

Лекція 6

Осцилятор Дуффінга

Осцилятор Дуффінга або осцилятор з кубічною нелінійністю є однією з найбільш поширених моделей теорії коливань. Рівняння осцилятора має вид:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0 \quad (1)$$

Його можна отримати, розглядаючи, наприклад, коливання математичного маятника при невеликих кутах відхилення (рис. 1а), коливання вантажу на пружині з нелінійною повертаючою силою, розташованого на плоскій горизонтальній поверхні (рис. 1б). Це рівняння також можна отримати при описі руху частки в потенціалі з двох ям (рис. 1с). Розглянемо перераховані приклади більш детально.

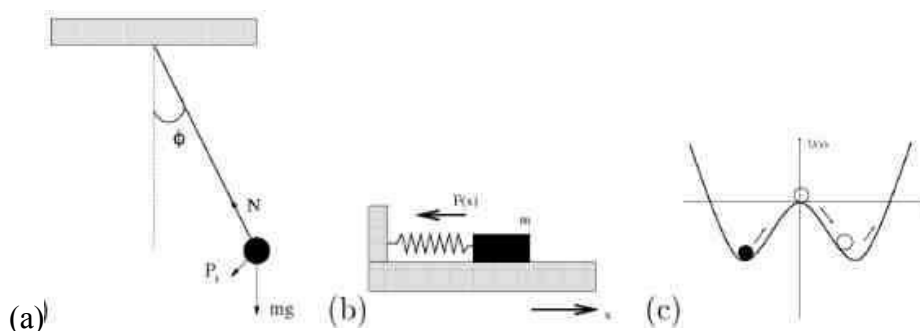


Рис. 1. Приклади коливальних систем, що призводять до рівняння Дуффінга:

- (а) – математичний маятник при невеликих кутах відхилення ($\sin \varphi \approx \varphi - \varphi^3/6$),
- (б) – вантаж на пружині з нелінійною жорсткістю ($F = -k_0 x - k_1 x^3$), (с) – рух частинки в потенціалі з двох ям, який визначається формулою $V(x) = ax^2/2 + bx^4/2$ (сила, що діє на частинку: $F = -\partial V(x)/\partial x$).

Рівняння нелінійного математичного маятника:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

де $\omega_0^2 = g/l$, g – прискорення вільного падіння; l – довжина нитки.

Рівняння руху вантажу і частки в потенційній ямі:

$$m\ddot{x} = -\delta\dot{x} - \frac{\partial V(x)}{\partial x}, \quad (3)$$

де δ – коефіцієнт опору.

Почнемо дослідження осцилятора Дуффінга, з вивчення станів рівноваги - їх пошуку і аналізу на стійкість в залежності від параметрів системи. Перепишемо рівняння осцилятора (1) у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \gamma x^3. \end{cases} \quad (4)$$

Ця система двох диференціальних рівнянь першого порядку еквівалентна рівнянню (1). Тут $x(t)$ і $y(t)$ – динамічні змінні, які однозначно і повністю задають стан осцилятора в момент часу t . Отже, розмірність фазового простору осцилятора Дуффінга становить $N=2$, а саме фазовий простір являє собою площину. Число ступенів свободи системи дорівнює одиниці ($N/2=1$).

На фазовій площині (x, y) є точки рівноваги (звані також особливими або нерухомими точками), які визначаються умовою

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

і, отже, є рішенням системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} y = 0, \\ \alpha y + \beta x + \gamma x^3 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

З аналізу (6) видно, що в залежності від значень параметрів α , β , і γ на фазовій площині існує або одна точка рівноваги

$$P_0 : \{x = 0, y = 0\}, \quad (7)$$

або три точки рівноваги

$$\begin{cases} P_0 : \{x=0, y=0\}, \\ P_1 : \left\{x=\sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}, y=0\right\}, \\ P_2 : \left\{x=-\sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}, y=0\right\}. \end{cases} \quad (8)$$

Очевидно, що одна особлива точка P_0 існує, якщо значення параметрів β і γ одного знаку, а три - якщо значення параметрів β і γ різних знаків. Всі три точки лежать в фазовому просторі на осі OX . Точки P_1 і розташовуються симетрично один одному щодо осі OY . При кінцевому, фіксованому значенні і при прагненні значень параметра γ до нуля (при переході від нелінійного осцилятора до лінійного), точки рівноваги і P_2 розбігаються один від одного по осі OX до $+\infty$ і $-\infty$.

Досліджуємо стійкість станів рівноваги в залежності від параметрів осцилятора Дуффінга. Характер стійкості визначається поведінкою досліджуваної динамічної системи, що лінеаризована в малій околиці нерухомої точки. Вид розв'язків лінеаризованої системи визначають коріння характеристичного рівняння:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (9)$$

Тут введено такі позначення: $f_1(x, y) = y$, $f_2(x, y) = -\alpha y - \beta x - \gamma x^3$, \bar{x} і \bar{y} позначають координати нерухомих точок, $\frac{\partial f_{1,2}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}$ і $\frac{\partial f_{1,2}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}$ позначають відповідну приватну похідну, обчислену в нерухому точку з координатами: $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$.

Характеристичне рівняння (9) можна переписати у вигляді

$$\lambda^2 - S\lambda + J = 0, \quad (10)$$

де

$$S = \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}, \quad (11)$$

$$J = \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} - \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}. \quad (12)$$

Коріння характеристичного рівняння мають такий вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}. \quad (13)$$

Запишемо S і J в більш конкретній формі через параметри осцилятора Дуффінга

$$S = \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} = -\alpha, \quad (14)$$

$$J = \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} - \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} = \beta + 3\gamma\bar{x}^2. \quad (15)$$

Тоді

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta - 3\gamma\bar{x}^2}. \quad (16)$$

Запишемо власні значення $\lambda_{1,2}$ для кожної з трьох точок рівноваги. Для точки P_0 (координата $x = \bar{x} = 0$) виходять власні значення

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}. \quad (17)$$

Для точки P_1 (координата $x = \bar{x} = \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}$) і точки P_2 (координата $x = \bar{x} = -\sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}$) виходить

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + 2\beta}. \quad (18)$$

Випадок 1: $\gamma < 0$

В цьому випадку, якщо $\beta < 0$, то в фазовому просторі існує тільки одна точка рівноваги P_0 з координатами $x = \bar{x} = 0$. Її власні значення $\lambda_{1,2}$ визначаються виразом (17). Видно, що незалежно від параметра α (і при позитивних, і при негативних значеннях, і в разі консервативного осцилятора, коли параметр дисипації $\alpha = 0$) власні значення $\lambda_{1,2}$ є дійсними і різних знаків, тобто особлива точка P_0 є сідлом.

Якщо $\beta > 0$, то в фазовому просторі існує три точки рівноваги P_0 , P_1 , P_2 , координати яких задані виразом (8). Особлива точка P_0 на початку координат характеризується власними значеннями, заданими виразом (17). Якщо $-2\sqrt{\beta} < \alpha < 2\sqrt{\beta}$, то власні значення $\lambda_{1,2}$ є комплексно-сполученими. Вони мають позитивну дійсну частину при $-2\sqrt{\beta} < \alpha < 0$ і негативну дійсну частину при $0 < \alpha < 2\sqrt{\beta}$. Тобто особлива точка на початку координат являє собою нестійкий і стійкий фокус, відповідно. При $\alpha > 2\sqrt{\beta}$ власні значення є дійсними і негативними, тобто нерухома точка P_0 стає стійким вузлом. При $\alpha < -2\sqrt{\beta}$ власні значення є дійсними і позитивними, тобто нерухома точка P_0 перетворюється в нестійкий вузол.

Особливі точки симетричні одна одній і ведуть себе однаково. Їх власні значення $\lambda_{1,2}$ задані виразом (18), з якого видно, що при будь-яких власні значення залишаються дійсними і різних знаків. Таким чином, нерухомі точки $P_{1,2}$ є сідлами.

Случай 2: $\gamma > 0$

В цьому випадку в фазовому просторі існує одна точка рівноваги на початку координат, якщо $\beta > 0$. Вона є нестійким вузлом при $\alpha < -2\sqrt{\beta}$. Якщо $-2\sqrt{\beta} < \alpha < 0$, то особлива точка P_0 являє собою нестійкий фокус. Вона перетворюється в стійкий фокус при позитивних значеннях параметра дисипації $0 < \alpha < 2\sqrt{\beta}$. При великих значеннях параметра дисипації $\alpha > 2\sqrt{\beta}$ особлива точка P_0 є стійким вузлом.

Якщо $\beta < 0$, то в фазовому просторі існує три точки рівноваги P_0 , P_1 , P_2 . Особлива точка P_0 при будь-яких значеннях параметра дисипації α залишається сідлом. Особливі точки P_1 і P_2 є нестійкими вузлами при $\alpha < -2\sqrt{2|\beta|}$. При $-2\sqrt{2|\beta|} < \alpha < 0$ вони перетворюються в нестійкі фокуси. Потім стають стійкими фокусами при $0 < \alpha < 2\sqrt{2|\beta|}$, і далі - стійкими вузлами, коли $\alpha > 2\sqrt{2|\beta|}$.

Консервативний автономний осцилятор Дуффінга

В узагальненому вигляді рівняння нелінійного, консервативного, автономного осцилятора можна записати в такий спосіб

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (19)$$

де $f(x)$ – повертає сила діюча на систему при відхиленні від стану рівноваги. Це ж рівняння можна переписати у вигляді:

$$\ddot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = 0. \quad (20)$$

Тут $U(x)$ – потенційна енергія системи. Потенційна енергія і повертає сила, пов'язані співвідношенням

$$U(x) = \int f(x) dx. \quad (21)$$

Рівняння нелінійного осцилятора можна проінтегрувати. Введемо змінну $\dot{x} = v$ і перепишемо рівняння осцилятора

$$\frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dU(x)}{dx} = 0, \quad (22)$$

$$v \frac{dv}{dx} + \frac{dU(x)}{dx} = 0. \quad (23)$$

В результаті інтегрування отримуємо

$$\frac{v^2}{2} + U(x) = E. \quad (24)$$

Це співвідношення відображає закон збереження енергії в консервативному нелінійному осциляторі. Тут E - повна енергія, $U(x)$ - потенційна енергія нелінійного осцилятора.

Виражаючи v від x , запишемо рівняння траєкторії на фазовій площині

$$v(x) = \sqrt{2[E - U(x)]}. \quad (25)$$

Знаючи вид потенційної функції, можна побудувати фазовий портрет нелінійного осцилятора. Знайдемо рівняння для фазових портретів для консервативного, автоавтономного осцилятора Дуффінга

$$\ddot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0. \quad (26)$$

Рівняння осцилятора можна записати як

$$\ddot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = 0,$$

тоді

$$U(x) = \int (\alpha x + \beta x^3) dx. \quad (27)$$

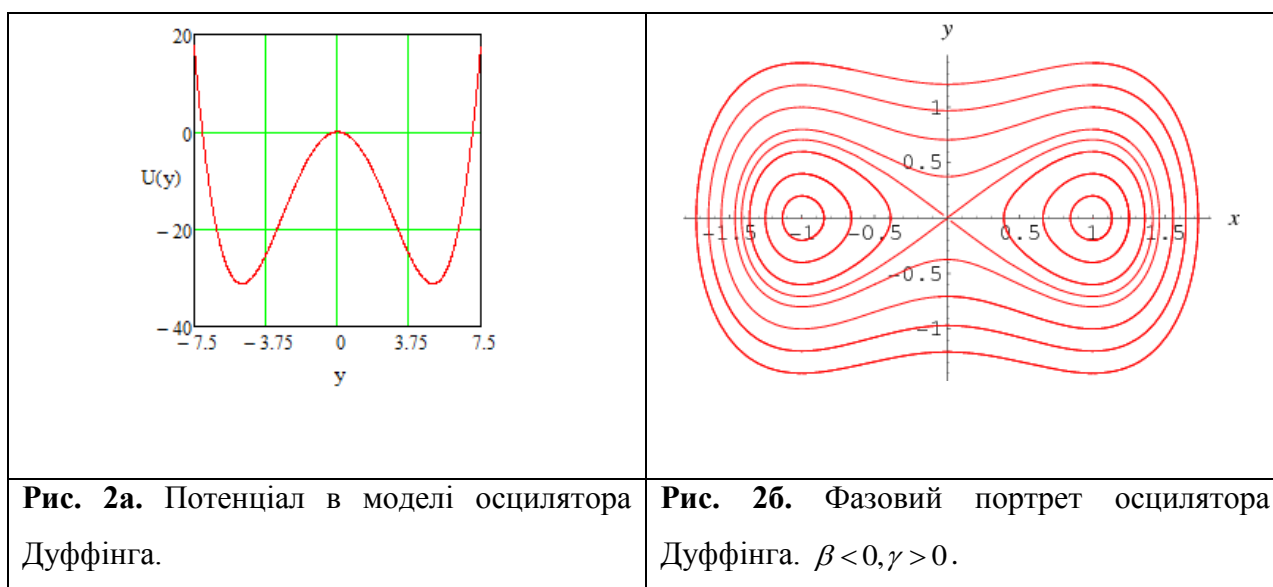
Таким чином, отримуємо в явному вигляді потенційну функцію

$$U(x) = \frac{\beta x^2}{2} + \frac{\gamma x^4}{4} + C. \quad (28)$$

По виду потенційної функції можна легко побудувати характерний вид фазових портретів. Максимуми і мінімуми графіків потенційної функції відповідають точкам рівноваги, причому мінімуми відповідають станам рівноваги типу: центр, а максимуми – сідловим станам рівноваги. Сідла і їх сепаратриси поділяють в фазовому просторі області з різним поведінкою. Переконайтеся в цьому, а так само виконати побудова фазових портретів по виду потенційної функції можна і більш строгим чином. Використовуючи вираз (25), запишемо рівняння фазових траєкторій для консервативного осцилятора Дуффінга

$$v(x) = \sqrt{2[E - U(x)]} = \sqrt{2E - 2C - \beta x^2 - \frac{\gamma x^4}{2}}. \quad (29)$$

Ставлячи конкретні значення параметрів коливальної системи (β, γ) і початкові умови у вигляді повної збереженої енергії і потенційної енергії, можна на фазовій площині побудувати сімейства траєкторій.



Явища неізохронності і ангармонічності в осциляторі Дуффінга.

Одними з найпростіших, типових нелінійних явищ, які спостерігаються в системах самої різної природи, є **неізохронність, ангармонічність і мультістабільність**.

Під **неізохронністю** розуміють залежність частоти (періоду) власних коливань від їх амплітуди (інтенсивності). Це явище демонструє, наприклад, м'ячик, що скаче: в залежності від того, з якої висоти скидається м'ячик, період його підскоків буде різним, воно ж спостерігається при русі планет навколо Сонця, що відбивається в законі Кеплера.

Явище **ангармонічності** проявляється в зміні форми коливань зі зростанням їх амплітуди: для малої амплітуди коливання залишаються майже гармонійними, для більшої – їх форма спотворюється. При **спотворенні** форми коливань в спектрі відбувається генерації нових гармонік на частотах, кратних власній частоті коливальної системи. Явище **ангармонічності** легко виявити, спостерігаючи за коливаннями *фізичного маятника*. При малих відхиленнях від стану рівноваги маятник близький до гармонійного осцилятора і його коливання близькі до синусоїдальним. Зі збільшенням амплітуди нелінійність веде до **спотворення** форми коливань: тимчасова реалізація починає більше і більше відрізнятися від синусоїди. Явище **ангармонічності** і полягає у відході тимчасової реалізації від гармонійної форми з ростом інтенсивності коливань. В спектральному поданні це відповідає появі додаткових гармонік і збільшення їх інтенсивності.

Перш ніж дати визначення поняттю «*мультистабільність*» введемо поняття *аттрактора*. Слово "*аттрактор*" (буквально: "*той що притягує*") набуло поширення як математичний термін з початку 70-х років. Під цим терміном розуміють множину в фазовому просторі, яка притягує до себе траєкторії системи (всі траєкторії або їх частину). Прикладами *аттракторів* можуть бути стійкий фокус і стійкий граничний цикл. «*Репеллерами*» називається множина точок, що відштовхуває. Такими властивостями володіють, наприклад, нестійкий фокус і нестійкий граничний цикл. При $t \rightarrow \infty$ фазові траєкторії все ближче наближаються до *аттрактору*. *Репеллер* можна уявити як такий *аттрактор*, до якого прямують фазові траєкторії при $t \rightarrow -\infty$.

Явище *мультистабільності*, також як *неізохронності* і *ангармонічності*, може спостерігатися тільки в нелінійних системах. Полягає воно в тому, що в залежності від вибору початкових умов при постійних значеннях керуючих параметрів динамічна система може демонструвати різні режими. Це відповідає тому, що в її фазовому просторі при фіксованих значеннях параметрів можуть співіснувати кілька *аттракторів*. Система, в фазовому просторі якої співіснує кілька стійких станів, називається *мультистабільною*. У найпростішому випадку, коли співіснує лише то два стійких стану, система називається *бістабільною*. Безліч значень початкових умов, при яких спостерігається один і той же *аттрактор*, називається *басейном цього аттрактора*. Приклади басейнів тяжіння будуть приведені нижче.

Дослідження неізохронності в осциляторі Дуффінга

Розглянемо випадок консервативного осцилятора з кубічної нелінійністю

$$\ddot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0. \quad (30)$$

В осциляторі Дуффінга в даному випадку параметр дисипації $\alpha = 0$ параметр β характеризує власну частоту коливань, і параметр γ є параметром нелінійності.

Виявити аналітичними методами залежність частоти коливань від амплітуди можна тільки для слабо нелінійного осцилятора, коли параметр є малою величиною, тобто $\gamma \ll 1$. Для слабо нелінійних або, так званих, квазігармонічних систем, існують методи, за допомогою яких можна отримати наближені рішення системи. Одним з таких методів є метод повільно змінних комплексних амплітуд (або повільно мінливих коефіцієнтів, або *метод Ван дер Поля*). Даний метод був запропонований Ван дер

Поле і аналогічний одному з методів Лагранжа. Для визначення наближеного рішення, справжнє рішення представляється у вигляді функції, що виражає гармонійні коливання

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (31)$$

з повільно змінними амплітудою a і фазою φ . Ці величини визначаються з диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a), \quad (32)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon B(a), \quad (33)$$

де $A(a)$ і $B(a)$ - деякі функції амплітуди.

Для консервативного і слабо нелінійного ($|\gamma| \ll 1$) осцилятора, Дуффінга (30) будемо шукати розв'язок у виді

$$x = \operatorname{Re} \left[a(t) \exp(i\sqrt{\beta}t) \right], \quad (34)$$

де $a(t)$ - комплексна амплітуда. Позначив власну частоту $\sqrt{\beta}$ через ω_0 ($\beta = \omega_0^2$), і враховуючи, що дійсна частина комплексної величини пов'язана, з самої величиною співвідношенням

$$\operatorname{Re}[C] = \frac{C + C^*}{2}, \quad (35)$$

перепишемо рішення в наступному виді

$$x = \operatorname{Re} \left[a(t) \exp(i\omega_0 t) \right] = \frac{a(t) \exp(i\omega_0 t) + a^*(t) \exp(-i\omega_0 t)}{2}. \quad (36)$$

Оскільки ми ввели нову невідому функцію $a(t)$, то можемо ввести довільне умова. Буде потрібно, щоб функція $a(t)$ задовольняла умові

$$\dot{a}(t) \exp(i\omega_0 t) + \dot{a}^*(t) \exp(-i\omega_0 t) = 0. \quad (37)$$

Обчислимо першу і другу похідну $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$. Підставами вираження для $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ в рівняння консервативного осцилятора Дуффінга (30) і врахуємо додаткову умову (37).

$$i\omega_0 \dot{a} \exp(i\omega_0 t) + \frac{\gamma}{8} [a \exp(i\omega_0 t) + a^* \exp(-i\omega_0 t)]^3 = 0. \quad (38)$$

Рівняння (38) можна перетворити до виду

$$i\omega_0 \dot{a} + \frac{\gamma}{8} [a^3(t) \exp(2i\omega_0 t) + 3|a|^2 a + 3|a|^2 a^* \exp(-2i\omega_0 t) + (a^*)^3 \exp(-4i\omega_0 t)] = 0. \quad (39)$$

Усереднити всі члени отриманого рівняння за період $2\pi/\omega_0$. При цьому будемо враховувати, що амплітуда $a(t)$ і її похідні є повільно мінливими величинами, тобто за період вони практично не змінюються, і в даному наближеному вирішенні при усередненні за період вважаємо їх постійними:

$$\langle i\omega_0 \dot{a} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T i\omega_0 \dot{a} dt = i\omega_0 \dot{a}, \quad (40)$$

$$\langle a^3 \exp(2i\omega_0 t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T a^3 \exp(2i\omega_0 t) dt = 0. \quad (41)$$

Тут кутові дужки $\langle \dots \rangle$ означають усереднення за період $T = 2\pi/\omega_0$. Добре видно, що після усереднення за період виходить наступне рівняння для повільно змінюється комплексної амплітуди:

$$\dot{a} = i \frac{3\gamma}{8\omega_0} |a|^2 a. \quad (42)$$

комплексну амплітуду $a(t)$ можна представити у вигляді

$$a(t) = \rho(t) \exp[i\phi(t)], \quad (43)$$

де $\rho(t)$, $\phi(t)$ – дійсні величини, які являють собою амплітуду і фазу коливань, відповідно. Підставляючи (43) в рівняння (42) і виділяючи окремо дійсну і уявну частину рівняння, отримаємо наступну систему рівнянь для амплітуди і фази

$$\begin{cases} \dot{\rho}(t) = 0, \\ \dot{\phi}(t) = \frac{3\gamma}{8\omega_0} \rho^2(t). \end{cases} \quad (44)$$

Тепер можемо записати рішення рівняння консервативного, слабо нелінійного осцилятора Дуффінга:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}[a(t)\exp(i\omega_0 t)] = \operatorname{Re}[\rho(t)\exp(i\phi(t))\exp(i\omega_0 t)] = \\ &= \operatorname{Re}\left[\rho_0 \exp\left(i\frac{3\gamma}{8\omega_0} \rho_0^2 t\right) \exp(i\omega_0 t)\right] = \rho_0 \cos\left[\left(\omega_0 + \frac{3\gamma}{8\omega_0} \rho_0^2\right)t\right]. \end{aligned} \quad (45)$$

Видно, що частота коливань осцилятора Дуффінга залежить від його амплітуди. При збільшенні амплітуди коливань частота або наростає, або убиває, що залежить від знака параметра нелінійності γ .

Дослідження ангармонічності

Методом повільно мінливих комплексних амплітуд було отримано наближене рішення для автономного, консервативного осцилятора Дуффінга, яке описує ефект неізохронності і в той же час ніяк не відображає ефект ангармонічності, властивий для всіх нелінійних систем. Проведемо наближене рішення рівняння консервативного осцилятора Дуффінга іншим аналітичним методом – методом **Ліндштедта-Пуанкаре**. Даний метод дозволяє отримати наближене рішення, яке описує і ефект неізохронності, і ефект ангармонічності в осциляторі Дуффінга.

Будемо вважати, що в осциляторі Дуффінга власна частота дорівнює одиниці ($\beta = \omega_0^2 = 1$)

$$\ddot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0. \quad (46)$$

Перепишемо рівняння осцилятора в новій змінній за часом $\tau = \omega t$ (тут ми введемо в розгляд нову частоту ω):

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x + \gamma x^3 = 0. \quad (47)$$

Будемо використовувати метод Ліндштедта-Пуанкаре і шукати рішення у виді ряду за степенями малого параметра γ як для змінної x , так і для частоти ω :

$$x = x_0 + \gamma x_1 + \gamma^2 x_2 + \dots \quad (48)$$

$$\omega = 1 + \gamma \omega_1 + \gamma^2 \omega_2 + \dots \quad (49)$$

При $\gamma \rightarrow 0$ частота ω прямує до частоти власних (або лінійних) коливань $\sqrt{\beta} = \omega_0 = 1$.

У виразах (48) - (49) обмежимося складовою частиною до першого порядку малості включно, і підставимо їх у рівняння (47). В результаті рівняння (47) набуде вигляду

$$\ddot{x}_0 + 2\gamma\omega_1\ddot{x}_0 + \gamma\ddot{x}_1 + x_0 + \gamma x_1 + O(\gamma^2) = 0. \quad (50)$$

Прирівнюємо складові однакового порядку малості:

$$\begin{cases} \gamma^0: & \ddot{x}_0 + x_0 = 0, \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{cases} \gamma^1: & 2\omega_1\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1 + x_1 + x_0^3 = 0 \rightarrow \ddot{x}_1 + x_1 = -2\omega_1\ddot{x}_0 - x_0^3 = 0. \end{cases} \quad (52)$$

Розв'язком рівняння (51) є

$$x_0 = a \cos(\tau + \phi) = a \cos(\omega t + \phi). \quad (53)$$

Підставимо (53) в рівняння (52):

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 2\omega_1 a \cos(\tau + \phi) - a^3 \cos^3(\tau + \phi), \quad (54)$$

або

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 2\omega_1 a \cos(\tau + \phi) - a^3 \left[\frac{3}{4} \cos(\tau + \phi) + \frac{1}{4} \cos 3(\tau + \phi) \right]. \quad (55)$$

До *секулярного зростання* (тобто, лінійного зростання) $x_1(\tau)$ призводять складові пропорційні $\cos(\tau + \phi)$ (при резонансному гармонійному впливі на гармонійний осцилятор відбувається розгойдування коливань до нескінченності, при $\tau \rightarrow \infty$ величина $x_1(\tau) \rightarrow \infty$). Щоб усунути такий резонансний вплив, підберемо відповідним чином малу добавку до частоти. Саме, згрупуємо члени в (55), що містять $\cos(\tau + \phi)$ і прирівняємо вийшов при $\cos(\tau + \phi)$ множитель до нуля:

$$2\omega_1 a - \frac{3a^3}{4} = 0 \rightarrow \omega_1 = \frac{3a^2}{8}. \quad (56)$$

Тоді рівняння для першого наближення (55) набуде виду

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{a^3}{4} \cos 3(\tau + \phi). \quad (57)$$

Рішення рівняння (57) шукаємо у вигляді

$$x_1 = C_0 \cos 3(\tau + \phi). \quad (58)$$

Щоб визначити константу C_0 , підставимо це в рівняння (57). В результаті отримаємо

$$C_0 = \frac{a^3}{32}.$$

Вираз для $x_1(t)$ набуде вид

$$x_1 = \frac{a^3}{32} \cos 3(\tau + \phi). \quad (58)$$

В результаті отримуємо наступне наближене рішення для $x(t)$ з точністю до величин другого порядку малості по параметру γ :

$$x(t) = a \cos(\tau + \phi) + \gamma \frac{a^3}{32} \cos 3(\tau + \phi) + O(\gamma^2), \quad (59)$$

де

$$\omega = 1 + \gamma \frac{3a^2}{8} + O(\gamma^2). \quad (60)$$

Отриманий даним методом результат показує, що **кубічна нелінійність** призводить до ангармонічності і неізохронністю коливань в консервативному осциляторі. Крім основної частоти з'явилася третя гармоніка. Частота коливань залежить від їх амплітуди, причому, якщо $\gamma > 0$, то частота зростає при збільшенні амплітуди коливань; якщо $\gamma < 0$, то частота зменшується.

Таким чином, ми виявили, що вже при слабкій нелінійності коливання не є чисто синусоїдальними, в них присутні вищі гармоніки. Причому, в наближенні до другого порядку в осциляторі з кубічної нелінійністю генерується третя гармоніка. Амплітуда гармоніки набагато менше амплітуди основної складової коливань.

Явище нелінійного резонансу в осциляторі Дуффінга.

При впливі зовнішньої періодичної сили на лінійний осцилятор спостерігається, по суті, єдиний основний ефект – лінійний резонанс. При наближенні частоти зовнішнього гармонійного впливу постійної амплітуди до власної частоти лінійного осцилятора, амплітуда вимушених коливань зростає. У осциляторе без дисипації вона прямує до нескінченності, коли частота впливу збігається з власною частотою. У осциляторе з втратами амплітуда вимушених коливань досягає деякого кінцевого максимального значення. При збільшенні розладу між частотами амплітуда сталих коливань зменшується. Залежність амплітуди вимушених коливань від розладу між частотою зовнішнього впливу і власною частотою осцилятора характеризують резонансні криві. (Іншими словами, резонансна крива - це графік залежності амплітуди сталих коливань від розладу). Чим менше втрати в осциляторе, тим гостріше і вище резонансна крива. Що зміниться, коли осцилятор стає нелінійним? Або, що зміниться в разі, коли в осциляторе, частота коливань залежить від амплітуди?

Нехай на нелінійний осцилятор, що здійснює малі коливання з певною частотою, діє зовнішній вплив тієї ж частоти. Тоді система отримує енергію від зовнішнього джерела, і малі спочатку коливання наростають. Однак, оскільки осцилятор неізохронністю (частота нелінійного осцилятора залежить від амплітуди), більшої енергії відповідає вже інша частота. В результаті система виходить з резонансу і, починаючи з деякої амплітуди, осцилятор перестає помічати зовнішню силу. Таким чином, вихід з резонансу, відбувається за рахунок нелінійного зсуву частоти.

Щоб отримати рівняння резонансних кривих нелінійного осцилятора, розглянемо явище резонансу в лінійному осциляторі, потім врахуємо ефект неізохронності і в рівняння резонансних кривих введемо поправку до частоті.

Запишемо рівняння лінійного осцилятора при зовнішньому гармонійному впливі

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = B \cos(\omega t), \quad (61)$$

де B, ω – амплітуда і частота зовнішнього впливу, α – параметр дисипації, ω_0 – власна частота лінійного осцилятора. У Лекції 3 ми отримали такий вираз для амплітуди вимушених лінійних коливань:

$$A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}}. \quad (62)$$

Вираз (62) є рівнянням резонансних кривих лінійного осцилятора. Якщо дисипація відсутня ($\alpha=0$ – випадок консервативного осцилятора), то при прагненні частоти зовнішнього впливу до власної частоти осцилятора, амплітуда сталих, змушених коливань прямує до нескінченності. Відзначимо, що нескінченне зростання амплітуди вимушених коливань може відбуватися і при дуже малому, але кінцевий значенні амплітуди зовнішнього впливу. У дисипативний осциляторі амплітуда вимушених коливань завжди кінцева, і, чим менше втрати в осциляторі, тим гостріше і вище резонансна крива. У виразі (62) врахуємо поправку до частоті в виді

$$\omega^2(A) = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \gamma A^2. \quad (63)$$

Ця залежність частоти коливань від амплітуди збігається з раніше отриманим виразом (60), якщо параметр нелінійності малий ($\gamma \ll 1$) і власна частота нормована до одиниці ($\omega_0 = 1$). Врахувавши цю поправку, отримаємо такий вираз для резонансних кривих

$$A = \frac{B}{\sqrt{\left(\omega_0^2 + \frac{3}{4} \gamma A^2 - \omega^2\right)^2 + \alpha^2 \omega^2}} \quad (64)$$

або

$$A^2 \left[\left(\frac{3}{4} \gamma A^2 - \omega^2 + \omega_0^2 \right)^2 + \alpha^2 \omega^2 \right] = B^2. \quad (65)$$

При близьких значеннях частот ω_0 і ω можна записати:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega_0 \delta, \quad (66)$$

де $\delta = \omega - \omega_0$. Тоді вираз для резонансних кривих перепишеться у виді

$$A^2 \left[\left(\frac{3\gamma}{4\alpha\omega_0} A^2 - \Delta \right)^2 + 1 \right] = \frac{B^2}{\alpha^2 \omega_0^2}, \quad (67)$$

де $\Delta = \frac{2\delta}{\alpha}$ називається **розладом частоти**. Надалі будемо розглядати залежності

величини $\Lambda = \frac{3\gamma A^2}{4\alpha\omega_0}$ від розладу Δ при різних значеннях параметра $F = \frac{3\gamma B^2}{4\alpha^3 \omega_0^3}$:

$$\Lambda \left[(\Lambda - \Delta)^2 + 1 \right] = F.$$

При побудові резонансних кривих амплітуда зовнішньої сили B (або F) є параметром: кожному фіксованому значенню амплітуди зовнішнього впливу відповідає своя резонансна крива. Рівняння резонансних кривих є кубічним рівнянням, і *отже, може мати або один дійсний корінь і два комплексно-сполучених, або три дійсних кореня (три однакових; два рівні поміж собою, а третій відмінний від них; все три різних кореня)*.

Це означає, що в залежності від параметрів осцилятора і зовнішнього впливу може існувати або один коливальний режим, або співіснують три режими. Причому, два з них є стійкими і один - нестійкий. При побудові резонансних кривих амплітуда зовнішньої сили B є параметром. На рис. 3 побудовані резонансні криві нелінійного осцилятора, кожна з яких представляє собою графік залежності квадрата амплітуди (або величини Λ) сталих вимушених коливань від розладу Δ між частотою зовнішнього впливу і власною частотою осцилятора, для різних значень параметра B .

Коли амплітуда зовнішнього впливу B менше деякого критичного значення B_c , резонансні криві однозначні і нагадують резонансні криві лінійного осцилятора із загасанням. Максимум у них зміщений в сторону великих частот, якщо власна частота осцилятора з ростом амплітуди зростає, і - в сторону менших частот, якщо власна частота

зменшується. Коли амплітуда зовнішнього впливу стає більше критичного значення B_c , резонансна крива стає неоднозначною. З'являється інтервал значень частот (Δ_1, Δ_2) , де при фіксованих значеннях параметрів є три рішення, з трьома різними амплітудами. З аналізу на, стійкість слід, що режими, відповідні середньої гілки (b-d) є нестійкими, а дві інші гілки (a-b і гілка правіше точки d-c) відповідають стійким режимам.

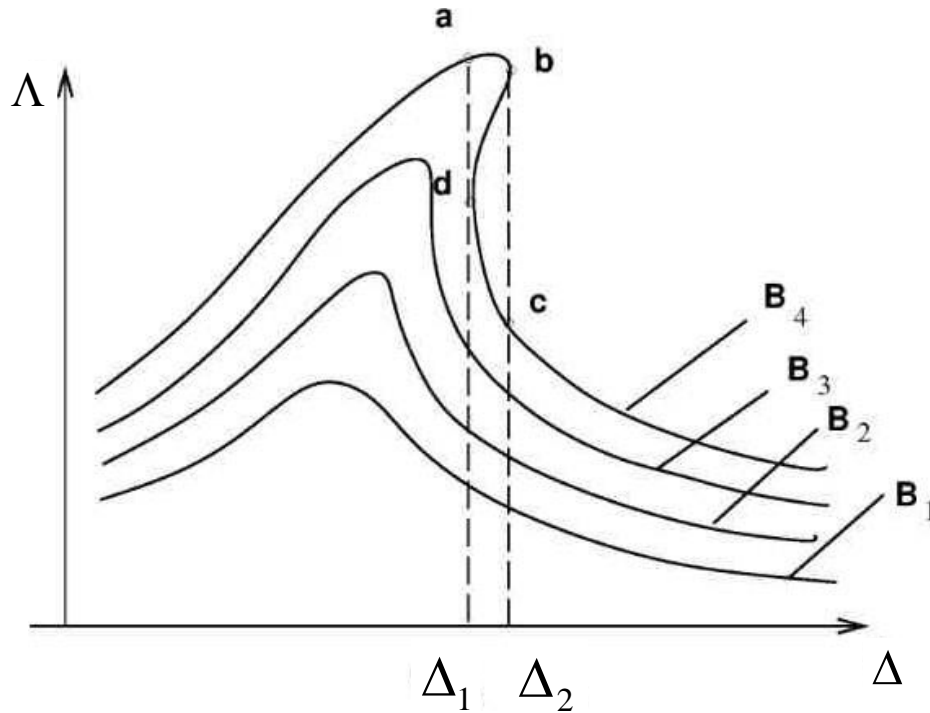


Рис. 3. Резонансні криві нелінійного осцилятора - залежно $\Delta(\Delta)$.

При зміні частоти зовнішнього впливу, при русі вздовж резонансної кривої зліва направо будуть відбуватися такі процеси. Зі збільшенням частоти спочатку відбувається плавне збільшення амплітуди вимушених коливань. При збігу частоти зовнішнього впливу з власною частотою осцилятора $\Delta = 0$ (або $\omega = \omega_0$), коли в лінійній системі настає резонанс, тут амплітуда коливань ще далеко не досягає свого максимального значення. Зі збільшенням Δ вона продовжує рости далі до деякого максимального значення. При переході через значення частоти $\Delta = \Delta_2$ відбувається стрибкоподібне зменшення амплітуди вимушених коливань. При подальшому збільшенні частоти триває плавне зменшення амплітуди коливань. При зворотному русі по резонансній кривій стрибкоподібне збільшення амплітуди коливань відбувається при іншому значенні частоти: $\Delta = \Delta_1$. **Спостерігається гистерезис.** В області гистерезиса (Δ_1, Δ_2) система є бістабільною: співіснує два стійких стану.

Введемо поняття біфуркації.

Слово біфуркація (від [лат.](#) *bifurcus* «роздвоєний») означає «роздвоєння» і використовується в якості назви будь-якої стрибкоподібної зміни, що відбувається при плавній зміні параметрів в будь-якій системі, наприклад, динамічної або екологічної. Якщо зображаюча точка знаходиться на одному з кордонів областей простору параметрів, то мала зміна параметра призводить до зміни типу особливої точки і виду фазових траєкторій. Таке перестроювання фазового портрета системи називається біфуркацією, а значення параметра, при якому воно відбувається – **біфуркаційним**.

Більш точне визначення. Значення параметра $\lambda = \lambda_0$ називається звичайним, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що для всіх $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ топологічна структура розбиття фазовій площині на інтегральні криві одна і та ж. Значення параметрів, при яких ця умова не виконується, називаються біфуркаційних.

Найпростіший приклад біфуркації, який зустрічався нам раніше, це перетворення сталого фокуса лінійного осцилятора лінійного осцилятора при $\nu < \omega$ в нестійкий при $\nu > \omega$. Біфуркаційним значенням при цьому є $\nu = \omega$.

Під терміном басейн (або басейн тяжіння) деякої множини в теорії динамічних систем зазвичай розуміють підмножину фазового простору, яка породжує траєкторії, які притягуються цією множиною.

Басейн тяжіння точки. Якщо стійка точка x^* притягує, то її басейн тяжіння визначається як множина початкових умов x_0 таких, що $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow \infty$. Наприклад, басейн тяжіння вузла $(3,0)$ на рис. 4 складається з усіх точок, що лежать нижче стійкого різноманіття сідла (заштрихована область на рис. 4).

Множина всіх точок, орбіти яких притягуються до даного аттрактора, називається басейном тяжіння цього аттрактора.

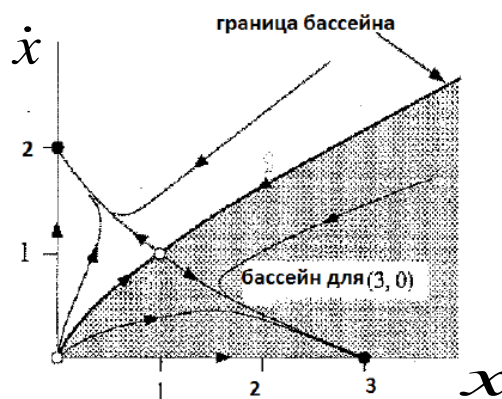


Рис. 4. Приклад басейну тяжіння точки. Заштрихована область є басейном тяжіння вузла $(3,0)$. Точка з координатами $(1,1)$ – сідло.

Приклад басейну тяжіння циклу буде наведено нижче.

Наведемо явище нелінійного резонансу на мові фазового простору. Попередньо перепишемо рівняння неавтономного осцилятора Дуффінга у вигляді системи трьох диференціальних автономних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - \omega_0^2 x - \gamma x^3 + B \cos z, \\ \dot{z} = \omega. \end{cases} \quad (68)$$

Ця система показує, що осцилятор Дуффінга при зовнішньому гармонійному впливі має тривимірне фазовий простір з координатами (x, y, z) *періодичне по координаті (циліндрична поверхня)*. Залежно від параметрів осцилятора і зовнішнього впливу в фазовому просторі може існувати або один, або три граничних циклу, відповідних сталим періодичних коливань. Зафіксуємо амплітуду зовнішнього впливу, резонансна крива для якої показана на рис. 3.

Припустимо, чаю частота впливу ω менше ω_0 (тобто $\Delta < 0$). В цьому випадку амплітуда коливань однозначно визначається частотою впливу. У фазовому просторі системи є один стійкий граничний цикл (рис. 5a). Зі збільшенням частоти, при переході через біфуркаційних значення $\Delta = \Delta_1$, в фазовому просторі народжується пара нових циклів: стійкий цикл-3 і нестійкий цикл-2 (рис. 5b). На резонансної кривій точці, біфуркації відповідає точка d. Тепер в осциляторі можливі два стійких коливальних режиму. Однак, хоча і відбулася якісна зміна фазового портрета, в системі ніяких змін спостерігатися не буде, оскільки стійкий граничний цикл-1 зберігся, і зображає точка, буде продовжувати рухатися на ньому. При зміні частоти впливу (розладу частоти) від значення $\Delta = \Delta_1$ до значення $\Delta = \Delta_2$, радіус стійкого граничного циклу-3 зменшується. Радіус нестійкого циклу-2 збільшується, і він зближується з стійким циклом-1. При переході значення розладу частоти через біфуркаційних значення $\Delta = \Delta_2$, стійкий цикл-1 і нестійкий цикл-2 зливаються і зникають. На резонансної кривій це відповідає точці b. Тепер в фазовому просторі системи залишається єдиний стійкий цикл (цикл-3). Зображає точка з області фазового простору, де до біфуркації розташовувався стійкий граничний цикл-1, кинеться до стійкого граничного циклу-3. У осциляторі буде спостерігатися різке зменшення амплітуди вимушених коливань до значення відповідного радіусу граничного циклу-3.

При зворотному русі по параметру Δ спочатку буде спостерігатися плавне збільшення радіусу стійкого граничного циклу-3. за точкою $\Delta = \Delta_2$ з циклом-3 ніяких біфуркацій не відбувається. Він так само буде спостерігатися в експерименті. Однак структура фазового простору якісно змінюється при переході, через біфуркаційних значення $\Delta = \Delta_2$. Із зовнішнього боку від циклу-3 з'являється пара граничних циклів: стійкий цикл-1 і нестійкий цикл-2. (Відбувається сідло-вузлова біфуркація народження пари циклів). Тепер знову в фазовому просторі системи є два стійких циклу і один нестійкий (сідловий) граничний цикл. Нестійкий (сідловий) цикл-2 і його стійкі різноманіття поділяють басейни тяжіння сталого циклу-1 і стійкого циклу-3. Басейном тяжіння сталого циклу 1 є область кільця, укладена між стійким циклом 1 нестійким циклом 2. басейном тяжіння сталого циклу 3 є область кільця, укладена між нестійким циклом 2 і стійким циклом 3.

При подальшому зменшенні частоти зовнішнього впливу від значення $\Delta = \Delta_2$ до значення $\Delta = \Delta_1$ радіус нестійкого циклу-2 зменшується, а стійкого циклу-3 збільшується. При переході через біфуркаційних значення $\Delta = \Delta_1$ вони зливаються і зникають, відбувається так звана сідло-вузлова біфуркація зникнення пари циклів. У фазовому просторі системи залишається один стійкий граничний цикл-1, до якого і притягнеться зображає точка. В результаті відбудеться різке збільшення. амплітуди коливань. При подальшому зменшенні частоти зовнішнього впливу відбуватиметься плавне зменшення радіусу граничного циклу-1.

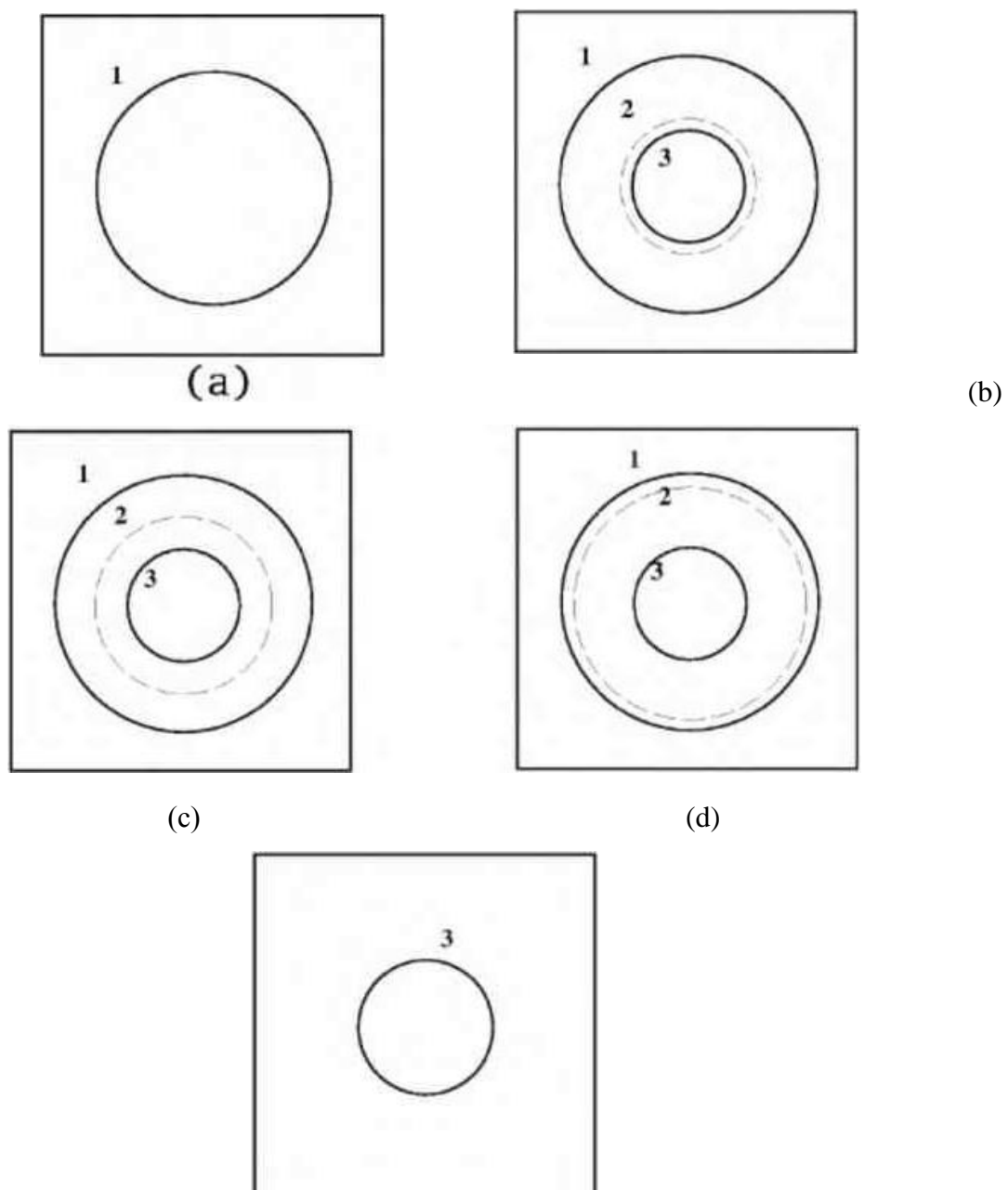


Рис. 5. Біфуркації граничних циклів при нелінійному резонансі