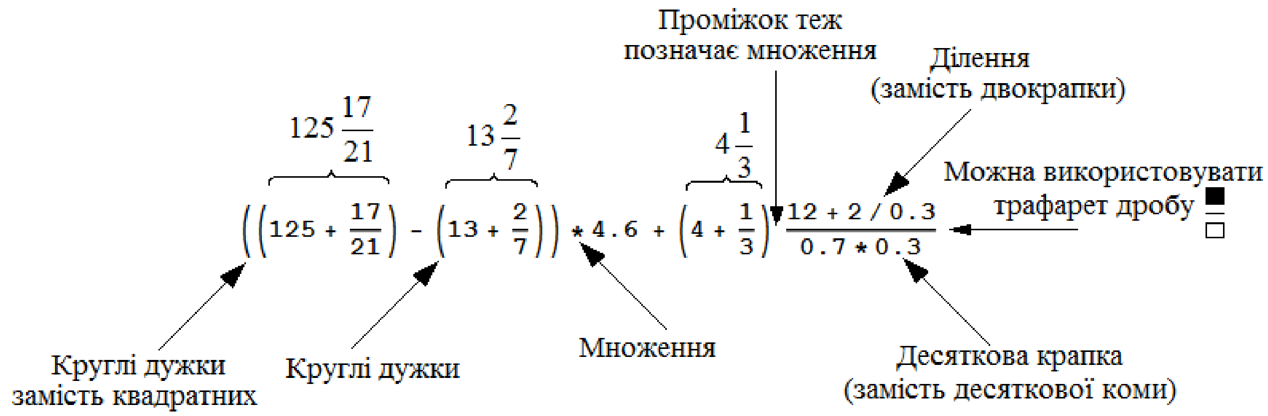
Порівняємо значення `902.79471` з наведеною відповіддю. Для цього перетворимо число $902\frac{751}{945}$ до десяткового вигляду інструкцією

$$\boldsymbol{N}[\mathbf{902}+\frac{\mathbf{751}}{\mathbf{945}}]$$

`902.79471`

Отже отримане десяткове значення співпадає з наведеним мішаним дробом.

Зверніть увагу на те, як вводиться неправильний дріб: ціла частина плюс правильний дріб. На наступному рисунку наведено пояснення до того, як треба вводити заданий вираз в системі «Mathematica».



Завдання 1.1. Обчислити значення арифметичного виразу.

Варіант №	Вираз	Відповідь
1.	$\dfrac{\left[152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}\right]\cdot 0{,}3}{0{,}2}$	6.5625
2.	$\dfrac{172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}}{0{,}8\cdot 0{,}25}$	29.583333
3.	$\dfrac{215\frac{9}{16}-208\frac{3}{4}+1/2}{0{,}0001:0{,}005}$	365.625
4.	$\dfrac{\left[85\frac{7}{30}-83\frac{5}{18}\right]/2\frac{2}{3}}{0{,}04}$	18.333333
5.	$\left\{\dfrac{0{,}012}{5}+\dfrac{0{,}04104}{5.4}\right\}\cdot 4560-42\frac{1}{3}$	3.2666667

1.2. Обчислення виразу з елементарними функціями.

Приклад 1.2. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити вираз, який містить елементарні функції

$$y=\mathrm{tg}\sqrt{\cos(1/3)}+\frac{\sin^2\left(31\sqrt{2}\right)}{31\,\cos\left(62\sqrt[3]{5}\right)}.$$

Розв'язання. В системі Mathematica введіть вираз, позначивши його ідентифікатором ***y***:

$$\boldsymbol{y}=\mathbf{Tan}[\sqrt{\mathbf{Cos}[1/3]}]+\frac{\mathbf{Sin}[31\sqrt{2}]^2}{\mathbf{31Cos}[62\sqrt[3]{5}]};$$

Потім введіть інструкцію обчислення виразу в десятковому вигляді.

N[y]

Натисніть комбінацію клавіш **Shift-Enter** і ви отримаєте відповідь

1.4666771

В подальших задачах використовуються елементарні функції, які в системі «Mathematica» треба вводити відповідно до правил: ім'я стандартної функції починається з великої літери, аргументи функції містяться в квадратних дужках. В наступній таблиці наведені приклади запису і комбінування елементарних функцій.

Функція	Позначення в системі	Назва
e^x	Exp[x]	Експонента
$\sin x$	Sin[x]	Синус

$\cos^2 x$	Cos[x]^2	Косинус в квадраті
$\ln x$	Log[x]	Натуральний логарифм
$\lg x$	Log10[x] або Log[x,10]	Десятковий логарифм
$\mathrm{tg}\, x$	Tan[x]	Тангенс
$\mathrm{ctg}\, x$	Cot[x]	Котангенс
$\arcsin x$	ArcSin[x]	Арксинус
$\ln \mathrm{ctg}\, x$	Log[Cot[x]]	Логарифм від котангенса
$\ln \mathrm{ctg} \sqrt[3]{5}$	Log[Cot[$\sqrt[3]{5}$]]	Логарифм від котангенса кореня кубічного з п'яти

Завдання 1.2. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити вираз.

Варіант №	Функція
1.	$y = \sin\sqrt{3} + \dfrac{\sin^2 3\sqrt{2}}{3\cos 6\sqrt{3}}$
2.	$y = \cos \ln 2 - \dfrac{\cos^2 3\sqrt{5}}{3\sin 6\sqrt{2}}$
3.	$y = \mathrm{tg}\lg\dfrac{1}{3} + \dfrac{\sin^2 4\sqrt{3}}{4\cos\sqrt{8}}$
4.	$y = \mathrm{ctg}\sqrt[3]{5} - \dfrac{\cos^2\sqrt{4}}{3\sin 8\sqrt{3}}$
5.	$y = \sqrt[3]{\mathrm{ctg}\, 2} - \dfrac{\cos^2\sqrt{10}}{7\sin 2\sqrt{5}}$

2. Алгебраїчні обчислення.

Арифметичні та алгебричні вирази. Уведення, форматування та обчислення виразів. Перетворення виразів. Підстановка числових значень в алгебраїчні вирази. Розв'язання алгебричних рівнянь.

Завдання:

2.1 Алгебраїчні перетворення.
2.2. Обчислення значень алгебраїчних виразів.
2.3. Розв'язання рівнянь.

2.1. Алгебраїчні перетворення.

Приклад 2.1. Використовуючи систему «Mathematica», спростити вираз

$$\frac{a^2-1}{n^2+a\,n}\cdot\left[\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right]\times\frac{a-a\ n^3-n^4+n}{1-a^2}$$

Р о з в ' я з а н н я . В системі Mathematica введіть інструкції

Remove[$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}$]

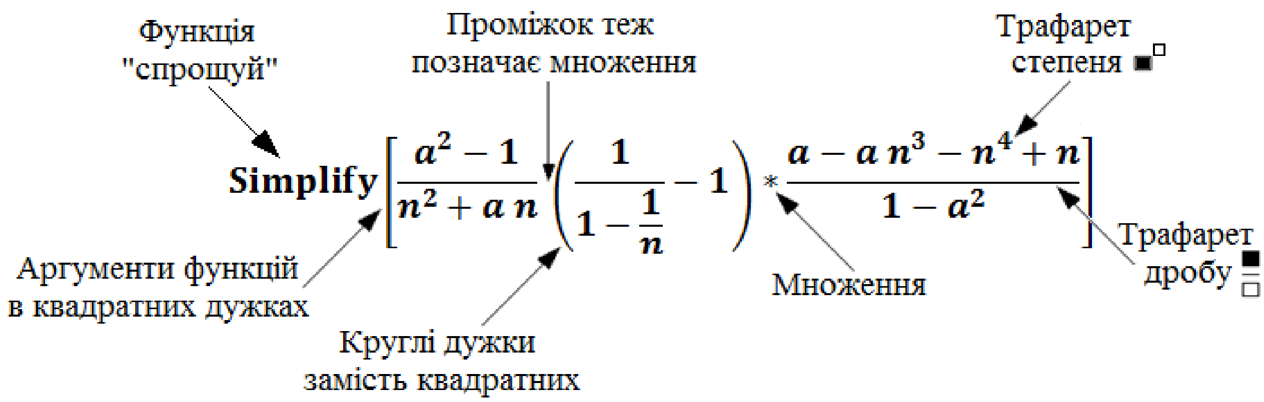
$$\mathbf{Simplify}\left[\frac{\boldsymbol{a}^2 - \mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}} - \mathbf{1}\right) * \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n}^3 - \boldsymbol{n}^4 + \boldsymbol{n}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{a}^2}\right]$$

та натисніть комбінацію клавіш `Shift-Enter`. Ви отримаєте відповідь

$$1 + \frac{1}{n} + n$$

Інструкція `Remove[a,n]` знадобилася на всяк випадок, щоб система «забула» попередні значення змінних a та `n`, якщо вони були.

На наступному рисунку наведені пояснення до того, як треба вводити заданий вираз в системі «Mathematica».



Зауваження. При спрощенні деяких виразів результат, який повертає Mathematica, не співпадає з наведеною відповіддю. Тоді функція `Simplify` повинна застосувати які-небудь припущення. Наприклад,

$$\mathbf{Simplify}\left[\left((\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})\sqrt{\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\right)\left((\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})\left(\sqrt{\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}} - \mathbf{1}\right)\right),\right.$$
$$\left.\mathbf{Assumptions} \to \{\boldsymbol{a} > b\}\right]$$

$$2(a - b)\,b$$

Опція `Assumptions` вказує припущення, які треба використати при спрощенні виразу. Всі припущення вказуються в фігурних дужках через кому.

Задачі 2.1. Використовуючи систему «Mathematica», спростити вираз

Варіант №	Вираз	Відповідь
1.	$(a^2 - b^2 - c^2 + 2\,b\,c) : \dfrac{a + b - c}{a + b + c}$	$(a - b + c) \times$ $(a + b + c)$
2.	$\dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{x - \sqrt{x^2 - 4x}} - \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 4x}}{x + \sqrt{x^2 - 4x}}$	$\sqrt{(-4 + x)\,x}$
3.	$\dfrac{2a}{a^2 - 4\,x^2} + \dfrac{1}{2x^2 + 6\,x - a\,x - 3a} \cdot \left(x + \dfrac{3x - 6}{x - 2}\right)$	$\dfrac{1}{a + 2x}$

4.	$\left(\frac{2a+10}{3a-1}+\frac{130-a}{1-3a}+\frac{30}{a}-3\right)\cdot\frac{3a^3+8a^2-3a}{1-\frac{1}{4}a^2}$	$\frac{12(3+a)(5+2a)}{-2+a}$
5.	$\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a-b}}\sqrt[3]{(\mathrm{a}^2-2\,\mathrm{a\,b}+\mathrm{b}^2)(\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2)(\mathrm{a+b})}\times$ $\times\frac{\mathrm{a}^3-\mathrm{b}^3}{\sqrt[3]{(\mathrm{a+b})^2}}$ Використати опцію `Assumptions ->{a > b}`	$\mathrm{b}\,(\mathrm{a}^3-\mathrm{b}^3)$

2.2. Обчислення значень алгебраїчних виразів.

Для підстановки значень параметрів в алгебраїчний вираз використовується операція «`/.`» (слеш – крапка), після якої вказується список підстановки. Список завжди позначається фігурними дужками, а що замість чого підставляється вказується стрілками. Стрілка $->$ вводиться за допомогою символів – (мінус) та > (більше). Зазвичай пара цих символів автоматично трансформується в єдиний символ →. Наприклад, інструкція

$\boldsymbol{a^3-b^3-3\,a\,b\,(a-b)/.\{a\to -27, b\to -33\}}$

`216`

обчислює значення алгебраїчного виразу $a^3-b^3-3\,a\,b\,(a-b)$ при a=`-27`, `b=-33`.

Приклад 2.2. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити значення виразу

$$\frac{4a-9b^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3b^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+3b^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}$$

при $a=2, b=1$.

Р о з в ' я з а н н я . В системі Mathematica введіть інструкції

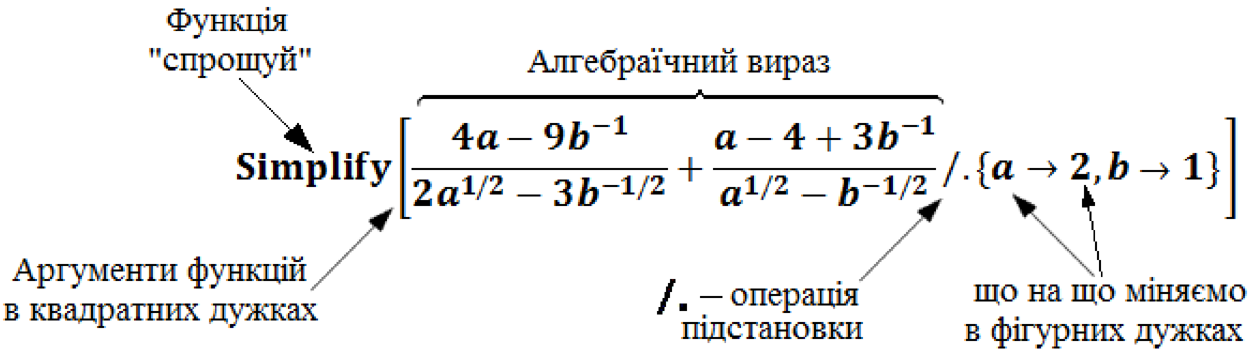
Remove$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

Simplify$\left[\frac{\boldsymbol{4a-9b^{-1}}}{\boldsymbol{2a^{1/2}-3b^{-1/2}}}+\frac{\boldsymbol{a-4+3b^{-1}}}{\boldsymbol{a^{1/2}-b^{-1/2}}}/.\{\boldsymbol{a\to 2}, \boldsymbol{b}->1\}\right]$

та натисніть комбінацію клавіш **`Shift-Enter`**. Ви отримаєте відповідь

$4+3\sqrt{2}$

На наступному рисунку наведені пояснення до використаних позначок.



Зауваження. В деяких задачах функцію `Simplify` (спрощуй) можна не застосовувати. Але в наведеному прикладі без цієї функції ми би отримали більш складний вираз, наведений нижче.

$$\frac{\mathbf{4a-9b^{-1}}}{\mathbf{2a^{1/2}-3b^{-1/2}}}+\frac{\mathbf{a-4+3b^{-1}}}{\mathbf{a^{1/2}-b^{-1/2}}}/.\{\mathbf{a\to 2,b}->1\}$$

$$\frac{1}{-1+\sqrt{2}}-\frac{1}{-3+2\sqrt{2}}$$

Задачі 2.2. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити значення виразу при вказаних значеннях параметрів.

№	Вираз	Параметри	Відпо-від
1.	$\frac{b}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2\,a\,b+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\times$ $\times\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$	$a=5$, $b=3$	294
2.	$\frac{(a-b^2)\sqrt{3}+b\,\sqrt{3}\sqrt[3]{8\,b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2\,b\,\sqrt{2a})^2}}\cdot\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\frac{3}{a}}-\sqrt{\frac{3}{c}}}$	$a=16$, $b=3$, $c=3$	$-4\sqrt{3}$
3.	$\left[\frac{\sqrt[6]{a^2\,x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[6]{x}\right]^3+4\,(x+1)$ $+\left(\sqrt[3]{x\,\sqrt{x}}+1\right)^2$	$a=1$, $x=4$	45
4.	$\left(\sqrt{a\,b}-\frac{ab}{a+\sqrt{a\,b}}\right):\frac{\sqrt[4]{a\,b}-\sqrt{b}}{a-b}$	$a=8$, $b=2$	$8\left(2+\sqrt{2}\right)$
5.	$\left[\left(\frac{a^2-b\,\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\,\sqrt[3]{b}\right):\left(a+\sqrt[6]{a^3\,b^2}\right)-\sqrt[3]{b}\right]^2$	$a=25$, $b=27$	25

2.3. Розв'язання рівнянь.

Для символьного розв'язання рівнянь використовується функція `Solve`. Наприклад, знайдемо x з рівняння $\frac{2}{x-1}+1=\frac{3}{x-1}$.

$$\mathbf{Solve}\left[\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}+\mathbf{1}==\frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}},\boldsymbol{x}\right]$$

$\{\{x\to 2\}\}$

Наведене рівняння має один корінь, і він дорівнює 2.

Якщо функція `Solve` повертає пусті одинарні фігурні дужки, то це означає, що розв'язків немає. Квадратні рівняння можуть мати два кореня.

$\mathbf{Solve}[\boldsymbol{x^2 - 2x == 0, x}]$

$\{\{x \to 0\}, \{x \to 2\}\}$

Імена невідомих, які фігурують у рівняннях, не повинні містити значення. Для цього перед викликом функції, яка розв'язує рівняння або систему рівнянь, шукану змінну (в даному випадку x) слід «очистити» від можливих попередніх значень. Це можна зробити функцією `Remove[x]` або `Clear[x]`.

Приклад 2.3. Використовуючи систему «Mathematica», розв'язати рівняння

$$\frac{(a-x)\sqrt{a-x}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}} = a-b.$$

Р о з в ' я з а н н я . В системі Mathematica введіть інструкції

$\mathbf{Remove}[\boldsymbol{x, a, b}]$

$$\mathbf{Solve}[\boldsymbol{\frac{(a-x)\sqrt{a-x}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}} == a-b,\ x}]$$

та натисніть комбінацію клавіш **`Shift-Enter`**. Ви отримаєте відповідь

$\{\{x \to a\}, \{x \to b\}\}$.

Це свідчить, що рівняння має два корені: $x = a$, $x = b$. На наступному рисунку наведені пояснення до використаних позначок.

Функція "розв'язуй"

$$\mathbf{Solve}[\overbrace{\boldsymbol{\frac{(a-x)\sqrt{a-x}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}} == a-b}}^{\text{Рівняння}},\ \boldsymbol{x}]$$

Аргументи функцій в квадратних дужках

Подвійний знак рівності позначає рівняння

Ім'я шуканої змінної

Зауваження. При розв'язанні деяких рівнянь система не спрощує відповідь. Тоді до розв'язку треба застосувати функцію `Simplify`. Наприклад,

$$\mathbf{Simplify}[\mathbf{Solve}[\boldsymbol{\frac{3a\,b+1}{a}x == \frac{3a\,b}{a+1} + \frac{(2a+1)x}{a(a+1)^2} + \frac{a^2}{(a+1)^3}, x}]]$$

$$\{\{x \to \frac{a}{1+a}\}\}$$

Задачі 2.3. Використовуючи систему «Mathematica», розв'язати рівняння

№	Рівняння	Відповідь
1.	$\frac{3\,a\,b\,c}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2\,a+b)\,b^2x}{a\,(a+b)^2} == 3c\,x + \frac{b\,x}{a}$	$\frac{a\,b}{a+b}$
2.	$x = 1-\sqrt{1-x\sqrt{x^2+1}}$	$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{4}$

3.	$\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3$	$x=a+b+c$
4.	$\frac{a^2+x}{b^2-x}-\frac{a^2-x}{b^2+x}=\frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}$	$x=\frac{a+b}{a-b}$
5.	$\frac{a}{nx-x}-\frac{a-1}{x^2-2nx^2+n^2x^2}=1$	$x_1=\frac{a-1}{n-1};\ x_2=\frac{1}{n-1}$

3. Елементи аналітичної геометрії..

Списки як засіб зображення векторів та матриць. Обчислення довжини вектора, скалярного та векторного добутку, кута між векторами. Використання графічних примітивів для зображення векторів та елементарних геометричних фігур.

Завдання:

3.1 Робота з векторами.
3.2 Геометричні обчислення в трикутнику.
3.3 Геометричні обчислення в тетраедрі.

3.1. Робота з векторами.

Приклад 3.1. З'ясувати, чи колінеарні вектори $\mathbf{c_1}=4\mathbf{a}-3\mathbf{b}$ і $\mathbf{c_2}=9\mathbf{b}-12\mathbf{a}$, які побудовані по векторам $\boldsymbol{a}=\{-1,2,8\}$ та $\boldsymbol{b}=\{3,7,-1\}$. Знайти довжину векторів **a** і **b**, та кут між ними. В системі Mathematica намалювати вектори **a** і **b**.

Розв'язання. В системі Mathematica введіть інструкції

𝒂 = {−1, 2, 8};
𝒃 = {3, 7, −1};
c1 = 4𝒂 − 3𝒃;
c2 = 9𝒃 − 12𝒂;
c1/c2

Натисніть комбінацію клавіш **`Shift-Enter`**. Ви отримаєте відповідь

$\{-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\}$

Оскільки всі координати вектора, отриманого діленням списку **c1** на список **c2**, однакові, то це означає, що вектори **c1** і **c2** колінеарні (паралельні).

Зверніть увагу на індекси векторів **c1** і **c2**, які бажано набирати звичайними цифрами, а не маленькими.

Довжина (модуль) вектора (списку) може бути отримана за допомогою функції `Norm`.

Norm[𝒂]

$\sqrt{69}$

Norm[𝒃]

$\sqrt{59}$

Кут між векторами знаходиться за допомогою функції `VectorAngle`.

VectorAngle$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$

$\text{ArcCos}[\sqrt{\dfrac{3}{1357}}]$

Для переводу кута з радіан в градуси виконаємо інструкцію

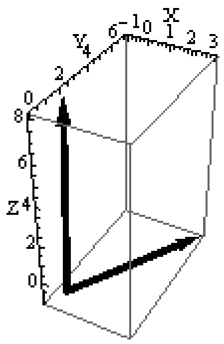
$\dfrac{\boldsymbol{N}[\textbf{VectorAngle}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]]*\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}}$

`87.305033`

Намалюємо вектори **a** і **b**.

$\mathbf{z}=\{\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\};$

Graphics3D[{**Thickness**[**0.02**], **Arrowheads**[**0.1**], **Arrow**[{$\boldsymbol{z},\boldsymbol{a}$}],
Arrow[{$\boldsymbol{z},\boldsymbol{b}$}]}, **Axes**−> **True**, **AxesLabel**−> {"X", "Y", "Z"}]



На наступному рисунку наведені пояснення до функції `Graphics3D` відображення графічних примітивів.

Задачі 3.1. Використовуючи систему «Mathematica», з'ясувати, чи колінеарні вектори $\mathbf{c_1}$ і $\mathbf{c_2}$, які побудовані по векторам **a** та **b**. Знайти довжину векторів **a** і **b**, та кут між ними. В системі Mathematica намалювати вектори **a** і **b**.

Варіант №	
1.	$\mathbf{a}=\{1,-2,3\}$; $\mathbf{b}=\{3,0,-1\}$; $\mathbf{c_1}=\mathbf{2\ a+4b}$; $\mathbf{c_2}=\mathbf{3\ b-a}$;
2.	$\mathbf{a}=\{1,0,1\}$; $\mathbf{b}=\{-2,\ 3,\ 5\}$; $\mathbf{c_1}=\mathbf{a+2b}$; $\mathbf{c_2}=\mathbf{3\ a-b}$;
3.	$\mathbf{a}=\{-2,4,1\}$; $\mathbf{b}=\{1,-2,\ 7\}$; $\mathbf{c_1}=\mathbf{5a+3b}$; $\mathbf{c_2}=\mathbf{2\ a-b}$;
4.	$\mathbf{a}=\{1,2,-3\}$; $\mathbf{b}=\{2,-1,-1\}$; $\mathbf{c_1}=\mathbf{4a+3b}$; $\mathbf{c_2}=\mathbf{8\ a-b}$;
5.	$\mathbf{a}=\{3,5,4\}$; $\mathbf{b}=\{5,9,7\}$; $\mathbf{c_1}=\mathbf{-2\ a}+\boldsymbol{b}$; $\mathbf{c_2}=\mathbf{3\ a}-2\mathbf{b}$;

3.2. Геометричні обчислення в трикутнику.

Приклад 3.2. Знайти довжини сторін, величини кутів та площу трикутника з вершинами в точках $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

Розв'язання. В пакеті *Mathematica* деякі символи захищені від зміни. Зокрема, захищеним є символ `C`. Щоб з таким символом можна було працювати, наприклад, присвоювати змінній `C` будь-яке значення, потрібно з її імені зняти захист інструкцією `Unprotect[ім'я_змінної]`.

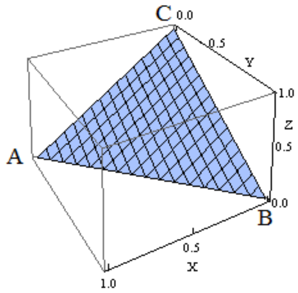
Unprotect[C]

Після цього змінній `C` можна присвоювати значення. Задамо координати вершин трикутника.

A = {1, 0, 0};
B = {0, 1, 0};
C = {0, 0, 1};

Зобразимо поверхню трикутника інструкцією

ListPlot3D[{*A*, *B*, *C*}, BoxRations → Automatic]



Функція `ListPlot3D` приймає список координат вершин та зображує за ними поверхню. Опція (необов'язковий аргумент) **BoxRations → Automatic** каже про те, що на малюнку довжини одиничних відрізків вздовж координатних осей повинні бути однаковими.

Обчислимо вектори $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$.

AB = B − A
AC = C − A
BC = C − B

```
{-1, 1, 0}
{-1, 0, 1}
{0, -1, 1}
```

Знаходимо довжини векторів.

LAB = Norm[AB];
LAC = Norm[AC];
LBC = Norm[BC];
{LAB, LAC, LBC}

$\{\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Довжини векторів однакові. Отже, трикутник рівнобічний (в цьому прикладі) і його кути дорівнюють $\pi/3$. Перевіримо це, тобто обчислимо кути трикутника.

aA = VectorAngle[AB, AC];
aB = VectorAngle[−AB, BC];

$\mathbf{aC = VectorAngle[AC, BC]};$
$\{\mathbf{aA, aB, aC}\}$
$\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$

Знак мінус, який стоїть у другій формулі, використовується для зміни напряму вектора на протилежний, щоб відповідь зображувала гострий кут.

Переводимо кути до градусів.

$\boldsymbol{N}[\{\mathbf{aA, aB, aC}\} * \mathbf{180}/\boldsymbol{\pi}]$

```
{60.,60.,60.}
```

Обчислимо площу трикутника, яка визначається як половина модуля векторного добутку векторів $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$, тобто $S = \frac{1}{2}|[\vec{AB}, \vec{AC}]|$.

$\boldsymbol{S} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{Norm[Cross[AB, AC]]}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Задачі 3.2. Використовуючи систему «Mathematica», знайти довжини сторін, величини кутів та площу трикутника з вершинами в точках **A**, **B**, **C**.

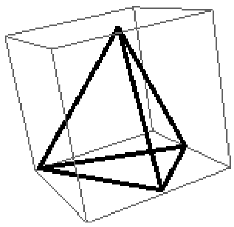
Варіант №	
1.	A(1, −2, 3); B(2, −1, 2); C(3, −4, 5)
2.	A(0, −3, 6); B(−12, −3, −3); C(−9, 5, −6)
3.	A(3, 3, −1); B(5, 5, −2); C(4, 1, 1)
4.	A(−1, 2, −3); B(3, 4, −6); C(1, 1, −1)
5.	A(−4, −2, 0); B(−1, −2, 4); C(3, 2, 1)

3.3. Геометричні обчислення в тетраедрі.

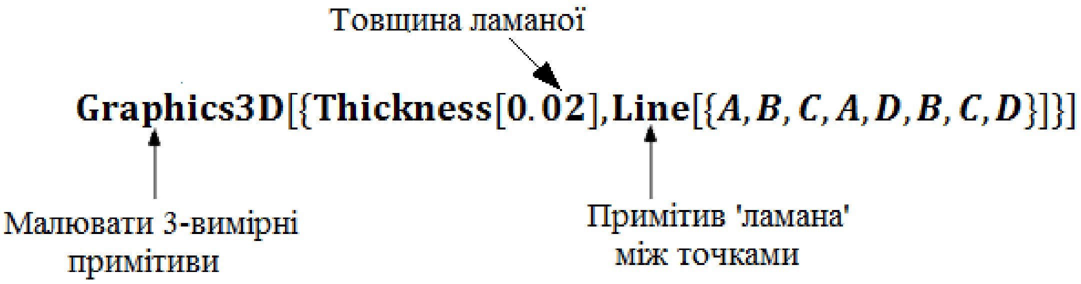
Приклад 3.3. В тетраедрі з вершинами в точках $A(0,0,0)$, $B(2,1,0)$, $C(1,2,0)$ та $D(1.3,1.1,2)$ обчислити висоту $h = |\vec{DE}|$. Графічно зобразити тетраедр, висоту DE і точку E.

Розв'язання. В пакеті *Mathematica* створюємо списки, які містять координати вершин та побудуємо зображення ребер за допомогою ламаної.

$\mathbf{Unprotect}[\boldsymbol{C, D, E}];$
$\boldsymbol{A} = \{\mathbf{0, 0, 0}\};$
$\boldsymbol{B} = \{\mathbf{2, 1, 0}\};$
$\boldsymbol{C} = \{\mathbf{1, 2, 0}\};$
$\boldsymbol{D} = \{\mathbf{1.3, 1.1, 2}\};$
$\mathbf{p1 = Graphics3D[\{Thickness[0.02], Line[\{\boldsymbol{A, B, C, A, D, B, C, D}\}]\},}$
$\mathbf{AxesLabel} -> \{"X", "Y", "Z"\}, \mathbf{Axes \to True]}$



На наступному рисунку наведені пояснення до використаних аргументів функції `Graphics3D`.



Об’єм тетраедра дорівнює одній шостій модуля мішаного добутку векторів його ребер $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ та $\vec{AD}$. Спочатку знаходимо вектори ребер.

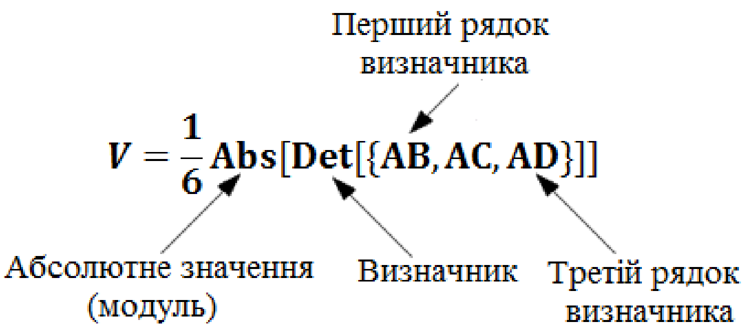
AB = B − A;
AC = C − A;
AD = D − A;

Потім знаходимо об’єм тетраедра.

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{Abs[Det[\{AB, AC, AD\}]]}$$

1

Наступний рисунок пояснює останню інструкцію.



Площа основи (трикутника ABC) дорівнює половині модуля векторного добутку векторів його сторін $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$. Спочатку знаходимо цей векторний добуток (це буде вектором нормалі до площини трикутника ABC).

$\boldsymbol{n} = \mathbf{Cross[AB, AC]};$

Потім обчислюємо площу трикутника.

$$\boldsymbol{S} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{Norm}[\boldsymbol{n}]$$

$$\frac{3}{2}$$

Об'єм тетраедра та площа основи пов'язані співвідношенням $V = \frac{1}{3}h\ S$. Щоб знайти висоту тетраедра розв'яжемо це рівняння відносно невідомої h.

$\mathbf{hh = Solve}[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{S * h == V, h}]$

```
{{h->2.}}
```

Для виділення відповіді (тобто числа `2` зі змінної **hh**) потрібно виконати присвоювання

$\boldsymbol{h} = \mathbf{hh[[1, 1, 2]];}$

Знайдемо координати точки E. Вона розташована від точки D в напрямку вектора нормалі $\boldsymbol{n}$ на відстані $\boldsymbol{h}$.

$\boldsymbol{E = D - n}/\mathbf{Norm}[\boldsymbol{n}] * \boldsymbol{h};$

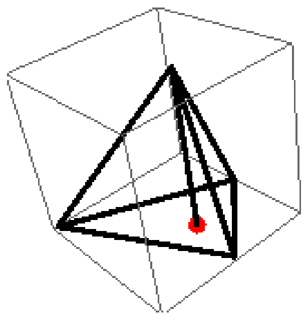
Створимо в пам'яті комп'ютера зображення точки E і відрізка DE.

p2 = ListPointPlot3D[{*E*}, PlotStyle−> {Directive[PointSize[0. 06], Red]}];

p3 = Graphics3D[{Thickness[0. 02], Line[{*D*, *E*}]}];

Відображаємо три графічні об'єкти одночасно.

Show[p1, p2, p3]



Задачі 3.3. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A,B,C,D, та його висоту, яка випущена з вершини D на грань ABC. Графічно зобразити тетраедр і його висоту.

Варіант №	
1.	$A = \{-2, -6, -4\};\ B = \{-1, 7, 1\};\ C = \{4, -8, -4\};\ D = \{1, -4, 6\};$
2.	$A = \{4, -4, 5\};\ B = \{-5, -3, 2\};\ C = \{-2, -6, -3\};\ D = \{-6, 5, -1\};$
3.	$A = \{-1, 2, 0\};\ B = \{3, -5, -3\}; C = \{5, 2, 6\};\ D = \{8, 4, -9\};$
4.	$A = \{2, -1, 2\};\ B = \{1, 2, -1\};\ C = \{3, 2, 1\};\ D = \{-4, 2, 5\};$
5.	$A = \{1, 1, 2\};\ B = \{-1, 1, 3\};\ C = \{2, -2, 4\};\ D = \{-1, 0, -2\};$

4. Матричне числення.

Зображення матриці у вигляді списку списків. Табличний спосіб відображення матриць. Функції створення матриць. Виконання матричних операцій: транспонування, обчислення визначника, множення матриць, знаходження оберненої матриці.

Завдання:

4.1 Робота з матрицями.

4.2 Робота з матрицями і векторами.

4.3. Створення матриць.

4.1. Робота з матрицями.

Приклад 4.1. Знайти значення матричного многочлена $2A^2+3A+5E$, якщо E одинична матриця, $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&1\\4&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&-1&3\\4&-3&-1\\4&2&1\end{pmatrix}$. Знайти обернену матрицю A^{-1}. Обчислити визначник матриці **A**. Обчислити суму, різницю, матричний та поелементний добуток матриць **A** та **B**. Обчислити різницю між матричним та поелементним добутком матриць **A** і **B**. Розв'язати матричне рівняння $AX=B$ відносно невідомої матриці *X*.

Р о з в ' я з а н н я . В пакеті *Mathematica* введіть інструкції

A = {{1, 1, 2}, {1, 3, 1}, {4, 1, 1}};

M = 2 * A.A + 3 * A + 5 * IdentityMatrix[3];

M // MatrixForm

$$\begin{pmatrix}28&15&16\\19&36&15\\30&19&28\end{pmatrix}$$

Тут функція `IdentityMatrix[3]` генерує одиничну матрицю *E* розміру 3×3. Зверніть також увагу на точку, яка стоїть в одночлені **2*A.A**. Вона заміняє функцію `Dot` матричного добутку. Якщо замість неї поставити зірочку *, то буде виконано почленне множення матриці `A` на `A`. Але коли в матричному виразі зустрічається степінь матриці, наприклад A^2, то мається на увазі матричне множення, тобто $A.A$, а не поелементне $A*A$.

Знаходимо обернену матрицю.

A1 = Inverse[A]

$$\{\{-\frac{2}{17},-\frac{1}{17},\frac{5}{17}\},\{-\frac{3}{17},\frac{7}{17},-\frac{1}{17}\},\{\frac{11}{17},-\frac{3}{17},-\frac{2}{17}\}\}$$

MatrixForm[A1]

$$\begin{pmatrix}-\frac{2}{17}&-\frac{1}{17}&\frac{5}{17}\\-\frac{3}{17}&\frac{7}{17}&-\frac{1}{17}\\\frac{11}{17}&-\frac{3}{17}&-\frac{2}{17}\end{pmatrix}$$

Обчислюємо визначник.

Det[A]

-17

Обчислимо суму та різницю матриць **A** і **B**.

B = {{-1, -1, 3}, {4, -3, -1}, {4, 2, 1}};

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}//\mathbf{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}//\mathbf{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Обчислимо матричний добуток матриць **A** і **B** (матричний добуток позначається крапкою $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$)

$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}//\mathbf{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 4 \\ 15 & -8 & 1 \\ 4 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

Обчислимо поелементний добуток матриць (поелементний добуток матриць позначаться зірочкою $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}$).

$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}//\mathbf{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 4 & -9 & -1 \\ 16 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Як бачимо, поелементний добуток та матричний добуток не співпадають. Обчислимо різницю між цими добутками.

$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}//\mathbf{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 & -2 \\ 11 & 1 & 2 \\ -12 & -7 & 11 \end{pmatrix}$$

Розв'яжемо матричне рівняння $AX = B$ відносно матриці *X*. Розв'язок має вигляд $X = A^{-1}B$. Вище ми вже обчислили обернену матрицю A^{-1} та позначили її **A1**. Отже

$\boldsymbol{X} = \mathbf{A1}.\boldsymbol{B}$

$$\{\{\frac{18}{17},\frac{15}{17},0\},\{\frac{27}{17},-\frac{20}{17},-1\},\{-\frac{31}{17},-\frac{6}{17},2\}\}$$

$\boldsymbol{X}//\mathbf{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} \frac{18}{17} & \frac{15}{17} & 0 \\ \frac{27}{17} & -\frac{20}{17} & -1 \\ -\frac{31}{17} & -\frac{6}{17} & 2 \end{pmatrix}$$

Задачі 4.1. Використовуючи систему «Mathematica», знайти значення матричного многочлена $2A^2+3A+5E$, якщо E одинична матриця. Знайти обернену матрицю A^{-1}. Обчислити визначник матриці А. Обчислити суму та різницю матриць А і В. Обчислити матричний $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$ та поелементний добуток

$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}$ матриць, обчислити різницю між цими добутками. Розв'язати матричне рівняння $AX = B$ відносно матриці X.

Варіант №	Матриці **A** і **B**
1.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4.2. Робота з матрицями і векторами.

Приклад 4.2. Дано вектор $\boldsymbol{x} = \{3, -1, 4\}$ та матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти вектор $\boldsymbol{B}\left(2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^2\right)\boldsymbol{x}$ та $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}$. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}$ (тобто розв'язати систему лінійних рівнянь). Для кожного стовпця і рядка матриці **A** знайти суму елементів. Знайти максимальний елемент матриці **B**.

Розв'язання. В системі Mathematica побудуємо вектор $\boldsymbol{x} = \{\mathbf{3}, -\mathbf{1}, \mathbf{4}\}$ та матриці **A** і **B** за допомогою інструкцій

$\boldsymbol{x} = \{\mathbf{3}, -\mathbf{1}, \mathbf{4}\}$;
$\boldsymbol{A} = \{\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}\}$;
$\boldsymbol{B} = \{\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}, \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{2}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}\}$;

Обчислюємо вектор $z = \left(\boldsymbol{B}.\left(2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^2\right)\right).\boldsymbol{x}$ за допомогою інструкції

$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{B}.(\mathbf{2}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{B}).\boldsymbol{x}$

```
{12,26,−2}
```

Обчислюємо другий вектор

$(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{A}).\boldsymbol{x}$

```
{2, -15, 7}
```

Зверніть увагу на те, що множення матриць виконується за допомогою операції «крапка» (скорочене позначення функції `Dot`). Навіть піднесення до степеня матриці треба виконувати за допомогою операції крапка $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A.A}$.

Розв'язком системи рівнянь $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{x}$ є вектор $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$. Обчислимо його двома способами: за допомогою оберненої матриці та з використанням правила Крамера.

$\boldsymbol{u} = \mathbf{Inverse}[\boldsymbol{A}].\boldsymbol{x}$ (* *Використання оберненої матриці.* *)

```
{-1,8,5}
```

Розв'язання системи за допомогою правила Крамера докладно описано у нашому посібнику [1]. Відтворіть відповідну послідовність інструкцій самостійно.

Обчислимо суму елементів стовпців матриці А.

$\mathbf{Total}[\boldsymbol{A}]$ (* або $\mathrm{Total}[A,\{1\}]$ *)

```
{2,1,0}
```

Обчислимо суму елементів рядків матриці А.

$\mathbf{Total}[\boldsymbol{A},\{\mathbf{2}\}]$

```
{0, 1, 2}
```

Знайдемо максимальний елемент матриці В.

$\mathbf{Max}[\boldsymbol{B}]$

```
2
```

Задачі 4.2. Дано вектор $\boldsymbol{x}$ та матриці **A** і **B**. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити вектор $\boldsymbol{y}$, який заданий в таблиці матричним виразом, а також вектор $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}$. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{x}$ за допомогою оберненої матриці та правила Крамера. Для кожного стовпця і рядка матриці **A** знайти суму елементів. Знайти максимальний і мінімальний елементи матриці **B**.

№	Матриці **A**, **B**, вектор $\boldsymbol{x}$, вираз
1.	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 4\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \{5, -2, 3\}, \ \boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^2\right)\boldsymbol{x}$
2.	$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \{-4, 2, 1\}, \ \boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}^2\right)\boldsymbol{x}$
3.	$\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \{2, 4, -1\}, \ \boldsymbol{y} = 2\left(\boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2\right)\boldsymbol{x}$
4.	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \{-6, -2, 3\}, \ \boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{B}^4 + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{x}$
5.	$\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \{7, -2, 3\}, \ \boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}^2\right)\boldsymbol{x}$

4.3. Створення матриць.

Приклад 4.3. Створіть випадкову матрицю A цілих чисел розміром 5 x 5 з елементами від 0 до 10. Замініть останній стовпець матриці на випадкові цілі числа з діапазону від −1 до −10. Додайте до матриці рядок (шостий) з квадратів цілих чисел з діапазону від 1 до 5. Замініть середню частину сформованої матриці (рядки 3 і 4, стовпці від 2 до 4) на випадкові цілі числа з діапазону від 100 до 110.

Р о з в ' я з а н н я . Побудуємо випадкову матрицю A цілих чисел розміром 5 x 5 з елементами від 0 до 10.

$$\mathbf{A0 = RandomInteger[10, \{5, 5\}];}$$

$$\mathbf{A0//MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 & 7 & 0 \\ 7 & 10 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Згенеруємо стовпець з 5 цілих чисел з діапазону від −1 до −10.

$$\mathbf{R0 = RandomInteger[\{-10, -1\}, \{5\}];}$$

$$\mathbf{R0//MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ -10 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Замінимо останній стовпець матриці **A0** на згенерований стовпець. Нову матрицю позначимо **A1**.

$$\mathbf{A1 = A0;\ A1[[All, 5]] = R0;}$$

$$\mathbf{A1//MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 & 7 & -10 \\ 7 & 10 & 4 & 2 & -9 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & -10 \\ 3 & 4 & 4 & 6 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Додамо до матриці шостий рядок, побудований з квадратів цілих чисел з діапазону від 1 до 5. Нову матрицю позначимо **A2**.

$$\mathbf{A2 = Join[A1, \{Table[\boldsymbol{i}^2, \{\boldsymbol{i}, 5\}]\}, 1];}$$

$$\mathbf{A2//MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 & 7 & -10 \\ 7 & 10 & 4 & 2 & -9 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & -10 \\ 3 & 4 & 4 & 6 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

Замінимо в останній матриці рядки 3 і 4, стовпці від 2 до 4 на випадкові цілі числа з діапазону від 100 до 110.

A3 = A2;
A3[[3;;4,2;;4]] = RandomInteger[{100,110},{2,3}];
A3//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 & 7 & -10 \\ 7 & 10 & 4 & 2 & -9 \\ 5 & 102 & 100 & 105 & -10 \\ 3 & 101 & 100 & 108 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

■

Задачі 4.3. Самостійно знайдіть в довідковій системі потрібні функції роботи зі списками/масивами і розв'яжіть наступні задачі.

Задачі 4.3.1. Згенеруйте одновимірний масив з 16 випадкових дійсних чисел. Відсортуйте його за спаданням і перетворіть на матрицю А розміром 4 x 4. Створіть матрицю В розміром 4 x 4 складену з одних п'ятірок. Згенеруйте матрицю С розміром 4 x 4, елементи якої C_{ij} обчислюються за формулою $C_{ij} = i^2 - j^2$. Згенеруйте діагональний масив D з елементами на діагоналі $[1,-1,2,-2]$. Обчисліть масив $A+B-C-D+E-3$, де E одинична матриця розміром 4 x 4.

Задачі 4.3.2. Створіть матрицю Z елементи якої обчислюються за формулою $Z_{ij} = X_i^2 - Y_j^2$, де $X = [-3, 0, 1, 2, 5]$, $Y = [-5, 0 - 4, 1, 3]$ одновимірні масиви. Додайте до Z стовпець, складений з натуральних чисел 1,2,3,4,5. Потім між першим і другим рядками вставте рядок, складений з одиниць.

Задачі 4.3.3. Створити масив А розміром 5 x 5, у якого на головній діагоналі розташовані натуральні числа від 1 до 5, на верхній побічній діагоналі – одиниці, на нижній побічній – мінус одиниці, а інші елементи дорівнюють нулю. Створити масив В розміром 5 x 5 , всі рядки якого співпадають з вектором 5,4,3,2,1. Створити масив С розміром 5 x 5 , всі стовпці якого співпадають з вектором 2,4,6,8,10. Скласти всі масиви D=A+B+C. В масиві D замінити другий рядок одиницями, видалити останній стовпець та дописати праворуч до отриманого масиву масив з нулів розміром 5 x 2. В отриманому масиві замінити елементи, індекси яких одночасно задовольняють нерівностям $1 \le i \le 3,\ 3 \le j \le 5$, на трійки.

Задачі 4.3.4. Згенерувати матрицю випадкових цілих чисел розміром 5 x 5. Поміняти місцями рядок, що містить максимальний елемент, з рядком, що містить мінімальний елемент. Якщо мінімальних (максимальних) елементів більш одного, то вибрати рядок з більшим індексом. Побудувати вектор, елементи якого є максимумами елементів всіх діагоналей, що паралельні головній.

Задачі 4.3.5. Дана матриця 5 x 5. Для кожного рядка матриці знайти суму її елементів. Побудувати нову матрицю, у якої елементи, що розташовані одночасно вище головної діагоналі і вище побічної, дорівнюють нулю. Замінити в початковій матриці елементи діагоналі на середні значення по рядках.

Задачі 4.3.6. Згенерувати одновимірний масив 20 випадкових дійсних чисел на відрізку $[-10,10]$). Обчислити суму від'ємних елементів і їх кількість. Обчислити кількість елементів масиву, які дорівнюють 0. Впорядкувати масив по зростанню модулів елементів. Замінити всі від'ємні елементи масиву їх квадратами і впорядкувати елементи нового масиву по зростанню.

5. Розв'язання рівнянь та систем рівнянь.

Розв'язання алгебричних рівнянь та систем рівнянь за допомогою функції `Solve`. *Використання функції* `LinearSolve` *для розв'язання систем лінійних рівнянь. Застосування функція* `RowReduce` *для розв'язання систем лінійних рівнянь.*

Завдання:

5.1 Розв'язання рівнянь.
5.2 Розв'язання систем лінійних рівнянь.
5.3 Розв'язання систем нелінійних рівнянь.

5.1. Розв'язання рівнянь.

Приклад 5.1. Використовуючи систему «Mathematica», розв'язати рівняння

$$\frac{(a-x)\sqrt{a-x}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b.$$

Розв'язання. В системі Mathematica введіть інструкцію

$\textbf{Remove}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$

$\textbf{Solve}[\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x})\sqrt{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}}+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})\sqrt{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}}}{\sqrt{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}}+\sqrt{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}}}==\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}]$

та натисніть комбінацію клавіш **`Shift-Enter`**. Ви отримаєте відповідь
$\{\{x\to a\},\{x\to b\}\}$.
Це свідчить, що рівняння має два корені: $x=a,\ x=b$.

При розв'язанні деяких рівнянь система не спрощує відповідь. Тоді до розв'язку треба застосувати функцію `Simplify`. Наприклад,

$\textbf{Simplify}[\textbf{Solve}[\frac{\boldsymbol{3a\,b+1}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}==\frac{\boldsymbol{3a\,b}}{\boldsymbol{a+1}}+\frac{\boldsymbol{(2a+1)x}}{\boldsymbol{a(a+1)^2}}+\frac{\boldsymbol{a^2}}{\boldsymbol{(a+1)^3}},\boldsymbol{x}]]$

$\{\{x\to\frac{a}{1+a}\}\}$

Наступний рисунок пояснює інструкцію розв'язання рівняння.

Функція "спрощуй" Функція "розв'яжи"

$$\mathbf{Simplify[Solve[}\overbrace{\frac{3ab+1}{a}x==\frac{3ab}{a+1}+\frac{(2a+1)x}{a(a+1)^2}+\frac{a^2}{(a+1)^3}}^{\text{Рівняння}},x]]$$

Аргументи функцій в квадратних дужках

Подвійний знак рівності позначає рівняння

Ім'я шуканої змінної

Задачі 5.1. Використовуючи функцію `Solve` системи Mathematica, розв'язати рівняння

Варіант №		Відповідь
1.	$\sqrt{3x-2}=2\sqrt{x+2}-2$	$x_1=34, x_2=2$
2.	$\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$	$x_1=0, x_2=5$
3.	$\sqrt{\frac{x-5}{x+2}}+\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}=\frac{7}{x+2}\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}$	$x=6$
4.	$\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}$	$x_1=a, x_2=-b$
5.	$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$	$x_1=4, x_2=-1$

5.2. Розв'язання систем лінійних рівнянь.

Приклад 5.2. Використовуючи систему «Mathematica», розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+2y+z=5, \\ 4x-y+5z=3 \end{cases}$$

п'ятьма способами: за допомогою функцій `Solve`, `LinearSolve`, `RowReduce`, за допомогою оберненої матриці та правила Крамера.

Розв'язання.

Remove$[x,y,z]$

Розв'язання за допомогою функції `Solve`.

Solve[{**x + y − z == 0**, **3x + 2y + z == 5**, **4x − y + 5z == 3**}, {**x**, **y**, **z**}]

$\{\{x\to-1, y\to3, z\to2\}\}$

Це свідчить, що рівняння має розв'язок: $x=-1,\ y=3,\ z=2$.

Розв'язання за допомогою функції `LinearSolve`.

LinearSolve[{{**1**, **1**, **−1**}, {**3**, **2**, **1**}, {**4**, **−1**, **5**}}, {**0**, **5**, **3**}]

```
{-1, 3, 2}
```

Наступний рисунок пояснює, як треба підставляти коефіцієнти до функції `LinearSolve`.

$$1\cdot x+1\cdot y+(-1)\cdot z=0$$

$$3x+2y+1\cdot z=5$$

$$4x+(-1)\cdot y+5z=3$$

$$\mathbf{LinearSolve}[\{\{\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1}\},\{\mathbf{3},\mathbf{2},\mathbf{1}\},\{\mathbf{4},-\mathbf{1},\mathbf{5}\}\},\underbrace{\{\mathbf{0},\mathbf{5},\mathbf{3}\}}_{\text{праві частини рівнянь}}]$$

Розв'язання за допомогою функції `RowReduce`.

RowReduce[{{1, 1, −1, 0}, {3, 2, 1, 5}, {4, −1, 5, 3}}]//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Функція `RowReduce` зводить розширену матрицю системи до діагонального вигляду. Після зведення розв'язок міститься в останньому стовпці результівної матриці (якщо на головній діагоналі стоять одиниці).

Наступний рисунок пояснює, як треба підставляти коефіцієнти до функції `RowReduce`.

$$1\cdot x+1\cdot y+(-1)\cdot z=0$$

$$3x+2y+1\cdot z=5$$

$$4x+(-1)\cdot y+5z=3$$

$$\mathbf{RowReduce}[\{\{\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}\},\{\mathbf{3},\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{5}\},\{\mathbf{4},-\mathbf{1},\mathbf{5},\mathbf{3}\}\}]//\mathbf{MatrixForm}$$

Розв'язання системи за допомогою оберненої матриці виконувалося в попередніх завданнях, а за допомогою правила Крамера докладно описано у нашому посібнику [1]. Відтворіть відповідну послідовність інструкцій самостійно.

Задачі 5.2. Використовуючи систему «Mathematica», розв'язати систему рівнянь п'ятьма способами за допомогою функцій `Solve`, `LinearSolve`, `RowReduce`, за допомогою оберненої матриці та правила Крамера.

Варіант №	Система	Відповідь
1.	$\begin{cases} 2x-4y+3z=9 \\ 3x-5y+z=-4 \\ 4x-7y+z=5 \end{cases}$	`-47,-28,-3`
2.	$\begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ 3x-5y+2z=-7 \\ 4x-7y+z=-12 \end{cases}$	`2, 3, 1`

3.	$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \end{cases}$	$x_1=1, x_2=2, x_3=-2$
4.	$3x_1+4x_2+2x_3+x_4=16,$ $x_1+7x_2+x_3+x_4=23,$ $2x_1+x_2+3x_3+5x_4=10,$ $4x_1-3x_2+4x_3+6x_4=1;$	$x_1=1, x_2=3, x_3=0, x_4=1$
5.	$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1,$ $x_1+x_3+x_4+x_5=-3,$ $x_1+x_2+x_3+x_4=0,$ $x_1+x_2+x_3+x_5=3,$ $x_1+x_2+x_4+x_5=-2;$	$x_1=-5, x_2=4, x_3=3, x_4=-2, x_5=1$

5.3. Розв’язання систем нелінійних рівнянь.

Приклад 5.3. Використовуючи систему «Mathematica», за допомогою функцій `Solve` розв’язати систему нелінійних рівнянь.

$$\begin{cases} \left(x^2-y^2\right) x\,y=180 \\ x^2-x\,y-y^2=-11 \end{cases}$$

Надрукувати лише дійсні корені.

Р о з в ’ я з а н н я. Щоб функція `Solve` повертала лише дійсні корені треба використати опцію `Reals`. На всяк випадок до результату можна застосувати функцію спрощення `Simplify`.

Remove[$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$]

Simplify[**Solve**[{($\boldsymbol{x^2-y^2}$) $\boldsymbol{x\ y}$ == **180**, $\boldsymbol{x^2-x\ y-y^2}$ == **−11**}, {$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$}, **Reals**]]

$\{\{x\to -5, y\to -4\},$

$\{x\to 5, y\to 4\},$

$\{x\to -\sqrt{-10+\sqrt{181}}, y\to \frac{1}{9}\sqrt{-10+\sqrt{181}}(10+\sqrt{181})\},$

$\{x\to \sqrt{-10+\sqrt{181}}, y\to -\frac{1}{9}\sqrt{-10+\sqrt{181}}(10+\sqrt{181})\}\}$

Це свідчить, що система має 4 пари дійсних розв’язків.

Задачі 5.3. Розв’язати систему нелінійних рівнянь за допомогою функцій `Solve`. Надрукувати лише дійсні розв’язки.

Варіант №	Система	Відповідь
1.	$\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2), \\ x+y=6. \end{cases}$	1) $x_1=4,\ y_1=2;$ 2) $x_2=2,\ y_2=4.$
2.	$\begin{cases} x^2-x\,y-y^2+x-y+6=0 \\ y+2x=4 \end{cases}$	1. $x=1,\ y=2$ 2. $x=14,\ y=-24$

3.	$\begin{cases} x^2+xy+y^2=84, \\ x+\sqrt{xy}+y=14. \end{cases}$	1) $x=2,\ y=8;$ 2) $x=8,\ y=2.$
4.	$\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$	1) $x=5,\ y=1;$ 2) $x=1,\ y=5;$ 3) $x=2,\ y=3;$ 4) $x=3,\ y=2.$
5.	$\begin{cases} x+y^2=7, \\ xy^2=12. \end{cases}$	1) $x=4,\ y=\sqrt{3}.$ 2) $x=4,\ y=-\sqrt{3}.$ 3) $x=3,\ y=2.$ 4) $x=3,\ y=-2.$

6. Функції і графіки.

Особливості іменування та використання стандартних функцій системи. Створення функцій користувача. Графіки функцій, які задані явно, параметрично або неявно. Оформлення графіків. Комбінування графіків.

Завдання:

6.1 Побудова графіка функції по точках.
5.2 Побудова графіка полінома.
5.3 Побудова графіка явно заданої функції.
5.4 Побудова графіка параметрично заданої функції по точках.
5.5 Побудова графіка функції, яка задана параметрично.
5.6 Побудова графіка функції, яка задана неявно.

6.1. Побудова графіка функції по точках.

Приклад 6.1. Використовуючи систему «Mathematica», побудувати графік функції $y(x)=3\sqrt[3]{(x+4)^2}-2x-8$. Побудувати таблицю значень функції $y(x)$ для $x=-6,-5,\ldots,0,1,2,\ldots,5,6$. Побудувати графік ламаної, використовуючи цю таблицю значень. На одному малюнку одночасно зобразити графік функції та ламаної.

Р о з в ’ я з а н н я .

$\mathbf{Remove}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$

Створюємо функцію.

Ім'я функції   Ім'я аргумента

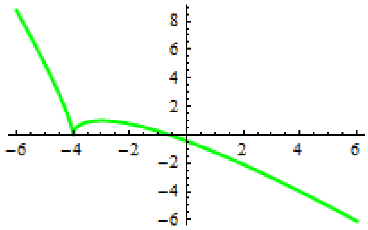
$$\boldsymbol{y}[\mathrm{x\_}] = \overbrace{\mathbf{3}\sqrt[3]{(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})^2} - \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{8}}^{\text{Вираз}};$$

Підкреслення позначає
ім'я аргументу

Будуємо її графік.

Побудувати графік   Вираз   Діаазон зміни аргумента   Товщина лінії   Колір лінії

p1 = Plot[y[x], {x, −6, 6}, PlotStyle → {Thickness[0.01], Green}]



Створюємо таблицю координат точок у вигляді списку.

pt = Table[{x, y[x]}, {x, −6, 6, 1}]

$\{\{-6,4+32^{2/3}\},\{-5,5\},\{-4,0\},\{-3,1\},\{-2,-4+32^{2/3}\},$
$\{-1,-6+33^{2/3}\},\{0,-8+62^{1/3}\},\{1,-10+35^{2/3}\},\{2,-12+36^{2/3}\},$
$\{3,-14+37^{2/3}\},\{4,-4\},\{5,-18+93^{1/3}\},\{6,-20+310^{2/3}\}\}$

Відображаємо список значень у вигляді таблиці. Одночасно переводимо всі координати до десяткового вигляду.

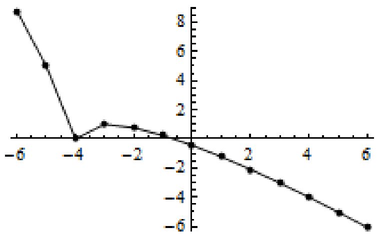
N[pt]//TableForm

```
{{-6., 8.7622032},
{-5., 5.},
{-4., 0.},
{-3., 1.},
{-2., 0.76220316},
{-1., 0.24025147},
{0., -0.4404737},
{1., -1.2279468},
{2., -2.0942183},
{3., -3.0220829},
{4., -4.},
{5., -5.0197539},
{6., -6.0752335}}
```

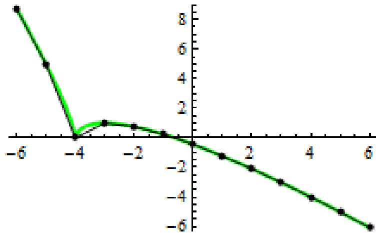
Будуємо ламану по точках таблиці інструкцією, яка наведена на наступному рисунку.

Побудувати ламану   Список координат вершин ламаної   З'єднати точки   Малювати всі вузли   Розмір точок

p2 = ListPlot[pt, Joined → True, Mesh → Full,
PlotStyle → {PointSize[0.02], Black}]



За допомогою функції Show зображуємо обидва графіка на одному малюнку.
Show[p1, p2]



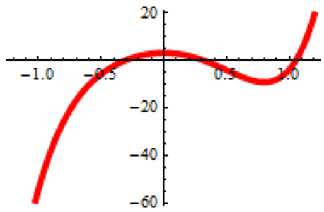
Задачі 6.1. Використовуючи систему «Mathematica», побудувати графік функції $y(x)$ та її таблицю значень. Інтервал змінення незалежної змінної підібрати самостійно. Побудувати графік ламаної, використовуючи таблицю значень. На одному малюнку одночасно зобразити графік функції та ламаної.

Варіант №	Функція
1.	$y=1-\sqrt[3]{x^2-2x}$
2.	$y=12\sqrt[3]{6(x-2)^2}\big/(x^2+8)$
3.	$y=-12\sqrt[3]{6(x-1)^2}\big/(x^2+2x+9)$
4.	$y=1-\sqrt[3]{x^2+4x+3}$
5.	$y=2x+6-3\sqrt[3]{(x+3)^2}$

6.2. Побудова графіка полінома.

Приклад 6.2. Використовуючи систему «Mathematica», побудувати графік функції $y=25x^2-32x^2+3$, яка задана явно. Інтервал незалежної змінної підібрати самостійно.

Розв'язання. Створюємо функцію та будуємо її графік.
Remove[*x*, *y*]
***y*[x_] = 25*x*⁵ − 32*x*² + 3;**
Plot[*y*[*x*], {*x*, −1.2, 1.2}, PlotStyle → {Thickness[0.01], Red}]



Інтервал {x,-1.2,1.2} підбираємо так, щоб побачити характерні точки кривої: екстремуми та точки перегину.

Задачі 6.2. Використовуючи систему «Mathematica», побудувати графік функції $y(x)$. Інтервал для незалежної змінної підібрати самостійно.

Варіант №	Функція
1.	$y=2x^3-9x^2+12x-9$
2.	$y=x^2\left(x-2\right)^2$
3.	$y=\left(2x+1\right)^2\left(2x-1\right)^2$
4.	$y=16x^2\left(x-1\right)^2$
5.	$y=2x^3+9x^2+12x$

6.3. Побудова графіка явно заданої функції.

У наступних задачах використовуються елементарні функції, які в системі «Mathematica» треба вводити відповідно до правил: ім'я функції починається з великої літери, аргументи функції містяться в квадратних дужках.

Функція	Позначення в системі	Назва
e^x	Exp[x]	Експонента
$\sin x$	Sin[x]	Синус
$\cos^2 x$	Cos[x]^2	Косинус в квадраті
$\ln x$	Log[x]	Натуральний логарифм
$\lg x$	Log[x,10]	Десятковий логарифм
$\mathrm{ch}\, x$	Cosh[h]	Гіперболічний косинус

Задачі 6.3. Використовуючи систему «Mathematica», побудувати графік функції $y(x)$. Інтервал для незалежної змінної підібрати самостійно.

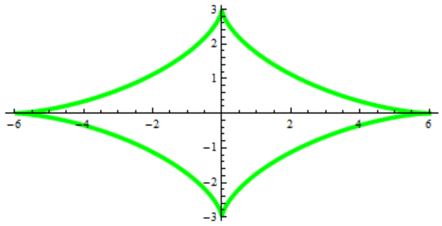
Варіант №	Функція
1.	$y=x^2-4x-(x-2)\ln(x-1)$
2.	$y=4x-x^2-2\cos(x-2)$
3.	$y=6e^{x-1}-3x-x^3$
4.	$y=x^4+4x^3+12x^2+24\ (x+1-e^x)$
5.	$y=\cos x+\mathrm{ch}\, x$

6.4. Побудова графіка параметричної функції по точках.

Приклад 6.4. Використовуючи систему «Mathematica», побудувати графік функції $x=6\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$, яка задана параметрично. Побудувати таблицю значень функції на відрізку $[0, 2\pi]$. Побудувати графік ламаної, використовуючи цю таблицю значень. На одному малюнку одночасно зобразити графік функції та ламаної.

Розв'язання. Створюємо функції та будуємо графік.

Remove$[x, y, t]$
x[t_] = **6Cos**$[t]^{3}$;
y[t_] = **3Sin**$[t]^{3}$;
p1 = ParametricPlot$[\{x[t], y[t]\}, \{t, 0, 2\pi\}$, **AspectRatio → Automatic**,
PlotStyle → {Thickness[0.01], Green}]



Зверніть увагу на те, де записується піднесення до степеня: після аргументу функції.

x[t_] = **6Cos**$[t]^{3}$;
y[t_] = **3Sin**$[t]^{3}$;

Піднесення до степеня після аргументу функції

Наприклад, спочатку обчислюється Cos$[t]$, а потім результат підноситься до степеня. Отже вираз $\cos^3 t$ треба вводити як Cos$[t]^3$ або Cos$[t]$^3.

Наступний рисунок пояснює використання аргументів функції `ParametricPlot`.

Побудувати параметричну криву | Вирази для x та y координат кривої | Диапазон зміни параметра

p1 = ParametricPlot$[\{x[t], y[t]\}, \{t, 0, 2\pi\}$, **AspectRatio → Automatic**,
PlotStyle → {Thickness[0.01], Green}]

Далі створюємо таблицю координат вузлів ламаної у вигляді списку.

pt = Table$[\{x[t], y[t]\}, \{t, 0, 2\pi, \pi/4\}]$

$$\{\{6,0\},\{\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}}\},\{0,3\},\{-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}}\},$$
$$\{-6,0\},\{-\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{2\sqrt{2}}\},\{0,-3\},\{\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{2\sqrt{2}}\},\{6,0\}\}$$

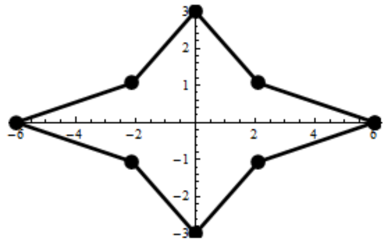
Відображаємо список координат у вигляді таблиці. Одночасно переводимо всі числа до десяткового вигляду.

N**[pt]//TableForm**

```
{{6., 0.},
{2.1213203, 1.0606602},
{0., 3.},
{-2.1213203, 1.0606602},
{-6., 0.},
{-2.1213203, -1.0606602},
{0., -3.},
{2.1213203, -1.0606602},
{6., 0.}}
```

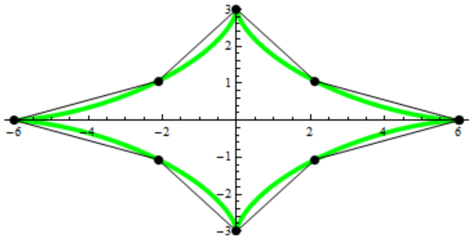
Будуємо ламану по точках таблиці.

$$\mathbf{p2 = ListPlot[pt, Joined \to True, Mesh \to Full,}$$
$$\mathbf{PlotStyle \to \{PointSize[0.02], Black\}]}$$



За допомогою функції Show зображуємо обидва графіка на одному малюнку.

Show[p1, p2]



Задачі 6.4. Використовуючи систему «Mathematica», побудувати графік функції, яка задана параметрично. Побудувати таблицю координат вузлів ламаної на інтервалі $[0, 2\pi]$. Побудувати її графік, використовуючи цю таблицю значень. На одному малюнку одночасно зобразити графік функції та ламаної.

Варіант №	Функції
1.	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$
2.	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\,\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$

6.5. Побудова графіка функції, яка задана параметрично.

Приклад 6.5. Використовуючи систему «Mathematica», на відрізку $[0, 2\pi]$ побудувати графік функції $x = \cos^3 t$, $y = \sin t$, яка задана параметрично.

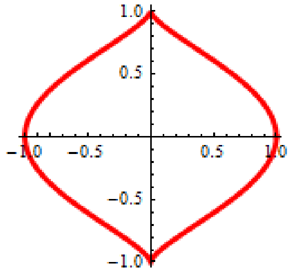
Розв'язання. Створюємо функції та будуємо графік.

$\mathbf{Remove}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}]$

$\boldsymbol{x}[\mathrm{t\_}] = \mathbf{Cos}[\boldsymbol{t}]^{\mathbf{3}}$

$\boldsymbol{y}[\mathrm{t\_}] = \mathbf{Sin}[\boldsymbol{t}]$

$\mathbf{ParametricPlot}[\{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}], \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}]\}, \{\boldsymbol{t}, \mathbf{0}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\}, \mathbf{PlotStyle} \to \{\mathbf{Thickness}[\mathbf{0.02}], \mathbf{Red}\}]$



Зверніть увагу на те, де записується піднесення до степеня: після аргументу функції.

Задачі 6.5. Використовуючи систему «Mathematica», побудувати графік функції, яка задана параметрично.

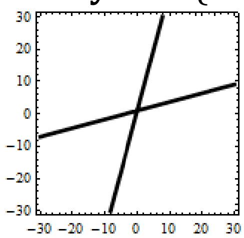
Варіант №	Функції
1.	$\begin{cases} x = 4\left(\cos t + t\sin t\right) \\ y = 4\left(\sin t - t\cos t\right) \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi$
2.	$\begin{cases} x = e^t\left(\cos t + \sin t\right) \\ y = e^t\left(\cos t - \sin t\right) \end{cases}, \ 0 \le t \le \pi$
3.	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, \ 0 \le t \le \pi/3$
4.	$\begin{cases} x = 2\left(2\cos t - \cos 2t\right) \\ y = 2\left(2\sin t - \sin 2t\right) \end{cases}, \ 0 \le t \le \pi/3$

6.6. Побудова графіка функції, яка задана неявно.

Приклад 6.6. Використовуючи систему «Mathematica», побудувати графік функції $x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$, яка задана неявно.

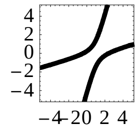
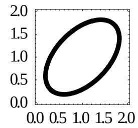
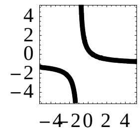
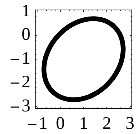
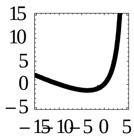
Розв'язання. Створюємо функцію та будуємо графік.

```
Remove[x, y, F]
F[x_, y_] = x^2 + y^2 − 4 x y + 4x − 2y + 1;
ContourPlot[F[x, y] == 0, {x, −30, 30}, {y, −30, 30},
                    ContourStyle → {Thickness[0.02]}]
```



Графіком виявилися дві прямі, які перехрещуються.

Задачі 6.6. Використовуючи систему «Mathematica», побудувати графік функції, яка задана неявно. Діапазони зміни незалежних змінних підібрати самостійно.

Варіант №	Функції	Графік
1.	$-x^2 - y^2 + 4\,x\,y + 2x - 4y + 1 = 0$	
2.	$2x^2 + 2y^2 - 2\,x\,y - 2x - 2y + 1 = 0$	
3.	$-2\,x\,y - 2x - 2y + 1 = 0$	
4.	$-4x^2 - 4y^2 + 2\,x\,y + 10x - 10y + 1 = 0$	
5.	$x^2 + 2\,x\,y + 10x - 10y + 1 = 0$	

7. Геометричні побудови.

Графічні примітиви та їх використання. Візуалізація даних зі списків. Побудова геометричних об'єктів по їх рівнянням.. Приклади візуалізації розв'язків математичних задач.

Завдання:

7.1 Побудова площини по трьом точкам.
7.2 Паралелограм в просторі.
7.3 Обчислення в просторовому трикутнику.
7.4 Пряма і площина у просторі.

7.1. Побудова площини по трьом точкам.

Приклад 7.1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1,2,3)$, $B(-2,-1,1)$, $C(0,4,2)$. Графічно зобразити точки та площину.

Розв'язання. Вводимо координати точок і «малюємо» їх в пам'яті системи.

```
Unprotect[C, D];
A = {1, 2, 3};
B = {−2, −1, 1};
C = {0, 4, 2};
p1 = ListPointPlot3D[{A, B, C},
          PlotStyle → {Directive[PointSize[0.03], Red]}];
```

Тут використана функція `ListPointPlot3D`, яка призначена для зображення множини точок у просторі. Завершення інструкції крапкою з комою означає, що вона буде виконана, але результат її роботи не буде зображено в документі

Mathematica (тобто рисунок не буде зображено, але він залишиться в пам'яті комп'ютера під ім'ям **p1**).

Рівняння площини, яка проходить через точки $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, може бути записано у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

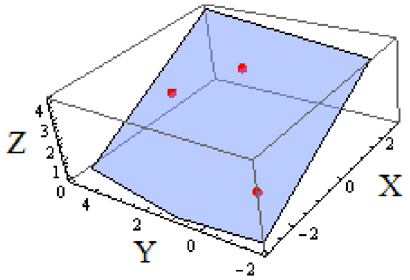
Код обчислення визначника та побудови рівняння площини має вигляд:

```
P = {x, y, z};
Eq = Det[{P − A, B − A, C − A}]
Eq == 0        (* друкуємо рівняння *)
22 + 7x − y − 9z == 0
```

Зверніть увагу на те, як побудована матриця з виразу (1): її рядки є списками **P − A**, **B − A**, **C − A**. Якщо їх роздрукувати, то це і будуть рядки потрібної матриці, наприклад, **P – A** $= \{x - 1, y - 2, z - 3\}$**.**

За отриманим рівнянням зображуємо площину та додаємо зображення точок.

```
p2 = ContourPlot3D[Eq == 0, {x, −3, 3}, {y, −2, 5}, {z, 0, 4},
                   Mesh → None, ContourStyle → Opacity[0.5]];
Show[p1, p2, PlotRange → All, AspectRatio−> Automatic]
```



На наступному рисунку пояснюється інструкція побудови площини по її неявному рівнянню.

Побудувати поверхню по неявному рівнянню *f*(*x*,*y*,*z*)=0

Підібрати діапазони для *x*, *y*, *z* щоб було видно, що всі точки розташовані на площині

Прозорість

Напів прозоро

```
p2 = ContourPlot3D[Eq == 0, {x, −3, 3}, {y, −2, 5}, {z, 0, 4},
                   Mesh → None, ContourStyle → Opacity[0.5]];
```

Задачі 7.1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки A, B та C. Графічно зобразити точки та площину. Діапазон зміни x, y, z підібрати так, щоб точки були розташовані на площині.

Варіант №	Точки
1.	$A\{-3, 4, -7\}$; $B\{1, 5, -4\}$; $C\{-5, -2, 0\}$;
2.	$A\{-1, 2, -3\}$; $B\{4, -1, 0\}$; $C\{2, 1, -2\}$;

3.	$A\{-3,-1,1\};\ \ B\{-9,1,-2\};\ \ C\{3,-5,4\};$
4.	$A\{1,-1,1\};\ \ B\{-2{,}0,3\};\ \ C\{2,1,-1\};$
5.	$A\{1,2,0\};\ \ B\{1,-1,2\};\ C\{0,1,-1\};$

7.2. Паралелограм в просторі.

Приклад 7.2. В просторі дано плоский паралелограм, три вершини якого мають координати $A(-3,5,6)$, $B(1,-5,7)$, $C(8,-3,-1)$. Знайти координати четвертої вершини D, яка протилежна вершині A. Обчислити площу паралелограма. В системі Mathematica побудувати контур цього паралелограма, та точки його вершин.

Розв'язання. Спочатку задаємо списки, які містять координати точок, та будуємо вектори сторін AB та AC.

```
Unprotect[C, D];
A = {-3, 5, 6};
B = {1, -5, 7};
C = {8, -3, -1};
AB = B - A;
AC = C - A;
```

Знаходимо координати вершини D.

```
D = A + (AB + AC)
{12, -13,0}
```

Будуємо графічні об'єкти: контур паралелограма та його вершини. Щоб ці об'єкти не відображалися в документі завершуємо відповідні інструкції крапкою з комою.

Намалювати графічний примітив в просторі

Товщина лінії

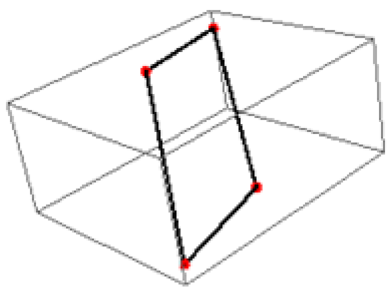
Примітив "ламана"

Вершини ламаної

```
p1 = Graphics3D[{Thickness[0.01], Line[{A, B, D, C, A}]}];
p2 = ListPointPlot3D[{A, B, D, C},
        PlotStyle-> {Directive[PointSize[0.03], Red]}];
```

Нарешті малюємо обидва об'єкти.

```
Show[p1, p2]
```



Наступною інструкцією обчислюємо площу паралелограма як модуль векторного добутку векторів AB і AC.

Норма (довжина) вектора

Векторний добуток векторів

S = Norm[Cross[AB, AC]]

117

Задачі 7.2. В просторі дано плоский паралелограм, координати трьох вершин **A**, **B**, **C** якого відомі. Знайти координати четвертої вершини **D**, яка протилежна вершині А. Обчислити площу паралелограма. В системі Mathematica побудувати контур паралелограма, та його вершини.

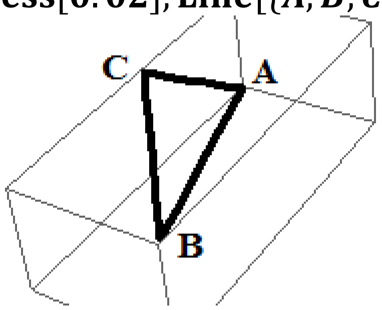
Варіант №	Точки
1.	$A\{1,-2,3\}$; $B\{0,-1,\ 2\}$; $C\{3,4,5\}$;
2.	$A\{0,-3,6\}$; $B\{-2,-3,-3\}$; $C\{-9,-3,-6\}$;
3.	$A\{3,3,-1\}$; $B\{5,5,-2\}$; $C\{4,1,1\}$;
4.	$A\{-1,2,-3\}$; $B\{3,4,-6\}$; $C\{1,1,-1\}$;
5.	$A\{-4,-2,0\}$; $B\{-1,-2,4\}$; $C\{3,-2,1\}$;

7.3. Обчислення в просторовому трикутнику.

Приклад 7.3. У трикутника з вершинами $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ та $C(1,3,-1)$ знайти висоту $h=|\vec{BD}|$, яка проведена з вершини В на протилежну сторону. Знайти також довжину медіани, проведеної із вершини В на протилежну сторону. Графічно зобразити трикутник, та його медіану.

Р о з в ' я з а н н я. Введемо списки, які містять координати точок, і побудуємо зображення трикутника.

```
Unprotect[C];
A = {1, −1, 2};
B = {5, −6, 2};
C = {1, 3, −1};
p1 = Graphics3D[{Thickness[0.02], Line[{A, B, C, A}]}]
```



Площа трикутника дорівнює половині модуля векторного добутку векторів його сторін $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$. Отже

```
AB = B – A;
AC = C – A;
```

$\boldsymbol{S} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{Norm}[\mathbf{Cross}[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}]]$

$\frac{25}{2}$

З іншого боку, $S = \frac{1}{2}h\,|\vec{AC}|$. Щоб знайти довжину висоти трикутника розв'яжемо це рівняння відносно невідомої h.

$\mathbf{LAC\ =\ Norm[AC]}$

$\mathbf{Solve}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{h} * \mathbf{LAC} == \boldsymbol{S}, \boldsymbol{h}\right]$

$\{\{h \to 5\}\}$

Таким чином, довжина висоти трикутника дорівнює 5.

Знайдемо вектор $\vec{BM}$ медіани трикутника. Він дорівнює половині суми векторів $\vec{BA}$ і $\vec{BC}$.

$\mathbf{BA} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B};$

$\mathbf{BC} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{B};$

$\mathbf{BM} = \frac{\mathbf{BA} + \mathbf{BC}}{\mathbf{2}}$

$\{-4, 7, -\frac{3}{2}\}$

Знаходимо довжину медіани.

$\mathbf{Norm[BM]}$

$\frac{\sqrt{269}}{2}$

Знаходимо координати точки M (кінець медіани). Для цього до координат точки B додаємо координати вектора BM.

$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B} + \mathbf{BM}$

$\{1,\ 1,\ \frac{1}{2}\}$

Наступною інструкцією створюємо графічний об'єкт «стрілка», яка представляє вектор медіани.

Намалювати графічний примітив в просторі

Товщина

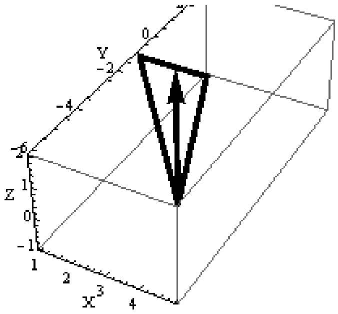
Розмір наконечника

Примітив "стрілка" від точки B до точки M

$\mathbf{p2 = Graphics3D[\{Thickness[0.02], Arrowheads[0.1], Arrow[\{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{M}\}]\}];}$

Відображаємо графічний об'єкт **p2** одночасно з трикутником, графічний об'єкт **p1** якого створено раніше.

$\mathbf{Show[p1, p2, Axes \to True, AxesLabel \to \{"X", "Y", "Z"\}]}$



Задачі 7.3. У трикутника з вершинами в точках A, B, C знайти висоту $h = |\vec{BD}|$, яка проведена з вершини B на протилежну сторону. Знайти також довжину медіани, проведеної із вершини B на протилежну сторону. В системі Mathematica побудувати контур трикутник, та його медіану.

Варіант №	Точки
1.	$A\{2,2,7\}$; $B\{0,0,6\}$; $C\{-2,5,7\}$;
2.	$A\{-1,2,3\}$; $B\{0,1,-2\}$; $C\{3,-4,5\}$;
3.	$A\{0,3,-6\}$; $B\{-4,3,6\}$; $C\{4,3,3\}$;
4.	$A\{0,1,-2\}$; $B\{3,1,2\}$; $C\{-4,1,1\}$;
5.	$A\{3,3,-10\}$; $B\{1,5,-2\}$; $C\{4,1,1\}$;

7.4. Пряма і площина у просторі.

Приклад 7.4. Знайти точку перетинання прямої $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$ і площини $x + 2y + 3z - 14 = 0$. Використовуючи систему «Mathematica», намалювати пряму, площину і точку перетину.

Р о з в ' я з а н н я. Перепишемо рівняння прямої у параметричному вигляді. Для цього розписуємо канонічне рівняння у вигляді $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4} = t$, і виражаємо невідомі x, y, z через t.

```
x[t_] = -1 * t + 2;
y[t_] = -1 * t + 3;
z[t_] = 4 * t - 1;
```

Підставивши ці вирази в рівняння площини $x(t) + 2y(t) + 3z(t) - 14 = 0$, отримуємо рівняння відносно значення параметра t, при якому пряма перетинає площину.

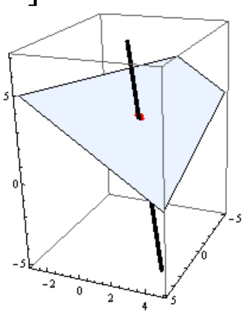
```
rez = Solve[x + 2 * y + 3 * z - 14 == 0/. {x → x[t], y → y[t], z → z[t]}, t]
t0 = t/. rez[[1]]
{{t → 1}}
1
```

Координати точки перетинання прямої і площини дорівнюють

```
{x0, y0, z0} = {x[t0], y[t0], z[t0]}
{1, 2, 3}
```

Намалюємо площину, пряму та точку перетинання.

```
pl = ParametricPlot3D[{x[t], y[t], z[t]}, {t, −1, 2},
                              PlotStyle → Thickness[0.02]];
pp = ContourPlot3D[x + 2 ∗ y + 3 ∗ z − 14 == 0, {x, −5, 5}, {y, −5, 5},
                              {z, −5, 5}, Mesh → False];
pt = ListPointPlot3D[{{x0, y0, z0}},
                  PlotStyle → {Directive[PointSize[0.05], Red]}];
Show[pl, pp, pt, PlotRange → All]
```



Наступний рисунок пояснює використання параметрів функцій `ParametricPlot3D` та `ContourPlot3D`, які малюють пряму і площину.

Чим ширше диапазон, тим довше відрізок прямої

Товщина

$$\text{pl} = \overbrace{\text{ParametricPlot3D}}^{\text{Будуємо пряму}}[\{x[t], y[t], z[t]\}, \{t, -1, 2\},\ \text{PlotStyle} \to \text{Thickness}[0.02]];$$

Чим ширше діапазони, тим більша частина площини зображається

$$\text{pp} = \underbrace{\text{ContourPlot3D}}_{\text{Будуємо площину}}[\underbrace{x + 2 * y + 3 * z - 14 == 0}_{\text{Рівняння площини}}, \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 5\}, \{z, -5, 5\}, \text{Mesh} \to \text{False}];$$

Задачі 7.4. Знайти точку перетинання прямої і площини. Використовуючи систему «Mathematica», намалювати пряму, площину і точку їх перетинання.

Варіант №	Рівняння прямої	Рівняння площини
1.	$\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-4}$	$-3x + y - 3z + 6 = 0$
2.	$\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-1}{2}$	$x + 3y + 7z - 24 = 0$
3.	$\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-2}{0}$	$3x - 8y - 5z - 12 = 0$
4.	$\dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$	$-x + 3y - 5z + 9 = 0$

5.	$\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}$	$-3x+y-z-11=0$

8. Анімація. Робота з документами Mathematica.

Засади анімації зображень. Використання функції Animate та її опцій. Оформлення робочих документів пакету Mathematica. Стилі документів та комірок (секцій). Складання електронного підсумкового звіту за результатами розв'язання завдань попередніх тем.

Завдання:

8.1 Анімація кривої.

8.2 Анімація руху точки вздовж кривої.

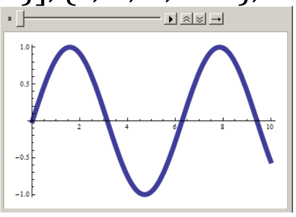
8.3 Оформлення документів в Mathematica.

Анімація – це послідовність зображень, які швидко змінюють одне одного, в результаті чого з'являється рух. Для виконання анімації в *Mathematica* призначена функція `Animate`. Вона має наступний синтаксис

`Animate[вираз,{t,t`$_1$`,t`$_2$`}],`

і кадр від кадру відрізняється значенням параметра t, який змінюється в діапазоні від t_1 до t_2. Функція створює спеціальну панель, в якій виконуються всі побудови. Наприклад,

```
Animate[Plot[Sin[x t],{x,0,10}],{t,1,5,0.1},AnimationRunning → False]
```



Опція `AnimationRunning→False` використовується для того, щоб анімація після створення панелі зразу не починала працювати.

8.1. Анімація кривої.

Приклад 8.1. Використовуючи систему «Mathematica» в проміжку часу $0 \le t \le 4$ побудувати анімацію руху кривої, рівняння якої в будь який момент t задається формулою

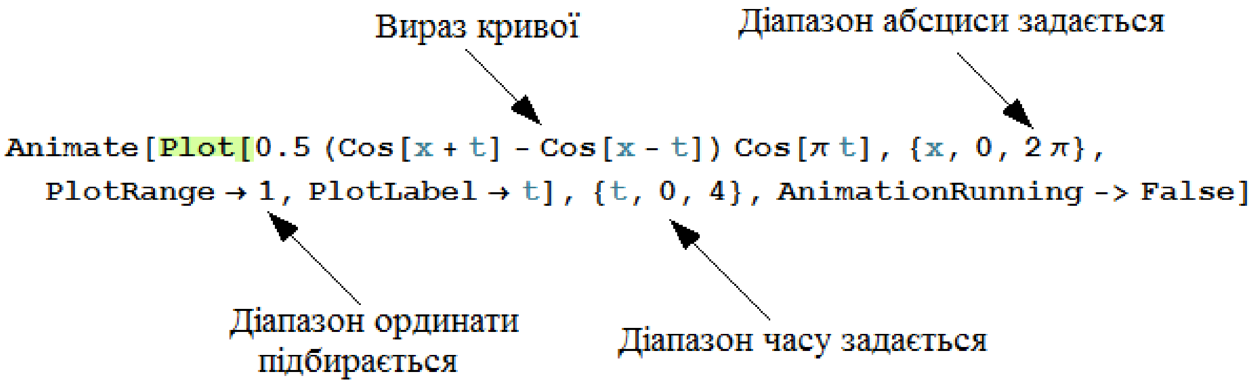
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\cos(x+t)-\cos(x-t)\right)\cdot\cos\pi t,$$

де $0 \le x \le 2\pi$.

Розв'язання. Для створення анімації визиваємо функцію `Animate` з першим аргументом – функцією `Plot` побудови графіка кривої. Другий аргумент `{t,0,4}` репрезентує діапазон часу. Кількість кадрів в цьому діапазоні за замовчуванням дорівнює 15.

```
Remove[x,t]
Animate[Plot[0.5(Cos[x + t] − Cos[x − t])Cos[π t],{x,0,2π},
    PlotRange → 1,PlotLabel → t], {t,0,4}, AnimationRunning−> False]
```

На наступному рисунку наведено пояснення до аргументів, які треба самостійно підібрати або взяти із умови задачі.



Задачі 8.1. Побудувати анімацію руху кривої на заданому відрізку часу.

Варіант №			
1.	$\sin x \cdot \sin t$	{x,0,π}	{t,0,2π}
2.	$(1-\cos^2 x) * \sin t$	{x,0,π}	{t,0,2π}
3.	$(\sin(x-t)+\sin(x+t))/2$	{x,0,π}	{t,0,2π}
4.	$8x^3(x-1)\sin t$	{x,0,1}	{t,0,2π}
5.	$(1-\|x\|)\cdot\sin(2t)$	{x,-1,1}	{t,0,π}

8.2. Анімація руху точки вздовж кривої.

Приклад 8.2. Крива задана параметричними рівняннями

$$x=(t^2-5)\sin t-\cos t$$

$$y=(5-t^2)\cos t+\sin t$$

Використовуючи систему «Mathematica», побудувати анімацію руху точки вздовж відрізка кривої $0\le t\le\pi$.

Розв'язання. Спочатку будуємо функції.

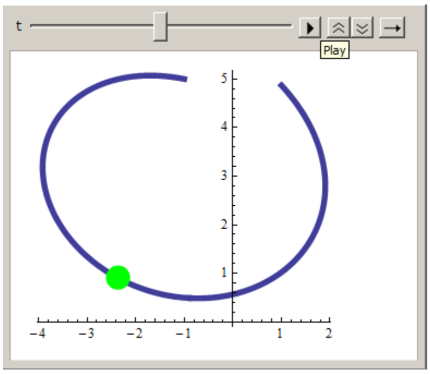
```
Remove[x, y, t]
x[t_] = (t^2 - 5) Sin[t] - Cos[t];
y[t_] = (5 - t^2) Cos[t] + Sin[t];
```

Потім будуємо криву по її параметричним рівнянням. Зберігаємо графік кривої в змінній p1, але криву не відображаємо. Для цього завершуємо інструкцію ParametricPlot крапкою з комою.

```
p1 = ParametricPlot[{x[tau], y[tau]}, {tau, 0, π}];
```

Будуємо анімацію. Всередині функції Animate створюємо графічний об’єкт p2 (точку). Щоб вона не малювалася окремо від кривої, завершуємо інструкцію Graphics крапкою з комою. Одночасне малювання кривої і точки виконує інструкція Show[p1,p2]

```
Animate[
    p2 = Graphics[{Green, Disk[{x[t], y[t]}, 0.15]}];
    Show[p1, p2],
{t, 0.1, π}]
```



Об’єкт `p1` (крива) створюється поза функцією `Animate`. Тому він не змінюється від кадру до кадру. Положення диску (точки) `{x[t],y[t]}` залежить від параметру анімації `t`. Тому в кожному кадрі точка малюється в новому положенні.

Задачі 8.2. Побудувати анімацію руху точки вздовж заданого відрізка параметричної кривої.

Варіант №	
1.	$\begin{cases} x = 5\,(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, \; 0 \le t \le 2\pi$
2.	$\begin{cases} x = 3\,(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, \; 0 \le t \le 2\pi$
3.	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, \; 0 \le t \le \pi$
4.	$\begin{cases} x = 10\cos^3 t \\ y = 10\sin^3 t \end{cases}, \; 0 \le t \le 2\pi$
5.	$\begin{cases} x = e^t\,(\cos t + \sin t) \\ y = e^t\,(\cos t - \sin\,t) \end{cases}, \; 0 \le t \le 2\pi$

8.3. Оформлення документів в Mathematica.

За результатами виконання попередніх тем, бажано створити електронний звіт. Оформлюється звіт в одному документі (файлі) системи «Mathematica». Порядок його оформлення описано наприкінці цього збірника вправ в додатку А.

Задачі 8.3.. Використовуючи систему «Mathematica», створити підсумковий звіт, який включає результати виконання поточної та всіх попередніх тем, і оформлений відповідно описаним в додатку А вимогам.

9. Обчислення границь та похідних.

Функція Limit обчислення границь. Границя послідовності. Границя функції. Функція D обчислення похідних. Обчислення похідних вищого порядку. Графіки похідних.

Завдання:

9.1. Послідовність з раціональним загальним членом.
9.2. Послідовність з ірраціональним загальним членом.
9.3. Границі різноманітних функцій.
9.4. Границі функцій в околі особливої точки.
9.5. Обчислення похідних.
9.6. Похідні виразів, які містять тригонометричні функції.
9.7. Похідні вищих порядків.
9.8. Використання похідних у рівняннях.

9.1. Послідовність з раціональним загальним членом.

Приклад 9.1. Використовуючи систему «Mathematica», надрукувати декілька перших членів послідовності та обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}$$

Р о з в ' я з а н н я . В системі Mathematica введіть вираз, який представляє загальний член послідовності.

$$\boldsymbol{x}[\mathbf{n\_}] = \frac{(\boldsymbol{2n}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}-(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{n}+\mathbf{1}};$$

Надрукуйте 8 перших членів послідовності.

Table$[\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}],\{\boldsymbol{n},\mathbf{1},\mathbf{8}\}]$

$$\left\{\frac{5}{3},\frac{16}{7},\frac{33}{13},\frac{8}{3},\frac{85}{31},\frac{120}{43},\frac{161}{57},\frac{208}{73}\right\}$$

Наступний рисунок пояснює аргументи функції `Table`.

генерувати послідовність
загальний член послідовності
номер початкового та останнього елементу

Table$[\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}],\{\boldsymbol{n},\mathbf{1},\mathbf{8}\}]$

Надрукуйте ту саму послідовність в десятковому вигляді.

$\boldsymbol{N}$[**Table**$[\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}],\{\boldsymbol{n},\mathbf{1},\mathbf{8}\}],\mathbf{3}]$

```
{1.67, 2.29, 2.54, 2.67, 2.74, 2.79, 2.82, 2.85}
```

Нагадаємо, що функція `N[...]` переводить аргумент до десяткового виду.

Для знаходження границі виконайте команду

Limit$[\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}],\boldsymbol{n}\to\infty]$

Ви отримаєте відповідь

3

Задачі 9.1. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити границю послідовності та надрукувати вісім початкових членів.

Варіант №	
1.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$
2.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$
3.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4+n)^3}$
4.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$
5.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

9.2. Послідовність з ірраціональним загальним членом.

Приклад 9.2. Використовуючи систему «Mathematica», надрукувати 8 перших членів послідовності в десятковому вигляді, побудувати графік перших 50 членів та обчислити границю.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32\,n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\,\sqrt[3]{n^3-1}}$$

Розв'язання. В системі Mathematica введіть вираз, який представляє загальний член послідовності.

$$\boldsymbol{x}[\mathbf{n\_}]=\frac{\boldsymbol{n}\sqrt[6]{\boldsymbol{n}}+\sqrt[5]{\mathbf{32}\boldsymbol{n}^{\mathbf{10}}+\mathbf{1}}}{(\boldsymbol{n}+\sqrt[4]{\boldsymbol{n}})\sqrt[3]{\boldsymbol{n}^{\mathbf{3}}-\mathbf{1}}};$$

При $n=1$ функція невизначена (знаменник обертається в 0). Тому обчислювати 8 перших членів потрібно починати з $n=2$. Отже інструкція друкування 8 перших членів послідовності в десятковому вигляді буде такою

$\boldsymbol{N}[\mathbf{Table}[\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}],\{\boldsymbol{n},\mathbf{2},\mathbf{9}\}],\mathbf{3}]$

```
{1.68,1.69,1.72,1.75,1.77,1.78,1.80,1.81}
```

Наступний рисунок пояснює аргументи функції `N`.

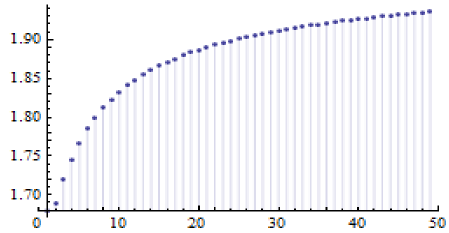
Перевести до десяткового виду

Кількість значущих цифр

$$\boldsymbol{N}[\underbrace{\mathbf{Table}[\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}],\{\boldsymbol{n},\mathbf{2},\mathbf{9}\}]}_{\text{генерувати послідовність}},\mathbf{3}]$$

Нагадаємо, що функція `N[...]` переводить аргумент до десяткового виду.

Для побудови графіка послідовності виконайте інструкцію
ListPlot[Table[x[n], {n, 2, 50}], Filling → Axis, PlotRange → All]



На графіку вздовж осі абсцис відкладено номер члена послідовності n, а вздовж осі ординат – значення $x[n]$. Опція `Filling → Axis` наказує функції `ListPlot` креслити вертикальні відрізки від осі абсцис до точок.

Графік показує, що значення членів послідовності наближаються до 2. Перевіримо це, виконавши команду обчислення границі.

Limit[x[n], n → ∞]

2

Зауваження. Якщо знаменник дробу обертається в 0 при $n = 1$, то починайте генерувати послідовність з $n = 2$. В іншому випадку генеруйте послідовність, починаючи з $n = 1$.

Задачі 9.2. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити границю послідовності, надрукувати 8 початкових членів в десятковому вигляді, побудувати графік перших 50 членів.

Варіант №	
1.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$
2.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$
3.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}$
4.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$
5.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$

9.3. Границі різноманітних функцій.

Приклад 9.3. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$$

Перевірити, що значення функції наближаються до границі, коли аргумент x прямує до граничного значення. Для цього побудувати таблицю значень функції в околі граничного значення $x = 0$.

Розв'язання. В системі Mathematica побудуйте функцію

$$\boldsymbol{f}[\mathbf{x\_}] = \frac{\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}}-\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{x}};$$

Для знаходження границі виконайте інструкцію

x0 = 0; (* граничне значення x *)

y0 = Limit[*f*[*x*], *x* → x0]

Ви отримаєте відповідь

`1`

Для перевірки обчисліть значення функції в послідовності точок, які наближаються до `x0`.

***f*[x0 + {0.1, 0.01, 0.001, 0.00001, 0.000001}]**

`{1.0012555, 1.0000125, 1.0000001, 1., 1.}`

Нагадаємо, що сума числа і списку повертає список

x0 + {0.1, 0.01, 0.001, 0.00001, 0.000001}

`{0.1,0.01,0.001,0.00001,0.000001}`

Функція `f[x0+{0.1,0.01,0.001,0.00001,0.000001}]` обчислюється в кожному елементі списку аргументів і повертає список значень. Послідовність цих значень функції наближається до `1.0`, тобто до знайденої границі `y0`.

Задачі 9.3. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити границю функції. Перевірити, що значення функції наближаються до границі, коли аргумент x прямує до граничного значення `x0`. Для цього побудуйте таблицю значень функції в околі граничного значення `x0`.

Варіант №	
1.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$
2.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$
3.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$
4.	$\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$
5.	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$

9.4. Границя функції в околі особливої точки.

Приклад 9.4. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити границю

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-4\,x^2-3\,x+18}{x^3-5\,x^2+3\,x+9}$$

Перевірити, що точка $x=3$ є особливою точкою функції (функція в цій точці не обчислюється). Перевірити, що значення функції наближаються до границі, коли аргумент x прямує до граничного значення 3. Для цього побудувати графік функції в околі граничного значення $x = 3$.

Розв'язання. В системі Mathematica побудуйте функцію

$$\boldsymbol{f}[\mathbf{x\_}]=\frac{\boldsymbol{x}^3-4\boldsymbol{x}^2-3\boldsymbol{x}+18}{\boldsymbol{x}^3-5\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}+9}$$

Для знаходження границі виконайте інструкції

```
x0 = 3.;
y0 = Limit[f[x], x → x0]
1.25
```

Зверніть увагу на те, що `f[x0]` не існує, бо якщо виконати команду

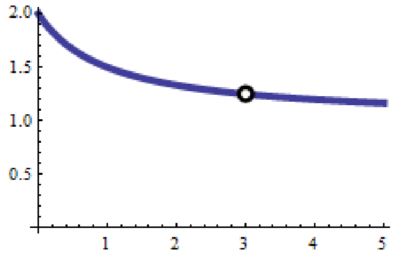
```
f[x0]
```

то ви отримаєте повідомлення про помилку (ділення на 0).

Power: : infy: Infinite expression $\frac{1}{0.}$ encountered. ≫

Побудуйте графік функції `f[x]` в околі точки `x0`. На графіку також намалюйте точку (`x0`,`y0`).

```
pf = ListPlot[{{x0, y0}}, PlotStyle → {Black, PointSize[0.05]}];
pw = ListPlot[{{x0, y0}}, PlotStyle → {White, PointSize[0.025]}];
pline = Plot[f[x], {x, 0, 5}, PlotStyle−> Thickness[0.02]];
Show[pline, pf, pw, PlotRange → {{0, 5}, {0, 2}}, AxesOrigin → {0, 0}]
```



Цей графік демонструє факт того, що наша функція не існує в точці (`x0`,`y0`), але її границі при $x \to x0$ зліва і справа дорівнюють `y0`.

Щоб зобразити точку (`x0`,`y0`) чорним кільцем ми намалювали її два рази: більшим і меншим розміром, і меншу точку зафарбували білим кольором.

При побудові графіка кривої діапазон (в нашому прикладі від `0` до `5`) було підібрано експериментально.

Задачі 9.4. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити границю функції. Перевірити, що гранична точка є особливою точкою функції. Показати, що значення функції наближаються до граничного, коли аргумент x прямує до граничного значення. Для цього побудувати графік функції і особливу точку. Діапазон для незалежної змінної підібрати самостійно.

Варіант №	
1.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$
2.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$
3.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$
5.	$\lim\limits_{\mathbf{x\to 0}}\dfrac{2\,x\sin x}{1-\cos x}$

9.5. Обчислення похідних.

Приклад 9.5. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити похідну функції

$$y=\frac{3x^6+4x^4-x^2-2}{15\sqrt{1+x^2}}.$$

Побудувати графік функції $y(x)$ та її похідної $y'(x)$. Обчислити значення похідної в точках $x=0,\ x=0.5,\ x=1$.

Розв'язання. В системі Mathematica введіть функцію, а потім побудуйте похідну.

$$\boldsymbol{y}[\mathbf{x\_}]=\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{6}}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}}{\mathbf{15}\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}};$$

y1[x_] = Simplify[*D*[*y*[*x*], *x*]]

Наступний рисунок пояснює інструкцію побудови похідної функції.

Похідна функція

Обчислення похідної

Вираз

Змінна

y1[x_] = Simplify[*D*[*y*[*x*], *x*]]

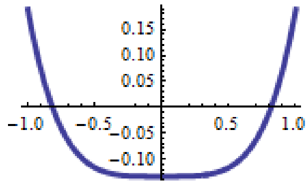
Спрощення результату

Натисніть комбінацію клавіш **`Shift-Enter`** і отримайте відповідь

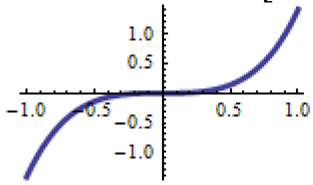
$x^3\sqrt{1+x^2}$

Для побудови графіків виконайте інструкції

Plot[*y*[*x*], {*x*, −1, 1}, PlotStyle → Thickness[0.01]]



Plot[y1[*x*], {*x*, −1, 1}, PlotStyle → Thickness[0.01]]



Знайдіть значення похідної в точках $x = 0,\ x = 0.5,\ x = 1$. Для цього виконайте інструкцію

y1[{0, 0.5, 1}]

$\{0, 0.13975425, \sqrt{2}\}$

Зверніть увагу на те, що коли аргумент функції задан у десятковому вигляді, то відповідь теж повертається у десятковому вигляді (тобто $y1(0.5) = 0.13975425$).

Задачі 9.5. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити похідну $y'(x)$ функції $y(x)$. Побудувати графік функції $y(x)$ та її похідної $y'(x)$. Обчислити значення похідної в точках $x = 3,\ 5.0,\ 7$.

Варіант №	
1.	$y = \dfrac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}$
2.	$y = (1 - x^2)\sqrt[5]{x^3 + \dfrac{1}{x}}$
3.	$y = 2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$
4.	$y = \dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$
5.	$y = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)^2}}$

9.6. Похідні виразів, які містять тригонометричні функції.

Приклад 9.6. Використовуючи систему «Mathematica», знайти похідну функції

$$y = \operatorname{tg}\sqrt{\cos(1/3)} + \frac{\sin^2 31x}{31\cos 62x},$$

та побудувати її графік (похідної).

Розв'язання. В системі Mathematica введіть функцію, а потім побудуйте похідну.

$$\boldsymbol{y}[\mathbf{x\_}] = \mathbf{Tan}[\sqrt{\mathbf{Cos}[\mathbf{1/3}]}] + \frac{\mathbf{Sin}[\mathbf{31}\boldsymbol{x}]^{\mathbf{2}}}{\mathbf{31Cos}[\mathbf{62}\boldsymbol{x}]};$$

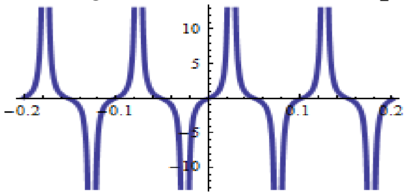
$\mathbf{y1}[\mathbf{x\_}] = \mathbf{Simplify}[\boldsymbol{D}[\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]]$

Натисніть комбінацію клавіш **Shift-Enter** і ви отримаєте відповідь

$4\mathrm{Csc}[124x]^2\mathrm{Sin}[62x]^3$

Для побудови графіка похідної виконайте інструкцію

$\mathbf{Plot}[\mathbf{y1}[\boldsymbol{x}], \{\boldsymbol{x}, -\mathbf{0.2}, \mathbf{0.2}\}, \mathbf{PlotStyle} \rightarrow \mathbf{Thickness}[\mathbf{0.015}]]$



Задачі 9.6. Використовуючи систему «Mathematica», знайти похідну функції $y(x)$ та побудувати її графік.

Варіант №	Функція
1.	$y = \sin\sqrt{3} + \frac{1}{3}\frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$
2.	$y = \frac{\cos\sin 5 \cdot \sin^2 2x}{2\cos 4x}$
3.	$y = \frac{1}{3}\cos\mathrm{tg}\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\frac{\sin^2 10x}{\cos 20x}$
4.	$y = \frac{\mathrm{tg}\ln 2 \cdot \sin^2 19x}{19\cos 38x}$
5.	$y = \sqrt[3]{\cos\sqrt{2}} - \frac{1}{52}\frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}$

9.7. Похідні вищих порядків.

Приклад 9.7. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити похідну функції $y = (x^3 + 2)e^{4x+3}$ четвертого порядку та побудувати її графік.

Розв'язання. В системі Mathematica введіть функцію, а потім інструкцію диференціювання

$\boldsymbol{y}[\mathbf{x\_}] = (\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} + \mathbf{2}) * \mathbf{Exp}[\mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}];$

$\mathbf{y4}[\mathbf{x\_}] = \mathbf{Simplify}[\boldsymbol{D}[\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \{\boldsymbol{x}, \mathbf{4}\}]]$

Натисніть комбінацію клавіш **Shift-Enter** і ви отримаєте відповідь

$32e^{3+4x}(19 + 18x + 24x^2 + 8x^3)$

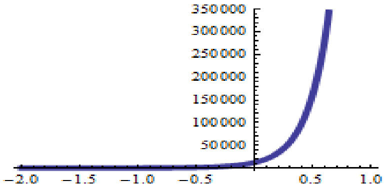
Наступний рисунок пояснює інструкцію обчислення похідної функції заданого порядку.

обчислення похідної — вираз — порядок похідної

$$\mathbf{y4[x\_] = Simplify}[D[y[x], \{x, 4\}]]$$

спрощення результату

Для побудови графіка похідної зазначеного порядку виконайте інструкцію
Plot[y4[x], {x, −2, 1}, PlotStyle → Thickness[0.01]]



Зауважимо, що інтервал зміни $\{x, -2, 1\}$ незалежної змінної в кожній задачі треба підбирати самостійно.

Задачі 9.7. Використовуючи систему «Mathematica», знайти похідну зазначеного порядку та побудувати її графік.

Варіант №	Функція
1.	$y = (2x^2 - 7)\ln(x-1)$, $\quad y^{(5)} = ?$
2.	$y = (3 - x^2)\ln^2 x$, $\quad y^{(3)} = ?$
3.	$y = (1 - x - x^2)e^{(x-1)/2}$, $\quad y^{(4)} = ?$
4.	$y = \sin(2+3x)\, e^{1-2x}$, $\quad y^{(4)} = ?$
5.	$y = \dfrac{\log_2 x}{x^3}$, $\quad y^{(3)} = ?$

9.8. Використання похідних у рівняннях.

Приклад 9.8. За допомогою системи «Mathematica» показати, що функція $y = -\sqrt{x^4 - x^2}$ задовольняє рівнянню $x \cdot y \cdot y' - y^2 = x^4$.

Розв'язання. В системі Mathematica введіть функцію $y(x)$, а потім створіть функцію її похідної

$$\boldsymbol{y}[\mathbf{x\_}] = -\sqrt{\boldsymbol{x^4 - x^2}};$$
$$\mathbf{y1[x\_] = Simplify}[D[y[x], x]]$$
$$-\frac{-2x + 4x^3}{2\sqrt{-x^2 + x^4}}$$

Для перевірки рівняння виконайте інструкцію
Simplify[$x * y[x] * $y1$[x] - y[x]^2$] == Simplify[$x^4$]

```
True
```

Відповідь `True` (Істина) означає, що функція $y(x)$ задавольняє зазначенному рівнянню. Наступний рисунок пояснює елементи останньої інструкції.

$$\mathbf{Simplify}[\overbrace{x * y[x] * y1[x] - y[x]^2}^{\text{Ліва частина рівняння}}] \overset{\text{Подвійний знак рівності}}{==} \mathbf{Simplify}[\overbrace{x^4}^{\text{Права частина рівняння}}]$$

Спрощення виразів

Задачі 9.8. Використовуючи систему «Mathematica», показати, що функція $y(x)$ задовольняє рівнянню. В кожному варіанті задана функція та рівняння, якому вона можливо задовольняє.

Варіант №	Функція	Рівняння
1.	$y = \sqrt{x^2 - x}$	$2\,x\,y\,y' = x^2 + y^2$
2.	$y = x\,(1 - \ln x)$	$x\,y' = y - x$
3.	$y = -\sqrt{x^3 - x}$	$x\,y\,y' - y^2 = \frac{1}{2}(x + x^3)$
4.	$y = \mathrm{tg}\ln 3x$	$x\,y' = 1 + y^2$
5.	$y = \frac{\sin x}{x}$	$x\,y' + y = \cos x$

10. Використання диференціального числення.

Дотична до графіка функції однієї змінної, яка задана явно. Дотична і нормаль до кривої, яка задана неявно або параметрично. Рівняння асимптот. Знаходження екстремумів функції однієї змінної. Частинні похідні функції двох змінних. Нормаль до графіка функції двох змінних.

Завдання:

10.1. Графік дотичної.
10.2. Дотична та нормаль до параметричної кривої.
10.3. Асимптоти.
10.4. Дотична і нормаль до кривої, яка задана неявно.
10.5. Найбільше та найменше значення функції.
10.6. Частинні похідні. Нормаль до поверхні.

10.1. Графік дотичної.

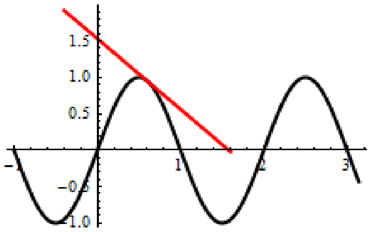
Рівняння дотичної до графіка функції $y = y(x)$ в точці x_0 має вигляд

$$Y = y(x_0) + y'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Приклад 10.1. Побудувати дотичну до графіка функції $y = \sin \pi x$ в точці з абсцисою $x_0 = 0.6$.

Розв'язання. В системі Mathematica введіть функцію `y[x]`, яка обчислюється за заданою формулою, та побудуйте функцію похідної.

$\boldsymbol{y}[\mathbf{x\_}] = \mathbf{Sin}[\boldsymbol{\pi}\, \boldsymbol{x}]$;
$\mathbf{y1}[\mathbf{x\_}] = \boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}]$
$\pi\ \mathrm{Cos}[\pi x]$
Побудуйте рівняння дотичної.
$\mathbf{x0}\ =\ \mathbf{0.6}$; (* абсциса точки дотику *)
$\boldsymbol{Y}[\mathbf{x\_}] = \boldsymbol{y}[\mathbf{x0}] + \mathbf{y1}[\mathbf{x0}](\boldsymbol{x} - \mathbf{x0})$ (* рівняння дотичної *)
`0.95105652 - 0.97080552 (-0.6 + x)`
Після цього окремо створіть в пам'яті графіки початкової функції та дотичної. Графіки не відображаються (в кінці інструкції стоїть точка з комою) для того, щоб не зображувати лінії окремо. Потім функцією `Show` відображаємо обидва графічних об'єкта.
$\mathbf{p1} = \mathbf{Plot}[\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \{\boldsymbol{x}, -\mathbf{1}, \boldsymbol{\pi}\}, \mathbf{PlotStyle} -> \{\mathbf{Black}, \mathbf{Thickness}[\mathbf{0.01}]\}]$;
$\mathbf{p2} = \mathbf{Plot}[\boldsymbol{Y}[\boldsymbol{x}], \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\mathbf{0} - \mathbf{1}, \boldsymbol{x}\mathbf{0} + \mathbf{1}\}, \mathbf{PlotStyle} -> \{\mathbf{Red}, \mathbf{Thickness}[\mathbf{0.01}]\}]$;
$\mathbf{Show}[\mathbf{p1}, \mathbf{p2}, \mathbf{PlotRange} \to \mathbf{All}]$



Відзначимо, що графіки кривої та дотичної були побудовані окремо для того, щоб використати різні діапазони зміни параметра *x*. Ці діапазони в кожному варіанті треба підбирати самостійно.

Задачі 10.1. Використовуючи систему «Mathematica», скласти рівняння дотичної до кривої в точці з абсцисою x_0. Побудувати графіки функції і її дотичної в цій точці. Діапазони зміни *x* на графіках кривої та дотичної підбирати самостійно.

Варіант №	Функція
1.	$y = (4\,x - x^2)/4\ ,\ x_0 = 1$
2.	$y = 2x^2 + 3\,x - 1,\ x_0 = -2$
3.	$y = x^2 + 8\,\sqrt{x} - 32,\ x_0 = 4$
4.	$y = -\frac{2}{3}(x^8 + 2)/(x^4 + 1)\ ,\ x_0 = 1$
5.	$y = x/(x^2 + 1)\ ,\ x_0 = -2$

10.2. Дотична та нормаль до параметричної кривої.

Якщо крива на площині задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то для точки, в якій $t = t_0$, рівняння дотичної можна записати у вигляді:

$$x = x(t_0) + t \cdot x'(t_0),\ \ y = y(t_0) + t \cdot y'(t_0). \quad (1)$$

Рівняння нормалі в цій точці можна записати у вигляді:

$$x = x(t_0) + t \cdot y'(t_0),\ \ y = y(t_0) - t \cdot x'(t_0). \quad (2)$$

Приклад 10.2. Скласти параметричні рівняння дотичної та нормалі до кривої $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (циклоїда) в точці $t = 4\pi/3$. Побудувати графіки кривої, а також дотичної і нормалі в цій точці.

Розв'язання. В системі Mathematica введіть функції $x(t), y(t)$, які обчислюються за заданими формулами $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (циклоїда).

```
x[t_] = t − Sin[t];
y[t_] = 1 − Cos[t];
t0 = 4π/3;
```

Створіть функції `xt(t)`, `yt(t)`, які обчислюються за формулами (1).

```
xt[t_] = x[t0] + t * x′[t0]
yt[t_] = y[t0] + t * y′[t0]
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3} + \frac{3t}{2}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}t}{2}$$

Отримані два вирази представляють праві частини параметричних рівнянь (1) дотичної.

Функції, які обчислюються за формулами (2), позначимо `xn(t)`, `yn(t)`.

```
xn[t_] = x[t0] + t * y′[t0]
yn[t_] = y[t0] − t * x′[t0]
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}t}{2}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{3t}{2}$$

Два останніх вирази представляють праві частини параметричних рівнянь (2) нормалі.

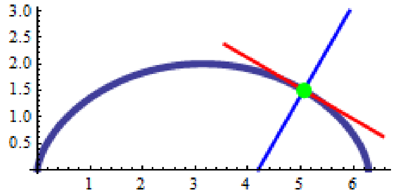
Створюємо графічні об'єкти `p1`, `p2`, `p3`, `p4`, які представляють графік циклоїди, точку дотику, графіки дотичної та нормалі.

```
p1 = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2π},
        PlotStyle → Thickness[0.02], AspectRatio → Automatic];
p2 = Graphics[{Green, Disk[{x[t0], y[t0]}, 0.15]}];   (* зображення точки *)
p3 = ParametricPlot[{xt[t], yt[t]}, {t, −1, 1},
        PlotStyle → {Red, Thickness[0.01]}];   (* дотична *)
p4 = ParametricPlot[{xn[t], yn[t]}, {t, −1, 1},
        PlotStyle → {Blue, Thickness[0.01]}];   (* нормаль *)
```

Графічні об'єкти `p1,p2,p3,p4` не відображаються зразу, бо відповідні інструкції завершуються крапкою з комою. Діапазони зміни параметра t в кожному варіанті треба підбирати.

Тепер відобразимо всі об'єкти на одному рисунку.

```
Show[p1, p3, p4, p2, PlotRange → All]
```



Примітив `Disk`, який використовується для створення об'єкта `p2`, є кругом на площині. Його перший аргумент – список, який містить координати центра, а другий – радіус. Щоб зобразити точку, ми створили невеликий зелений круг, використовуючи цей примітив.

У наступних варіантах використовуються елементарні функції, які в системі «Mathematica» треба вводити відповідно до правил системи: ім'я функції починається з великої літери, аргумент функції міститься в квадратних дужках.

Функція	Позначення в системі	Назва
e^x	Exp[x]	Експонента
$\sin x$	Sin[x]	Синус
$\cos^3 x$	Cos[x]^3	Косинус в третьому степені
$\ln x$	Log[x]	Натуральний логарифм
$\mathrm{tg}\, x$	Tan[*x*]	Тангенс
$\mathrm{ctg}\, x$	Cot[*x*]	Котангенс
$\mathrm{arctg}\, x$	ArcTan[*x*]	Арктангенс
$\arcsin x$	ArcSin[*x*]	Арксинус
$\arccos x$	ArcCos[*x*]	Арккосинус

Задачі 10.2. Використовуючи систему «Mathematica», скласти рівняння дотичної та нормалі до параметрично заданої кривої в зазначеній точці t_0. Побудувати графіки кривої, дотичної і нормалі в цій точці. При побудові графіків підбирати діапазони зміни параметра *t* так, щоб крива, точка і прямі відображали свої характерні ділянки в околі точки дотику.

Варіант №	Функція
1.	$\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}, \quad t_0 = \pi/3$
2.	$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}, \quad t_0 = \pi/4$
3.	$\begin{cases} x = (2t + t^2)/(1+t^3) \\ y = (2t - t^2)/(1+t^3) \end{cases}, \quad t_0 = 1$
4.	$\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t) \\ y = t(t\sin t + 2\cos t) \end{cases}, \quad t_0 = \pi/4$

5.	$\begin{cases} x = t\sin t + \cos t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$, $t_0 = \pi/4$

10.3. Асимптоти.

Якщо у функції $y = f(x)$ існують похилі асимптоти, то вони мають рівняння $y = a\cdot x + b$, де $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - a\cdot x\right)$.

Приклад 10.3. Знайти асимптоти функції $y(x) = \dfrac{x^4 + 2x + 3}{2x^3 + x^2 + 1}$. Побудувати графік функції та всі похилі і горизонтальні асимптоти. Якщо у функції є вертикальні асимптоти в точках x_i, то ці точки виключити з графіка.

Р о з в ' я з а н н я . Маємо.

$$\boldsymbol{f}[\mathbf{x\_}] = \frac{\boldsymbol{x^4 + 2x + 3}}{\boldsymbol{2x^3 + x^2 + 1}};$$

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{Limit}\left[\frac{\boldsymbol{f[x]}}{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x \to \infty}\right]$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{b} = \mathbf{Limit}[\boldsymbol{f[x] - a\,x, x \to \infty}]$$

$$-\frac{1}{4}$$

Таким чином, похила асимптота має рівняння $y = a\cdot x + b = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. Якщо $a = 0$, то асимптота буде горизонтальною.

Треба ще обчислити $a_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Якщо існує скінченне число a_2, яке відмінно від попереднього $\boldsymbol{a}$, то може існувати інша асимптота. Перевірте самостійно, що в цьому прикладі іншої похилої асимптоти немає.

Вертикальні асимптоти можуть існувати в точках, в яких функція $\dfrac{x^4 + 2x + 3}{2x^3 + x^2 + 1}$ обертається в нескінченність, тобто в точках, в яких знаменник останнього виразу дорівнює нулю. Розв’язавши рівняння $2x^3 + x^2 + 1 = 0$, знаходимо точки, в яких можуть знаходитися вертикальні асимптоти.

$\mathbf{Solve}[\boldsymbol{1 + x^2 + 2x^3 == 0, x,} \mathbf{Reals}]$

$\{\{x \to -1\}\}$

Оскільки

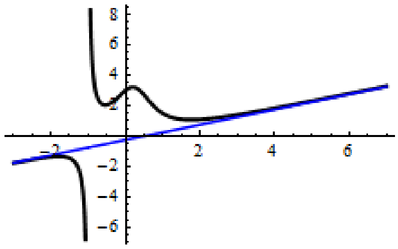
$\mathbf{Limit}[\boldsymbol{f[x], x \to -1}]$

∞

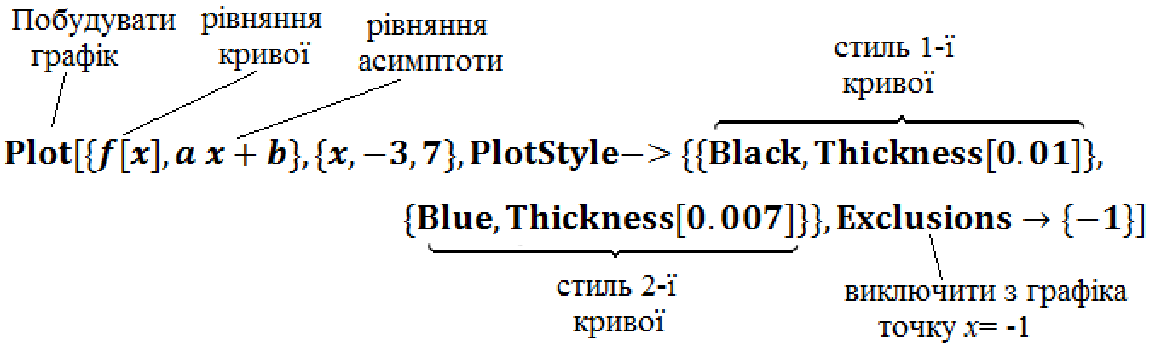
то в точці $x = -1$ існує вертикальна асимптота.

Побудуємо графік функції та її похилу асимптоту, а точку $x = -1$ виключимо з графіка.

Plot[{*f*[*x*], *a x* + *b*}, {*x*, −3, 7}, PlotStyle−> {{Black, Thickness[0. 01]}, {Blue, Thickness[0. 007]}}, Exclusions → {−1}]



Наступний рисунок пояснює елементи останньої команди, яка будує графік кривої і асимптоти.



Задачі 10.3. Використовуючи систему «Mathematica», знайти асимптоти функції $y(x)$. Побудувати графік функції та всі її похилі і горизонтальні асимптоти. Якщо у функціях є вертикальні асимптоти в точках x_i, то ці точки виключити з графіка.

Варіант №	Функція
1.	$y = (17 - x^2)/(4\,x - 5)$
2.	$y = (x^3 - 4\,x)/(3\,x^2 - 4)$
3.	$y = (x^2 + 1)/\sqrt{4\,x^2 - 3}$
4.	$y = (2\,x^3 - 3\,x^2 - 2\,x + 1)/(1 - 3\,x^2)$
5.	$y = (\,x^2 - 6\,x + 4)/(3\,x - 2)$

10.4. Дотична і нормаль до кривої, яка задана неявно.

Нехай крива задана неявним рівнянням $F(x,y)=0$, і точка (x_0, y_0) належить кривій. Рівняння дотичної до кривої в цій точці має вигляд

$$F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0, \qquad (3)$$

а рівняння нормалі

$$F'_x(x_0,y_0)(y-y_0)-F'_y(x_0,y_0)(x-x_0)=0. \qquad (4)$$

Приклад 10.4. Скласти рівняння дотичної та нормалі до еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0$.

Побудувати їх графіки.

Р о з в ' я з а н н я. Введемо початкові дані і створимо функцію `F(x,y)`, яка представляє ліву частину рівняння еліпса.

$$F[\mathbf{x\_}, \mathbf{y\_}] = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1;$$

Потім побудуємо в пам'яті еліпс.

pc1 = ContourPlot[*F*[*x*, *y*] == 0, {*x*, −4, 4}, {*y*, −3, 3},
ContourStyle−> {Black, Thickness[0.01]}];

Якщо в останній інструкції в кінці не ставити крапку з комою, то еліпс буде намальований.

Положення точки на еліпсі визначимо, вибравши наздогад значення абсциси x_0. Наприклад, нехай $x_0 = 2$. Тоді y координата точки дотику знаходиться з рівняння $F(x_0, y) = 0$, де y - невідома.

***x*0 = 2; rez = Solve[*F*[*x*0, *y*] == 0, *y*]**

$\{\{y \to -\frac{2\sqrt{5}}{3}\}, \{y \to \frac{2\sqrt{5}}{3}\}\}$

Оскільки знайдено два дійсних корені, то виберемо один з них, наприклад, другий.

***y*0 = rez[[2]][[1, 2]]**

$\frac{2\sqrt{5}}{3}$

Таким чином, точка дотику (x_0, y_0) має координати $(2, 2\sqrt{5}/3)$.

Зауваження 1. Якщо знайдено один дійсний корінь, то він вибирається інструкцією

***y*0 = rez[[1]][[1, 2]]**

Зауваження 2. Якщо дійсних коренів немає, то треба обрати інше значення x_0.

Далі створюємо вирази для лівих частин рівнянь (3) та (4).

eqT = Derivative[1, 0][*F*][x0, y0](*x* − x0) +
Derivative[0, 1][*F*][x0, y0](*y* − y0);
eqN = Derivative[1, 0][*F*][x0, y0](*y* − y0) −
Derivative[0, 1][*F*][x0, y0](*x* − x0);

Наступний рисунок пояснює інструкцію побудови лівої частини рівняння дотичної (3).

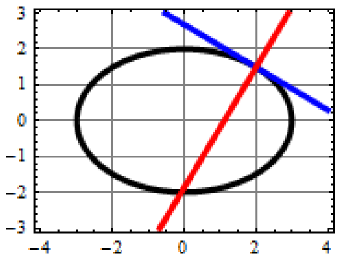
$$\mathbf{eqT} = \overbrace{\overbrace{\mathbf{Derivative}[1,0][F]}^{\text{Обчислення похідної } F'_x}[\mathbf{x0},\mathbf{y0}]}^{\text{Значення похідної } F'_x(x_0,y_0) \text{ в точці } (x_0,y_0)}(x - \mathbf{x0}) + \underbrace{\underbrace{\mathbf{Derivative}[0,1][F]}_{\text{Обчислення похідної } F'_y}[\mathbf{x0},\mathbf{y0}]}_{\text{Значення похідної } F'_y(x_0,y_0) \text{ в точці } (x_0,y_0)}(y - \mathbf{y0});$$

Створюємо в пам'яті зображення дотичної та нормалі до еліпса.

pc2 = ContourPlot[{eqT == 0, eqN == 0}, {*x*, −4, 4}, {*y*, −3, 3},
ContourStyle−> {{Blue, Thickness[0.01]}, {Red, Thickness[0.01]}}];

Нарешті малюємо графічні об'єкти (еліпс та прямі).

Show[pc1, pc2, AspectRatio → Automatic, GridLines → Automatic]



Змінивши значення `x0`, ви поміняєте положення точки дотику. Відповідно до цього зміниться і малюнок. Але ви не можете обирати зовсім довільно значення x_0. Погляньте на останній рисунок. Якщо обрати $x_0 = 4$ (або більше), то на еліпсі не буде існувати точки з такою абсцисою і, отже, не можна буде побудувати дотичну і нормаль.

Задачі 10.4. Використовуючи систему «Mathematica», скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої, яка задана неявно. Побудувати графіки кривої, її дотичної та нормалі в точці, яку вибрати самостійно.

Варіант №		Тип кривої
1.	$3\,x^2 + 10\,x\,y + 3\,y^2 - 2\,x - 14\,y - 13 = 0$	гіпербола
2.	$25\,x^2 - 14\,x\,y + 25\,y^2 + 64\,x - 64\,y - 224 = 0$	еліпс
3.	$x^2 + 4\,x\,y + 4\,y^2 + 4\,x + \ y - 15 = 0$	парабола
4.	$8\,x^2 - 12\,x\,y + 17\,y^2 + 16\,x - 12\,y + 3 = 0$	еліпс
5.	$16\,x^2 + 16\,x\,y + 4\,y^2 - 5\,x + 7\,y = 0$	парабола

10.5. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

Щоб обчислити найбільше та найменше значення функції на відрізку треба знайти її точки екстремуму (де похідна дорівнює нулю або не існує). Потім обчислюються значення функції в цих точках та на кінцях відрізка. Із всіх точок вибираються ті, в яких функція досягає найменшого та найбільшого значення. Це клопітно. Тому в системі «Mathematica» існують функцій `Maximize` і `Minimize`, які виконують ту саму роботу автоматично.

Приклад 10.5. Використовуючи систему «Mathematica», знайти найбільше та найменше значення функції $y = x\sqrt{1-x^2}$ на відрізку $-1 \le x \le 1$. Побудувати графік функції (на відрізку), та позначити на графіку екстремальні точки.

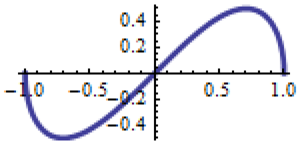
Розв'язання. Очевидно, що функція визначена при $-1 \le x \le 1$.

Remove[*x*, *y*];

$\boldsymbol{y[\mathrm{x\_}] = x\sqrt{1 - x^2}};$

Побудуйте графік функції на цьому відрізку.

p1 = Plot[*y*[*x*], {*x*, −1, 1}, PlotStyle → Thickness[0. 02],
AspectRatio−> Automatic]



Виконайте наступну команду.

$\mathbf{min = Minimize[\{y[x], -1 \le x \le 1\}, x]}$

$\{-\frac{1}{2}, \{x \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\}\}$

Результат повертається у формі списку `{ymin, {x→xmin}}`, де `xmin` представляє абсцису точки, в якій досягається мінімум. Виділимо з цього списку значення і присвоїмо їх змінним `{ymin, xmin}`.

$\mathbf{ymin = min[[1]];}$

$\mathbf{xmin = x/.min[[2]];}$

Внаслідок цього ми отримаємо, що $ymin = -\frac{1}{2}$, $xmin = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Аналогічно, обчислюємо `{ymax, xmax}`.

$\mathbf{max = Maximize[\{y[x], -1 \le x \le 1\}, x]}$

$\{\frac{1}{2}, \{x \to \frac{1}{\sqrt{2}}\}\}$

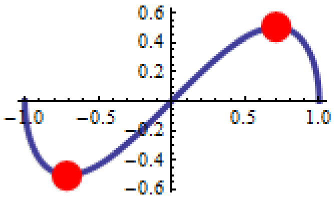
$\mathbf{ymax = max[[1]];}$

$\mathbf{xmax = x/.max[[2]];}$

Тепер малюємо точки екстремумів і зображаємо одночасно графік кривої і цих точок.

$\mathbf{p2 = ListPlot[\{\{xmin, ymin\}, \{xmax, ymax\}\},}$
$\mathbf{PlotStyle}{-}{>}\{Red, PointSize[0.1]\}];$

$\mathbf{Show[p1, p2, PlotRange \to \{\{-1, 1\}, \{-0.6, 0.6\}\}]}$



Задачі 10.5. Використовуючи систему «Mathematica», знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)$ на заданому відрізку. Побудувати графік функції на відрізку, та позначити на графіку екстремальні точки.

Варіант №	Функція	Відрізок
1.	$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$	$[1, 4]$
2.	$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}$	$[0, 6]$
3.	$y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$	$[2, 4]$
4.	$y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$	$[-1, 7]$
5.	$y = 10x/(1+x^2)$	$[0, 3]$

10.6. Частинні похідні. Нормаль до поверхні.

Якщо функція двох змінних задана у вигляді $z = f(x, y)$, то вектор нормалі до її поверхні в точці (x_0, y_0) може мати вигляд $\mathbf{n} = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\right)$.

Приклад 10.6. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити частинні похідні першого і другого порядків функції $z = \sqrt{x^2 + 8y^2}$. Побудувати графік функції і вектор нормалі до цієї поверхні в точці $(0.5, 0.5)$.

Розв'язання. Будуємо функцію і обчислюємо її похідні першого порядку.

```
Remove[x, y, z]
z[x_, y_] = Sqrt[x^2 + 8y^2];
zx[x_, y_] = D[z[x, y], x]
zy[x_, y_] = D[z[x, y], y]
```

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 8y^2}}$$

$$\frac{8y}{\sqrt{x^2 + 8y^2}}$$

Обчислюємо і одночасно спрощуємо частинні похідні другого порядку

```
Simplify[D[z[x, y], {x, 2}]]
```

$$\frac{8y^2}{(x^2 + 8y^2)^{3/2}}$$

```
Simplify[D[z[x, y], x, y]]
```

$$-\frac{8xy}{(x^2 + 8y^2)^{3/2}}$$

```
Simplify[D[z[x, y], {y, 2}]]
```

$$\frac{8x^2}{(x^2 + 8y^2)^{3/2}}$$

Будуємо список P, який буде представляти точку на поверхні.

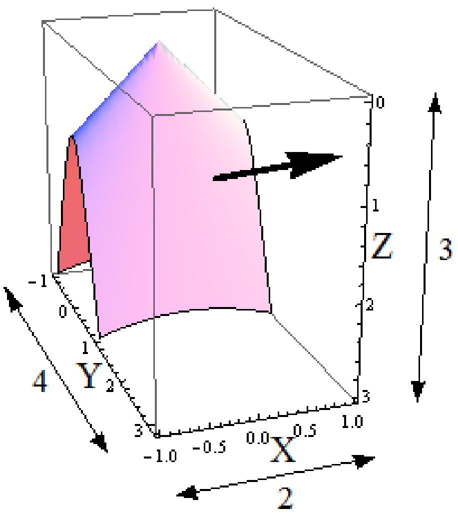
```
x0 = 0.5;   y0 = 0.5;
P = {x0, y0, z[x0, y0]}
{0.5, 0.5, 1.5}
```

Будуємо список $\boldsymbol{n}$, який буде представляти вектор нормалі до поверхні в точці $\boldsymbol{P}$.

```
n = {zx[x0, y0], zy[x0, y0], -1}
{0.33333333, 2.6666667, -1}
```

Будуємо в пам'яті окремо графіки поверхні та вектора, а потім відображаємо їх разом на одному малюнку.

```
p1 = Plot3D[z[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, PlotRange → All, Mesh → None];
p2 = Graphics3D[{Thickness[0.02], Arrowheads[0.1], Arrow[{P, P + n}]}];
Show[p1, p2, BoxRatios-> {2, 4, 3}, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}]
```



Наступний рисунок пояснює інструкцію побудови графічного примітива «стрілка», яка зображує вектор нормалі до поверхні.

Малювати графічний примітив

Товщина стрілки

Розмір наконечника стрілки

Стрілка від точки $\boldsymbol{P}$ на поверхні до точки $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{n}$, де $\boldsymbol{n}$ - нормаль до поверхні в точці $\boldsymbol{P}$.

p2 = Graphics3D[{Thickness[0.02], Arrowheads[0.1], Arrow[{*P*, *P* + *n*}]}];

Замість $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{n}$ можна використовувати $\boldsymbol{P}$ - $\boldsymbol{n}$

Це змінить напрям стрілки на протилежний

Функція `Show[p1,p2,...]` одночасно малює два графічні об'єкти – поверхню і стрілку. Опція `BoxRatios →{2,4,3}` задає на малюнку пропорції довжин координатних осей. У ваших задачах ці значення треба підбирати. Якщо вони підібрані невірно, то вектор нормалі на малюнку не буде виглядати як нормаль. Щоб їх підібрати спочатку побудуйте графік при будь яких значеннях опції `BoxRatios`, наприклад, `BoxRatios →{1,1,1}`. Потім подивіться на координати, які стоять на сторонах обмежуючого коробка і обчисліть довжини його сторін. На попередньому рисунку довжини сторін ми зобразили подвійними стрілками (їх система не малює). З малюнка бачимо, що довжина вздовж осі X приблизно дорівнює 2, вздовж осі Y – 4, вздовж осі Z – 3. Отже опція `BoxRatios` повинна приймати значення `{2,4,3}`. Використання функції `Show[...]` з опцією `BoxRatios` пояснюється на наступному рисунку.

пропорції довжин координатних осей X, Y, Z на рисунку

позначки координатних осей

Show[p1, p2, BoxRatios–> {2,4,3}, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}]

одночасно намалювати об'єкти p_1 і p_2

Задачі 10.6. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити частинні похідні першого і другого порядків функції. Побудувати графік функції і вектор нормалі до її поверхні в заданій точці. Щоб нормаль до поверхні виглядала як нормаль, підібрати пропорції довжин координатних осей графіка, використовуючи опцію `BoxRatios`.

Варіант №	Функція	Точка
1.	$z = x^2y - xy^2 + 1;$	$x_0 = 0.5; \quad y_0 = -0.5$
2.	$z = x\, e^{x\, y};$	$x_0 = 0.5; \quad y_0 = 0.5;$
3.	$z = x\, y - \dfrac{y}{x^2+1};$	$x_0 = 0.5; \; y_0 = 0.5;$
4.	$z = x - 3\, x \sin y$	$x_0 = -0.3; \quad y_0 = 0.3;$
5.	$z = (x^2 + y^2)^3$	$x_0 = 0.5; \quad y_0 = -0.5;$

11. Невизначений та визначений інтеграл. Кратні інтеграли.

Функція Integrate обчислення невизначеного інтеграла. Різні способи вводу позначення інтеграла. Графік первісної. Обчислення визначених інтегралів. Геометричний зміст визначеного інтеграла. Обчислення кратних інтегралів.

Завдання:

11.1. Обчислення невизначеного інтеграла.
11.2. Невизначений інтеграл різноманітних функцій.
11.3. Невизначений інтеграл раціональних функцій.
11.4. Обчислення визначеного інтеграла.
11.5. Визначений інтеграл різноманітних функцій.
11.6. Визначений інтеграл від тригонометричних виразів.
11.7. Подвійний інтеграл як повторний.
11.8. Обчислення подвійного інтеграла.

11.1. Обчислення невизначеного інтеграла.

Приклад 11.1. Обчислити невизначений інтеграл $\int \cos^2 x\, d\, x$. Побудувати графіки підінтегрального виразу та первісної.

Розв'язання. В системі Mathematica побудуйте підінтегральну функцію

$\boldsymbol{f}[\mathrm{x\_}] = \mathbf{Cos}[\boldsymbol{x}]^{\mathbf{2}};$

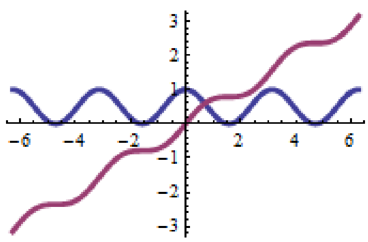
Далі побудуйте первісну, виконавши інструкцію

$\boldsymbol{F}[\mathrm{x\_}] = \mathbf{Integrate}[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$

$\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{Sin}[2x]$

Для побудови графіків виконайте інструкцію

$\mathbf{Plot}[\{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}]\}, \{\boldsymbol{x}, -\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\}, \mathbf{PlotStyle} \to \mathbf{Thickness}[\mathbf{0.01}]]$



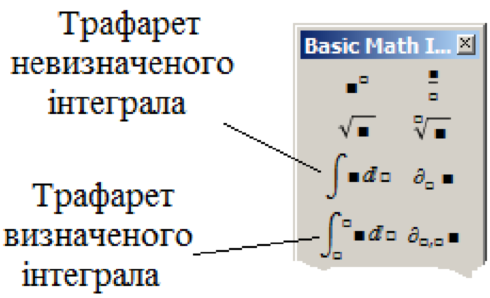
Задачі 11.1. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити невизначений інтеграл. Побудувати графіки підінтегрального виразу та первісної.

Варіант №	
1.	$\int (4-3\,x)\,e^{-3\,x} d\,x$
2.	$\int (4\,x-2)\cos 2x\,d\,x$
3.	$\int \operatorname{arctg}\sqrt{4\,x-1}\,d\,x$
4.	$\int \frac{x\ \cos x}{\sin^3 x}\,d\,x$
5.	$\int x\sin^2 x\,d\,x$

11.2. Невизначений інтеграл різноманітних функцій.

Приклад 11.2. Обчислити невизначений інтеграл $\int\sqrt{x+\sqrt{x}}\,d\,x$. Побудувати графік підінтегрального виразу та його первісної (невизначеного інтеграла).

Розв'язання. В системі Mathematica для вводу гачка інтеграла використайте трафарет невизначеного інтеграла на панелі спеціальних символів. Для вводу кореня також використайте відповідний трафарет.



Введіть і виконайте інструкції

$\boldsymbol{f}[\mathbf{x\_}]=\sqrt{\boldsymbol{x}+\sqrt{\boldsymbol{x}}};$

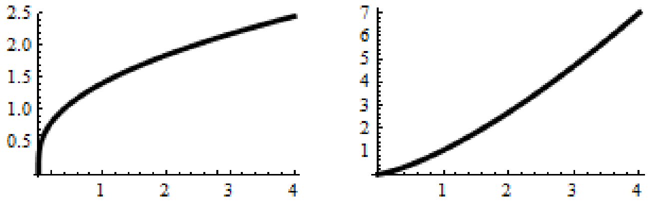
$\boldsymbol{g}[\mathbf{x\_}]=\int\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}]\,d\boldsymbol{x}$

Ви отримаєте відповідь

$$\frac{1}{12}\sqrt{\sqrt{x}+x}(-3+2\sqrt{x}+8x)+\frac{1}{8}\mathrm{Log}[1+2\sqrt{x}+2\sqrt{\sqrt{x}+x}]$$

Побудуйте графік підінтегрального виразу та його первісної поруч на двох різних графіках. Оскільки $x\geq 0$ є зоною визначення функції $f(x)$, то графіки треба будувати тільки для додатних *x*. Отже виконайте наступні інструкції.

p1 = Plot[*f*[*x*], {*x*, 0, 4}];
p2 = Plot[*g*[*x*], {*x*, 0, 4}];
GraphicsRow[{p1, p2}]



Функція `GraphicsRow[{p1,p2}]` відображає графічні об'єкти **p1** і **p2** поруч в рядок.

Зауваження. Іноді для обчислення невизначеного інтеграла слід враховувати умови, які накладаються на незалежну змінну, оскільки без додаткових умов інтеграл не обчислюється. Наприклад,

$$\mathbf{Integrate}[\mathbf{Abs}[\mathbf{x}], \mathbf{x}, \mathbf{Assumptions} -> \{x > 0\}]$$

$$\frac{x^2}{2}$$

Задачі 11.2. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити невизначений інтеграл. Побудувати графік підінтегрального виразу та його первісної.

Варіант №	
1.	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$
2.	$\int \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$
3.	$\int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$
4.	$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}dx$
5.	$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$

11.3. Невизначений інтеграл раціональних функцій.

Приклад 11.3. Обчислити невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}dx\,,$$

розклавши підінтегральний вираз на суму елементарних раціональних дробів. Побудувати графік підінтегрального виразу.

Розв'язання. Побудуйте підінтегральну функцію

$$\boldsymbol{f}[\mathbf{x\_}] = \frac{\boldsymbol{x^3+6x^2+13x+6}}{\boldsymbol{(x-2)(x+2)^3}};$$

Введіть і виконайте інструкцію `Apart` розкладання дробу на найпростіші.

$\boldsymbol{q}[\mathrm{x\_}] = \mathbf{Apart}[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}]]$

$$\frac{1}{-2+x} + \frac{1}{(2+x)^3}$$

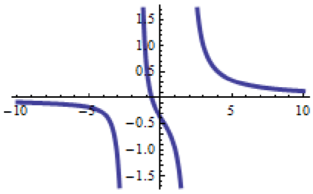
Тепер обчисліть інтеграл

$\boldsymbol{F}[\mathrm{x\_}] = \int \boldsymbol{q}[\boldsymbol{x}]\, d\boldsymbol{x}$

$$-\frac{1}{2(2+x)^2} + \mathrm{Log}[-2+x]$$

Знаменник функції $f(x)$ перетворюється на нуль в точках $x=-2,\ x=2$. Отже вони особливі для функції і їх треба виключати з графіка. Тоді для побудови графіка функції виконуємо інструкцію

Plot[*f*[*x*], {*x*, −10, 10}, PlotStyle → Thickness[0.015],
Exclusions → {*x* == −2, *x* == 2}]



Тут опція `Exclusions→{x==-2,x==2}` задає точки, які треба виключити з графіка. Тобто при `x=-2` і `x=2` функція невизначена і для цих значень точки графіка не треба малювати).

Задачі 11.3. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити невизначений інтеграл. Побудувати графіки підінтегрального виразу, виключивши з нього особливі точки.

Варіант №	
1.	$\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}\,dx$
2.	$\int \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^3}\,dx$
3.	$\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)\,x^3}\,dx$
4.	$\int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-2)^3}\,dx$
5.	$\int \frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}\,dx$

11.4. Обчислення визначеного інтеграла.

Приклад 11.4. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 \left(2x^3-4x^2+5\right)dx$. Графічно зобразити зону, площу якої він представляє.

Р о з в ' я з а н н я . Побудуйте підінтегральну функцію та обчисліть площу наступними інструкціями.

$\boldsymbol{f}[\mathbf{x\_}] = \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} - \mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{5};$

$\boldsymbol{s} = \mathbf{Integrate}[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}], \{\boldsymbol{x}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}]$

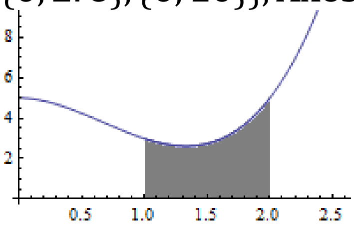
$\frac{19}{6}$

Для зображення зони, площа якої обчислюється, побудуйте два графіка (не відображаючи їх), а потім відобразіть одночасно на одному рисунку.

p1 = Plot[*f*[*x*], {*x*, 1, 2}, Filling → Axis];

p2 = Plot[*f*[*x*], {*x*, 0, 2. 6}];

Show[p1, p2, PlotRange → {{0, 2. 6}, {0, 10}}, AxesOrigin → {0, 0}]



Отже площа зафарбованої зони дорівнює 19/6.

Тут інструкція `p1=Plot[f[x],{x,1,2},Filling ->Axis];` створює в пам'яті комп'ютера графік зафарбованої зони на відрізку інтегрування $1 \le x \le 2$. Фарбування виконується між кривою і віссю X. При побудові графіка кривої інструкцією `p2=Plot[f[x],{x,0,2.6}];` інтервал $0 \le x \le 2.6$ треба підбирати ширший за відрізок інтегрування $1 \le x \le 2$. В функції `Show` використовується опція `PlotRange->{{0,2.6},{0,10}}`, яка задає діапазон абсцис `{0,2.6}` та ординат `{0,10}` зони, яка буде відображатися на графіку. Ці значення в кожному варіанті треба підбирати самостійно.

Задачі 11.4. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити визначений інтеграл. Графічно зобразити зону, площу якої він представляє.

Варіант №	
1.	$\int_{-2}^{0} (x^2 + 5x + 6)\cos 2x\, dx$
2.	$\int_{0}^{\pi} (8x^2 + 16x + 17)\cos 4x\, dx$
3.	$\int_{1}^{2} x \ln^2 x\, dx$
4.	$\int_{0}^{1} (x+1)\ln^2(x+1)\, dx$
5.	$\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x/2}\, dx$

11.5. Визначений інтеграл різноманітних функцій.

Приклад 11.5. Обчислити визначений інтеграл $\int_2^8 \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+1}}\,d\,x$. Графічно зобразити зону, площу якої він представляє.

Р о з в ' я з а н н я . Побудуйте функцію, яка представляє підінтегральний вираз.

$\boldsymbol{f}[\mathbf{x\_}] = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\sqrt[4]{\boldsymbol{x}^2+\mathbf{1}}}$;

Тепер обчисліть інтеграл.

$\boldsymbol{s} = \int_{\mathbf{2}}^{\mathbf{8}} \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}]\, d\boldsymbol{x}$

$\frac{2}{3}5^{3/4}(-1+13^{3/4})$

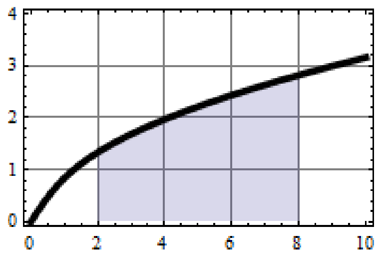
Якщо відповідь складна, то переведіть результат до десяткового виду за допомогою функції `N[]`.

$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{N}[\boldsymbol{s}]$

`13.032244`

Побудуйте графічні об'єкти, які зображають криву та зону інтегрування $2 \le x \le 8$ під кривою.

p1 = Plot[*f*[*x*], {*x*, 2, 8}, Filling → Axis, AxesOrigin → {0, 0}];
p2 = Plot[*f*[*x*], {*x*, 0, 10}, PlotStyle → {Thickness[0. 01], Black}];
Show[{p1, p2}, PlotRange → {{0, 10}, {0, 4}},
Frame → True, GridLines−> Automatic]



Для наочності крива (об'єкт **p2**) побудована на більш широкому відрізку ніж інтервал інтегрування.

Наступний рисунок пояснює аргументи функції `Plot` при використанні її для фарбування зони.

ширина зони заливу

p1 = Plot[*f*[*x*], {*x*, 2, 8}, $\overbrace{\textbf{Filling} \to \textbf{Axis}}^{\text{залити зону між кривою і віссю X}}$, $\overbrace{\textbf{AxesOrigin} \to \{0,0\}}^{\text{координата точки перехрещення осей}}$];

Відповідь: площа зафарбованої зони дорівнює `13.032244`.

Задачі 11.5. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити визначений інтеграл. Графічно зобразити зону, площу якої він представляє.

Варіант №	
1.	$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx$
2.	$\int\limits_0^{1} \frac{x}{x^4+1} dx$
3.	$\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx$
4.	$\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x \, dx$
5.	$\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$

11.6. Визначений інтеграл від тригонометричних виразів.

Приклад 11.6. Обчислити визначений інтеграл від тригонометричного виразу $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 3x \cos^4 3x \, dx$ та графічно зобразити зону, площу якої він представляє.

Розв'язання. В системі Mathematica побудуйте функцію, яка представляє підінтегральний вираз.

$\boldsymbol{f}[\mathbf{x\_}] = \mathbf{Sin}[\mathbf{3}\boldsymbol{x}]^{\mathbf{4}}\mathbf{Cos}[\mathbf{3}\boldsymbol{x}]^{\mathbf{4}};$

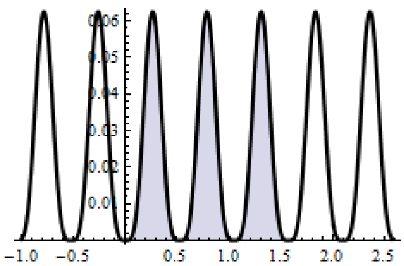
Обчисліть інтеграл інструкцією

$$\boldsymbol{s} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}/\mathbf{2}} \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}]\, d\boldsymbol{x}$$

$$\frac{3\pi}{256}$$

Побудуйте графічні об'єкти, які зображають криву та зону інтегрування $0 \le x \le \pi/2$ під кривою.

p1 = Plot[*f*[*x*], {*x*, 0, *π*/2}, Filling → Axis, AxesOrigin → {0, 0}];
p2 = Plot[*f*[*x*], {*x*, −1, *π*/2 + 1}, PlotStyle → {Thickness[0. 01], Black}];
Show[{p1, p2}, PlotRange → All]



Відповідь: площа зафарбованої зони дорівнює $\frac{3\pi}{256}$. В десятковому виді це число дорівнює

$N[\frac{3\pi}{256}]$
0.036815539

Задачі 11.6. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити визначений інтеграл. Графічно зобразити зону, площу якої він представляє.

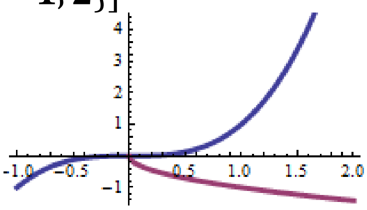
Варіант №	
1.	$\int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x \, dx$
2.	$\int_0^{\pi} 2^4 \sin^8(x/2) \, dx$
3.	$\int_0^{2\pi} \sin^6(x/4)\cdot\cos^2(x/4) \, dx$
4.	$\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x \, dx$
5.	$\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2(x/2)\cdot\cos^6(x/2) \, dx$

11.7. Подвійний інтеграл як повторний.

Приклад 11.7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4)\, dx\, dy$ по області D як повторний, де область D обмежена кривими: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt{x}$. Графічно зобразити область D.

Розв'язання. Спочатку треба побудувати криві $y = x^3$, $y = -\sqrt{x}$, щоб зрозуміти як виглядає область D.

y1[x_] = x^3;
y2[x_] = $-\sqrt{x}$;
p1 = Plot[{y1[x], y2[x]}, {x, −1, 2}]

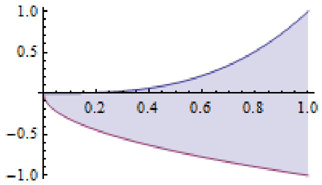


Отже область обмежена зліва точкою перетинання кривих, а справа – прямою $x = 1$. Знайдемо точку перетинання

Solve[y1[x] == y2[x], x, Reals]
$\{\{x \to 0\}\}$

Точка перетинання кривих має абсцису $x = 0$. Праворуч межа області задана умовою $x = 1$. Тоді можемо побудувати область.

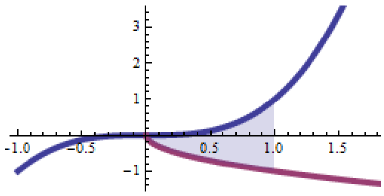
p2 = Plot[{y1[x], y2[x]}, {x, 0, 1}, Filling → {1 → {2}}]



Тут опція `Filling` → {1 → {2}} визначає, що треба зафарбувати зону між кривою 1 та кривою 2.

Об'єднаємо обидва малюнки в спільних осях.

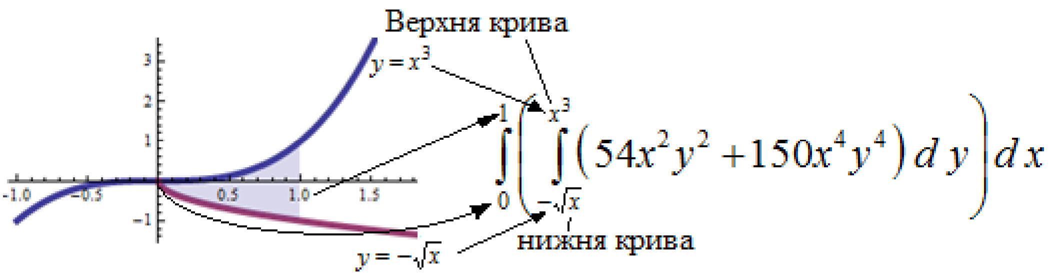
Show[p1, p2]



Дивлячись на цей малюнок, можна записати подвійний інтеграл як повторний

$$\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{x}}^{x^3}\left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dy\right)dx.$$

Наступний рисунок пояснює розстановку меж інтегрування у повторному інтегралі.



Обчислимо повторний інтеграл в системі Mathematica.

***f*[x_, y_] = 54*x*²*y*² + 150*x*⁴*y*⁴;**

Integrate[*f*[*x*, *y*], {*x*, 0, 1}, {*y*, −√*x*, *x*³}]

```
11
```

Наступний рисунок пояснює розстановку аргументів функції `Integrate`.

Integrate[*f*[*x*, *y*], {*x*, 0, 1}, {*y*, −√*x*, *x*³}]

$$\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{x}}^{x^3}\underbrace{\left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)}_{f(x,y)}dy\right)dx$$

Відповідь: подвійний інтеграл по області D дорівнює `11`.

Зауваження. Останній інтеграл можна записати у вигляді

Integrate[*f*[*x*, *y*], {*x*, 0, 1}, {*y*, *y*2[*x*], *y*1[*x*]}]

використовуючи позначення для функцій нижньої і верхньої межі інтегрування по змінній *y*.

Задачі 11.7. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити подвійний інтеграл по області D як повторний. Графічно зобразити область D.

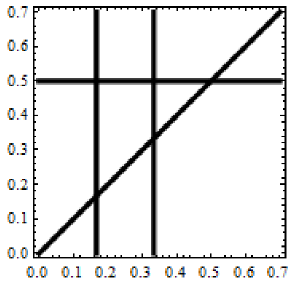
Варіант №	Подвійний інтеграл	Область D
1.	$\iint\limits_D \left(12x^2y^2+16x^3y^3\right)dx\,dy$	$D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$
2.	$\iint\limits_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dx\,dy$	$D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$
3.	$\iint\limits_D \left(xy-4x^3y^3\right)dx\,dy$	$D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$
4.	$\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dx\,dy$	$D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x$
5.	$\iint\limits_D \left(3x^2y^2+\dfrac{50}{3}x^4y^4\right)dx\,dy$	$D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

11.8. Обчислення подвійного інтеграла.

Приклад 11.8. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 12\,y e^{6xy}\,dx\,dy$ по області D як повторний, де область D обмежена кривими: $y=x$, $y=0.5$, $x=1/6$, $x=1/3$. Графічно зобразити область D.

Р о з в ' я з а н н я. Щоб зрозуміти, як виглядає зона інтегрування D, треба побудувати її малюнок. Рівняння кривих, які обмежують цю зону, можна записати в неявному вигляді: $y-x=0$, $y-0.5=0$, $x-1/6=0$, $x-1/3=0$. Тоді ці криві зручно намалювати, використовуючи функцію ContourPlot.

$$\mathbf{p1 = ContourPlot}[\{\boldsymbol{x-1/6==0, x-1/3==0, y-x==0, y-0.5==0}\},\ \{\boldsymbol{x},\mathbf{0},\mathbf{0.7}\},\{\boldsymbol{y},\mathbf{0},\mathbf{0.7}\}, \mathbf{ContourStyle} \to \mathbf{Thickness}[\mathbf{0.01}]]$$



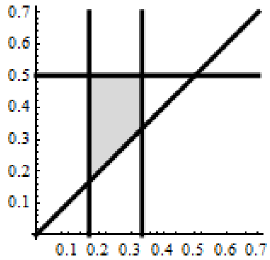
З цього рисунка зрозуміло, що зоною інтегрування є чотирикутник (трапеція) з вершинами в точках (1/6, 1/6), (1/6, 0.5), (1/3, 0.5), (1/3, 1/3). Ліва нижня вершина є точкою перетинання прямих $x=1/6$ і $y=x$. Отже вона має координати (1/6, 1/6). Ліва верхня вершина є точкою перетинання прямих $x=1/6$ і $y=0.5$. Отже вона має координати (1/6, 0.5). Аналогічно обчислюються координати решти вершин.

Намалюємо чотирикутник з цими вершинами як графічний примітив.

$$\mathbf{p2 = Graphics}[\{\mathbf{LightGray}, \mathbf{Polygon}[\{\{\mathbf{1/6},\mathbf{1/6}\},\{\mathbf{1/6},\mathbf{0.5}\},\{\mathbf{1/3},\mathbf{0.5}\},\{\mathbf{1/3},\mathbf{1/3}\}\}]\}]$$

Об’єднаємо два останні рисунки в одному.

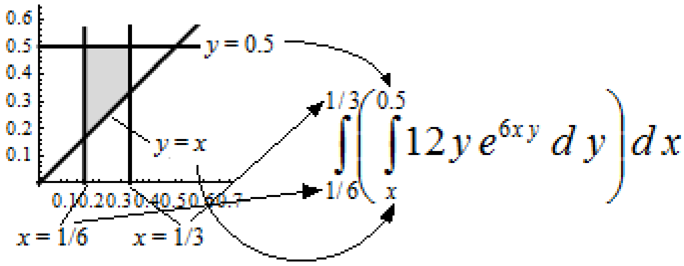
Show[p2, p1, Axes → True]



Це зображення допомагає записати потрібний подвійний інтеграл $\iint\limits_D 12\,y\,e^{6xy}\,d\,x\,d\,y$ як повторний.

$$\iint\limits_D 12\,y\,e^{6xy}\,d\,x\,d\,y = \int\limits_{1/6}^{1/3}\left(\int\limits_{x}^{0.5} 12\,y\,e^{6xy}\,d\,y\right)d\,x$$

Наступний рисунок пояснює розстановку меж інтегрування у повторному інтегралі.



Нарешті обчислимо інтеграл. Спочатку побудуємо функцію, яка представляє підінтегральний вираз

***f*[*x*_ , *y*_] = 12 *y* Exp[6 *x y*];**

Тоді запишемо і обчислимо інтеграл.

$$\boldsymbol{F = \int_{1/6}^{1/3}\int_{x}^{1/2} f[x,y]\,dy\,dx}\,;$$

Для ***F*** виходить складний вираз. Щоб його не спостерігати ми в кінці поставили крапку з комою. Тепер надрукуємо відповідь в десятковому вигляді

***N*[*F*]**

```
0.33284087
```

Задачі 11.8. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити подвійний інтеграл по області D як повторний. Графічно зобразити область D.

Варіант №	Подвійний інтеграл	Область D
1.	$\iint\limits_D y^2\,e^{-xy/4}\;d\,x\,d\,y$	$D:\,x=0,\;y=2,\;y=x$

2.	$\iint\limits_D y\cdot\sin(x\,y)\;d\,x\,d\,y$	$D: x=1,\, x=2,\, y=\dfrac{\pi}{2},\, y=\pi$
3.	$\iint\limits_D 4\,y^2\cdot\sin(2\,x\,y)\;d\,x\,d\,y$	$D: x=0,\, y=\sqrt{2\pi},\, y=2\,x$
4.	$\iint\limits_D y^3\cdot\sin(x\,y)\;d\,x\,d\,y$	$D: x=\dfrac{1}{2},\, x=1,\, y=\pi,\, y=2\pi$
5.	$\iint\limits_D y^2\,e^{-x\,y/8}\;d\,x\,d\,y$	$D: x=0,\, y=4,\, y=2\,x$

12. Застосування інтегрального числення.

Обчислення довжин кривих, площ плоских фігур та об'ємів тривимірних тіл. Знаходження маси плоскої платівки.

Завдання:

12.1. Обчислення площі між двома кривими, які задані явно.
12.2. Обчислення довжини кривої, яка задана явно.
12.3. Обчислення довжини параметричної кривої.
12.4. Обчислення маси платівки.
12.5. Обчислення об'єму тіла.

12.1. Обчислення площі між двома кривими, які задані явно.

Площа фігури, обмеженої знизу та зверху кривими $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ $\left(f_1(x)< f_2(x)\right)$, та прямими $x=a$, $x=b$, розшукується за формулою

$$S=\int\limits_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)d\,x. \tag{1}$$

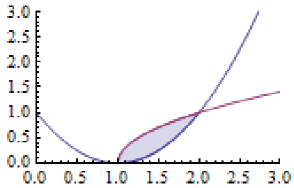
Тут a, b - ліва і права абсциси зони, площа якої розшукується. Це можуть бути задані значення, або точки перетину кривих.

Приклад 12.1. Обчислити площу області, яка обмежена кривими $y=(x-1)^2$ та $y=\sqrt{x-1}$. Побудувати графіки кривих та зобразити область, площа якої обчислюється.

Р о з в ' я з а н н я . Побудуємо функції $y_1=f_1(x)$ та $y_2=f_2(x)$, та знайдемо точки перетину їх графіків.

y1$[\mathbf{x\_}]=(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}$;
y2$[\mathbf{x\_}]=\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}$;
$\boldsymbol{s}$ = **Solve**[**y1**[$\boldsymbol{x}$] == **y2**[$\boldsymbol{x}$], $\boldsymbol{x}$, **Reals**]
$\{\{x\to 1\},\{x\to 2\}\}$
x1 = $\boldsymbol{x}/.\boldsymbol{s}$[[**1**]]
x2 = $\boldsymbol{x}/.\boldsymbol{s}$[[**2**]]
1
2
Зобразимо область.

```
p1 = Plot[{y1[x], y2[x]}, {x, 0, 4}, PlotRange → {{0, 3}, {0, 3}}];
p2 = Plot[{y1[x], y2[x]}, {x, x1, x2}, Filling → {1 → {2}}];
Show[p1, p2]
```



Використовуючи формулу (1), знайдемо площу області.

```
Integrate[y2[x] − y1[x], {x, x1, x2}]
```

$\frac{1}{3}$

Відповідь: площа зафарбованої області дорівнює 1/3.

Зауваження 1. Інколи точки перетинання не вдається знайти точно (функція `Solve` знаходить лише «точні» корені). Тоді абсциси цих точок треба шукати в десятковому вигляді за допомогою функції `NSolve`. Наприклад, інструкцію `s = Solve[y1[x] == y2[x], x, Reals]` можна замінити командою

```
s = NSolve[y1[x] == y2[x], x]
{{x -> 2.}, {x -> 1.}}
```

Задачі 12.1. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити площу області, яка обмежена графіками функцій. Побудувати графіки функцій та область, площа якої обчислюється. Якщо в умовах здачі дано інтервал, наприклад, $0 \le x \le 3$, то точки перетинання шукати не треба, а використати кінцеві точки $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ заданого відрізка.

Варіант №	Рівняння кривих
1.	$y = (x-2)^3$, $y = 4x - 8$
2.	$y = x\sqrt{9-x^2}$, $y = 0$ $(0 \le x \le 3)$
3.	$y = (x+1)^2$, $y = x + 1$
4.	$y = 4 - (x-1)^2$, $y = x^2 - 4x + 3$
5.	$y = \sin x \cos^2 x$, $y = 0$ $(0 \le x \le \pi/2)$

12.2. Обчислення довжини кривої, яка задана явно.

Довжина дуги плоскої кривої, заданої в декартових координатах явним рівнянням $y = y(x)$, обчислюється за формулою

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, d\,x, \qquad (2)$$

де x_0 та x_1 визначають початкову та кінцеву точки дуги.

Приклад 12.2. Обчислити довжину дуги кривої $y = x\sqrt{x}$ для $0 \le x \le 1$ $(y \ge 0)$. Побудувати графік кривої та криволінійного відрізка, довжина якого обчислюється.

Р о з в ' я з а н н я . Будуємо функцію $y(x)$ та застосовуємо формулу (2).

$\boldsymbol{y[x\_] = x\sqrt{x};}$

$\boldsymbol{x1 = 0;}$

$\boldsymbol{x2 = 1;}$

$$\boldsymbol{L = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1 + y'[x]^2}\, dx}$$

$$\frac{1}{27}\left(-8 + 13\sqrt{13}\right)$$

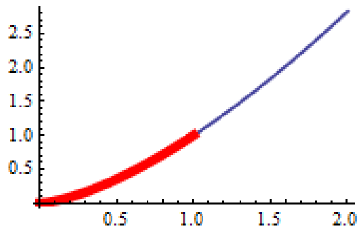
У десятковій формі довжина дорівнює

$\boldsymbol{N[L]}$

`1.4397099`

Функція $y(x)$ визначена лише для додатних x. Криволінійний відрізок, довжина якого була обчислена, має наступний вигляд (червона ділянка).

```
p1 = Plot[y[x], {x, 0, 2}];
p2 = Plot[y[x], {x, x1, x2}, PlotStyle → {Thickness[0.02], Red}];
Show[p1, p2]
```



Задачі 12.2. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити довжину відрізка кривої, рівняння якої задано в явному вигляді. Побудувати графік кривої та криволінійного відрізка, довжина якого обчислюється.

Варіант №	Рівняння кривої	Відрізок
1.	$y = 2 + ch\, x$	$0 \le x \le 1$
2.	$y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$	$0 \le x \le 7/9$
3.	$y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$	$0 \le x \le 1/4$
4.	$y = \left(1 - e^{x} - e^{-x}\right)/2$	$0 \le x \le 3$
5.	$y = \ln(x^2 - 1)$	$2 \le x \le 3$

12.3. Обчислення довжини параметричної кривої.

Довжина дуги плоскої кривої, яка задана в параметричному вигляді $x = x(t),\ y = y(t)$, обчислюється за формулою

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, d\, t, \qquad (3)$$

де t_0 та t_1 – значення параметра в початковій та кінцевій точках дуги.

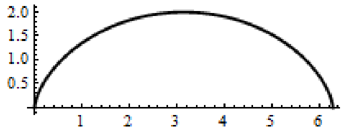
Приклад 12.3. Знайти довжину кривої $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$, яка задана параметрично (циклоїда) Побудувати графік криволінійного відрізка, довжина якого обчислюється.

Розв'язання. Будуємо функції $x(t),\ y(t)\ \ y(x)$ та застосовуємо формулу (3).

```
x[t_] = t − Sin[t];
y[t_] = 1 − Cos[t];
L = Integrate[√(D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2), {t, 0, 2π}]
8
```

Будуємо графік ділянки кривої, довжину якої визначаємо.

```
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2π}]
```



Задачі 12.3. Використовуючи систему «Mathematica», обчислити довжину відрізка кривої, яка задана параметричними рівняннями. Побудувати графік криволінійного відрізка, довжина якого обчислюється.

Варіант №	Рівняння кривої	Відрізок
1.	$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$	$0 \le t \le 2\pi$
2.	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$	$0 \le t \le \pi$
3.	$\begin{cases} x = 4(\cos t + t\ \sin t) \\ y = 4(\sin t - t\ \cos t) \end{cases}$	$0 \le t \le 2$
4.	$\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$	$0 \le t \le 2\pi$
5.	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$	$0 \le t \le \pi$

12.4. Обчислення маси платівки.

Нехай $\mu = \mu(x, y)$ представляє густину матеріалу двовимірного тіла (маса одиниці площі в точці x, y). Тоді маса платівки, яка займає область D на площині, обчислюється за формулою

$$M = \iint_D \mu(x, y) d\,x d\,y \tag{4}$$

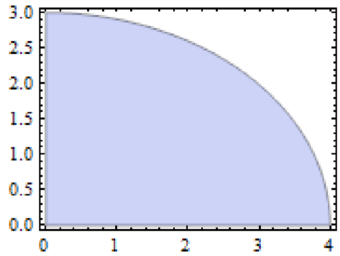
Приклад 12.4. Платівка D задана нерівностями $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, з поверхневою густиною $\mu(x, y) = x \cdot y$. Намалювати платівку та знайти її масу.

Розв'язання. Будуємо логічний вираз, який приймає значення `Істина` лише в зоні платівки.

$$\boldsymbol{R = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \le 1 \ \&\& \ x \ge 0 \ \&\& \ y >= 0;}$$

Тут символи && представляють операцію логічного І. Використовуючи цей логічний вираз, будуємо область платівки.

RegionPlot[*R*, {*x*, 0, 4}, {*y*, 0, 3}, AspectRatio → Automatic]



Для знаходження маси платівки застосовуємо формулу (4).

mu[x_, y_] = *x* ∗ *y*;

***M* = Integrate[mu[*x*, *y*] ∗ Boole[*R*], {*x*, 0, 4}, {*y*, 0, 3}]**

`18`

Функція `Boole[логічний_вираз]` повертає одиницю, якщо `логічний_вираз` дорівнює `True` та 0 – якщо `False`.

Відповідь: маса платівки дорівнює 18.

Зауваження. Якщо для маси отримано складний вираз, то застосуйте до результату функцію `N[ ]`, яка перетворює аргумент до десяткового виду.

Зауваження. Якщо системі не вдається обчислити інтеграл «точно», то замість функції `Integrate` застосуйте функцію `NIntegrate` чисельного інтегрування.

Зауваження. При кресленні платівки треба раціонально підбирати діапазони незалежних змінних *x* та *y*. Наприклад, в розібраному прикладі вибір діапазонів $\{x, -4, 4\}, \{y, -3, 3\}$ приведе до того ж самого зображення. Але треба бути уважними, надто вузькі діапазони можуть «обрізати» частини зображення.

Задачі 12.4. Платівка D задана нерівностями, μ – поверхнева густина. Намалювати платівку та знайти її масу.

Варіант №	Область	Густина
1.	$1\le\frac{x^2}{16}+y^2\le 3;\ x\ge 0;\ y\ge\frac{x}{4}$	$\mu=\frac{x}{y^5};$
2.	$1\le\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 2;\ y\ge 0;\ y\le\frac{2x}{3}$	$\mu=\frac{y}{x};$
3.	$1\le\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 4;\ x\ge 0;\ y\ge\frac{3x}{2}$	$\mu=\frac{x}{y};$
4.	$1\le\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}\le 4;\ x\ge 0;\ y\ge\frac{x}{2}$	$\mu=\frac{x}{y};$
5.	$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}\le 1;\ x\ge 0;\ y\ge 0$	$\mu=6\,x\,y^2;$

12.5. Обчислення об’єму тіла.

Об’єм тривимірного тіла (V) можна обчислювати як потрійний інтеграл

$$V=\iiint\limits_{(V)} d\,x\,d\,y\,d\,z=\iiint\limits_{E^3} R(x,y,z)\,d\,x\,d\,y\,d\,z\,, \qquad (5)$$

де другий інтеграл поширюється на весь тривимірний простір, але вираз $R(x,y,z)$ дорівнює одиниці лише в точках тіла, а ззовні тіла R дорівнює нулю.

Приклад 12.5. Знайти об’єм тіла V, яке задано нерівностями $1\le x^2+y^2\le 2x$, $y^2+z^2\le 4x$. Побудувати зображення тіла.

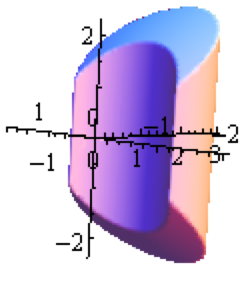
Розв'язання. Спочатку побудуємо логічний вираз R, який приймає значення `Істина` лише всередині тіла та на його межі.

$\boldsymbol{R=(1\le x^2+y^2\le 2x)\ \&\&\ (y^2+z^2\le 4x)};$

Символ && використовується як операція логічного І (and).

Функція `RegionPlot3D[R,...]` будує зображення тривимірного тіла, координати точок якого задовольняють усім нерівностям $\boldsymbol{R}$. Отже для зображення тіла виконайте інструкцію

RegionPlot3D[*R*, {*x*, −1, 3}, {*y*, −2, 2}, {*z*, −3, 3}, PlotPoints → 100, Boxed−> False, AxesOrigin−> {0, 0, 0}, Mesh−> None]



Діапазони незалежних змінних `{x,-1,3},{y,-2,2},{z,-3,3}`, які використані в прикладі, повинні підбиратися в кожній задачі окремо. Опція

`PlotPoints →100` визначає кількість точок розбиття кожного з цих діапазонів.

Знаходимо об'єм V за допомогою другої формули (5).

$$\mathbf{Chop}[\mathbf{NIntegrate}[\mathbf{Boole}[\boldsymbol{R}],\{\boldsymbol{x},-\infty,\infty\},\{\boldsymbol{y},-\infty,\infty\},\{\boldsymbol{z},-\infty,\infty\}]]$$

```
8.4335772
```

Тут функція `Boole[логічний_вираз]` повертає одиницю, якщо `логічний_вираз` дорівнює `True` та 0 – якщо `False`. Отже в останній інструкції ми виконуємо інтегрування одиниці лише в межах тіла, бо поза межами тіла вираз `Boole[R]` дорівнює нулю.

Функція `Chop[ ]` замінює всі маленькі числа (менші за 10^{-10}) на нуль. Якщо функція чисельного інтегрування `NIntegrate[ ]` поверне комплексне число з дуже малою уявною частиною, яке інколи з'являється як похибка обчислень, то застосування до результату функції `Chop[ ]` усуває цю похибку. В нашому прикладі застосування функції `Chop[ ]` необов'язкове.

> *Зауваження.* Замість нескінченостей в останній інструкції можна використовувати великі скінченні значення, наприклад,
> $\mathbf{NIntegrate}[\mathbf{Boole}[\boldsymbol{R}],\{\boldsymbol{x},-\mathbf{10},\mathbf{10}\},\{\boldsymbol{y},-\mathbf{10},\mathbf{10}\},\{\boldsymbol{z},-\mathbf{10},\mathbf{10}\}]$

Задачі 12.5. Знайти об'єм тіла, яке задано нерівностями. Побудувати зображення тіла.

Варіант №	Нерівності	Об'єм
1.	$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 49;\ -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}} \le z \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}};$ $-x \le y \le 0;$	`59.69026`
2.	$4 \le x^2+y^2+z^2 \le 64;\ -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}} \le z \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}};$ $-\sqrt{3}\,x \le y \le 0;$	`131.94689`
3.	$25 \le x^2+y^2+z^2 \le 100;\ z \le -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}};$ $-x\sqrt{3} \le y \le x\sqrt{3};$	`549.77872`
4.	$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 49;\ 0 \le z \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}};$ $y \le x\sqrt{3};$	`71.628313`
5.	$25 \le x^2+y^2+z^2 \le 121;\ -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}} \le z \le 0;$ $y \ge -x\sqrt{3};$	`252.58405`

13. Інтерполяція і апроксимація.

Інтерполяція ламаною. Кускові функції. Поліноміальна і кусково–поліноміальна інтерполяція. Апроксимація.

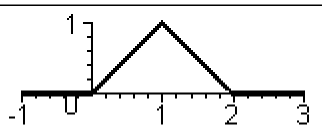
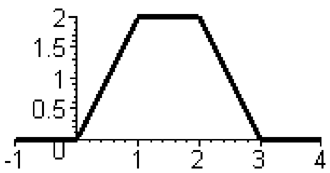
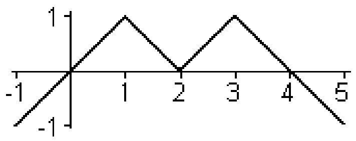
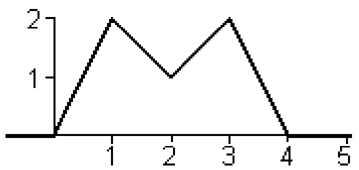
Завдання:

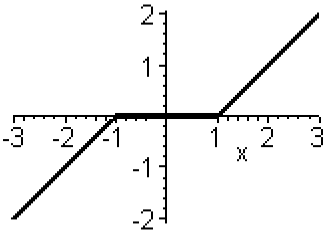
13.1. Ламана.
13.2. Кускові функції.
13.3. Поліноміальна інтерполяція множини точок.
13.4. Поліноміальна інтерполяція функцій.
13.5. Поліноміальна інтерполяція параметричних функцій.
13.6. Поліноміальна інтерполяція неявно заданих функцій.
13.7. Інтерполяція Ерміта.
13.8. Сплайн інтерполяція.
13.9. Апроксимація.

Для виконання завдань поточної теми ознайомтесь наприкінці цього збірника вправ з додатком Б, в якому описані функції системи Mathematica, призначенні для виконання інтерполяції і апроксимації.

13.1. Ламана.

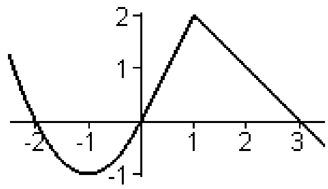
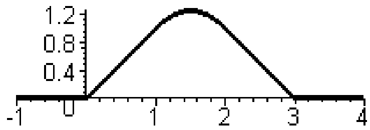
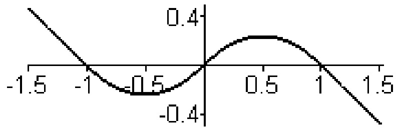
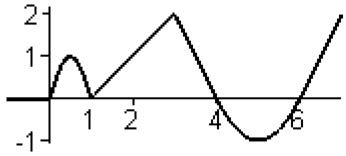
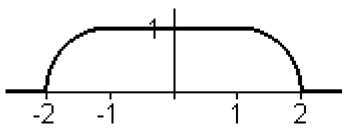
Задачі 13.1. Побудувати рівняння ламаної, яка зображена на рисунку. Координати вузлів взяти з рисунка. Записати рівняння за допомогою формули Бернштейна, за допомогою функцій `Piecewise` та `Interpolation`. Для кожного способу побудувати графік.

Варіант №	Ламана	Формула Бернштейна
1.		$y=\frac{1}{2}\lvert x\rvert-\lvert x-1\rvert+\frac{1}{2}\lvert x-2\rvert$
2.		$y=\lvert x\rvert-\lvert x-1\rvert-\lvert x-2\rvert+\lvert x-3\rvert$
3.		$2-\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert-\lvert x-3\rvert$
4.		$\lvert x\rvert-\frac{3}{2}\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert-\frac{3}{2}\lvert x-3\rvert+\lvert x-4\rvert$

5.		$y = x - \frac{1}{2}\lvert x+1 \rvert + \frac{1}{2}\lvert x-1 \rvert$

13.2. Кускові функції.

Задачі 13.2. Використовуючи функцію `Piecewise`, побудувати графіки наступних кускових функцій.

Варіант №	Функція	Графік
1.	$S(x)=\begin{cases} x(x+2), x\le 0 \\ 2x \quad ,0<x<1 \\ 3-x \quad ,x\ge 1 \end{cases}$	
2.	$y=\begin{cases} 0 & ,x<0 \\ x & ,0\le x<1 \\ x(3-x)-1 & ,1\le x<2 \\ 3-x & ,2\le x<3 \\ 0 & ,x>3 \end{cases}$	
3.	$y(x)=\begin{cases} -1-x \quad ,x\le -1 \\ x(1+x),-1<x\le 0 \\ x(1-x),0<x\le 1 \\ 1-x \quad ,x>1 \end{cases}$	
4.	$y(x)=\begin{cases} 0 & ,x\le 0 \\ \sin \pi x & ,0<x\le 1 \\ x-1 & ,1<x\le 3 \\ 8-2x & ,3<x\le 4 \\ (x-4)(x-6), & 4<x\le 6 \\ 2x & ,x>6 \end{cases}$	
5.	$y(x)=\begin{cases} 0 & ,x\le -2 \\ \sqrt{1-(x+1)^2}, & -2<x\le -1 \\ 1 & ,-1<x\le 1 \\ \sqrt{1-(x-1)^2}, & 1<x\le 2 \\ 0 & ,x>2 \end{cases}$	

13.3. Поліноміальна інтерполяція множини точок.

Приклад 13.3. Дано координати точок на площині. Знайти рівняння і побудувати графік інтерполяційного полінома.

Р о з в ' я з а н н я . Створюємо список, який містить координати точок.

$\mathbf{pnts} = \{\{\mathbf{1}, \mathbf{3}\}, \{\mathbf{2}, \mathbf{1}\}, \{\mathbf{4}, \mathbf{6}\}, \{\mathbf{5}, \mathbf{3}\}, \{\mathbf{6}, \mathbf{5}\}\};$

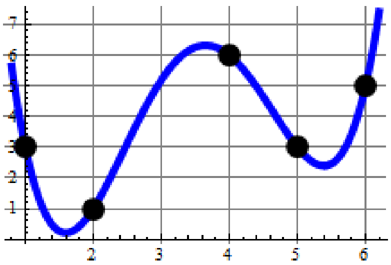
Генеруємо рівняння інтерполяційного полінома і спрощуємо його.

$\boldsymbol{P}[\mathbf{x\_}] = \mathbf{Expand}[\mathbf{InterpolatingPolynomial}[\mathbf{pnts}, \boldsymbol{x}]]$

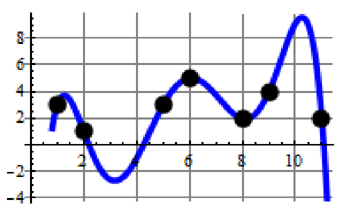
$$30 - \frac{721x}{15} + \frac{1567x^2}{60} - \frac{163x^3}{30} + \frac{23x^4}{60}$$

Будуємо графік полінома і зображення точок, через які він проходить.

$\mathbf{Plot}[\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}], \{\boldsymbol{x}, \mathbf{0.8}, \mathbf{6.2}\}, \mathbf{PlotStyle} \to \{\mathbf{Thickness}[\mathbf{0.02}], \mathbf{Blue}\},$
$\mathbf{Epilog} \to \{\mathbf{Black}, \mathbf{PointSize}[\mathbf{0.06}], \mathbf{Point/@pnts}\},$
$\mathbf{GridLines} \to \mathbf{Automatic}]$



Задачі 13.3. Дано координати точок на площині. Побудувати інтерполяційний поліном, який проходить крізь ці точки (знайти рівняння, побудувати графік полінома і зображення точок).

<table>
<tr><th>Варіант №</th><th>Точки</th><th>Поліном</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>$\{1,3\}, \{2,5\}, \{3,3\}$</td><td>$-3 + 8x - 2x^2$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\{1,3\}, \{-2,4\}, \{3,4\}, \{4,6\}$</td><td>$\frac{10}{3} - \frac{4x}{9} + \frac{x^2}{18} + \frac{x^3}{18}$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$\{1,3\}, \{2,2\}, \{3,4\}, \{4,6\}, \{5,2\}$</td><td>$7 - \frac{19x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{4} - \frac{x^4}{8}$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td colspan="2">Точки: $\{1,3\}, \{2,1\}, \{5,3\}, \{6,5\}, \{8,2\}, \{9,4\}, \{11,2\}$
Поліном:
$-\frac{1049}{42} + \frac{26251x}{432} - \frac{293773x^2}{6480} + \frac{76127x^3}{5184} - \frac{3989x^4}{1728} + \frac{901x^5}{5184} - \frac{911x^6}{181440}$
Графік полінома: </td></tr>
</table>

13.4. Поліноміальна інтерполяція функцій.

Приклад 13.4. На відрізку [-3,3] наблизити функцію $\cos x$ за допомогою інтерполяційного полінома. Побудувати графіки вихідної функції, інтерполяційного полінома і точок, використаних при інтерполяції.

Розв'язання. Щоб наблизити функцію інтерполяційним поліномом потрібно створити множину (список) точок на графіку функції, а потім побудувати поліном, який буде проходити крізь ці точки.

f[x_] = Cos[x];

Створюємо список координат точок, які розташовані на графіку функції.

ts = Chop[Table[{x, f[x]}, {x, −3, 3, 1.}]];

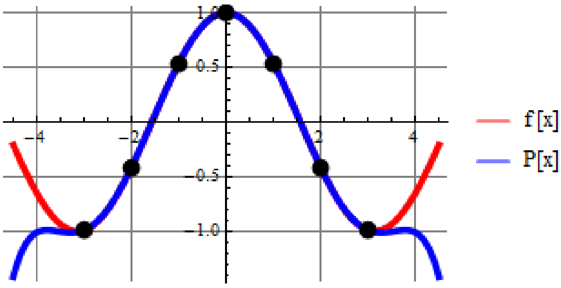
Створюємо інтерполяційний поліном.

P[x_] = Chop[Collect[InterpolatingPolynomial[ts, x], x]]

$1 - 0.49923554\,x^2 + 0.04061723\,x^4 - 0.0010793802\,x^6$

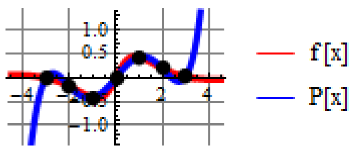
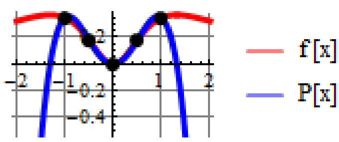
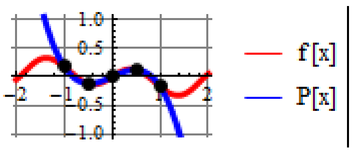
Будуємо графіки початкової функції, інтерполяційного полінома і точки.

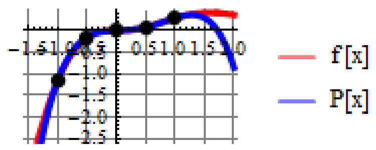
Plot[{f[x], P[x]}, {x, −4.5, 4.5},
PlotStyle → {{Thickness[0.015], Red}, {Thickness[0.015], Blue}},
Epilog → {Black, PointSize[0.04], Point/@ts},
GridLines → Automatic, PlotLegends → {"f[x]", "P[x]"}]



Зауваження. В розглянутому прикладі обрано дуже просту функцію. В застосуваннях функція $f(x)$ зазвичай обчислюється по значно складнішим формулам, і заміна її за допомогою інтерполяційного полінома буває корисною.

Задачі 13.4. На заданому відрізку наблизити задану функцію $f(x)$ за допомогою інтерполяційного полінома. Побудувати графіки вихідної функції, інтерполяційного полінома і точок, обраних для інтерполяції.

Варіант №	Функція	Відрізок	Графіки
1.	$\dfrac{\mathrm{Sin}[x]}{x^2+1}$	[−3,3]	
2.	$\dfrac{\mathrm{Log}[x^2+1]}{x^2+1}$	[−1,1]	
3.	$\dfrac{\mathrm{Sin}[x]*\mathrm{Cos}[x^2+1]}{x^2+1}$	[−1,1]	

4.	$\mathrm{Sin}[x] * \mathrm{Log}[x^2+1]\ 2^{-x}$	`[-1,1]`	

13.5. Поліноміальна інтерполяція параметричних функцій.

Приклад 13.5. На відрізку `[-1.75,1.75]` наблизити параметрично задану функцію

$$x = \ln\sqrt{t^2+4}\sin t,$$

$$y = \ln\sqrt{t^2+1}\cos t,$$

за допомогою інтерполяційного полінома. Побудувати графіки параметричної кривої, інтерполяційного полінома і точок, обраних для інтерполяції.

Розв'язання. Щоб наблизити параметрично задану функцію інтерполяційним поліномом спочатку потрібно створити множину точок, які розташовані на її графіку.

```
x[t_] = Log[Sqrt[t^2 + 4]]Sin[t];
y[t_] = Log[Sqrt[t^2 + 1]]Cos[t];
a = -1.75; b = 1.75;
pnts = Table[{x[t], y[t]}, {t, a, b, 0.5}];
```

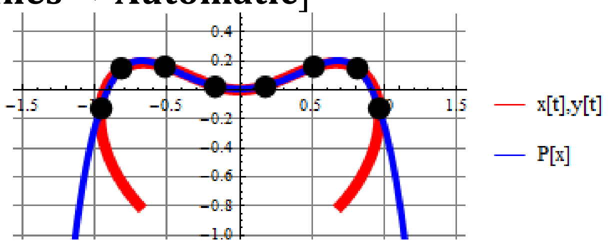
По множині точок будуємо інтерполяційний поліном.

```
P[x_] = N[Chop[Collect[InterpolatingPolynomial[pnts, x], x]]]
```

$0.0082296674 + 0.71349917\,x^2 - 0.32799738\,x^4 - 0.64763324\,x^6$

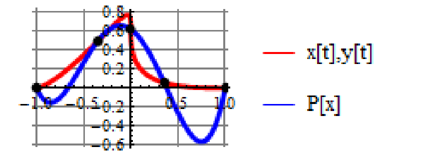
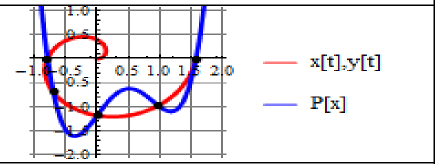
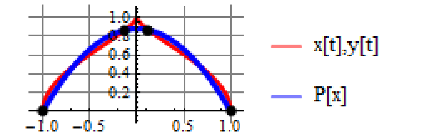
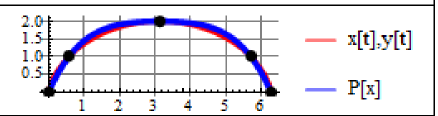
Будуємо графіки точок, параметричної кривої і інтерполяційного полінома, а потім зображуємо їх одночасно в спільних осях.

```
pp = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, -2.5, 2.5},
        PlotStyle -> {Thickness[0.025], Red}, PlotLegends -> {"x[t], y[t]"}];
pf = Plot[P[x], {x, -1.5, 1.5}, PlotStyle -> {Thickness[0.015], Blue},
                                          PlotLegends -> {"P[x]"}];
Show[pp, pf, PlotRange -> {{-1.5, 1.5}, {-1, 0.5}},
          Epilog-> {Black, PointSize[0.05], Point/@pnts},
          GridLines -> Automatic]
```



Майте на увазі, що цілком наблизити параметричну функцію, як правило, неможливо, бо поліном це явно задана функція, яка завжди однозначна (одній абсцисі повинна відповідати єдина ордината).

Задачі 13.5. На заданому відрізку спробувати наблизити задану параметричну функцію $x(t), y(t)$ за допомогою інтерполяційного полінома. Побудувати графіки вихідної функції, інтерполяційного полінома і точок, обраних для інтерполяції.

Варіант №	Функція	Відрізок	Графіки
1.	$x=\cos^3 t$ $y=\frac{1}{4}t^2\sin^3 t$	$[0,\pi]$ крок $\pi/4$	
2.	$x=t\cos t$ $y=\frac{1}{4}t\sin t$	$[\pi,2\pi]$ крок $\pi/4$	
3.	$x=\cos^3 t$ $y=\sin t$	$[0,\pi]$ крок $\pi/3$	
4.	$x=t-\sin t$ $y=1-\cos t$	$[0,2\pi]$ крок $\pi/2$	

13.6. Поліноміальна інтерполяція неявно заданих функцій.

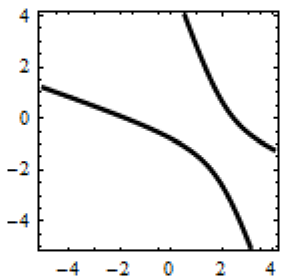
Приклад 13.6. Наблизити неявну функцію $3x^2-10xy+3y^2-2x-14y-13=0$ на відрізку [-4, 2] поліномом степені 3.

Розв'язання. Створимо функцію `F(x,y)`, яка представляє ліву частину рівняння.

***F*[x_, y_] = 3*x*² + 10 *x y* + 3*y*² − 2 *x* − 14 *y* − 13**;

Прикинемо графік кривої.

**pc1 = ContourPlot[*F*[*x*, *y*] == 0, {*x*, −5, 4}, {*y*, −5, 4},
ContourStyle−> {Black, Thickness**[0.02]}]



Це двозначна крива. Наблизити поліномом можна лише одну її гілку, наприклад, нижню.

Згенеруємо список абсцис точок, через які буде проходити інтерполяційна крива. Оскільки поліном повинен бути третього ступеня, то потрібно мати 4 точки.

X* = Table**[x***, {***x***, **−4, 2, 2**}]

```
{-4,-2,0,2}
```

Для кожної абсциси з цього списку знайдемо ординату точки, і згенеруємо список пар `{абсциса,ордината}`.

$\mathbf{pnts} = \mathbf{Table}[\{\boldsymbol{X}[[\boldsymbol{i}]], \boldsymbol{N}[\boldsymbol{y}/.\,\mathbf{Solve}[\boldsymbol{F}[\boldsymbol{X}[[\boldsymbol{i}]], \boldsymbol{y}] == \mathbf{0}, \boldsymbol{y}][[\mathbf{1}]]]\}, \{\boldsymbol{i}, \mathbf{1}, \mathbf{Length}[\boldsymbol{X}]\}]$

```
{{-4,0.83503419},{-2,0.088933156},{0,-0.79361051},{2,-2.6329932}}
```

Пояснення. Щоб зрозуміти, як працює остання інструкція, виконайте окремо наступний код

$\boldsymbol{y}/.\,\mathbf{Solve}[\boldsymbol{F}[\boldsymbol{X}[[\mathbf{1}]], \boldsymbol{y}] == \mathbf{0}, \boldsymbol{y}][[\mathbf{1}]]$

$\frac{1}{3}(27 - 10\sqrt{6})$

При обраній абсцисі $\boldsymbol{X}[[\mathbf{1}]]$ розв'язується алгебраїчне рівняння типу $F[x_1, y] == 0$. З його розв'язку, за допомогою операції підстановки створюється ордината точки. Обчислення виконуються `Length[X]` разів, і з пар $\{\boldsymbol{X}[[\boldsymbol{i}]], \boldsymbol{y}\}$ створюється список координат точок.

По множині точок будуємо інтерполяційний поліном.

$\boldsymbol{P}[\mathbf{x\_}] = \boldsymbol{N}[\mathbf{Chop}[\mathbf{Collect}[\mathbf{InterpolatingPolynomial}[\mathbf{pnts}, \boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]]]$

$-0.79361051 - 0.61211522\,x - 0.11960487\,x^2 - 0.017091591\,x^3$

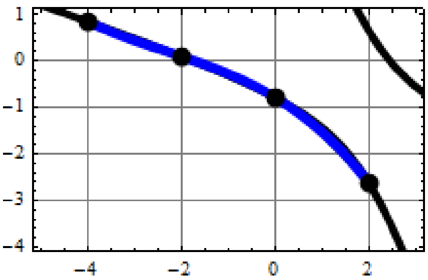
Будуємо графік нтерполяційного полінома, а потім зображуємо його разом з графіком вихідної кривої і точками.

$\mathbf{pf} = \mathbf{Plot}[\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}], \{\boldsymbol{x}, -\mathbf{4}, \mathbf{2}\}, \mathbf{PlotStyle} \to \{\mathbf{Thickness}[\mathbf{0.025}], \mathbf{Blue}\}];$

$\mathbf{Show}[\mathbf{pc1}, \mathbf{pf}, \mathbf{PlotRange} \to \{\{-\mathbf{5}, \mathbf{3}\}, \{-\mathbf{6}, \mathbf{1}\}\},$

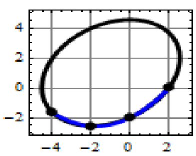
$\mathbf{Epilog} \to \{\mathbf{Black}, \mathbf{PointSize}[\mathbf{0.05}], \mathbf{Point}[\mathbf{pnts}]\},$

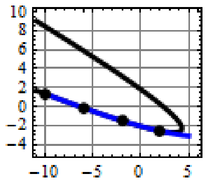
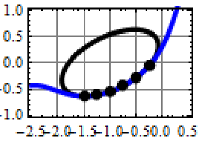
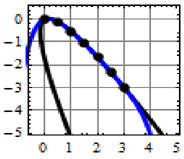
$\mathbf{GridLines} \to \mathbf{Automatic}]$



Зазвичай цілком наблизити поліномом неявну функцію неможливо, бо вона часто багатозначна, а поліном це явно задана функція, яка завжди однозначна. Поліномом можна наблизити, як правило, лише ділянку неявної функції.

Задачі 13.6. На заданому відрізку спробувати наблизити неявно задану функцію за допомогою інтерполяційного полінома вказаного степеня. Побудувати графіки вихідної функції, інтерполяційного полінома і точок, обраних для інтерполяції.

Варіант №		
1.	$25\,x^2 - 14\,x\,y + 25\,y^2 + 64\,x - 64\,y - 224 = 0$ Відрізок `[ -4,2]` , крок між точками `2` Степінь полінома: `3`	

2.	$x^2 + 4\,x\,y + 4\,y^2 + 4\,x + \ y - 15 = 0$ Відрізок `[ -10,2]` , крок між точками `4` Степінь полінома: `3`	
3.	$8\,x^2 - 12\,x\,y + 17\,y^2 + 16\,x - 12\,y + 3 = 0$ Відрізок `[-1.5,0.25]`, крок між точками `0.25` Степінь полінома: `5`	
4.	$16\,x^2 + 16\,x\,y + 4\,y^2 - 5\,x + 7\,y = 0$ Відрізок `[0,3]`, крок між точками `0.5` Степінь полінома: `6`. Наблизити верхню ділянку кривої.	

13.7. Інтерполяція Ерміта.

Задачі 13.7. Дано координати вузлів (x_i, y_i). За допомогою функції `Interpolation` побудувати інтерполяційний кусково-кубічний поліном, що проходить крізь ці точки. Використовуючи ті ж самі точки та додатково задані похідні g_i до кривої в цих вузлах, побудувати графік інтерполяційного кусково-кубічного полінома Ерміта. Зобразити обидві кускові функції на одному графіку.

Варіант №		
1.	(x_i, y_i) = (0,0), (1,1), (2,1), (3,0);	$g_i = (0,0,0,0)$.
2.	(x_i, y_i) = (0,0), (1,1), (2,1), (3,0);	$g_i = (1,1,-1,-1)$
3.	(x_i, y_i) = (-1,2), (0,1), (1,2), (2,5);	$g_i = (-1,-1,3,3)$
4.	(x_i, y_i) = (-2,-4), (-1,-2), (1,0), (2,0);	$g_i = (1,3,-1,1)$.
5.	(x_i, y_i) = (-2,6), (0,4), (2,2), (4,0);	$g_i = (1,-3,1,-3)$

13.8. Сплайн інтерполяція.

Задачі 13.8. Дано координати вузлів (x_i, y_i). За допомогою функції `Interpolation` побудувати інтерполяційний кусково-кубічний поліном, що проходить крізь ці точки. Використовуючи ті ж самі точки, побудувати графік інтерполяційного кусково-кубічного сплайна. Зобразити точки та обидві кускові функції на одному графіку.

Варіант №	
1.	(x_i, y_i) = (0,0), (1,3), (2,1), (3,3)
2.	(x_i, y_i) = (0,0), (1,1), (2,-1), (3,0)

3.	(x_i, y_i) = (0,1), (1,2), (2,1), (3,2)
4.	(x_i, y_i) = (-2,-8), (-1,-2), (2,4), (3,16)

13.9. Апроксимація.

Приклад 13.9. Дано множину точок `{0,1},{1,0.5},{2,1},{3,2},{4,1.5},{5,3}`. Виконати лінійну апроксимацію цієї множини, та апроксимацію за допомогою функцій $1, \sin x, e^{-x}$. Зобразити точки і обидві функції на одному графіку.

Розв'язання. Задамо множину точок і виконаємо лінійну апроксимацію.

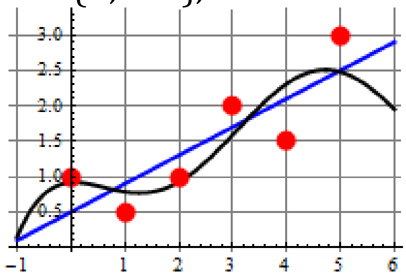
data = {{0, 1}, {1, 0.5}, {2, 1}, {3, 2}, {4, 1.5}, {5, 3}};
line1 = Fit[data, {1, *x*}, *x*]
`0.5 +0.4 x`

Виконаємо апроксимацію за допомогою «пробних» функцій: 1 (одиниця), $\sin x$ і e^{-x}.

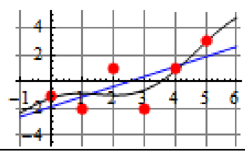
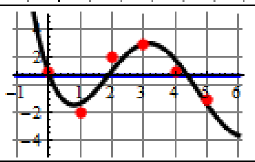
line2 = Fit[data, {1, Sin[*x*], Exp[−*x*]}, *x*]
1.7396958 − 0.8248888 e^{-x} − 0.7745986 Sin[*x*]

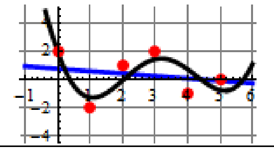
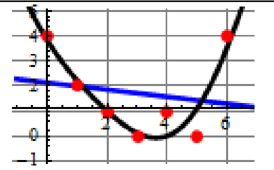
Побудуємо графічні об'єкти, які містять графіки кривих і множину точок, а потім поєднаємо їх.

p1 = Plot[line1, {*x*, −1, 6}, PlotStyle−> {Blue, Thickness[0.01]**}];**
p2 = Plot[line2, {*x*, −1, 6}, PlotStyle−> {Black, Thickness[0.01]**}];**
p3 = Graphics[{Red, PointSize[0.05], Point[data]}];
Show[p1, p2, p3, PlotRange → {0, 3.3}, GridLines → Automatic]



Задачі 13.9. Дана множина точок. Виконати лінійну апроксимацію цих точок, та апроксимацію за допомогою «пробних» функцій, які зазначені в умові. Зобразити одночасно точки і графіки обох функцій.

Варіант №		
1.	`{0,-1},{1,-2},{2,1},{3,-2},{4,1},{5,3}` Пробні функції: $1, x, \cos x, e^{-x}$	
2.	`{0,1},{1,-2},{2,2},{3,3},{4,1},{5,-1}` Пробні функції: $1, x, \cos x, e^{-x}$	

3.	`{0,2},{1,-2},{2,1},{3,2},{4,-1},{5,0}` Пробні функції: $1, x, x^2, \cos x$	
4.	`{0,4},{1,2},{2,1},{3,0},{4,1},{5,0},{6,4}` Пробні функції: $1, x, x^2, \sin x$	

14. Розв’язання диференціальних рівнянь.

Два способи використання функції DSolve. Застосування початкових умов. Системи звичайних диференціальних рівнянь. Використання результатів роботи функції DSolve. Графіки розв’язків.

Завдання:

14.1. Диференціальні рівняння першого порядку.
14.2. Рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
14.3. Рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами.
14.4. Задача Коші для рівняння зі сталими коефіцієнтами.
14.5. Система диференціальних рівнянь першого порядку.
14.6. Задача Коші для системи рівнянь першого порядку.
14.7. Задача Коші для неоднорідної системи рівнянь.
14.8. Задача Коші для системи рівнянь другого порядку.

14.1. Диференціальні рівняння першого порядку.

Приклад 14.1. Використовуючи функцію `DSolve` системи «Mathematica», знайти інтегральну криву диференціального рівняння $y' = x + y$, яка проходить через точку $M(1,2)$. Побудувати графік цієї інтегральної кривої разом з точкою.

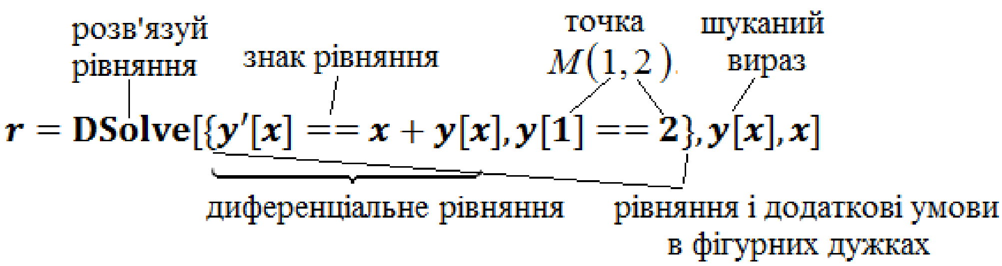
Розв'язання. Використовуючи функцію `DSolve`, розв’язуємо диференціальне рівняння та результат зберігаємо у змінній $\boldsymbol{r}$.

$\mathbf{Remove}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$

$\boldsymbol{r} = \mathbf{DSolve}[\{\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] == \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{y}[\mathbf{1}] == \mathbf{2}\}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$

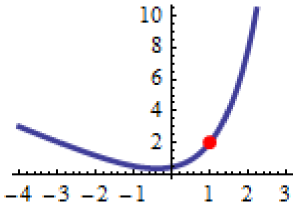
$$\{\{y[x] \to -\frac{e - 4e^x + ex}{e}\}\}$$

Наступний рисунок пояснює аргументи команди `DSolve` розв’язання диференціального рівняння.



Виділяємо вираз із списку списків і будуємо функцію, яка є розв’язком.

$\boldsymbol{y}[\mathbf{x\_}] = \mathbf{Simplify}[\,\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}]\,/.\,\boldsymbol{r}[[\mathbf{1}]]\,]$
$-1 + 4e^{-1+x} - x$
В пам’яті системи (графічні інструкції завершуємо крапкою з комою) будуємо графік кривої і окремо створюємо зображення точки.
p1 = Plot[*y*[*x*], {*x*, −4, 3}, PlotStyle → Thickness[0.02]];
pt = Graphics[{Red, PointSize[0.05], Point[{1, 2}]}];
Відображаємо обидва графічні об’єкти інструкцією `Show`.
Show[p1, pt]



Задачі 14.1. Використовуючи функцію `DSolve` системи «Mathematica», знайти інтегральну криву диференціального рівняння, яка проходить через задану точку. Побудувати графік цієї інтегральної кривої разом з точкою. При побудові графіка діапазон зміни аргументу *x* в кожному випадку підбирати самостійно.

Варіант №	Диференціальне рівняння і точка	
1.	$y' = y - x^2,$	$M(1,2)$
2.	$y' = 2 + y^2,$	$M(1,2)$
3.	$y' = (y-1)\cdot x,$	$M(1,3/2)$
4.	$y\,y' = -x,$	$M(2,3)$
5.	$x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,y' = 0,$	$M(-2,1)$

14.2. Рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 14.2. Використовуючи функцію `DSolve` системи «Mathematica», знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = e^{2x}\sin 6\,x\,.$$

Призначити довільним константам значення $C_1 = 1, C_2 = -1$ та побудувати графік цього окремого розв’язку.

Розв'язання. Використовуючи функцію `DSolve`, розв’язуємо диференціальне рівняння та результат зберігаємо у змінній ***r***.
Remove[*x*, *y*]
$\boldsymbol{r} = \mathbf{DSolve}[\boldsymbol{y}''[\boldsymbol{x}] - \mathbf{4}\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] + \mathbf{4}\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == \mathbf{Exp}[\mathbf{2}\boldsymbol{x}]\,\mathbf{Sin}[\mathbf{6}\boldsymbol{x}],\ \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}],\ \boldsymbol{x}]$
$$\{\{y[x] \to e^{2x}C[1] + e^{2x}xC[2] - \frac{1}{36}e^{2x}\mathrm{Sin}[6x]\}\}$$
Як бачите довільні константи розв’язку позначені *C*[1] і *C*[2].

Наступний рисунок пояснює аргументи команди DSolve розв'язання диференціального рівняння.

розв'язуй рівняння

диференціальне рівняння

шуканий вираз

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{DSolve}[\underbrace{\boldsymbol{y}''[\boldsymbol{x}] - 4\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] + 4\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == \mathbf{Exp}[2\boldsymbol{x}]\ \mathbf{Sin}[6\boldsymbol{x}]}_{}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$$

З отриманого розв'язку, який має вигляд списку списків, виділяємо вираз.

$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}]/.\boldsymbol{r}[[\mathbf{1}]]$

$$e^{2x}\,C[1] + e^{2x}xC[2] - \frac{1}{36}e^{2x}\mathrm{Sin}[6x]$$

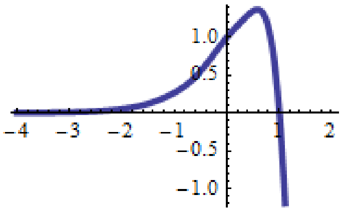
Виконуємо підстановку значення констант у цей вираз і результат позначаємо функцією $y(x)$.

$\boldsymbol{y}[\mathbf{x\_}] = \boldsymbol{f}/.\{\boldsymbol{C}[\mathbf{1}]{-}{>}\,1, \boldsymbol{C}[\mathbf{2}]{-}{>}\,{-1}\}$

$$e^{2x} - e^{2x}x - \frac{1}{36}\,e^{2x}\ \mathrm{Sin}[6x]$$

Будуємо графік розв'язку.

$\mathbf{Plot}[\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \{\boldsymbol{x}, -\mathbf{4}, \mathbf{2}\}, \mathbf{PlotStyle} \to \mathbf{Thickness}[\mathbf{0.02}]]$



Задачі 14.2. Використовуючи функцію DSolve системи «Mathematica», знайти загальний розв'язок диференціального рівняння. Призначити довільним константам значення $C_1 = 1, C_2 = -1$ та побудувати графік цього окремого розв'язку. При побудові графіка діапазон зміни аргументу x в кожному випадку підбирати самостійно.

Варіант №	Диференціальне рівняння
1.	$y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$
2.	$y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$
3.	$y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$
4.	$y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$
5.	$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$

14.3. Рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 14.3. Використовуючи функцію DSolve системи «Mathematica», знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'''[x] + y''[x] - 6y'[x] = (20\,x + 14)\,e^{2x}$$

Призначити довільним константам одиничні значення та побудувати графік такого окремого розв'язку.

Р о з в ' я з а н н я . Використовуючи функцію DSolve, розв'язуємо диференціальне рівняння та результат зберігаємо у змінній $\boldsymbol{r}$.

$\mathbf{Remove}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$

$\boldsymbol{r} = \mathbf{DSolve}[\boldsymbol{y}'''[\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{y}''[\boldsymbol{x}] - \mathbf{6}\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] == (\mathbf{20}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{14})\,\mathbf{Exp}[\mathbf{2}\boldsymbol{x}], \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$

$$\{\{y[x] \to -\frac{1}{3}e^{-3x}C[1] + e^{2x}(x^2 + \frac{1}{10}(-2 + 5C[2])) + C[3]\}\}$$

З цієї відповіді створюємо функцію.

$\mathbf{yc}[\mathbf{x\_}] = \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}]/.\boldsymbol{r}[[\mathbf{1}]]$

$$-\frac{1}{3}e^{-3x}C[1] + e^{2x}(x^2 + \frac{1}{10}(-2 + 5C[2])) + C[3]$$

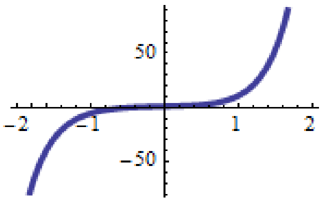
Заміняємо довільні константи одиницями.

$\boldsymbol{y}[\mathbf{x\_}] = \mathbf{yc}[\boldsymbol{x}]/.\{\boldsymbol{C}[\mathbf{1}] \to \mathbf{1}, \boldsymbol{C}[\mathbf{2}] \to \mathbf{1}, \boldsymbol{C}[\mathbf{3}] \to \mathbf{1}\}$

$$1 - \frac{e^{-3x}}{3} + e^{2x}(\frac{3}{10} + x^2)$$

Будуємо графік функції $y(x)$.

$\mathbf{Plot}[\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \{\boldsymbol{x}, -\mathbf{2}, \mathbf{2}\}, \mathbf{PlotStyle} \to \mathbf{Thickness}[\mathbf{0.01}]]$



Задачі 14.3. Використовуючи функцію DSolve системи «Mathematica», знайти загальний розв'язок диференціального рівняння. Призначити довільним константам одиничні значення та побудувати графік отриманого окремого розв'язку. При побудові графіка діапазон зміни аргументу x в кожному випадку підбирати самостійно.

Варіант №	Диференціальне рівняння
1.	$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$
2.	$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^{x}$
3.	$y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}$
4.	$y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{x}$
5.	$y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}$

14.4. Задача Коші для рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 14.4. Використовуючи функцію DSolve системи «Mathematica», знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + y = 1/\cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

та побудувати його графік.

Р о з в ' я з а н н я . Використовуючи функцію DSolve, розв'язуємо задачу Коші та результат зберігаємо у змінній.

Remove[*x*, *y*]
r = **DSolve**[{*y*″[*x*] + *y*[*x*] == **1**/**Cos**[*x*], *y*[**0**] == **1**, *y*′[**0**] == **0**}, *y*[*x*], *x*]
{{*y*[*x*] → Cos[*x*] + Cos[*x*]Log[Cos[*x*]] + *x*Sin[*x*]}}

Наступний рисунок пояснює використання аргументів функції `DSolve`.

розв'язуй рівняння — диференціальне рівняння $y'' + y = 1/\cos x$ — додаткові умови $y(0)=1,\ y'(0)=0$ — шуканий вираз

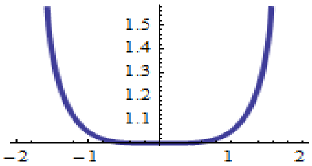
r = **DSolve**[{*y*″[*x*] + *y*[*x*] == **1**/**Cos**[*x*], *y*[**0**] == **1**, *y*′[**0**] == **0**}, *y*[*x*], *x*]

З отриманого розв'язку ***r*** створюємо функцію $y(x)$.

y[**x_**] = ***y***[***x***]/. ***r***[[**1**]]
Cos[*x*] + Cos[*x*]Log[Cos[*x*]] + *x*Sin[*x*]

Будуємо графік функції $y(x)$.

Plot[*y*[*x*], {*x*, −**2**, **2**}, **PlotStyle** → **Thickness**[**0**. **01**]]



Задачі 14.4. Використовуючи функцію `DSolve` системи «Mathematica», знайти розв'язок задачі Коші та побудувати його графік. При побудові графіка діапазон зміни аргументу *x* в кожному випадку підбирати самостійно.

Варіант №	Диференціальне рівняння і початкові умови	
1.	$y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \cos \pi x$,	$y(0)=3,\ y'(0)=0$.
2.	$y'' + 3y' = 9e^{3x} /(1+e^{3x})$,	$y(0)=\ln 4,\ y'(0)=3(1-\ln 2)$.
3.	$y'' - 6y' + 8y = 4/(1+e^{-2x})$,	$y(0)=1+2\ln 2,\ y'(0)=6\ln 2$.
4.	$y'' - 3y' = 9e^{-3x} /(3+e^{-3x})$,	$y(0)=4\ln 4,\ y'(0)=3(3\ln 4-1)$.
5.	$y'' + 4y = 4/\sin 2x$,	$y(\pi/4)=2,\ y'(\pi/4)=\pi$.

14.5. Система диференціальних рівнянь першого порядку.

Приклад 14.5. Використовуючи функцію `DSolve`, знайти загальний розв'язок системи однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Призначити довільним константам одиничні значення та побудувати графіки отриманих розв'язків.

Р о з в ' я з а н н я . Використовуючи функцію `DSolve`, розв'язуємо систему диференціальних рівнянь та результат зберігаємо у змінній ***r***.

Remove[*x*, *y*, *t*, *X*, *Y*]
r = **DSolve**[{*x*′[*t*] == *x*[*t*] − *y*[*t*], *y*′[*t*] == *x*[*t*] + *y*[*t*]}, {*x*[*t*], *y*[*t*]}, *t*]
{{*x*[*t*] → e^t *C*[1] Cos[*t*] − e^t *C*[2] Sin[*t*], *y*[*t*] → e^t *C*[2] Cos[*t*] + e^t *C*[1] Sin[*t*]}}

Наступний рисунок пояснює аргументи функції `DSolve` розв'язання системи диференціальних рівнянь.

розв'язуй систему

$$\boldsymbol{r} = \mathbf{DSolve}[\{\overbrace{\boldsymbol{x}'[\boldsymbol{t}] == \boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}] - \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}]}^{\text{перше рівняння } x' = x - y}, \overbrace{\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{t}] == \boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}] + \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}]}^{\text{друге рівняння } y' = x + y}\}, \{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}], \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}]\}, \boldsymbol{t}];$$

шукані вирази

З отриманого розв'язку створюємо функції–розв'язки, одночасно заміняючи константи числовими значеннями.

$\boldsymbol{X}[\mathbf{t\_}] = \mathbf{Simplify}[\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}]/.\boldsymbol{r}[[\mathbf{1},\mathbf{1}]]/.\{\boldsymbol{C}[\mathbf{1}] \to \mathbf{1}, \boldsymbol{C}[\mathbf{2}] \to \mathbf{1}\}]$

$\boldsymbol{Y}[\mathbf{t\_}] = \mathbf{Simplify}[\boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}]/.\boldsymbol{r}[[\mathbf{1},\mathbf{2}]]/.\{\boldsymbol{C}[\mathbf{1}] \to \mathbf{1}, \boldsymbol{C}[\mathbf{2}] \to \mathbf{1}\}]$

$e^t(\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t])$

$e^t(\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t])$

Пояснимо інструкцію

$\boldsymbol{X}[\mathbf{t\_}] = \mathbf{Simplify}[\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}]/.\boldsymbol{r}[[\mathbf{1},\mathbf{1}]]/.\{\boldsymbol{C}[\mathbf{1}] \to \mathbf{1}, \boldsymbol{C}[\mathbf{2}] \to \mathbf{1}\}]$.

Спочатку надрукуємо `r[[1,1]]`. Маємо

$\boldsymbol{r}[[\mathbf{1},\mathbf{1}]]$

$x[t] \to e^t C[1]\mathrm{Cos}[t] - e^t C[2]\mathrm{Sin}[t]$

Підстановка

$\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}]/.\boldsymbol{r}[[\mathbf{1},\mathbf{1}]]$

створює вираз

$e^t C[1]\mathrm{Cos}[t] - e^t C[2]\mathrm{Sin}[t]$

Друга підстановка … `/.{C[1]→1,C[2]→1}` заміняє в цьому виразі сталі `C[1]` і `C[2]`.

$\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}]/.\boldsymbol{r}[[\mathbf{1},\mathbf{1}]]/.\{\boldsymbol{C}[\mathbf{1}]{-}{>}\,1, \boldsymbol{C}[\mathbf{2}]{-}{>}\,1\}$

$e^t\mathrm{Cos}[t] - e^t\mathrm{Sin}[t]$

Функція `Simplify` спрощує цей вираз.

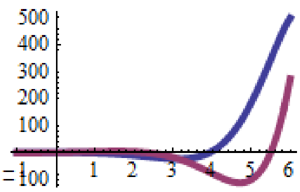
$\mathbf{Simplify}[\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}]/.\boldsymbol{r}[[\mathbf{1},\mathbf{1}]]/.\{\boldsymbol{C}[\mathbf{1}]{-}{>}\,1, \boldsymbol{C}[\mathbf{2}]{-}{>}\,1\}]$

$e^t(\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t])$

Отже функція ***X*[t]** обчислюється за останньою формулою.

Нарешті будуємо графіки розв'язків.

$\mathbf{Plot}[\{\boldsymbol{X}[\boldsymbol{t}], \boldsymbol{Y}[\boldsymbol{t}]\}, \{\boldsymbol{t}, -\mathbf{1}, \mathbf{1}\}, \mathbf{PlotStyle} \to \mathbf{Thickness}[\mathbf{0.01}]]$



Наступний рисунок пояснює аргументи функції `Plot` побудови графіків двох функцій на одному малюнку.

Вирази, графіки яких будуються

діапазон зміни аргумента

Товщина лінії

$$\mathbf{Plot}[\{\boldsymbol{X}[\boldsymbol{t}], \boldsymbol{Y}[\boldsymbol{t}]\}, \{\boldsymbol{t}, -\mathbf{1}, \mathbf{1}\}, \mathbf{PlotStyle} \to \mathbf{Thickness}[\mathbf{0.01}]]$$

Задачі 14.5. Використовуючи функцію DSolve, знайти загальний розв’язок системи диференціальних рівнянь. Призначити довільним константам одиничні значення та побудувати графіки отриманих функцій. В задачах крапка над змінною позначає похідну по параметру *t*, наприклад, $\dot{x}$ означає $\frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

При побудові графіка діапазон зміни аргументу t в кожному випадку підбирати самостійно.

Варіант №	Система рівнянь	Розв’язок при одиничних значеннях констант
1.	$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$	$x(t) = e^{3t}, y(t) = e^{3t}$
2.	$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$	$x = e^{t}(1+t), y = e^{t}(1+2t)$
3.	$\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0. \end{cases}$	$x = e^{2t}(1+6t),$ $y = e^{2t}(1-6t)$
4.	$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$	$x = 2 - e^{2t},\ y = \frac{1}{3}e^{-t}(1 + 2e^{3t}),$ $z = 2 - \frac{2e^{-t}}{3} - \frac{e^{2t}}{3}$
5.	$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x \end{cases}$	

14.6. Задача Коші для системи рівнянь першого порядку.

Приклад 14.6. Використовуючи функцію DSolve, знайти розв’язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 1 \\ y' = 2x - y + 1 \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = 0$$

Побудувати графіки отриманих розв’язків.

Розв'язання. Використовуючи функцію DSolve, розв’язуємо задачу Коші та результат зберігаємо у змінній $\boldsymbol{r}$.

Remove$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}]$
$\boldsymbol{r} = \mathbf{DSolve}[\{\boldsymbol{x}'[\boldsymbol{t}] == \boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}] + \mathbf{2}\boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}] - \mathbf{1}, \boldsymbol{y}'[\boldsymbol{t}] == \mathbf{2}\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}] - \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}] + \mathbf{1},$
$\boldsymbol{x}[\mathbf{0}] == \mathbf{1}, \boldsymbol{y}[\mathbf{0}] == \mathbf{0}\}, \{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}], \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}]\}, \boldsymbol{t}];$

Наступний рисунок пояснює використання функції DSolve при розв’язанні системи диференціальних рівнянь з додатковими умовами.

розв'язуй систему

перше рівняння $x' = x + 2y - 1$

друге рівняння $y' = 2x - y + 1$

r = DSolve[{x'[t] == x[t] + 2y[t] − 1, y'[t] == 2x[t] − y[t] + 1,
x[0] == 1, y[0] == 0}, {x[t], y[t]}, t];

додаткові умови $x(0)=1,\ y(0)=0$ шукані вирази

З отриманого розв'язку ***r*** створюємо функції.

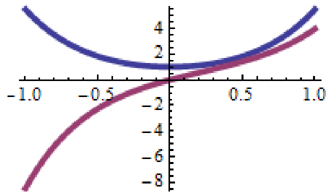
x[t_] = Simplify[x[t]/.r[[1, 1]]]
y[t_] = Simplify[y[t]/.r[[1, 2]]]

$$\frac{1}{5}\left(-1 + 3e^{-\sqrt{5}t} + 3e^{\sqrt{5}t}\right)$$

$$\frac{3e^{-\sqrt{5}t}\left(-1 + e^{\sqrt{5}t}\right)\left(-5 - \sqrt{5} + \left(-5 + \sqrt{5}\right)e^{\sqrt{5}t}\right)}{10\sqrt{5}}$$

Будуємо графіки обох розв'язків.

Plot[{x[t], y[t]}, {t, −1, 1}, PlotStyle → Thickness[0.01]]



Задачі 14.6. Використовуючи функцію `DSolve` системи «Mathematica», знайти розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь. Побудувати графіки отриманих розв'язків. При побудові графіка діапазон зміни аргументу t в кожному випадку підбирати самостійно.

Варіант №	Система рівнянь	Розв'язок
1.	$\begin{cases}\dot{x} = 2x + y, & x(0)=1\\ \dot{y} = -3y, & y(0)=-1\end{cases}$	$x = \frac{1}{5}e^{-3t}\left(1+4e^{5t}\right)$ $y = -e^{-3t}$
2.	$\begin{cases}\dot{x} = -y, & x(0)=1\\ \dot{y} = 2(x+y), & y(0)=1\end{cases}$	$x = e^{t}\left(\cos t - 2\sin t\right)$ $y = e^{t}\left(\cos t + 3\sin t\right)$
3.	$\begin{cases}\dot{x} + 2y = 3t, & x(0)=2\\ \dot{y} - 2x = 4, & y(0)=3\end{cases}$	$x = -\frac{5}{4} + \frac{13}{4}\cos 2t - 3\sin 2t$ $y = \frac{3t}{2} + 3\cos 2t + \frac{13}{4}\sin 2t$
4.	$\begin{cases}\dot{x} = -7x + y + 5, & x(0)=0\\ \dot{y} = -2x - 5y - 37t, & y(0)=0\end{cases}$	$x = 1 - t - e^{-6t}\cos t$ $y = 1 - 7t + e^{-6t}\left(\cos t + \sin t\right)$

5.	$\begin{cases}\dot{x}=8y, & x(0)=-4\\ \dot{y}=-2z, & y(0)=0\\ \dot{z}=2x+8y-2z, & z(0)=1\end{cases}$	$x=-4e^{-2t}-2\sin 4t$ $y=e^{-2t}-\cos 4t$ $z=e^{-2t}-2\sin 4t$

14.7. Задача Коші для неоднорідної системи рівнянь.

Приклад 14.7. Використовуючи функцію `DSolve` системи «Mathematica», знайти розв'язок наступної задачі Коші (крапка над x і y позначає похідну по t).

$$\begin{cases}\dot{x}=x+2y+16\,t\,e^{t}\\ \dot{y}=2x-2y\end{cases},\quad x(0)=1,\ \ y(0)=-1$$

Побудувати графіки отриманих розв'язків.

Розв'язання. Використовуючи функцію `DSolve`, розв'язуємо задачу Коші і результат зберігаємо у змінній $\boldsymbol{r}$.

Remove$[x, y, t]$

r = **DSolve**$[\{x'[t] == x[t] + 2y[t] + 16\,t\,\mathrm{Exp}[t],\ y'[t] == 2x[t] - 2y[t],$
$x[0] == 1, y[0] == -1\}, \{x[t], y[t]\}, t]$

$$\{\{x[t] \to \frac{1}{5}e^{-3t}(4 - 65e^{4t} + 66e^{5t} - 60e^{4t}t),$$
$$y[t] \to \frac{1}{5}e^{-3t}(-8 - 30e^{4t} + 33e^{5t} - 40e^{4t}t)\}\}$$

З отриманого розв'язку створюємо функції.

$x[\mathrm{t\_}] = x[t]/.r[[1,1]]$

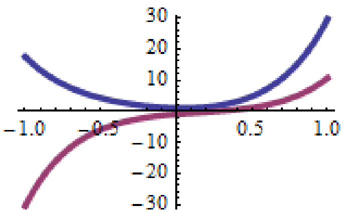
$y[\mathrm{t\_}] = y[t]/.r[[1,2]]$

$$\frac{1}{5}e^{-3t}(4 - 65e^{4t} + 66e^{5t} - 60e^{4t}t)$$

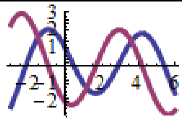
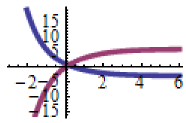
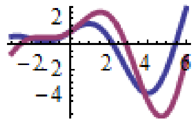
$$\frac{1}{5}e^{-3t}(-8 - 30e^{4t} + 33e^{5t} - 40e^{4t}t)$$

Будуємо графіки цих функцій.

Plot$[\{x[t], y[t]\}, \{t, -1, 1\}$, **PlotStyle** → **Thickness**$[0.01]]$



Задачі 14.7. Використовуючи функцію `DSolve`, знайти розв'язок задачі Коші для лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь (крапка над $\dot{x}$ і $\dot{y}$ позначає похідну по t). Побудувати графіки отриманих розв'язків. При побудові графіка діапазон зміни аргументу t в кожному випадку підбирати самостійно.

Варіант №	Система диференціальних рівнянь	Початкові умови	Графіки розв'язків
1.	$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^{t} \\ \dot{y} = x + t^{2} \end{cases}$	$x(0) = -2,\ y(0) = 1$	
2.	$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \sin t \end{cases}$	$x(0) = 1,\ y(0) = -2$	
3.	$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^{t}+1} \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^{t}+1} \end{cases}$	$x(0) = 1,\ y(0) = 0$	
4.	$\begin{cases} \dot{x} = x - y + \cos t \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$	$x(0) = 1,\ y(0) = 1$	
5.	$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y + 1 + 4t \\ \dot{y} = -x + y + \dfrac{3}{2}t^{2} \end{cases}$	$x(0) = 1,\ y(0) = -1$	

14.8. Задача Коші для системи рівнянь другого порядку.

Приклад 14.8. Використовуючи функцію `DSolve`, знайти розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь другого порядку.

$$\begin{cases} x'' + y' - 7x - 5y = 0 \\ x'' + x' - x - y = 0 \end{cases},\quad x(0) = -1,\ y(0) = 0,\ x'(0) = 0 .$$

Побудувати графіки отриманих розв'язків.

Розв'язання. Використовуючи функцію `DSolve`, розв'язуємо задачу Коші, результат зберігаємо у змінній ***r*** і відразу будуємо функції $x(t)$, $y(t)$ розв'язку.

```
Remove[x, y, t]
r = DSolve[{x''[t] + y'[t] − 7x[t] − 5y[t] == 0,
      x''[t] + x'[t] − x[t] − y[t] == 0, x[0] == −1, y[0] == 0, x'[0] == 0},
      {x[t], y[t]}, t];
x[t_] = Simplify[x[t]/.r[[1, 1]]]
y[t_] = Simplify[y[t]/.r[[1, 2]]]
```

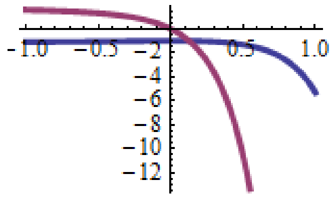
$$\frac{1}{12}e^{-t}\left(4 - (8 + 3\sqrt{6})e^{-(-3+\sqrt{6})t} + (-8 + 3\sqrt{6})e^{(3+\sqrt{6})t}\right)$$

$$\frac{1}{12}e^{-t}\left(-4 + (2 + 7\sqrt{6})e^{-(-3+\sqrt{6})t} + (2 - 7\sqrt{6})e^{(3+\sqrt{6})t}\right)$$

Зверніть увагу на кількість додаткових умов. Оскільки в рівнянні немає другої похідної функції $y(t)$, то в умовах Коші присутнє лише значення функції $y(0)=0$ в початковій точці.

Будуємо графіки функцій – розв'язків.

$\mathbf{Plot}[\{x[t], y[t]\}, \{t, -1, 1\}, \mathbf{PlotStyle} \to \mathbf{Thickness}[0.01]]$



Задачі 14.8. Використовуючи функцію `DSolve`, знайти розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь другого порядку, які не приведені до нормального вигляду. Побудувати графіки отриманих розв'язків. При побудові графіків діапазон зміни аргументу t в кожному випадку підбирати самостійно.

Варіант №	Система диференціальних рівнянь	Початкові умови
1.	$\begin{cases} x'' = x - 4y \\ y'' = -x + y \end{cases}$	$x(0)=1,\ y(0)=0,$ $x'(0)=1,\ y'(0)=-1$
2.	$\begin{cases} x'' - y' + x - 3y = 0 \\ x'' - x' - x + y = 0 \end{cases}$	$x(0)=-1,\ y(0)=2,$ $x'(0)=1$
3.	$\begin{cases} x'' + x' + x - 4y = 0 \\ y'' - y' = -x + y \end{cases}$	$x(0)=-1,\ y(0)=1,$ $x'(0)=1,\ y'(0)=-1$
4.	$\begin{cases} x'' + y' - 7x - 5y = 0 \\ x'' + x' - x + 5y = 0 \end{cases}$	$x(0)=-1,\ y(0)=0,$ $x'(0)=0$
5.	$\begin{cases} x'' + 4x' - 2x - 2y' - y = 0 \\ x'' - 4x' - y'' + 2y' + 2y = 0 \end{cases}$	$x(0)=1,\ y(0)=1,$ $x'(0)=1,\ y'(0)=-1$

Додатки .

А. Оформлення документів в системі Mathematica.

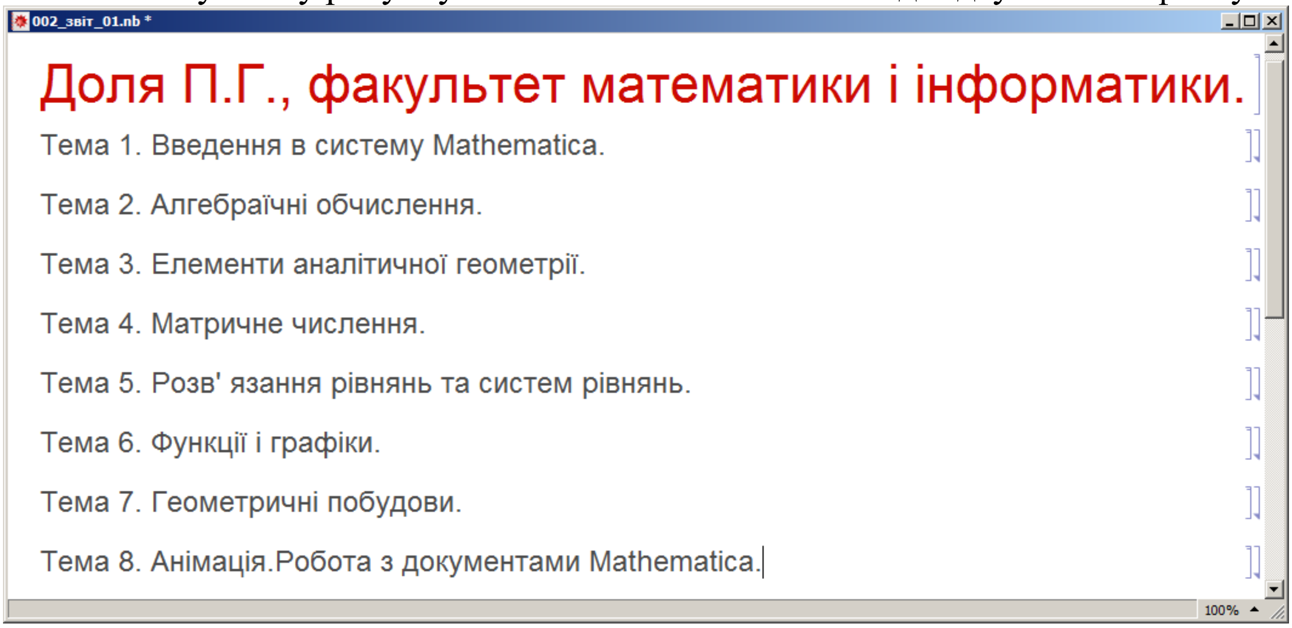
Після виконання наукових або навчальних завдань бажано скласти звіт. Система Mathematica має багато можливостей по оформленню власних документів: вибір стилів тексту, кольорове забарвлення, зсуви та інше. Один зі способів оформлення електронного звіту викладено нижче. Він полягає в виборі для кожної секції документа наперед визначеного стилю і групуванні секцій відповідним чином. Опишимо цей спосіб стосовно оформлення результатів виконання навчальних завдань нашого збірника вправ.

Оформлюється звіт в одному документі (файлі) пакету «Mathematica». Початкова секція звіту (документа Mathematica) містить інформацію: прізвище, факультет та курс і, можливо, номер варіанту. Секція повинна мати стиль `Title`. Завдання розміщуються по темах Номер і назва теми оформлюється окремою секцією зі стилем `Subtitle`.

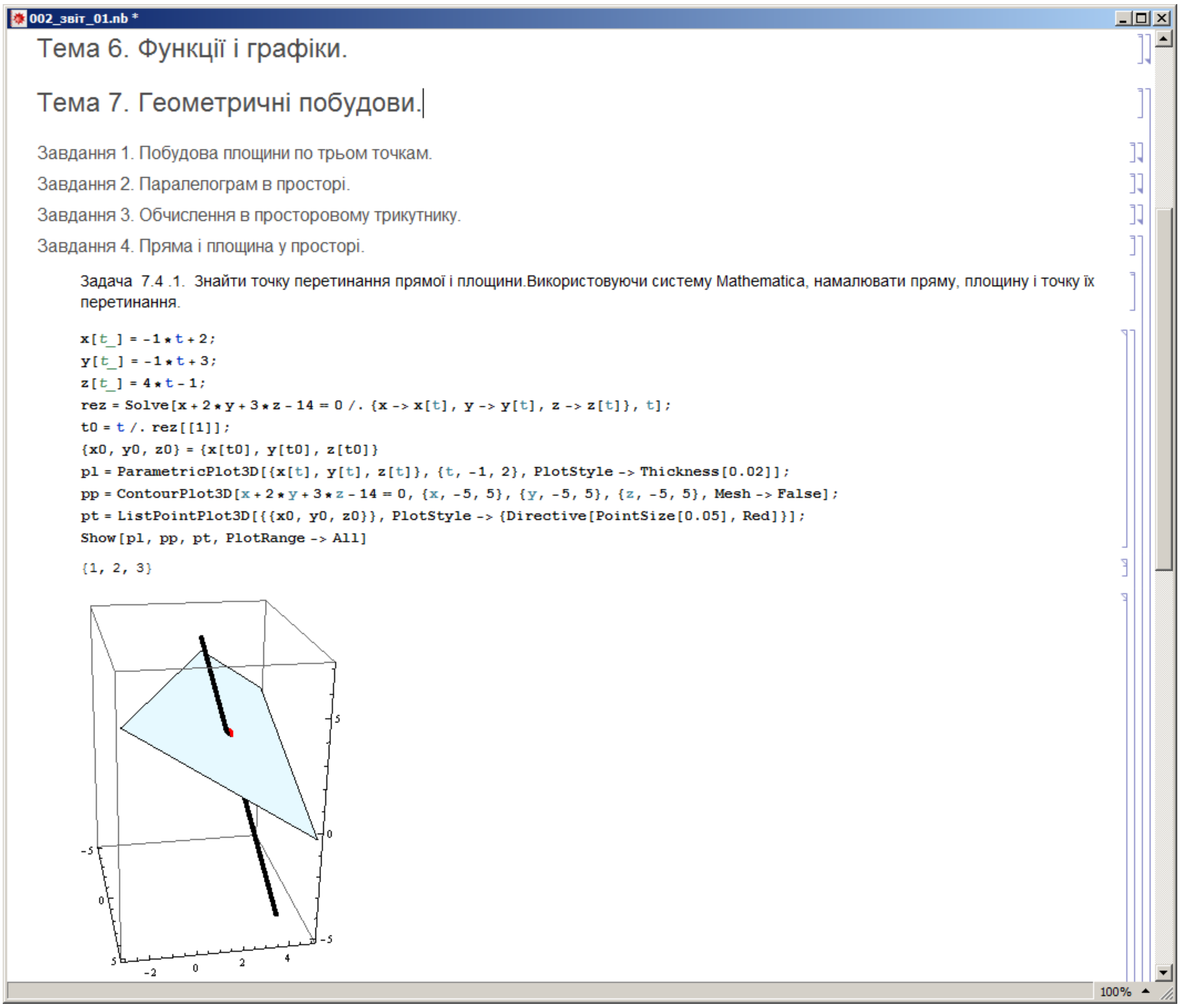
Кожне завдання в темі оформлюється окремо. Спочатку створюється секція з номером завдання і стилем `Subsubtitle`. Потім створюється секція з текстом задачі і стилем `Text`. Наступні секції містять розв'язок задачі. Коли завдання виконано, секції з номером завдання, текстом завдання та розв'язком, групуються, і потім згортаються.

Секція з назвою теми групується зі згрупованими секціями всіх її завдань, і потім згортається.

На наступному рисунку показано остаточний вигляд підсумкового файлу.

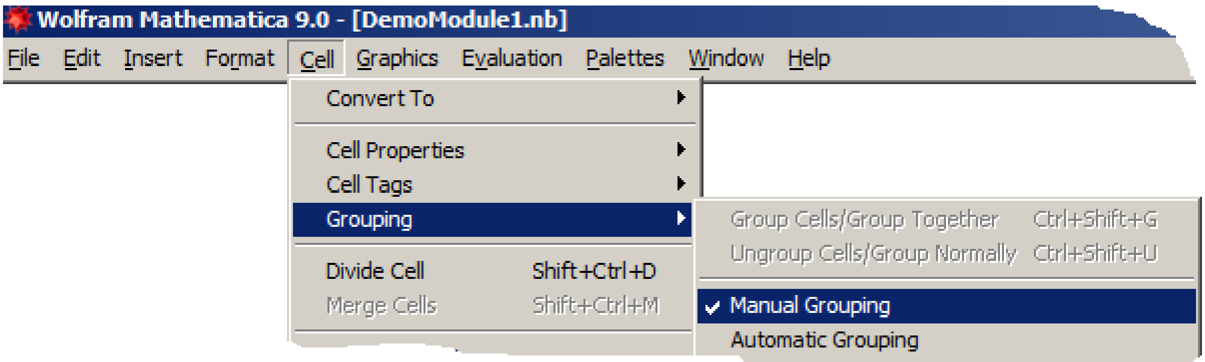


Секція кожної теми може бути розкрита. На наступному рисунку показано зміст теми 7 з розкритою секцією завдання 7.4. Внизу секції надруковано відповідь: координати точки перетинання прямої і площини `{1,2,3}` та малюнок, який потрібно було створити.

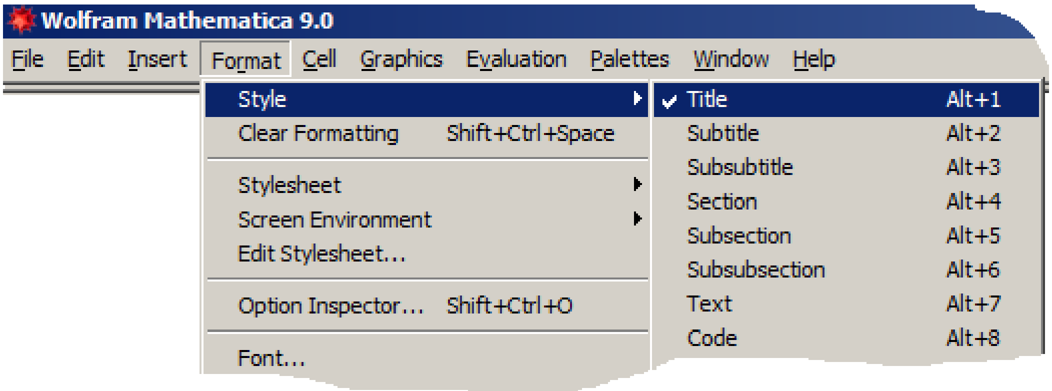


Для створення підсумкового звіту потрібно:

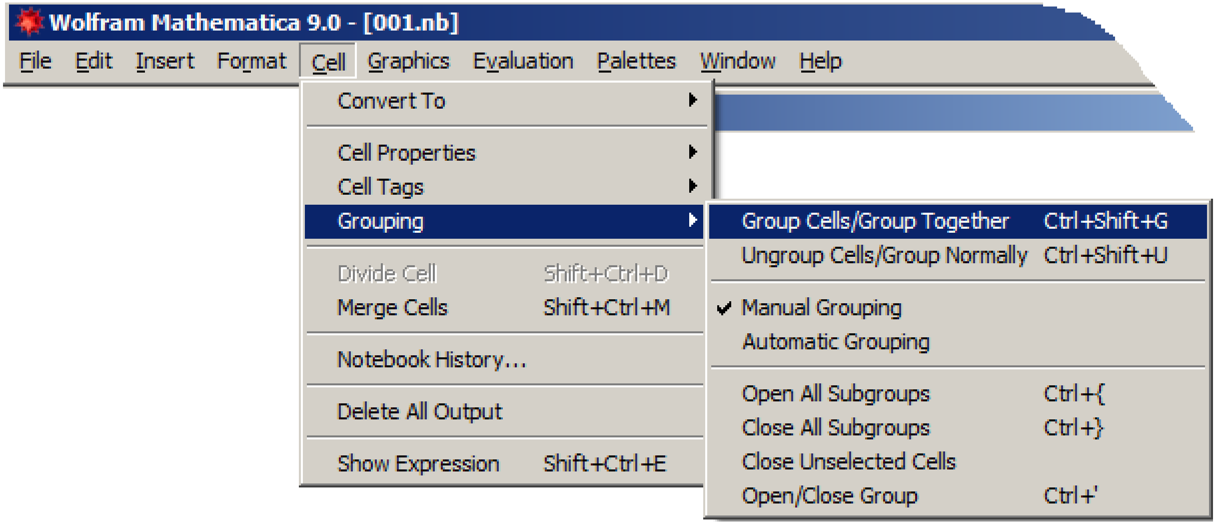
1. Створити новий файл командою меню `File – New – Notebook`.
2. Встановити ручне керування способом групування секцій документа командою меню `Cell – Grouping – Manual Grouping`.



3. Для встановлення стилю секцій потрібно клацнути мишею по квадратній дужці, яка справа обмежує секцію, а потім виконати команду меню `Format – Style – назва_стилю`.



4. Для групування кількох секцій потрібно нажати на клавіатурі клавішу Ctrl і, не відпускаючи її, клацнути мишею по квадратних дужках, які праворуч обмежують потрібні секції. Квадратні дужки змінять колір. Потім можна виконати команду меню Cell – Grouping – Group Cels/Group Together, або натиснути комбінацію клавіш Ctrl+Shift+G.



Якщо ви помилково згрупували не ті секції, то їх можна розгрупувати, клацнувши мишею по зовнішній дужці та виконавши команду меню Cell – Grouping – Ungroup Cels/Group Normally.

5. Згруповані секції можна згортати та розгортати подвійним клацанням миші по зовнішній дужці групи.

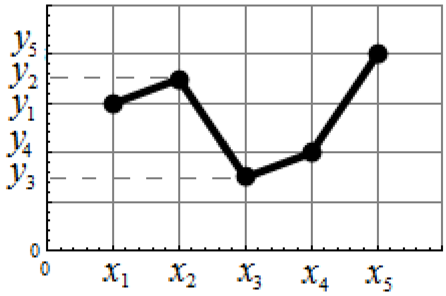
6. Після завершення редагування документу його потрібно зберегти командою File – Save, давши файлу ім'я – прізвище виконавця.

Б. Наближення функцій.

Коли функція задана дискретним набором точок і потрібно визначити її значення в проміжних точках, то вдаються до інтерполяції або апроксимації. При цьому невідома справжня функція замінюється деякою іншою, часто кусковою, яка має досить прості вирази на ділянках. Якщо обрана функція приймає задані значення у вузлах, то кажуть про інтерполяції, якщо ні, то про апроксимацію.

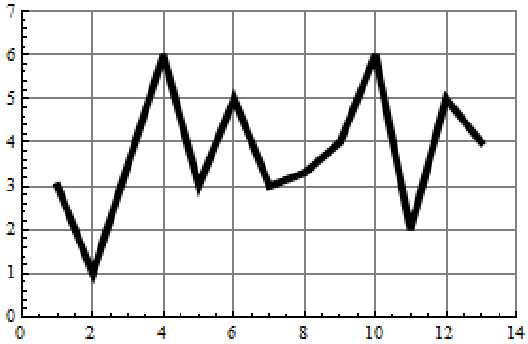
Б.1. Інтерполяція ламаною.

Найпростіша інтерполяція полягає в тому, що задані точки $(x_i, y_i)_{i=0}^{n}$ з'єднуються прямолінійними відрізками.



Щоб побудувати графік відповідної ламаної в Mathematica використовується функція `ListPlot`. Вона графічно зображає список значень у двох вимірах. Координати точок задаються списком зі списків пар чисел – абсцис і ординат точок.

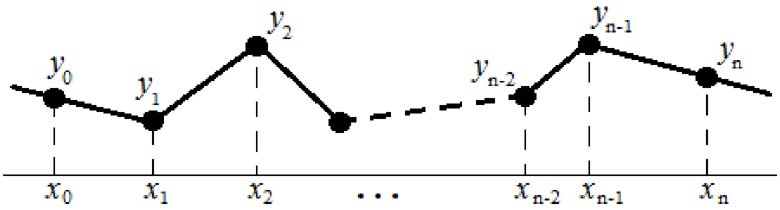
```
ListPlot[{{1, 3}, {2, 1}, {4, 6}, {5, 3}, {6, 5}, {7, 3}, {8, 3.3}, {9, 4}, {10, 6},
        {11, 2}, {12, 5}, {13, 4}}, PlotRange → {{0, 14}, {0, 7}},
        PlotStyle → {Thickness[0.015], Black}, Joined → True,
        GridLines → Automatic]
```



Розмір точок, які використовуються для графіка, можна збільшити за допомогою опції `PlotStyle->PointSize[0.02]`. Для з'єднання точок використовується опція `Joined->True`.

Графік ламаної дає наочне зображення і дозволяє приблизно (на око) оцінити значення функції при будь якому аргументі *x*. Але часто бажано точніше обчислити значення функції. Один із способів полягає в використанні формули Бернштейна.

Нехай дано набір вузлів $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, які визначають вершини ламаної (окрім точок (x_0, y_0) і (x_n, y_n), які не є вершинами). При цьому відрізок, що з'єднує точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ продовжується вліво і визначає для всіх $x < x_1$ луч ламаної, що проходить через ці дві точки. Відрізок, що з'єднує пару точок $(x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$ визначає для всіх $x > x_{n-1}$ інший луч ламаної (тобто точки (x_0, y_0), (x_n, y_n) не є вершинами ламаної, а використовуються для завдання її крайніх напівпрямих).



Формула Бернштейна ламаної, у якої точки $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{n-1}$ є вершинами, має вигляд

$$y = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_{n-1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1}) \right) +$$

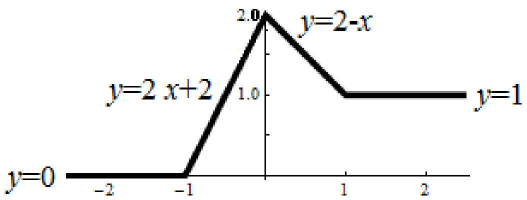
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right)| x - x_k |. \qquad (1)$$

Якщо позначити $a_k = \dfrac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$, то її можна переписати наступним чином

$$y = \frac{1}{2}(y_0 + a_1(x - x_0) + y_{n-1} + a_n(x - x_{n-1})) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)| x - x_k |. \qquad (2)$$

Формула (2) каже, що для побудови рівняння ламаної треба взяти півсуму рівнянь її крайніх напівпрямих і додати половину суми (по всім точках зламу x_k) добутків виду $(a_{k+1} - a_k)| x - x_k |$, де $(a_{k+1} - a_k)$ представляє різницю тангенсів кутів нахилу відрізків, розташованих праворуч і ліворуч від точки зламу x_k.

Приклад 1. Написати рівняння ламаної, графік якої показано на наступному рисунку.



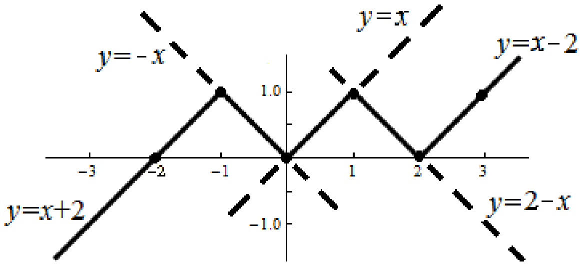
Р о з в ’ я з а н н я . Рівняння відрізків прямих наведені на рисунку. Доданки в сумі (2) дорівнюють

$$(a_2 - a_1)| x - x_1 | = (2 - 0)| x - (-1)| = 2| x + 1 |;$$
$$(a_3 - a_2)| x - x_2 | = (-1 - 2)| x - 0 | = -3| x |;$$
$$(a_4 - a_3)| x - x_3 | = (0 - (-1))| x - 1 | = | x - 1 |.$$

Тоді відповідно до (2) отримуємо

$$y = \frac{1}{2}(0 + 1) + \frac{1}{2}(2| x + 1 | - 3| x | + | x - 1 |) = \frac{1}{2} + | x + 1 | - \frac{3}{2}| x | + \frac{1}{2}| x - 1 |.$$

Приклад 2. Ламана, проходить через точки $(-2,0),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,0),(3,1)$. Перша і остання точки в цьому списку не є вузлами, а використовуються для визначення крайніх напівпрямих. Написати рівняння ламаної.



Р о з в ’ я з а н н я . З графіка видно, що тангенси нахилу всіх прямих дорівнюють ± 1. Рівняння крайніх напівпрямих мають вигляд $y = x + 2$ і $y = 2 - x$. Доданки в сумі (2) (підсумовування ведеться по всім точкам зламу) дорівнюють:

$$(a_2 - a_1)|x - x_1| = ((-1) - 1)|x - (-1)| = -2|x + 1|;$$
$$(a_3 - a_2)|x - x_2| = (1 - (-1))|x - 0| = 2|x|;$$
$$(a_4 - a_3)|x - x_3| = ((-1) - 1)|x - 1| = -2|x - 1|;$$
$$(a_5 - a_4)|x - x_4| = (1 - (-1))|x - 2| = 2|x - 2|.$$

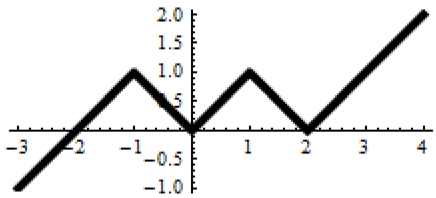
Тоді відповідно до (2) отримуємо

$$y = \frac{1}{2}(x + 2 + x - 2) + \frac{1}{2}(-2|x + 1| + 2|x| - 2|x - 1| + 2|x - 2|) =$$
$$= x - |x + 1| + |x| - |x - 1| + |x - 2|.$$

∎

Коли формула ламаної побудована, то її просто реалізувати в Mathematica. Наприклад, останнє рівняння може бути записано наступним чином.

```
y[x_] = x − Abs[x + 1] + Abs[x] − Abs[x − 1] + Abs[x − 2];
Plot[y[x], {x, −3, 4}, PlotStyle → {Thickness[0.02], Black},
                                        AspectRatio → Automatic]
```



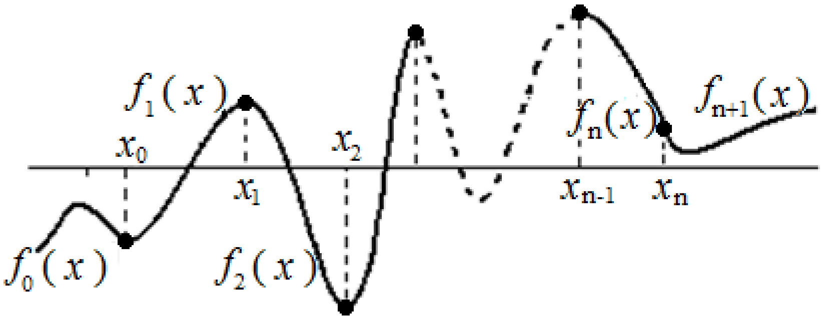
Б.2. Кускові функції.

Інший спосіб побудувати функцію, яка задана різними виразами на різних ділянках дійсної вісі, полягає в створенні кускових функцій.

Розглянемо зростаючу послідовність чисел $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ і послідовність функцій, визначених на ділянках дійсній осі $(x_{i-1}, x_i]_{i=1}^{n}$ деякими аналітичними виразами $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$. Кажуть, що функція $f(x)$ є кусковою, якщо вона задана у вигляді

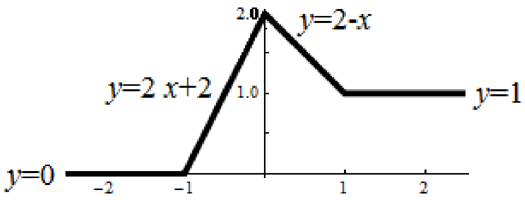
$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \le x_0 \\ f_1(x), & x_0 < x \le x_1 \\ \cdots & \\ f_n(x), & x_{n-1} < x \le x_n \\ f_{n+1}(x), & x > x_n \end{cases} \qquad (3)$$

На наступному рисунку зображена неперервна кускова функція, але це необов'язково. Окрім того, для визначеності в (3) ми записали, що всі ділянки є напіввідкритими інтервалами $x_{i-1} < x \le x_i$, проте це не суттєво.



Приміром, ламана з прикладу 1 може бути записана наступним чином:

$$y(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \le -1 \\ 2x+2\,, & -1 < x \le 0 \\ 2-x \ , & 0 < x \le 1 \\ 1 \ , & x > 1 \end{cases}$$



В системі Mathematica такі вирази створюються функцією `Piecewise`. Вона приймає список, що складається з пар виразів `{вираз,умова}` і повертає значення того виразу в парі якого умова істинна. Такі функції можна використовувати для обчислення значень, або при побудові графіків. Наприклад, остання ламана може бути задана наступним чином:

```
y[x_] = Piecewise[{{0, x ≤ -1}, {2x + 2, -1 < x ≤ 0},
                   {2 - x, 0 < x <= 1}, {1, x > 1}}];
y[-0.4]
```

```
1.2
```

Якщо жодна умова не виконана, то функція може повернути значення за замовчуванням, яке задається другим аргументом. Наприклад,

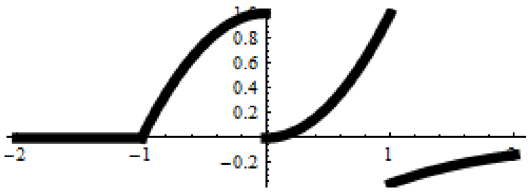
```
y[x_] = Piecewise[{{0, x ≤ -1}, {2x + 2, -1 < x ≤ 0},
                   {2 - x, 0 < x <= 1}}, 1]
```

$$\begin{cases} 0 & x \le -1 \\ 2+2x & -1 < x \le 0 \\ 2-x & 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{True} \end{cases}$$

Тут остання одиниця повертається, якщо ні одна з попередніх умов не виконується.

Вирази в аргументі `Piecewise` функції не зобов'язані бути лінійними. Тобто на кожній ділянці функція може бути задана будь яким виразом.

```
y[x_] = Piecewise[{{0, x <= -1}, {1 - x^2, x <= 0}, {x^2, x <= 1}}, -Exp[-x]];
Plot[y[x], {x, -2, 2}, PlotStyle → {Thickness[0.02], Black},
     AspectRatio → Automatic]
```



Б.3. Поліноміальна інтерполяція.

Якщо експериментальних точок $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{n}$ небагато, то можна побудувати поліном, який проходить через ці точки. Поліном *n*-го степеня має загальний вигляд

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \tag{4}$$

і його коефіцієнти можна підібрати так, щоб він точно проходив через задані точки. Дійсно, якщо ця умова виконується, то $P(x_i) = y_i$. Тоді маємо

$$a_0 {x_0}^n + a_1 {x_0}^{n-1} + a_2 {x_0}^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x_0 + a_n = y_0$$

$$a_0 {x_1}^n + a_1 {x_1}^{n-1} + a_2 {x_1}^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x_1 + a_n = y_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0 {x_n}^n + a_1 {x_n}^{n-1} + a_2 {x_n}^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x_n + a_n = y_n$$

Ці співвідношення утворюють систему лінійних рівнянь відносно n+1 невідомих коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Розв'язавши її, і підставивши коефіцієнти a_k в (4), отримаємо поліном, графік якого проходить крізь задані точки. Звичайно, що в пакеті Mathematica є функція, яка виконує всю цю роботу автоматично.

Функція `InterpolatingPolynomial` приймає координати точок і створює поліном, графік якого проходить через задані точки. При визові цієї функції їй передається список координат вузлів і ідентифікатор змінної полінома, наприклад *x*, оскільки повертатися буде вираз, а не функція. При цьому інтерполяційний поліном повертається в формі Горнера (в такій формі поліном обчислюється швидше за все), наприклад,

InterpolatingPolynomial$[\{\mathbf{1}, \mathbf{8}, \mathbf{27}, \mathbf{64}, \mathbf{125}\}, \boldsymbol{x}]$

$1 + (-1 + x)(7 + (-2 + x)(3 + x))$

Тут список `{1,8,27,64,125}` представляє ординати вузлових точок; їх абсцисами є номери точок `{1,2,3,...}`. Результівний поліном завжди можна перетворити до звичайного вигляду.

Expand[%]

x^3

Існує безліч поліномів, які проходять через задані точки. Функція `InterpolatingPolynomial` намагається повернути поліном найменшої степені. В одновимірному випадку по *n* точкам будується поліном *n*-1 степеня.

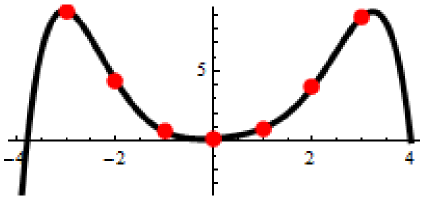
У форматі `InterpolatingPolynomial[{{x1,y1},{x2, y2},...},x]` задаються обидві координати вузлових точок.

В наступному коді ми виконуємо поліноміальну інтерполяцію по множині точок, приблизно розташованих на параболі $y = x^2$; зміщення з параболи задається невеликими випадковими значеннями.

SeedRandom[ ];
data = **Table**[{$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}^{\mathbf{2}}$ + **RandomReal**[{−**0.5**, **0.5**}]}, {$\boldsymbol{i}$, −**3**, **3**}]
$\boldsymbol{g}$[$\boldsymbol{x}$_] = **Collect**[**InterpolatingPolynomial**[**data**, $\boldsymbol{x}$], $\boldsymbol{x}$]

$$0.184319 + 0.257543\,x + 0.43762\,x^2 - 0.1450229\,x^3 + 0.19475\,x^4 + 0.01203\,x^5 - 0.014905\,x^6$$

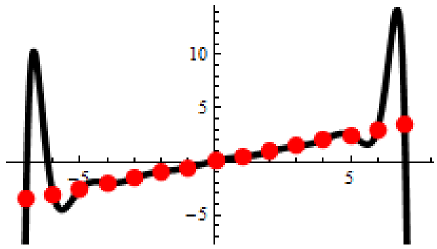
Plot[$\boldsymbol{g}$[$\boldsymbol{x}$], {$\boldsymbol{x}$, −**4**, **4**}, **PlotStyle** → {**Black**, **Thickness**[**0.01**]},
Epilog → {**Red**, **PointSize**[**0.04**], **Map**[**Point**, **data**]}]



Тут функція `SeedRandom[]` ініціалізує генератор випадкових чисел поточним часом.

Майте на увазі, що при великій кількості точок (тобто для високих степенів полінома) інтерполяція дає не дуже гарні результати. В наступному прикладі 15 точок розташовано поблизу кривої $y = x/2$ з невеликим випадковим зміщенням. Але графік полінома чотирнадцятого ступеня, який зображено нижче, на деяких ділянках дає великі відхили від прямої. При чому, чим вище степінь полінома, тим більше його коливання.

SeedRandom[ ];
data = **Table**[{$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}$/**2** + **RandomReal**[{−**0.1**, **0.1**}]}, {$\boldsymbol{i}$, −**7**, **7**}];
$\boldsymbol{g}$[$\boldsymbol{x}$_] = **Collect**[**InterpolatingPolynomial**[**data**, $\boldsymbol{x}$], $\boldsymbol{x}$]
Plot[$\boldsymbol{g}$[$\boldsymbol{x}$], {$\boldsymbol{x}$, −**8**, **8**}, **PlotStyle**−> {**Black**, **Thickness**[**0.015**]}, **Epilog**
→ {**Red**, **PointSize**[**0.04**], **Map**[**Point**, **data**]}]



Висновок, який можна зробити з останнього прикладу, полягає в тому, що поліноміальна інтерполяція при великій кількості точок дає кепські результати. При кількості точок приблизно більше 8 – 10 поліноміальна інтерполяція не використовується. Потрібно застосовувати кусково–поліноміальну інтерполяцію або поліноміальну апроксимацію, про які піде мова далі.

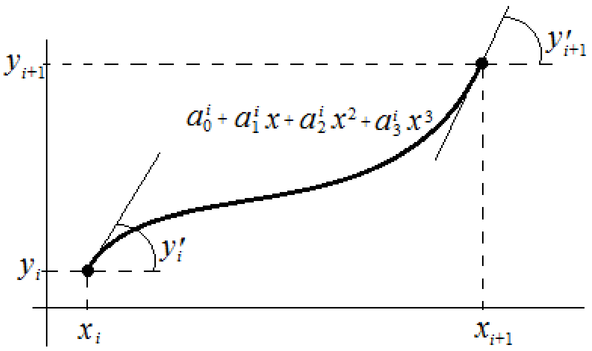
Б.4. Кусково–поліноміальна інтерполяція.

Під кусково – поліноміальною інтерполяцією розуміють побудову неперервної кускової функції (3), яка проходить крізь задані точки $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{n}$, і на кожній ділянці $(x_{i-1}, x_i]_{i=1}^{n}$ зображується окремим поліномом. Ламана є поодиноким випадком кусково-поліноміальної інтерполяції, коли на кожній ділянці кускова функція зображується прямою лінією. Найчастіше використовують кубічні поліноми для представлення сегментів кускового полінома, але це не обов’язково. Для представлення інтерполяційного кускового полінома потрібно знати коефіцієнти многочленів кожної його ділянки. Наприклад, кусковий поліном 3-го степеня може бути представлений у вигляді

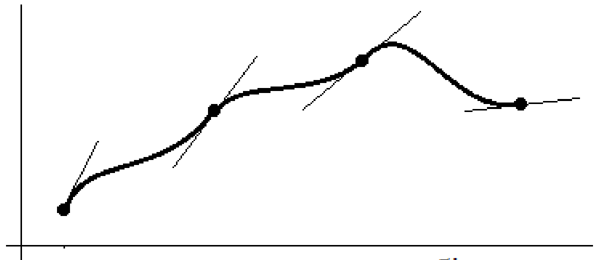
$$P(x)=\begin{cases} a_0^0+a_1^0x+a_2^0x^2+a_3^0x^3, & x\le x_0\\ a_0^1+a_1^1x+a_2^1x^2+a_3^1x^3, & x_0<x\le x_1\\ \cdots & \\ a_0^n+a_1^nx+a_2^nx^2+a_3^nx^3, & x_{n-1}<x\le x_n\\ a_0^{n+1}+a_1^{n+1}x+a_2^{n+1}x^2+a_3^{n+1}x^3, & x>x_n \end{cases}. \tag{5}$$

Він містить $4\cdot(n+1)$ коефіцієнтів a_i^k. Якщо використовувати лише координати точок, через які він проходить, що співпадають з його вузлами – точками стикування сегментів, то ми отримаємо $2\cdot n$ умов. Цього недостатньо для знаходження всіх $4\cdot(n+1)$ коефіцієнтів в (5), і ми можемо зажадати виконання додаткових умов.

Якщо на всіх ділянках поліноми кубічні, у вузлах $\{x_i\}_{i=0}^n$ задані значення функції y_i і її похідних y_i', то таку кускову функцію називають інтерполяційним кусково-кубічним поліномом Ерміта. Він будується досить легко, бо задання значень і похідних на кінцях кубічного сегмента однозначно визначає коефіцієнти a_i^k кожного сегмента.



Один сегмент кусково-кубічного полінома Ерміта

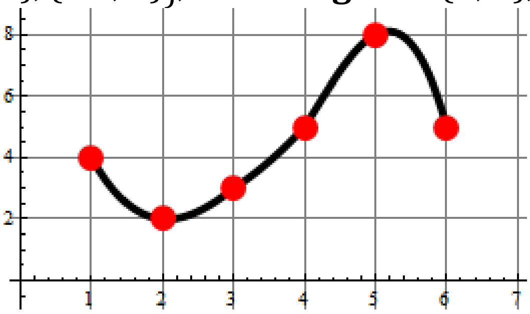

три сегменти кусково-кубічного полінома Ерміта

Часто будують кусково-кубічний поліном, який проходить через задані точки і має неперервні перші і другі похідні в точках стику. Таку функцію називають кубічним сплайном. Для його однозначного визначення потрібно мати дві додаткові умови. Найчастіше це значення перших похідних на кінцях (тобто задання нахилу кривої на кінцях), або умова обернення в нуль других похідних (тобто умова нульової кривини на кінцях).

В будь якому випадку пошук коефіцієнтів a_i^k поліномів-сегментів це клопітна справа. Навіть коли всі коефіцієнти знайдені, то використання формули (5) досить незручне. Тому функції системи Mathematica, які виконують кусково-поліноміальну інтерполяцію, повертають відповіді не у вигляді кускової функції (5), а у вигляді спеціального об’єкта InterpolatingFunction. Це «справжня» функція, яку можна використовувати як звичайну функцію: обчислювати значення в точці, диференціювати, інтегрувати і т.д. Єдине обмеження полягає в тому, що вона створюється на певному діапазоні зміни аргументів. При спробі використати її з аргументом, що виходить за межі цього діапазону, генерується попередження.

Кусково-поліноміальну інтерполяцію в системі виконує функція Interpolation, яка приймає список координат точок і створює об'єкт InterpolatingFunction. В цьому випадку він представляє кусковий поліном, порядок гладкості (порядок неперервних похідних в точках стику) якого можна задати при створенні. Функція Interpolation за замовчуванням виконує кусково-кубічну інтерполяцію Ерміта з неперервними першими похідними в точках стику. Але значення цих похідних (тобто нахил кривої у вузлах) система обирає самостійно.

```
data = {4, 2, 3, 5, 8, 5};
f = Interpolation[data]
InterpolatingFunction[{{1,6}}, " <> "]
f[2.5]
2.25
Show[
    Plot[f[x], {x, 1, 6}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.015]}],
    ListPlot[data, PlotStyle → {Red, PointSize[0.05]}],
    PlotRange → {{0, 7}, {−1, 9}}, AxesOrigin → {0, 0}, Lines → Automatic]]
```



Тут ми використали формат виклику Interpolation [{y1, y2, ...}], який вважає, що абсциси точок дорівнюють номерам точок {1,2,...}, а ординати {y1,y2,...}.

При виведенні функції InterpolatingFunction[{{1,6}},"<>"] показаний діапазон інтерполяції {1,6}. Саме його ми використали в якості діапазону при побудові графіка функції f[x]. Спробуйте використати ширший діапазон Plot[f [x],{x,0,7},...] і ви отримаєте попередження, хоча графік буде побудований.

Якщо потрібно обчислити значення інтерполяційної функції в точці, то можна використати наступний формат Interpolation[data, $x_{точки}$].

```
Interpolation[data, 2.5]
2.25
```

У форматі виклику Interpolation[{{x_1,y_1},{x_2,y_2},...}] задаються обидві координати точок. Тут також за замовчуванням виконується кусковокубічна інтерполяція Ерміта з якимись значеннями перших похідних в точках стику.

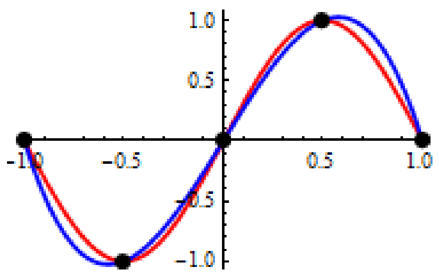
```
pnt = {{0, 1}, {1, 2}, {4, 4}, {3, 5}, {5, 0}, {6, 3}};
f = Interpolation[pnt]
InterpolatingFunction[{{0,6}}," <> "]
f[2.5]
4.59375
Plot[f[x], {x, 0, 6}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.015]},
                    Epilog → {Red, PointSize[0.04], Point/@pnt},
                    GridLines → Automatic]
```

Зверніть увагу на те, що абсциси точок не зобов'язані йти в зростаючому порядку.

В останній інструкції було використано нову для читача опцію `Epilog->{примітиви}`. Вона дозволяє зображати примітиви на графіках після їх побудови. Операція `/@` у форматі `f/@список` позначає застосування функції `f` до кожного елементу `списку`.

Перевіримо якість інтерполяції наступним прикладом, задавши вузли на синусоїді.

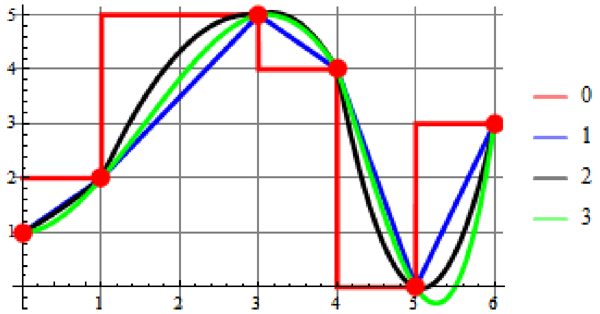
```
ts = Chop[Table[{x, Sin[πx]}, {x, −1, 1, 0.5}]]
{{−1.,0},{−0.5,−1.},{0,0},{0.5,1.},{1.,0}}
f = Interpolation[ts];
Plot[{Sin[πx], f[x]}, {x, −1, 1},
         PlotStyle → {{Red, Thickness[0.01]}, {Blue, Thickness[0.01]}},
         Epilog−> {Black, PointSize[0.04], Point/@ts}]
```



Якщо в цьому прикладі крок точок зменшити, то графіки будуть зливатися.

На ділянках між вузловими точками інтерполяційна функція представляється поліномами, степінь яких за замовчуванням дорівнює 3. Але цю степінь можна задавати за допомогою опції `InterpolationOrder`. У наступному коді на одному наборі точок ми створюємо чотири функції з порядком інтерполяції `0,1,2,3`, і будуємо їх графіки.

```
pnt = {{0,1},{1,2},{4,4},{3,5},{5,0},{6,3}};
Table[ToExpression["f" <> ToString[i]][x_] =
      Interpolation[pnt, InterpolationOrder → i][x], {i, 0, 3}];
Plot[{f0[x], f1[x], f2[x], f3[x]}, {x, 0, 6},
     PlotStyle → {{Red, Thickness[0.01]}, {Blue, Thickness[0.01]},
                  {Black, Thickness[0.01]}, {Green, Thickness[0.01]}},
     Epilog−> {Red, PointSize[0.04], Point/@pnt},
     GridLines → Automatic, PlotLegends → {"0", "1", "2", "3"}]
```



Для зображення «легенди» праворуч графіка використана опція `PlotLegends->{"0","1","2","3"}` з текстовими позначками. Текст завжди обмежується подвійними лапками. Для створення зі змінної текстового рядка застосовується функція `ToString[змінна]`. Для об'єднання рядків використовується операція <> (символи менше і більше). Для перетворення рядків на ідентифікатори (в нашому прикладі на функції `f0,f1,f2,f3`) використано функцію `ToExpression[рядок]`. Наприклад, наступний код створює функцію `f3[x]=x^3`, використовуючи замість трійки ідентифікатор ***i***, який дорівнює трьом.

```
i = 3;
ToExpression["f" <> ToString[i]][x_] = x^i;
```

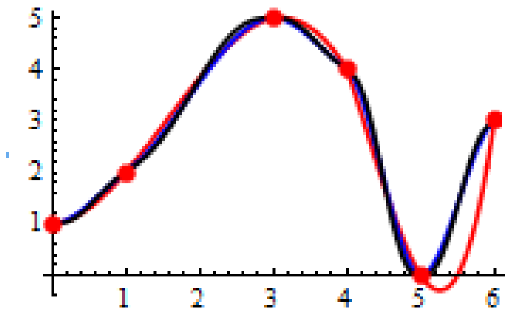
Повертаючись до графіка, бачимо, що нульовий порядок створює кусково-сталу інтерполяційну функцію, перший - неперервну кусково-лінійну (тобто ламану) і т.д. При чому для функцій `f2(x)` і `f3(x)` виконана інтерполяція Ерміта (для функцій `f0(x)` і `f1(x)` в точках стику значення похідних зайве).

У зв'язку зі сказаним, є формат виклику функції `Interpolation`, в якому можна задавати значення похідних у вузлових точках. Цей формат має вигляд
`Interpolation[{{{x₁},y₁,y₁',...},{{x₂},y₂,y₂',...},...}]`,
де x_i - абсциса *i*-ої точки, y_i - ордината цієї точки, y_i' – значення першої похідної і т.д.

В наступному прикладі ми будуємо три інтерполяційні функції третього порядку на одному і тому ж наборі точок $\{x_i, y_i\}$. Для функції `f3` ми не задаємо значення похідних, для функції `g3` - задаємо значення перших похідних, для функції `h3` - задаємо значення перших і других похідних у вузлових точках.

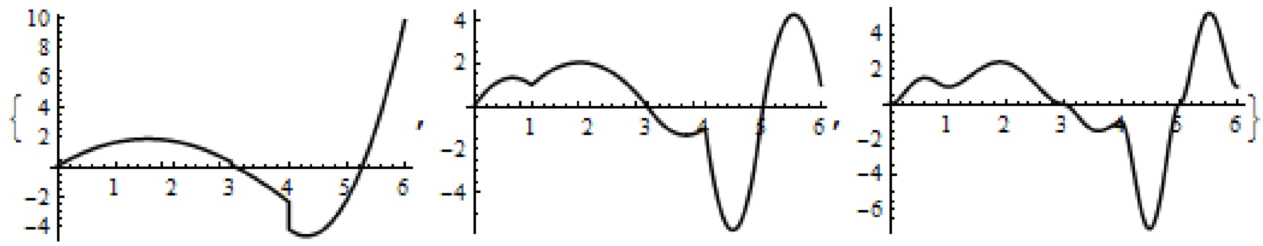
```
pnt0 = {{0,1},{1,2},{4,4},{3,5},{5,0},{6,3}};
pnt1 = {{{0},1,0},{{1},2,1},{{4},4,−1},{{3},5,0},{{5},0,0},{{6},3,1}};
```

```
pnt2 = {{{0}, 1, 0, 0}, {{1}, 2, 1, 0}, {{4}, 4, −1, 0}, {{3}, 5, 0, 0},
                                        {{5}, 0, 0, 0}, {{6}, 3, 1, 0}};
f3 = Interpolation[pnt0, InterpolationOrder → 3]
g3 = Interpolation[pnt1, InterpolationOrder → 3]
h3 = Interpolation[pnt2, InterpolationOrder → 3]
Plot[{f3[x], g3[x], h3[x]}, {x, 0, 6}, PlotStyle → {{Red, Thickness[0.01]},
                    {Blue, Thickness[0.01]}, {Black, Thickness[0.01]}},
     Epilog−> {Red, PointSize[0.04], Point/@pnt}]
```



Як бачимо, криві не дуже відрізняються. Однак, якщо побудувати графіки перших похідних цих функцій, то відмінність істотна.

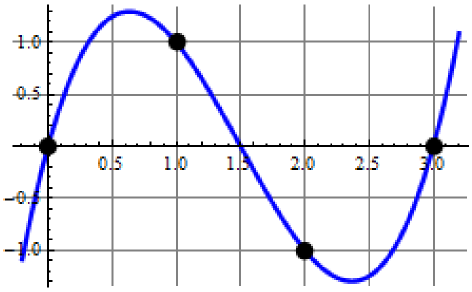
```
{Plot[Evaluate[D[f3[x], x]], {x, 0, 6}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.01]}],
 Plot[Evaluate[D[g3[x], x]], {x, 0, 6}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.01]}],
 Plot[Evaluate[D[h3[x], x]], {x, 0, 6}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.01]}]}
```



Похідна функції `f3` має розрив, функція g_3' неперервна, але має різкі злами, функція h_3' вже гладка.

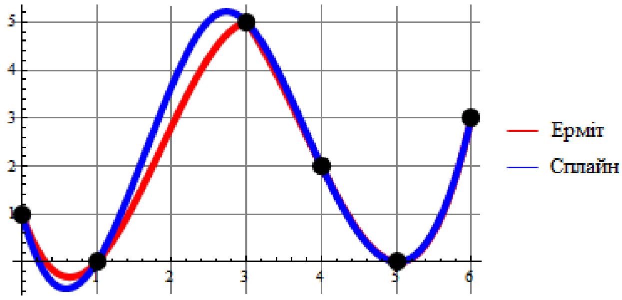
У функції `Interpolation` є опція `Method`, за допомогою якої обирають тип інтерполяції. Це може бути сплайн-інтерполяція або інтерполяція Ерміта. Зазвичай при сплайн-інтерполяції `n`-го порядку в точках стику сегментів виконується неперервність похідних до порядку `n−1` включно. Ось приклад побудови кубічного сплайна.

```
pnt0 = {{0, 0}, {1, 1}, {2, −1}, {3, 0}};
FS3 = Interpolation[pnt0, Method−> "Spline", InterpolationOrder → 3];
Plot[FS3[x], {x, −0.2, 3.2}, PlotStyle → {Blue, Thickness[0.01]},
                    Epilog → {Black, PointSize[0.04], Point/@pnt0},
                    GridLines → Automatic]
```



У наступному прикладі ми будуємо інтерполяційні функції, використовуючи обидва методи.

```
pnt0 = {{0, 1}, {1, 0}, {4, 2}, {3, 5}, {5, 0}, {6, 3}};
FH = Interpolation[pnt0, Method→"Hermite", InterpolationOrder−> 3];
FS3 = Interpolation[pnt0, Method−> "Spline", InterpolationOrder−> 3];
Plot[{FH[x], FS3[x]}, {x, 0, 6},
    PlotStyle → {{Thickness[0. 015], Red}, {Thickness[0. 015], Blue}},
    Epilog → {Black, PointSize[0. 04], Point/@pnt0},
    GridLines → Automatic, PlotLegends → {"Ерміт", "Сплайн"}]
```

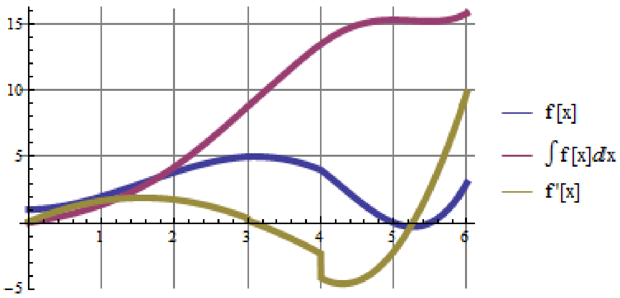


Використання сплайн-інтерполяції неможливо, коли у вузлах задаються значення похідних. Наприклад, наступний код виводить повідомлення про те, що сплайн-інтерполяція неможлива. Після цього автоматично виконується інтерполяція Ерміта.

```
pnt1 = {{{0}, 1, 0}, {{1}, 0, 1}, {{4}, 2, −1}, {{3}, 5, 0}, {{5}, 0, 0}, {{6}, 3, 1}};
FS = Interpolation[pnt1, Method → Spline];
FS[2. 5]
Interpolation::mspl: The Spline method could not be used because the data could not be coerced to machine real numbers
4.3125
```

Інтерполяційну функцію `InterpolatingFunction` можна диференціювати і інтегрувати. У наступному коді ми будуємо графіки інтерполяційної кривої, її первісної і похідної.

```
pnt0 = {{0, 1}, {1, 2}, {4, 4}, {3, 5}, {5, 0}, {6, 3}};
f = Interpolation[pnt0];
F[x_] = Integrate[f[x], x]
Plot[{f[x], F[x], f′[x]}, {x, 0, 6}, PlotStyle → {Thickness[0. 015]},
        PlotLegends → {"f[x]", "∫ f[x] ⅆx", "f′[x]"}, GridLines → Automatic]
```



Зробимо ще кілька зауважень про функції `Interpolation`.

Коли порядок інтерполяції установлюється за замовчанням, потрібно передавати не менше 4-х вузлів.

Interpolation[{{**0**, **1**}, {**1**, **2**}, {**4**, **4**}}];

`Interpolation::inhr: Requested order is too high; order has been reduced to {2}.`

Інтерполяційна функція завжди створюється неперервною, але необов'язково диференційовуваною.

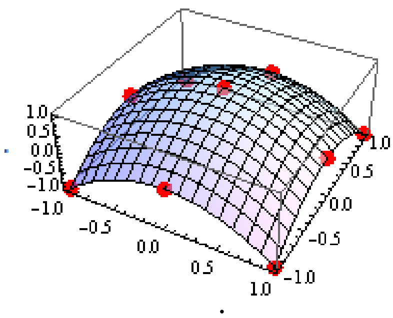
Значення функції можна задавати комплексними, але координати точок повинні бути дійсними.

Можна наближати багатовимірні дані. Наприклад, в двовимірному випадку формат виклику може бути наступним

`Interpolation[{{{x1,y1},z1},{{x2,y2},z2}},...}]`,

де $\{x_i, y_i\}$ – координати точки на площині, а z_i – значення функції в цій точці.

```
data = Flatten[Table[{{x, y}, 1 − x^2 − y^2}, {x, −1, 1, 1}, {y, −1, 1, 1}], 1];
surf = Interpolation[data, InterpolationOrder → 2]
Show[
    Plot3D[surf[x, y], {x, −1, 1}, {y, −1, 1}, PlotStyle → Opacity[.5]],
    Graphics3D[{Red, PointSize[0.05],
    Map[Point, Partition[Flatten[data], 3]]}]]
```



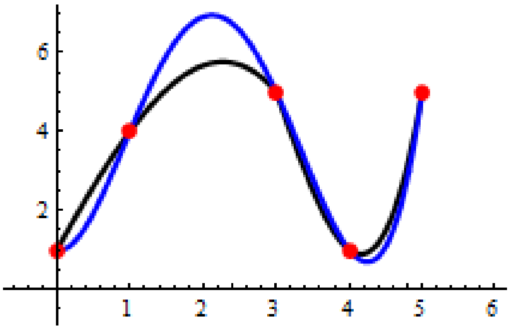
В завершенні наведемо приклад порівняння поліноміальної та кусково-поліноміальної інтерполяцій, які виконуються відповідно функціями `InterpolatingPolynomial` та `Interpolation`.

```
data = {{0, 1}, {1, 4}, {3, 5}, {4, 1}, {5, 5}};
f = Interpolation[data];
g[x_] = Collect[InterpolatingPolynomial[data, x], x]
```

$$1 - \frac{11\,x}{30} + \frac{683\,x^2}{120} - \frac{79\,x^3}{30} + \frac{37\,x^4}{120}$$

```
Show[
    Plot[{f[x], g[x]}, {x, 0, 5}, PlotStyle → {Black, Blue}],
```

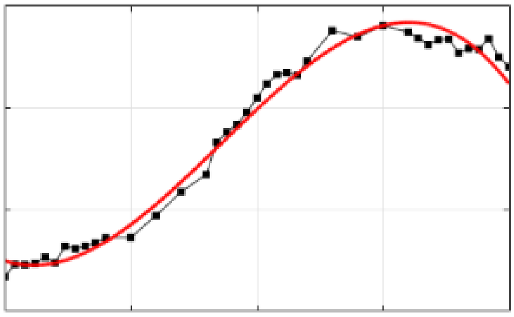
ListPlot[data, PlotStyle → {Red, PointSize[0.03]}],
PlotRange → {{−1, 6}, {−1, 7}}, AxesOrigin → {0, 0}]



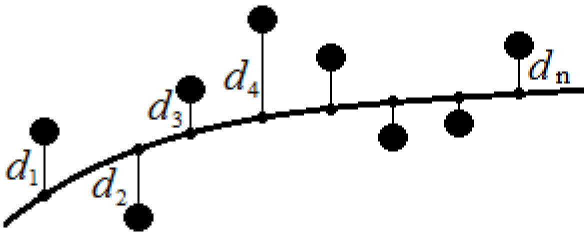
Перевага поліноміальної інтерполяції в тому, що одержується досить простий вираз. Її недоліком є те, що вона погано працює при великій кількості точок.

Б.5. Апроксимація.

Коли задано багато експериментальних точок, в значеннях яких є похибка, не має сенсу шукати функцію, графік якої точно проходить крізь ці точки. Часто бажано знайти параметри функції (наприклад, коефіцієнти полінома), яка несуттєво відхиляється від множини точок.



Але треба з'ясувати, що таке «відхил» кривої від множини точок. На наступному рисунку зображено точки, криву і відрізки, довжини яких представляють відхили кривої від відповідних точок.

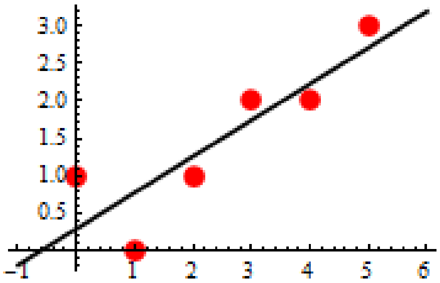


Якщо координати точок позначити через $(x_i, y_i)_{i=1}^{n}$, а шукану функцію через $f(x)$, то відстань d_i від графіка функції до відповідної точки (x_i, y_i) кривої обчислюється за формулою $d_i = y_i - f(x_i)$. Величини d_i можуть бути як додатними так і від'ємними і їх сума може дорівнювати нулю навіть тоді, коли графік не проходить крізь жодну точку. Тому в якості критерію відстані кривої від множини точок обирають корінь квадратний від суми квадратів цих чисел $\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}$. Цю величину часто називають відхилом (середньоквадратичним) кривої від множини точок. Вона дорівнює нулю лише тоді, коли крива проходить крізь всі точки. Якщо якийсь вид функції має першість, наприклад, бажано щоб функція $f(x)$ була кубічним поліномом, то треба серед усіх поліномів $a+bx+cx^2+dx^3$ обрати такий, відхил якого Δ від множини точок є мінімальним. Але тоді цей відхил буде залежати від коефіцієнтів a,b,c,d. Метод підбору параметрів функції $f(x)$ так, щоб відхил Δ від множини точок був мінімальним називається методом найменших квадратів і, звичайно, що в Mathematica є функція, яка його реалізує.

Функція `Fit` виконує наближення методом найменших квадратів множини точок за допомогою лінійної комбінації заданого набору функцій.

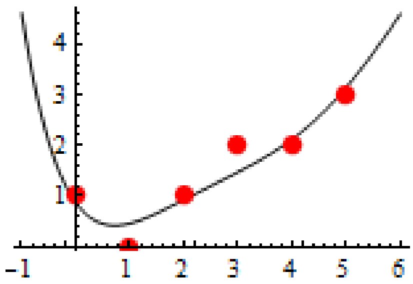
Наприклад, нехай задані точки і потрібно наблизити їх лінійною функцією. Це можна зробити наступним чином.

```
data = {{0, 1}, {1, 0}, {2, 1}, {3, 2}, {4, 2}, {5, 3}};
line = Fit[data, {1, x}, x]
0.28571429 + 0.48571429 x
Show[Plot[line, {x, −1, 6}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.01]}],
    Graphics[{Red, PointSize[0.05], Point[data]}]]
```



Тут для наближення ми використовували дві функції: 1 (одиниця) і x. Для наближення тих же даних можна використовувати інші функції або більший набір «пробних» функцій. У наступному прикладі для тих же точок ми використовуємо чотири функції: 1 (одиниця), x, $\sin x$ і e^{-x}.

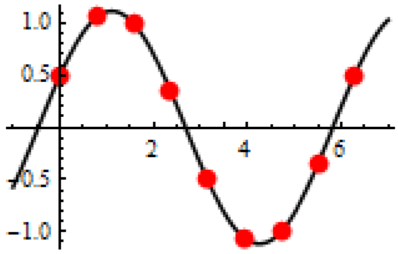
```
line = Fit[data, {1, x, Sin[x], Exp[−x]}, x]
Show[Plot[line, {x, −1, 6}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.01]}],
    Graphics[{Red, PointSize[0.05], Point[data]}],
    AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All]
-2.2151282+3.0802025 e^-x+1.1566815 x+0.45308887 Sin[x]
```



У наступному прикладі ми вибираємо дискретний набір точок на кривій $\sin x + \frac{1}{2}\cos x$ і апроксимуємо його функціями $\sin x$ і $\cos x$.

```
data = Table[{x, Sin[x] + 1/2 Cos[x]}, {x, 0, 2π, π/4}]
line = Chop[Fit[data, {1, x, Sin[x], Cos[x]}, x]]
Show[Plot[line, {x, −1, 7}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.01]}],
        Graphics[{Red, PointSize[0.05], Point[data]}],
        AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → All]
```

```
0.5 Cos[x]+1.0 Sin[x]
```



Після відкидання похибок обчислень функцією Chop ми отримали початковий вираз. Як бачимо, наближення дуже гарне.

Можна наближати множини точок в просторі за допомогою функцій двох змінних.

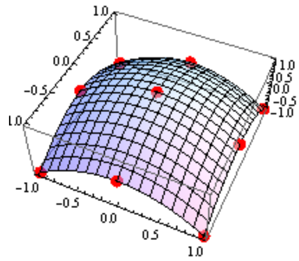
```
data = Flatten[Table[{x, y, 1 − x^2 − y^2}, {x, −1, 1, 1}, {y, −1, 1, 1}], 1]
```

$\{\{-1,-1,-1\}, \{-1,0,0\}, \{-1,1,-1\}, \{0,-1,0\}, \{0,0,1\}, \{0,1,0\}, \{1,-1,-1\}, \{1,0,0\}, \{1,1,-1\}\}$

```
surf = Chop[Fit[data, {1, x, y, x^2, y^2, xy}, {x, y}]]
```

$1.-1.0\ x^2-1.0\ y^2$

```
Show[Plot3D[surf, {x, −1, 1}, {y, −1, 1}, PlotStyle → Opacity[.5]],
        Graphics3D[{Red, PointSize[0.05], Map[Point, data]}]]
```



З іншими функціями системи, близькими за змістом до розглянутих, ви можете познайомитися по довідковій системі.

Література

1. http://geometry.karazin.ua/~dolya/documents: Доля П.Г., Антоненко Г.М. Розв'язання задач вищої математики на комп'ютері. 2017. – 127 с.