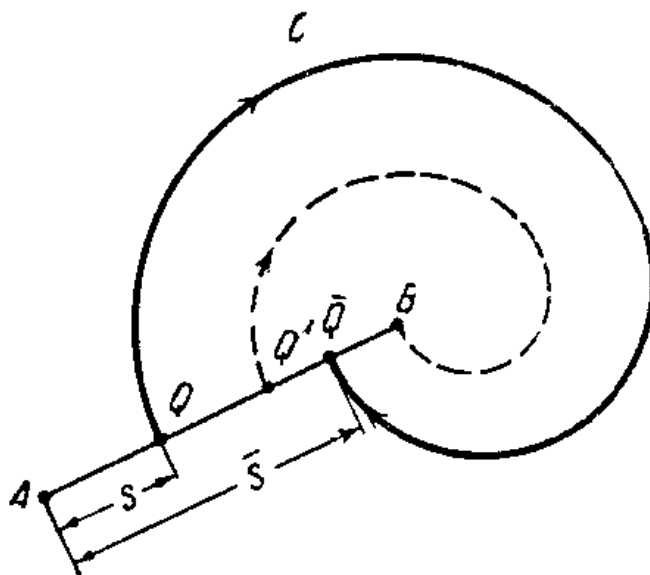


## Лекція 8

### Точкові відображення

#### 1. Функція послідування і точкове перетворення.

Поняття функції послідування було введено Пуанкаре і полягає в наступному.



**Рис. 1.** Точкове перетворення відрізка. Відрізок  $AB$  – це відрізок без контакту  $L$ .  
 $C$  – траєкторія, що проходить через точку  $Q$  і  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  – рух по цій траєкторії,  
 при якому точка  $Q$  відповідає  $t = t_0$ .

Проведемо на фазовій площині динамічної системи

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (1)$$

через неособливі точки так званий відрізок без контакту  $L$ , тобто такий відрізок, в кожній точці якого фазові траєкторії системи (1) перетинають його, не торкаючись. Позначимо через  $A$  і  $B$  його кінцеві точки і через  $s$  – координату точок відрізка  $L$  (ми будемо припускати, що  $s$  монотонно збільшується при русі вздовж відрізка від  $A$  до  $B$ ; наприклад, за  $s$  може бути взято відстань точки відрізка від кінцевої точки  $A$ ).

Нехай  $Q$  – точка на  $L$ . Розглянемо траєкторію  $C$ , що проходить через точку  $Q$ , і нехай  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  – рух по цій траєкторії, при якому точка  $Q$  відповідає  $t = t_0$ . Простежимо траєкторію  $C$  для значень  $t > t_0$ . Може трапитися, що при значенні  $t > t_0$  траєкторія  $C$  більше не перетинає відрізок  $L$ . Ми скажемо тоді, що точка  $Q$  «не має подальших на відріжку  $L$ ».

Але може трапитися, що траєкторія  $C$  перетинає відрізок  $L$  ще раз при значенні  $t > t_0$ . Нехай  $\bar{t}$  - перше значення, більше  $t_0$ , за якого  $C$  перетинається з  $L$ , і  $\bar{Q}$  - відповідна точка відрізка  $L$ . Ми скажемо тоді, що точка  $Q$  «має послідууючу  $\bar{Q}$  на відріжку  $L$ ».

Легко показати, на підставі теореми про безперервну залежність від початкових умов, що якщо яка-небудь точка  $Q$  має послідууючу, що не збігається з кінцями  $A$  і  $B$  відріжку  $L$ , то і все досить близькі до  $Q$  точки  $L$  також мають послідууючі.

Нехай  $s$  і  $\bar{s}$  - координати різних точок і їх послідууючих на відріжку  $L$ . Ясно, що  $\bar{s}$  є функцією від  $s$ . Ця функція

$$\bar{s} = f(s) \quad (2)$$

називається функцією послідування і виявляє собою закон деякого точкового перетворення відрізка  $L$  (або його частини), встановлюючи однозначна відповідність між точками цього відрізка (або його частини) та їх подальшими (на тому ж відріжку  $L$ ). Геометрично ясно, що «функцію послідування» ми маємо тоді, коли відрізок без контакту перетинає траєкторії, що мають характер спіралей або замкнуті траєкторії. При цьому очевидно, що якщо деякому значенню  $s = s_0$  відповідає замкнута траєкторія, то  $f(s_0) = s_0$ , тобто точка  $Q$  і її послідууюча  $\bar{Q}$  збігаються (такі точки відрізка  $L$ , що перетворюються самі в себе, зветься *нерухомими точками* точкового перетворення (2)). Можна також сказати, що відшукування замкнутих траєкторій, які перетинають даний відрізок без контакту, зводиться до відшукування тих значень  $s$ , для яких  $\bar{s} = f(s) = s$ . Неважко також бачити, що в тому випадку, коли всі траєкторії, що перетинають відрізок  $L$ , замкнуті, функція послідування має вигляд  $\bar{s} = s$ . Пуанкаре довів ряд властивостей функції послідування  $\bar{s} = f(s)$ , які ми наведемо без доказів.

**I властивість.** Якщо точка  $Q_0$ , що відповідає  $s = s_0$ , має послідууючу на відріжку  $L$ , то функція  $\bar{s} = f(s)$  - голоморфна функція  $s$  в точці  $s = s_0$  (тобто безперервна в цій точці, має в цій точці скінченну похідну  $df/ds$  і розкладається в цій точці в ряд Тейлора за степенями  $s - s_0$ , що сходиться в деякому околі  $s_0$ ).

**II властивість.** Похідна  $d\bar{s}/ds$  завжди позитивна (для однократних нерухомих точок, коли фазові траєкторії не перетинаються).

Припустимо, що деяка точка  $Q_0$  відріжку  $L$ , яка відповідає  $s = s_0$ , має послідууючу (не збігається з кінцями  $A$  або  $B$  відрізок  $L$ ). Тоді, в силу сказаного вище, все досить близькі до  $Q_0$  точки також мають послідууючі і, отже, для всіх значень  $s$ , досить близьких до  $s_0$ , існує

функція послідування  $\bar{s} = f(s)$ . Будемо рухатися по відрітку  $L$  від точки  $Q_0$  в позитивному (або негативному) напрямку, тобто починаючи з  $s_0$  збільшувати (або зменшувати)  $s$ .

*Можуть реалізуватися такі можливості:*

1) Або ми дійдемо до точки  $Q'$  відрітку  $L$ , яка відповідає  $s = s'$ , для якої наступний кінець буде  $B$  (або  $A$ ) відрітку  $L$ . Тоді точки  $L$ , які відповідають значенням  $s > s'$  (або  $s < s'$ ), вже не будуть, в силу властивості II (тому що  $d\bar{s}/ds > 0$ ), мати послідоючих на відрітку  $L$  і функція послідування не буде визначена для значень  $s > s'$  (або  $s < s'$ ). В цьому випадку ми, взагалі кажучи, можемо подовжити відрізок без контакту і, отже, збільшити інтервал значень  $s$ , для яких визначена функція послідування.

2) Або ми дійдемо до такого значення  $s = s'$ , що всі точки відрізка  $L$ , що відповідають значенням  $s$  на інтервалі  $s_0 < s < s'$  (або  $s' < s < s_0$ ), матимуть послідоючі, а точка  $Q'$ , яка відповідає  $s = s'$ , не матиме послідоючий на відрітку  $L$ . Можна показати, що в цьому випадку траєкторія, що проходить через точку  $Q'$ , буде закінчуватися в особливій точці, не перетинаючи більше  $L$ . У тому випадку, коли ми маємо лише прості особливі точки, ця точка може бути тільки сідлом. Може трапитися, що точки, що відповідають значенням  $s > s'$ , знову мають послідоючі. Таким чином, у нас є функція послідування для  $s < s'$  і для  $s > s'$ . Для  $s = s'$  функція послідування невизначена (див. рис. 2 і рис.3). Однак іноді говорять про дві функції послідування (однієї для  $s < s'$ , інший для  $s > s'$ ) як про одну функцію послідування, і тоді при значенні  $s = s'$  ця функція буде, взагалі кажучи, зазнавати розрив в тому сенсі, що  $f(s'+0) \neq f(s'-0)$ .

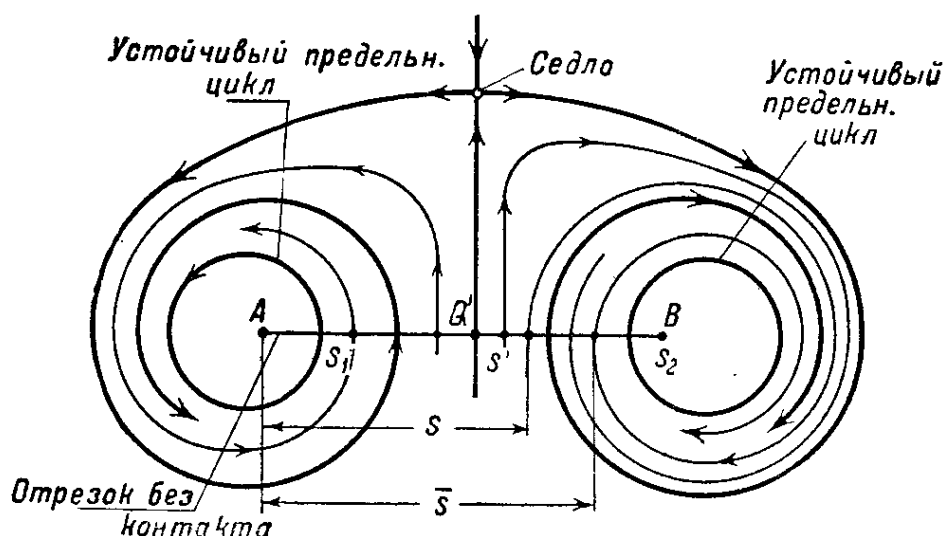
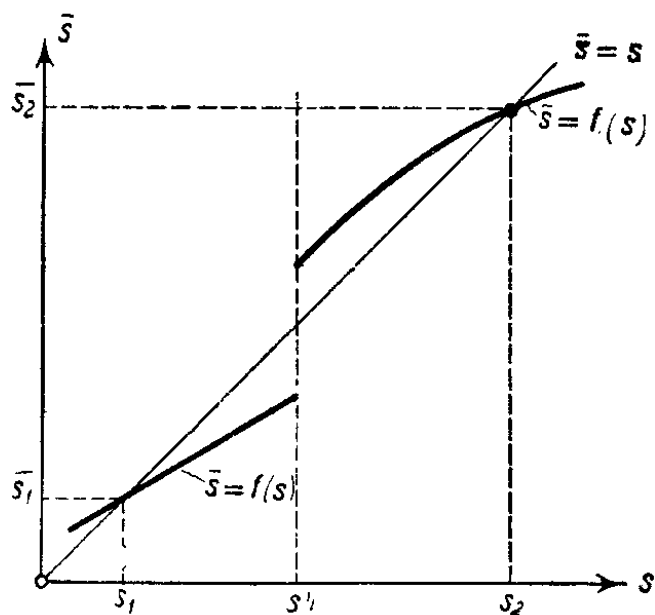


Рис. 2. Про розрив функції послідування (фазова площина).



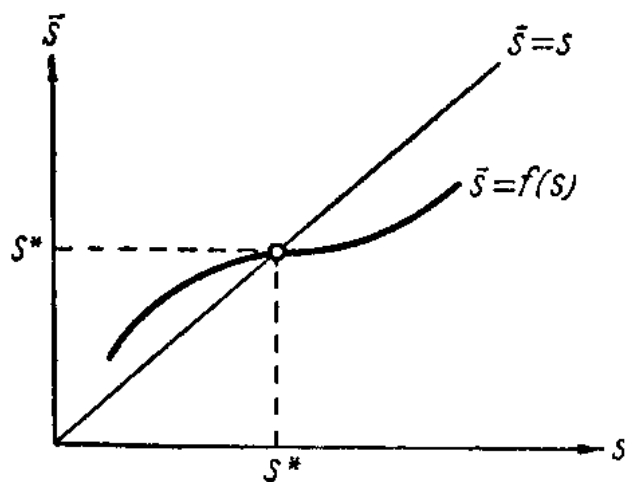
**Рис. 3.** Про розрив функції послідування (площина  $(s, \bar{s})$ ).

## 2. Стійкість особливої точки. теорема Кенігса.

Якщо ми знаємо точкове перетворення деякого відрізка  $L$  самого в себе (тобто ми знаємо функцію послідування), то задача відшукування замкнутих фазових траєкторій (граничних циклів), які перетинають цей відрізок, зводиться до знаходження нерухомих точок, тобто таких точок  $s^*$  відрізка  $L$ , для яких

$$f(s^*) = s^* . \quad (3)$$

Графічно ми можемо знайти ці нерухомі точки як точки перетину на площині  $(s, \bar{s})$  на так званій діаграмі Ламерея (сходах Ламерея), кривої  $\bar{s} = f(s)$  (графіка функції послідування) і бісектриси  $\bar{s} = s$  (див. рис. 4).



**Рис. 4.** Графічне відшукування стаціонарних точок функції послідування.

Істотно, що функція послідування дозволяє не тільки знайти граничні цикли, але й вирішити питання про їх стійкість, так як характер її поведінки поблизу нерухомої точки повністю визначається характером поведінки фазових траєкторій в околі граничного циклу. З метою визначення стійкості граничного циклу розглянемо послідовність точок перетину з відрізком  $L$  фазових траєкторій, що лежать в деякому околі граничного циклу, якому відповідає нерухома точка  $s^*$ , – послідовність точок:

$$s, s_1, s_2, \dots, s_{n+1} = f(s_n), \dots, \quad (4)$$

в яких кожна наступна точка, визначається за попередньою функцією послідування, тобто

$$s_1 = f(s), s_2 = f(s_1), \dots, s_{n+1} = f(s_n), \dots \quad (5)$$

Якщо будь-яка з цих фазових траєкторій прямує при  $t \rightarrow +\infty$  до граничного циклу, то відповідна послідовність  $(s)$  матиме своєї граничної точкою особливу точку  $s^*$ . І навпаки, з збіжності послідовності  $(s)$  до особливої точки  $s^*$  ми можемо зробити висновок про те, що відповідна їй фазова траєкторія прямує до граничного циклу при  $t \rightarrow +\infty$ .

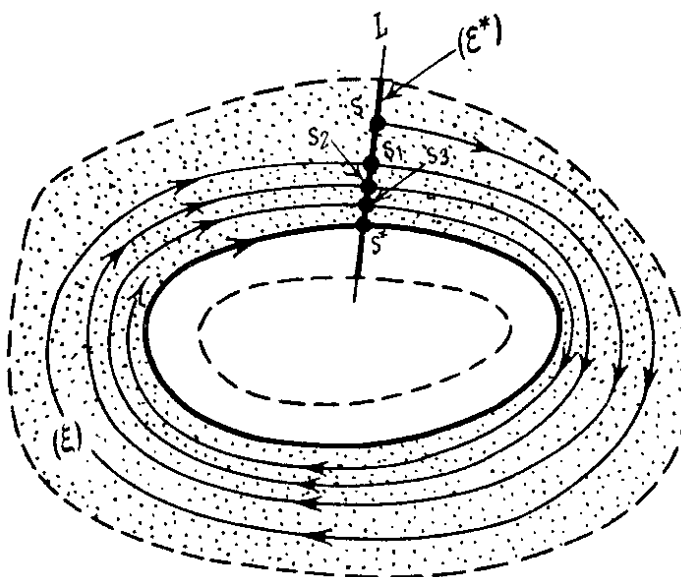


Рис. 5. Про стійкість граничного циклу.

Якщо граничний цикл стійкий, то (в силу визначення стійкості) існує такий його окіл  $(\varepsilon)$ , що все фазові траєкторії з початковими точками в цьому околі асимптотично наближаються до граничного циклу при  $t \rightarrow +\infty$ . Але це одночасно означає, що на відрізку  $L$  існує окіл  $(\varepsilon^*)$  нерухомої точки  $s^*$  - частина відрізка  $L$ , яка лежить в двовимірній області  $(\varepsilon)$ , така, що кожна послідовність  $(S)$  з початковою точкою в околі  $(\varepsilon^*)$  сходиться до нерухомої точки  $s^*$ , тобто:

$$\text{при будь-яких } s, \text{ що належать до } (\varepsilon^*), s_n \rightarrow s^* \text{ при } n \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

**Будемо називати нерухому точку точкового перетворення стійкою, якщо існує такий її окіл  $(\varepsilon^*)$ , що все послідовності  $s, s_1, s_2, \dots, s_{n+1}, \dots$  з початковими точками  $s$  в  $(\varepsilon^*)$  сходяться до цієї нерухомої точки. Тоді, стійкого граничного циклу відповідає стійка нерухома точка.**

**Нерухому точку  $s^*$  ми будемо називати нестійкою, якщо в будь-який як завгодно малому її околі знайдеться (хоча б одна) така точка  $s$ , що послідовність  $s, s_1, s_2, \dots, s_{n+1}, \dots$  не сходиться до  $s^*$ .**

Ця точка відповідає нестійкому граничному циклу, так як існування таких послідовностей точок, що починаються в як завгодно малому околі особливої точки і не

сходяться до неї, свідчить про наявність в як завгодно малому околі граничного циклу фазових траєкторій, що йдуть від нього при  $t \rightarrow +\infty$ .

Умова стійкості нерухомої точки  $s^*$  точкового перетворення, вираженого функцією послідування  $\bar{s} = f(s)$ , а отже, і умова стійкості відповідного граничного циклу дається теоремою Кенігса.

### **Теорема Кенігса.**

Нерухома точка  $s^*$  точкового перетворення  $\bar{s} = f(s)$  стійка, якщо

$$\left| \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s=s^*} < 1, \quad (7)$$

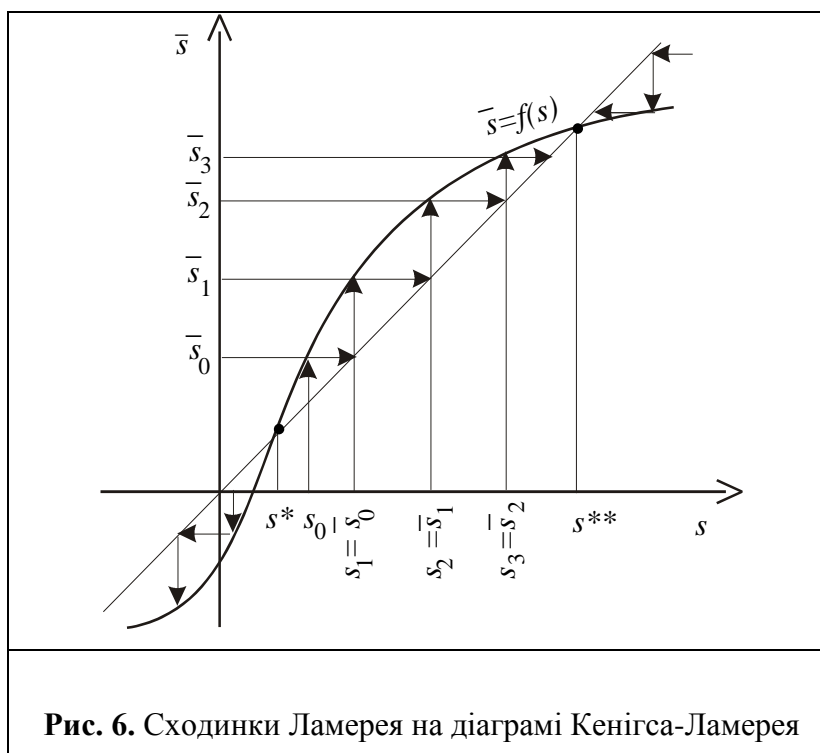
і нестійка, якщо

$$\left| \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s=s^*} > 1. \quad (8)$$

Зауважимо, що ця теорема не вирішує питання про стійкість нерухомої точки, якщо  $\left| \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s=s^*} = 1$ . В цьому випадку потрібне додаткове дослідження, так як стійкість в цьому випадку визначається знаками старших похідних функції послідування.

**Розглянемо докладніше, як будується діаграма Ламерея для випадку  $\frac{df}{ds} > 0$ .**

Діаграма будується в такий спосіб. Нехай  $s_0$  – початкова точка, значення якої ми відкладемо на горизонтальній осі – «осі  $s$ ». Потім проводимо вертикальні лінії з цієї точки до перетину з лінією  $f(s)$ . Координата цієї точки перетину на вертикальній осі відповідає точці відображення  $\bar{s}_0 = s_1$ . Потім проводимо горизонтальну лінію з точки  $\bar{s}_0$  до перетину з бісектрисою  $\bar{s} = s$ . Через цю точку перетину проводимо вертикальну лінію. Перетин цієї лінії з горизонтальною віссю є координату точки відображення  $s_1$ . Перетин цієї ж лінії з лінією  $f(s)$  визначає на вертикальній осі координату точки відображення  $\bar{s}_1$ . Далі чинимо аналогічним чином для отримання послідовності точок  $s, s_1, s_2, \dots, s_{n+1}, \dots$ . В результаті ми отримаємо діаграму Ламерея. Лінія цієї діаграми, що з'єднує точки на бісектрисі і точки на функції відображення, як видно на рис. 6, має вигляд сходів. Ця лінія називається сходами Ламерея.

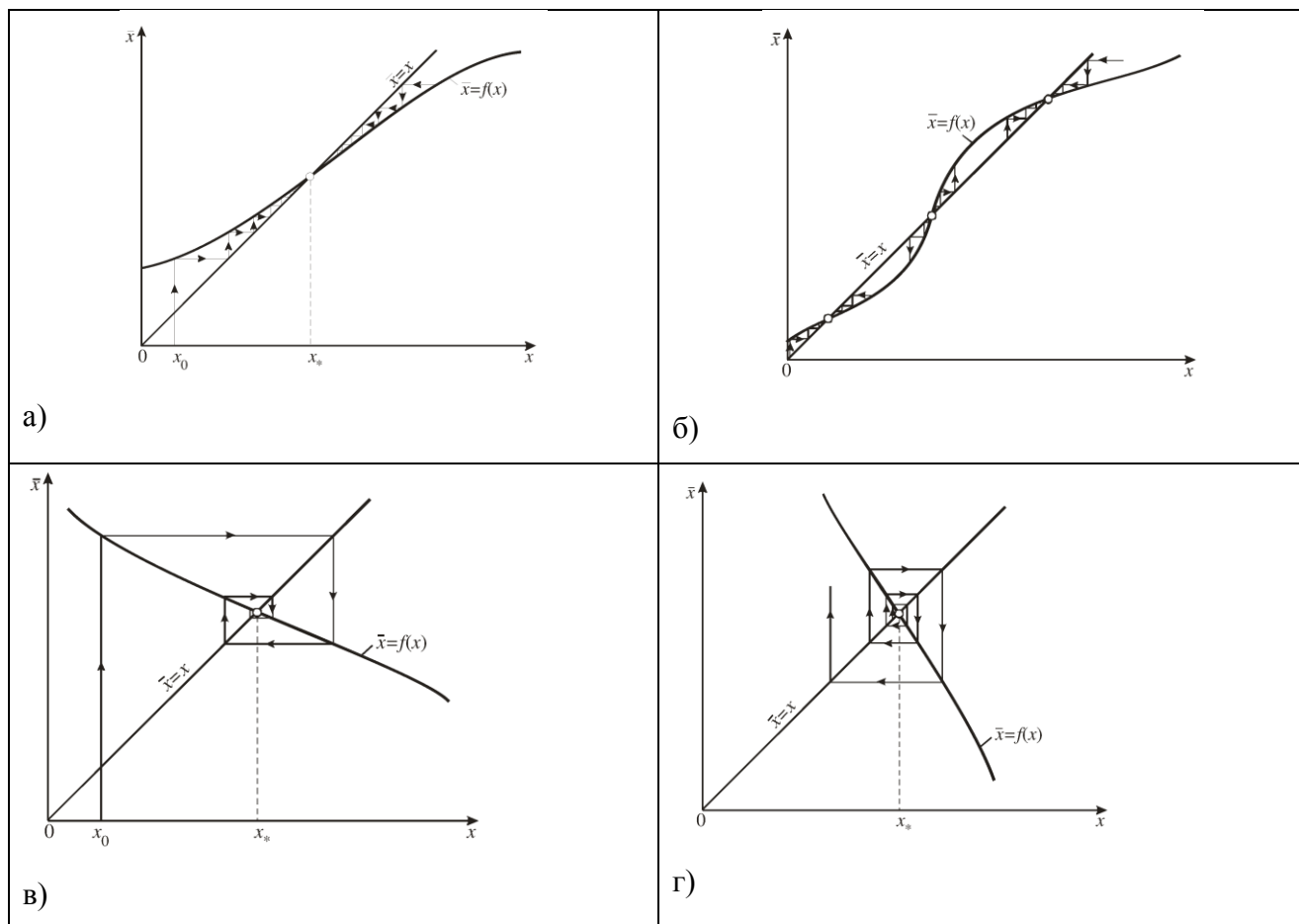


Нагадаємо, що нерухомі точки точкового відображення визначаються формулою  $s^* = f(s^*)$ .

Нерухома точка буде стійка, якщо, рухаючись по сходах Ламерея, ми наближаємося до неї.

Якщо точка нестійка, то рухаючись по сходах Ламерея, ми йдемо від неї.





**Рис. 7.** Приклади точкових відображень, що мають стійкі а), б). в) і нестійкі г) прості нерухомі точки.

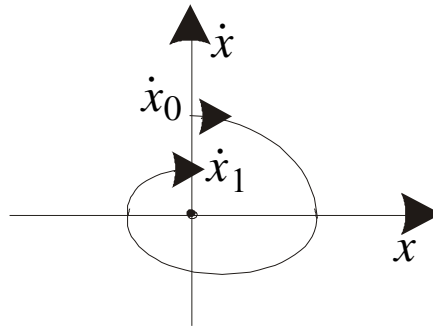
**Як приклад** використання точкового відображення розглянемо динаміку годин. Рівняння коливань маятника годин має вигляд

$$\ddot{x} + \nu \dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (9)$$

де  $\nu$  – загасання маятника,  $\omega$  – частота його коливань. Розв’язок рівняння (9) можна уявити в такому вигляді:

$$x = C \cdot \cos(\omega t) \exp(-\nu t / 2), \quad \dot{x} = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \exp(-\nu t / 2). \quad (10)$$

Як видно з цього рішення, маятник годинника коливається з певною частотою  $\omega$ . Амплітуда цих коливань експоненціально загасає.

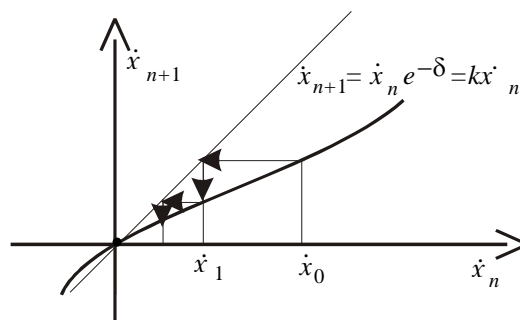


**Рис.8.** Фазова траєкторія маятника з загасанням

Після закінчення деякого часу маятник зупиниться. Фазову траєкторію системи (9), тобто маятника з загасанням, зручно представити в такому виді (див. рис. 8). На цьому рисунку вісь  $x=0$  можна розглядати як відрізок без контакту, а точки  $\dot{x}_0; \dot{x}_1; \dot{x}_2; \dots$  послідовностями точкового відображення. Тоді ми можемо написати

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 \exp(-\nu T/2) = \dot{x}_0 \exp(-\delta) = \dot{x}_0 k; \quad k < 1, \quad (11)$$

де  $T = 2\pi/\omega$  – період коливань маятника,  $\delta = \nu T/2$ ,  $k = \exp(-\delta)$ . Цю послідовність зручно представити діаграмою Кенігса-Ламерея (див. рис.8).



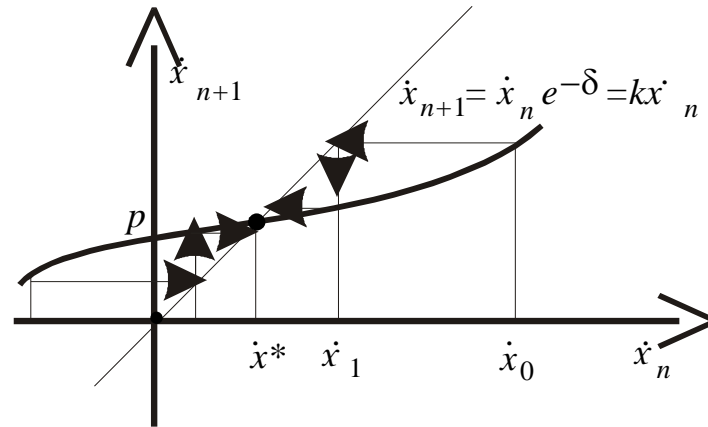
**Рис. 9.** Діаграма Кенігса-Ламерея для маятника з загасанням

З цього рисунка видно, що рухаючись по сходах Ламерея, ми наближаємося до нульової точки ( $x = \dot{x} = 0$ ), тобто ця точка є *стійкою нерухомою точкою*. Фізично це означає, що *коливання маятника годин загасають*.

Для того, щоб здійснити незгасаючі коливання припустимо, що маятник годинника в певні моменти часу отримує імпульс, який компенсує загасання маятника. Будемо вважати, що ці імпульси слідуєть строго з інтервалом часу, що дорівнює періоду коливання маятника. В цьому випадку точкове відображення можна уявити в такому простому виді

$$\dot{x}_n = k\dot{x}_{n-1} + p. \quad (12)$$

Відповідна діаграма Кенігса-Ламерея представлена на рис. 10.



**Рис. 10.** Діаграма Кенігса-Ламерея для маятника з зовнішнім обуренням.

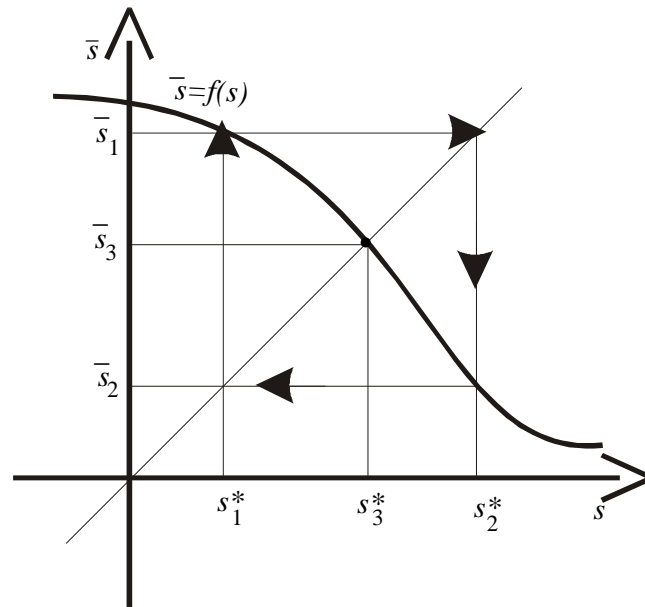
З цього рисунка ми бачимо, що точка  $\dot{x}^*$  є стійкою нерухомою точкою. Рухаючись по сходах Ламерея, ми приходимо до цієї точки, починаючи рух як з лівого, так і з правого боку від неї. Таким чином, наявність зовнішнього періодичного обурення призвело до виникнення незатухаючих коливань маятника годин. Видно, що аналіз цієї системи за допомогою точкових відображень надзвичайно простий.

**Розглянемо випадок**  $\frac{df}{ds} < 0$ .

У розглянутому вище випадку існували тільки *однократні нерухомі стійкі або нестійкі точки*. При наявності негативної похідної з'являється новий клас точок – *кратні нерухомі точки*. Приклад двократно нерухомої точки наведено на рис. 11. З рис. 11 видно, що *двократна нерухома точка може бути представлена співвідношеннями*:

$$\bar{s}_2 = s_1^* = f(s_2^*) = f[f(s_1^*)], \quad \bar{s}_1 = s_2^* = f(s_1^*) = f[f(s_2^*)]. \quad (11)$$

На рис. 11 показана також і однократна нерухома точка  $s_3 = f(s_3)$ .



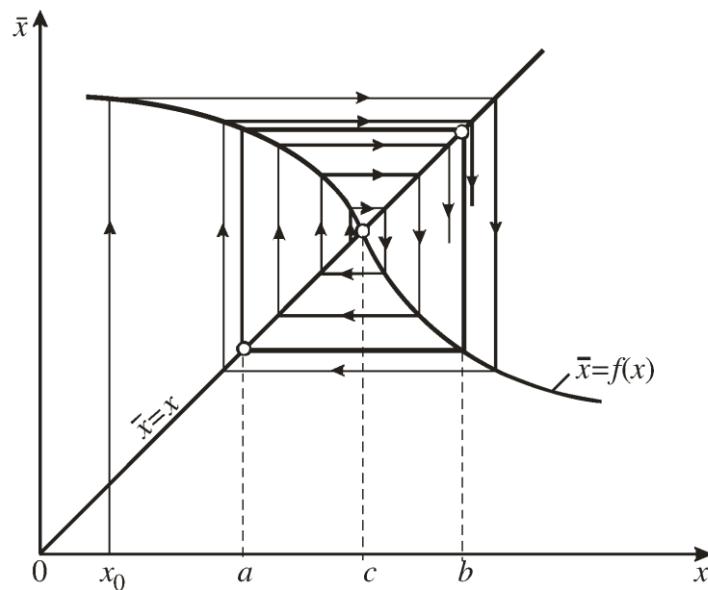
**Рис. 11.** Двократні  $s_1^*$ ,  $s_2^*$  і однократна  $s_3^*$  нерухомі точки.

На рис. 12 наведено приклад ітераційного процесу, породжуваного точковим відображенням, що сходиться до пари двократно вироджених нерухомих точок  $a$  і  $b$ , задовольняють співвідношенням:

$$f(a) = b \text{ і } f(b) = a \quad (12)$$

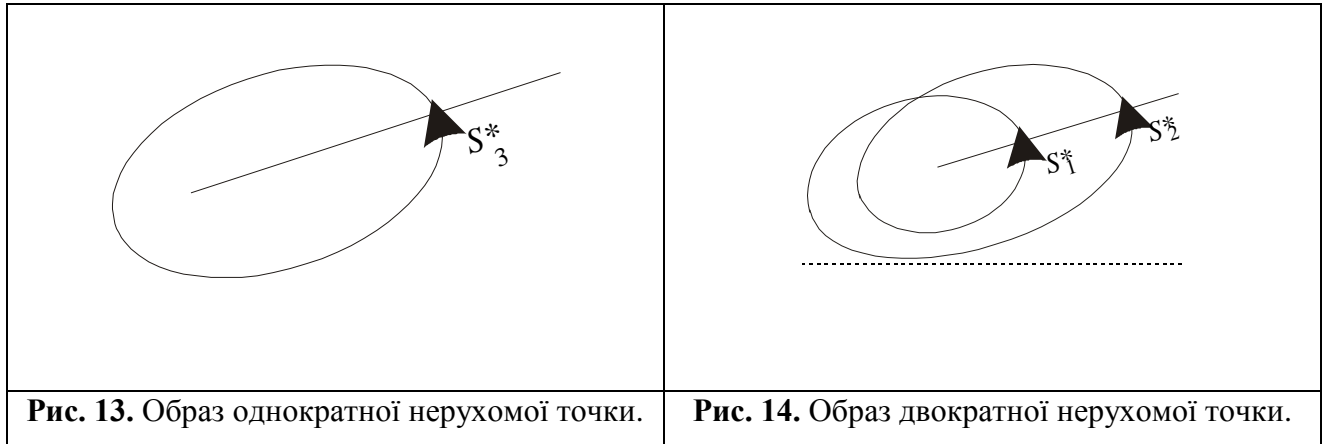
або

$$f[f(a)] = a \text{ і } f[f(b)] = b. \quad (13)$$



**Рис. 12.** Приклад ітераційного процесу, породжуваного точковим відображенням, що сходиться до пари двократно вироджених нерухомих точок  $a$  і  $b$ :  $f[f(a)] = a$  і  $f[f(b)] = b$ .

Замкнені контури на діаграмах Ламерея на рис. 11 і рис.12, що складаються з відрізків горизонтальних і вертикальних прямих, називаються **двократними циклами точкового відображення**, або циклами періоду 2.



Якщо, стартуючи з точки  $s_0$ , в результаті  $N$ -кратного виконання відображення  $f(s)$ , виходить та ж сама точка  $s_0$ , кажуть що  $s_0$  – нерухома точка кратності  $N$ . Формально це записується так

$$s_0 = \overbrace{f(f(\dots f(s_0)\dots))}^N = f_N(s_0). \quad (14)$$

Права частина рівняння (14) є послідовне  $N$ -кратне виконання відображення. **Послідовність**  $s_1 = f(s_0)$ ,  $s_2 = f(s_1)$ ,  $\dots$   $s_N = f(s_{N-1}) = s_0$  **називають циклом порядку  $N$** .

Якщо образом однократної нерухомої точки є замкнута фазова траєкторія (див. рис. 12), то образом двократної нерухомої точки є замкнута подвійна лінія (рис. 13).

### Умова стійкості кратних нерухомих точок точкового перетворення.

Випадок кратної нерухомої точки ми розглянемо на прикладі двократної нерухомої точки. Нехай ми маємо двократну нерухому точку  $s^* = f(f(s^*))$ . Тоді в околі цієї нерухомої точки можна отримати такий вираз для малих відхилень

$$\delta \tilde{s} = f'(s_1^*)f'(s_2^*)\delta s. \quad (15)$$

Легко бачити, що нерухома точка буде стійкою, якщо  $|f'(s_1^*)f'(s_2^*)| < 1$  і нестійкою, якщо  $|f'(s_1^*)f'(s_2^*)| > 1$ .

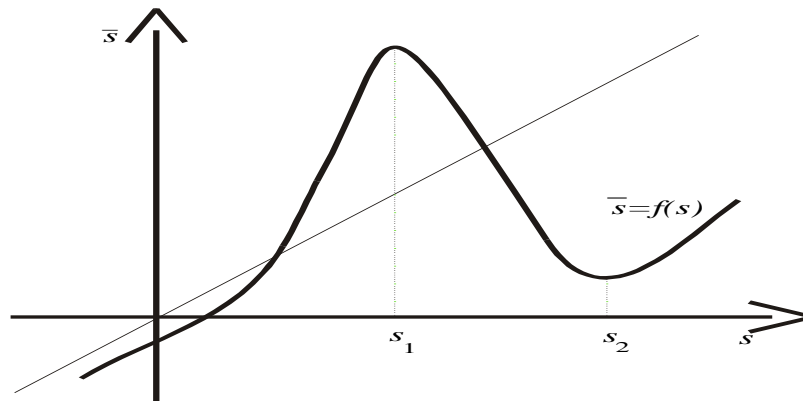
Отриманий результат легко узагальнюється на випадок нерухомих точок довільної кратності. Нехай ми маємо  $N$ -кратну нерухому стійку точку, тоді умовою її стійкості буде нерівність:

$$|f'(s_1^*)f'(s_2^*)\dots\dots\dots f(s_N^*)| < 1. \quad (16)$$

Розглянуті вище два випадки є однозначні і взаємно однозначні точкові відображення.

***Наступним класом точкових відображень не є взаємно однозначні відображення.***

Відзначимо, що саме такі відображення описують системи зі складною хаотичною поведінкою. Невзаємна однозначність цих відображень означає, що якщо для кожного значення точок  $s_0, s_1, s_2, \dots$  є однозначна послідовність точок  $\bar{s}_0, \bar{s}_1, \bar{s}_2; \dots$ , то для кожної точки  $\bar{s}$  може бути кілька значень  $s$  (див. рис. 15).

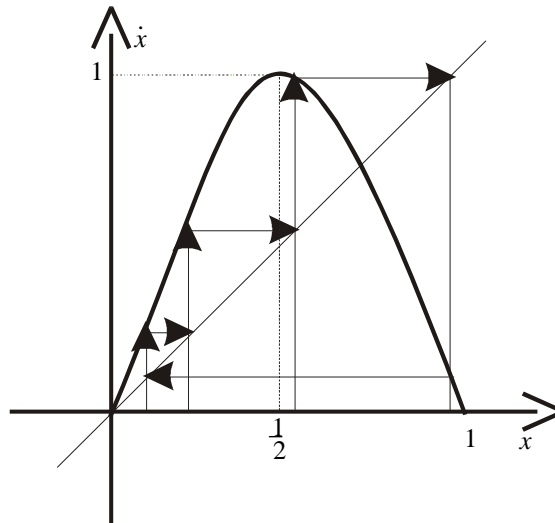


**Рис. 15.** Не взаємно однозначне точкове відображення

Не взаємно однозначне відображення ми розглянемо тільки на наступному важливому прикладі. Нехай маємо точкове відображення

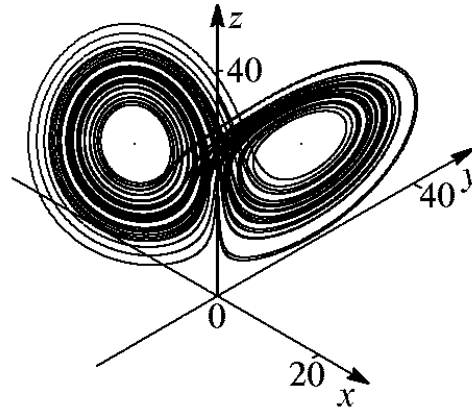
$$\bar{x} = 1 - 4(x - 1/2)^2 \equiv f(x). \quad (17)$$

Діаграма Кенігса-Ламерея цього відображення представлена на рис. 16. Можна показати, що відображення (17) має нескінченне число нерухомих точок довільної кратності і що всі ці точки нестійкі.



**Рис. 16.** Діаграма Кенігса-Ламерея для неоднозначного відображення

Поведінка системи з такими на перший погляд незвичайними властивостями аналогічно поведінці випадкової системи. У фазовому просторі такої системі відповідає дивовижний аттрактор, що представляє собою множину, яка притягує нестійкі траєкторії в фазовому просторі дисипативної динамічної системи (розглянута в Лекції 7 система Лоренца).



**Рис. 17.** Фазовий портрет аттрактора Лоренца для «класичного» набору параметрів:

$$\sigma = 10, \quad b = 8/3, \quad r = 28.$$

На відміну від «звичайного» аттрактора (стійкий фокус, граничний цикл), не є кривою або поверхнею. Структура дивного аттрактора має дробову розмірність. Структура дивного аттрактора схожа на клубок ниток, причому не переплутаних, а акуратно покладених одна вздовж іншої. Цікаво, що при конкретних значеннях параметрів в системі Лоренца  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$  один і той же усталений режим (в сенсі стаціонарності зовнішнього вигляду аттрактора) виникає незалежно від вибору початкових умов.

До області фазового простору, яку займає дивовижний аттрактор, після закінчення великого інтервалу часу притягуються всі досить близькі траєкторії з так званої області тяжіння. Сам аттрактор складається ніби з однієї траєкторії, тобто траєкторія з плином часу повинна пройти через кожну точку аттрактора.

Властивість, що робить аттрактор дивовижним – чутливість до початкових умов, тобто незважаючи на стиск в об'ємі, не відбувається скорочення довжин в усіх напрямках і відстані між спочатку як завгодно близькими точками на аттракторі через досить великий час стають скінченними.