Контрольна робота
з вищої математики
студента групи КС-21
Безрука Юрія
Варіант № 2

1) $y' ctg x + y = 2$

$\frac{dy}{dx} ctg x + y = 2 \quad | \cdot dx$

$dy\, ctg x + (y-2)dx = 0 \quad | : ctg x (y-2) \neq 0$

$\frac{dy}{y-2} = -\frac{dx}{ctg x}$

$\int \frac{dy}{y-2} = -\int \frac{dx}{ctg x}$

$\int \frac{dy}{y-2} = -\int tg x\, dx$

$\ln|y-2| = -(-\ln|\cos x|) + C$

$\ln|y-2| = \ln|\cos x| + C$

$e^{\ln|y-2|} = e^{\ln|\cos x| + C}$

$|y-2| = |\cos x| \cdot e^C$

при $C_1 = \pm e^C$

$y - 2 = C_1 \cos x$

$y = C_1 \cos x + 2$

Потеряно решение при $y = 2$ (в процессе деления), но оно является частным случаем $y = C_1 \cos x + 2$ при $C_1 = 0$

2) $y' = \dfrac{x+3y}{x}$

$y' = 1 + 3\dfrac{y}{x}$ $\quad\left|\text{Замена } t = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t'x + t\right|$

$t'x + t = 1 + 3t$

$x\dfrac{dt}{dx} = 1 + 2t$

$x\,dt = (1+2t)dx \;\Big|: x(1+2t) \neq 0$

$\dfrac{dt}{1+2t} = \dfrac{dx}{x}$

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{dt}{\frac{1}{2}+t} = \int \dfrac{dx}{x}$

$\dfrac{1}{2}\ln\left|t+\tfrac{1}{2}\right| = \ln|x| + C$

$\ln\left|t+\tfrac{1}{2}\right| = 2\ln|x| + 2C$

$\ln\left|t+\tfrac{1}{2}\right| = \ln x^2 + 2C$

$\left|t+\tfrac{1}{2}\right| = x^2 \cdot e^{2C}$

при $C_1 = \pm e^{2C}$

$t + \tfrac{1}{2} = C_1x^2$

$t = C_1x^2 - \tfrac{1}{2}$

$\dfrac{y}{x} = C_1x^2 - \tfrac{1}{2}$

$y = C_1x^3 - \dfrac{x}{2}$

$x(1+2t) = 0$ при $t = -\dfrac{1}{2}$, что является частным случаем $t = C_1x^2 - \dfrac{1}{2}$ при $C_1 = 0$

3) $y' + y\,ctg x = \frac{1}{\sin x}$

$y = uv \quad y' = u'v + uv'$; $v = v(x)$, $u = u(x)$

$u'v + uv' + uv\,ctg x = \frac{1}{\sin x}$

$u'v + u(v' + v\,ctg x) = \frac{1}{\sin x}$

Т.к. функцию v можем выбрать произвольно, подбираем её так, что бы второе слагаемое равнялось нулю.

$v' + v\,ctg x = 0$

$dv + v\,ctg x\,dx = 0 \quad |:v \neq 0$

$\frac{dv}{v} = -ctg x\,dx$

$\int \frac{dv}{v} = -\int ctg x\,dx$

$\ln|v| = -\ln|\sin x| + C$, причем, т.к v - произвольная, можем взять $C=0$, тогда:

$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{\sin x}\right|$

$v = \frac{1}{\sin x}$

Отсюда:

$u' \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} \quad | \cdot \sin x$

$du = dx \qquad u = x + C$

$\cancel{\frac{x^2}{2} + C}$

Тогда: $\underline{y = uv = \frac{x+C}{\sin x}}$

Также частным решением является $y=0$

4) $y' + \frac{2y}{x} = 2x\sqrt{y} \quad \Big| : \sqrt{y}$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{y}}{x} = 2x \quad \Bigg| \begin{array}{l} z = \sqrt{y} \\ y = z^2 \end{array} \quad y' = 2z \cdot z'$$

$$\frac{2z \cdot z'}{z} + \frac{2z}{x} = 2x \quad \Big| : 2$$

$$z' + \frac{z}{x} = x \quad \Big| z = uv \quad z' = u'v + vu'$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x$$

Подберём функцию V; чтобы слагаемое обнулилось

$$v' + \frac{v}{x} = 0$$

$$dv = -v\frac{dx}{x} \quad \Big| : v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = \ln|1/x| \quad (C = 0)$$

$$v = \frac{1}{x}$$

Тогда: $u' \frac{1}{x} = x$

$$u' = x^2$$

$$du = x^2 dx$$

$$u = \frac{x^3}{3} + C$$

$$z = u \cdot v = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$$

$$\underline{y = z^2 = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}\right)^2}$$

Частное решение $y = 0$

5) $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

$\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x}$ $(y^3 + \ln x)'_x = \frac{1}{x}$, т.е это у-е

в полных дифференциалах

$F(x,y)$ - ?, если $F'_x = y/x$; $F'_y = y^3 + \ln x$

$F = \int \frac{y}{x}dx = y\ln x + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ - произвольная ф-я от y

$(y\ln x + \varphi(y))'_y = y^3 + \ln x$

$\ln x + \varphi'(y) = y^3 + \ln x$

$\varphi'(y) = y^3 \Rightarrow \varphi(y) = \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} + C$

Значит, $F = y\ln x + y^4/4 + C$

Тогда общее решение уравнения:

$y\ln(x) + y^4/4 = C$