

Лекция 15

Фракталы. Часть 3.

Итерационная аппроксимация фрактальных множеств.

1. Детерминированный метод.
2. Метод случайных итераций.
3. Пример мультифрактала.
4. Нелинейные комплексные отображения. Множество Жюлиа.

Итерационная аппроксимация фрактальных множеств.

Как мы уже убедились, многие регулярные фракталы строятся путём бесконечного повторения нескольких простых операций, например, заменой одного элемента некоторой комбинацией других, ему подобных. Так, салфетка Серпинского получается при замене исходного треугольника тремя треугольниками в два раза меньшего размера. Затем эта же операция повторяется с каждым из этих трёх треугольников, и так далее до бесконечности. Возникает естественный вопрос, а нельзя ли эту "процедуру замены" перевести на язык математических формул.

Самоподобное компактное множество M можно представить как конечное объединение его образов для некоторой совокупности преобразований подобия f_m , $m=1,2,\dots,p$ с коэффициентами подобия $r_m < 1$, т. е.

$$M = \bigcup_{m=1}^p f_m(M). \quad (1)$$

Другими словами для самоподобного множества M имеет место функциональное уравнение (1), причем функции f_m – сжимающие отображения подобия.

Справедлива следующая теорема: *в евклидовом пространстве, для любого ограниченного замкнутого множества M_0 итерационный процесс*

$$M_{k+1} = \bigcup_{m=1}^p f_m(M_k), \quad k=0,1,2,\dots, \quad (2)$$

сходится к единственному компактному множеству M , которое является решением уравнения (1).

Напомним, что компактное множество — подмножество M топологического пространства X такое, что каждая бесконечная последовательность $\{x_i, i \in \mathbb{Z}\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке x_0 пространства X . Если $x_0 \in M$, то M называется компактным в себе множеством. Например, всякий отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ компактен.

Совокупность сжимающих отображений подобия f_m совместно с итерационной схемой (2) называется **системой итерированных функций (СИФ)**. Результатом применения СИФ является множество M , которое называют *аттрактором*.

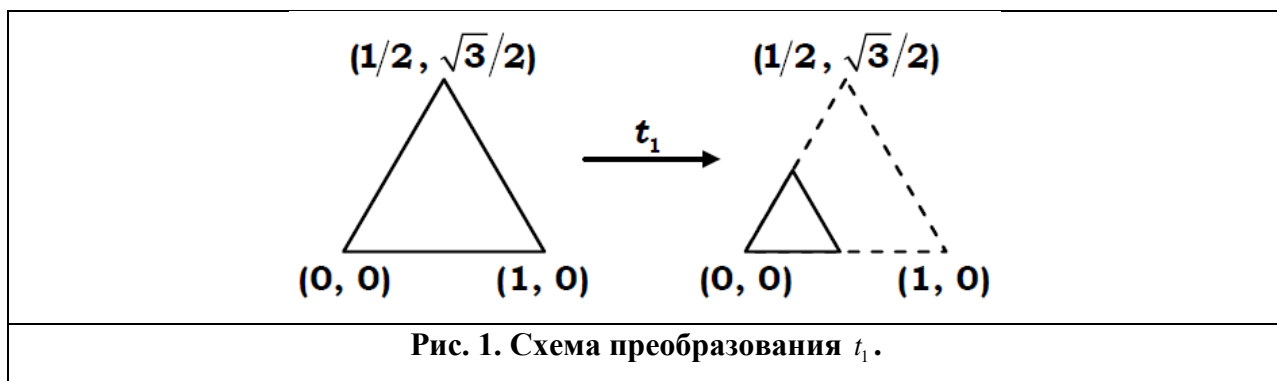
Понятие аттрактора является общим и означает, как мы уже знаем из предыдущих лекций, конечное устойчивое состояние некоторого процесса или хода эволюции системы. Следует сразу отметить, что в результате применения метода СИФ не всегда образуется фрактал. Это может быть любое множество, например, интервал или квадрат. Однако при изучении фракталов метод СИФ очень важен, так как с его помощью можно получить множество фракталов. При этом итерационный процесс (2) позволяет восстанавливать фракталы с любой точностью.

Есть два подхода к реализации СИФ: *детерминированный и метод случайных итераций* (его часто называют игрой "Хаос").

Детерминированный метод.

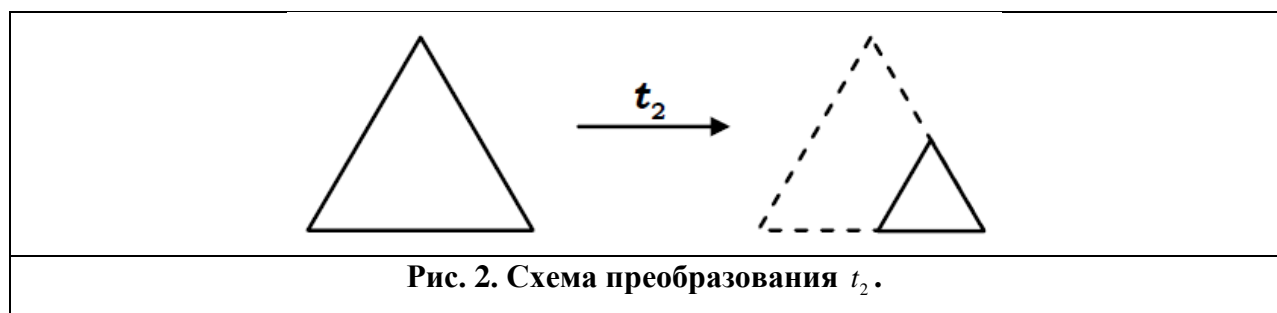
Сущность этого метода рассмотрим на примере салфетки Серпинского. Поместим равносторонний треугольник (длина стороны равна единице) на комплексную плоскость $z = x + iy$, так, как показано на рис. 1 (слева). Возникает вопрос, каким линейным преобразованием t_1 на комплексной плоскости он переводится в равносторонний треугольник в два раза меньшего размера, показанный на рис. 1 (справа). Ответ достаточно прост. Функция $f_1(z)$, осуществляющая это преобразование, определяется выражением

$$t_1 : f_1(z) = \frac{1}{2}z. \quad (3)$$



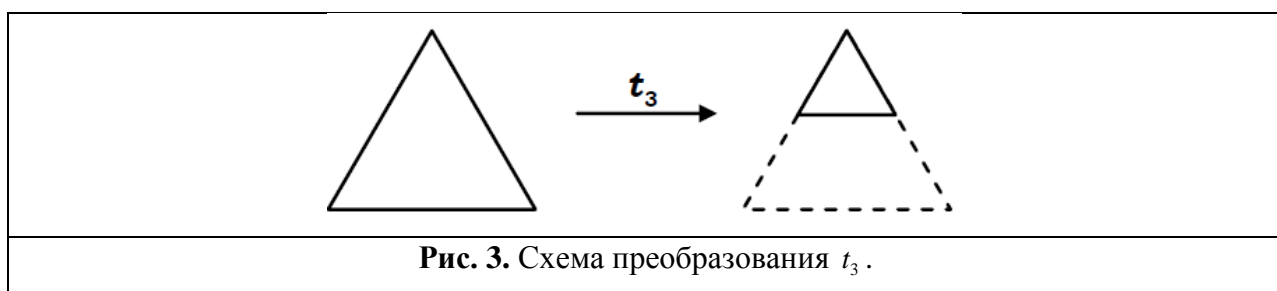
Если затем сместить этот маленький треугольник по горизонтали вправо на величину, равную $1/2$, то получим преобразование t_2 , переводящее исходный треугольник в треугольник, приведенный на рис. 2 (справа). Соответствующая этому преобразованию функция $f_2(z)$, очевидно, имеет вид

$$t_2 : f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}. \quad (4)$$

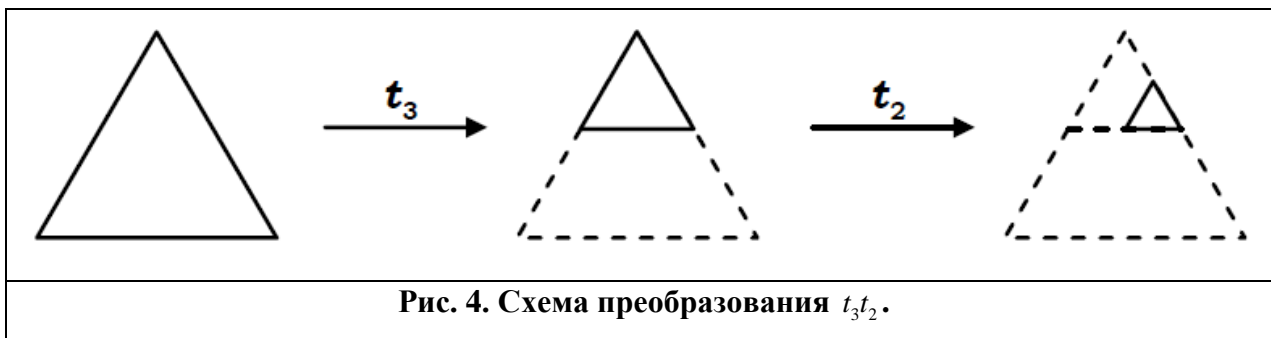


Последний, третий, маленький треугольник получается с помощью преобразования t_3 , показанного на рис. 3. Соответствующая ему функция $f_3(z)$ получается из $f_1(z)$ сдвигом на величину $1/4 + i\sqrt{3}/4$:

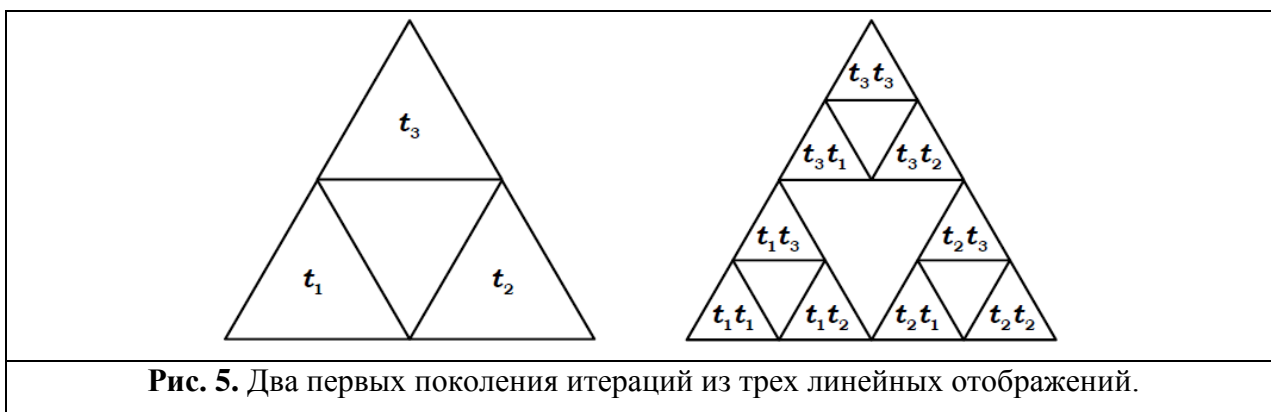
$$t_3 : f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (5)$$



Таким образом, три вышеопределенные линейные функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ осуществляют искомое преобразование данного треугольника в три треугольника в два раза меньшего размера. Возникает вопрос: а что будет, если каждый из этих маленьких треугольников в свою очередь подвергнуть этим трём преобразованиям. Тогда возникнет уже девять треугольников размером, меньшим исходного. Например, выполняя сначала преобразование t_3 , а затем преобразование t_2 , мы в итоге получаем треугольник со стороной $1/4$, показанный на рис. 4 (справа), и так далее.

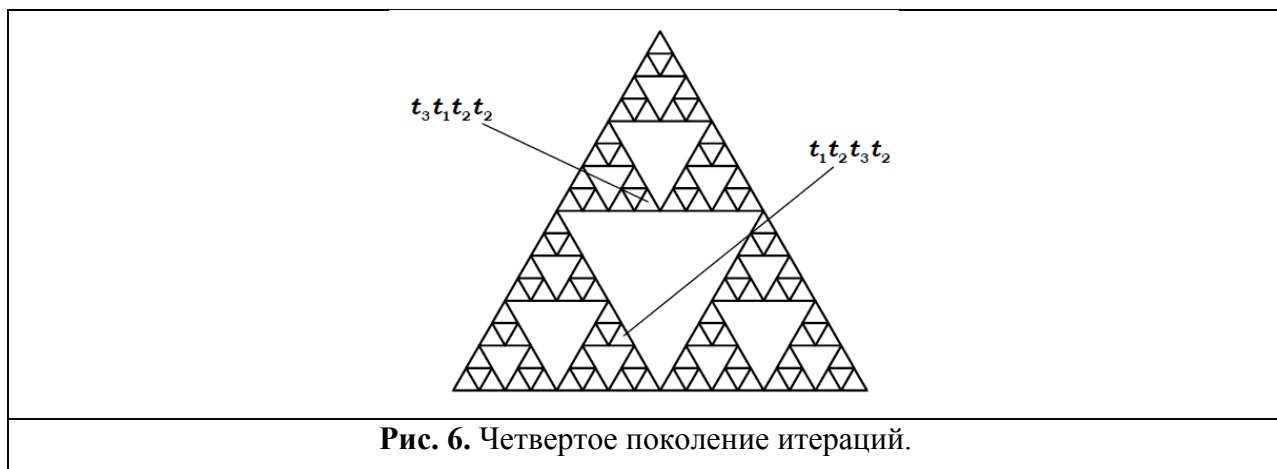


Общий случай показан на рис. 5 (справа), где приведены все треугольники с обозначениями результирующего преобразования – кода, с помощью которого они были получены из исходного треугольника. Слева показан первый шаг итерационной процедуры. Комбинация $(t_m t_n)$, стоящая в каждом из девяти маленьких треугольников (рис. 5), означает, что треугольник был получен из исходного сначала преобразованием t_m , а затем к полученному треугольнику было применено преобразование t_n .



Отметим некоммутативность этих преобразований. Например, преобразованиям $(t_1 t_2)$ и $(t_2 t_1)$ соответствуют разные треугольники. На рис. 6 приведено четвертое поколение итераций, состоящее из $3^4 = 81$ треугольника, и показан код двух из них. Ясно, что,

действуя подобным образом, мы точно воспроизводим алгоритм построения салфетки Серпинского. Поэтому после бесконечного числа шагов приходим, в конце концов, к множеству точек, образующих этот фрактал.



Обобщая вышесказанное, можно представить рассмотренный детерминированный алгоритм *системы итерированных функций (СИФ)* в виде следующей последовательности множеств:

E_0 – начальное множество,

$$E_1 = t_1(E_0) \cup t_2(E_0) \cup t_3(E_0),$$

$$E_2 = t_1(E_1) \cup t_2(E_1) \cup t_3(E_1),$$

.

.

$$E_n = t_1(E_{n-1}) \cup t_2(E_{n-1}) \cup t_3(E_{n-1}),$$

.

.

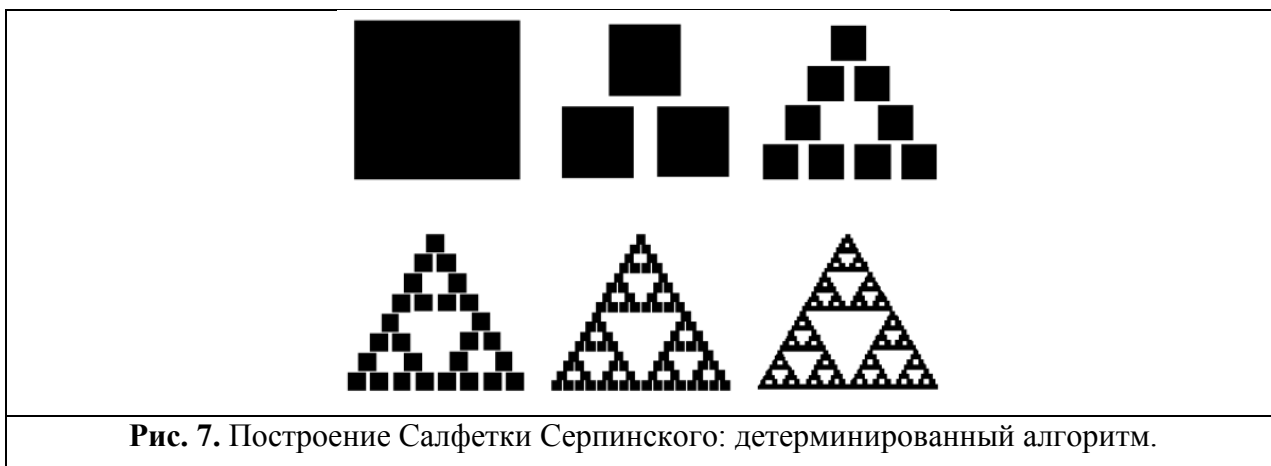
(6)

Таким образом, согласно (6) на произвольном n -м шаге итерации к множеству E_{n-1} применяются сразу три преобразования $t_1(E_{n-1})$, $t_2(E_{n-1})$, $t_3(E_{n-1})$, а затем получившиеся три множества объединяются (\cup). Последовательность множеств $(E_1, E_2, \dots, E_{n-1}, \dots)$ сходится к некоторому предельному множеству

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \quad (7)$$

которое, как уже отмечалось выше, называют аттрактором.

Сам по себе механизм построения известного фрактала, безусловно, интересен. Однако следует обратить особое внимание на замечательное и принципиально новое свойство алгоритмов СИФ. Это свойство заключается в том, что при использовании алгоритмов, основанных на теории итерированных функций, их результат совершенно не зависит от начального множества E_0 (указанное свойство следует из теоремы для итерационного процесса (2)). По отношению к рассмотренному выше алгоритму, мы могли бы стартовать с любой фигуры, необязательно имеющей форму равностороннего треугольника. Это, например, может быть круг или квадрат, как на рис. 7, или любая другая фигура на плоскости. На каждом шаге, уменьшаясь в размерах в два раза и утраиваясь в количестве, эти фигуры, в конце концов, превратились бы в неразличимые глазом бесформенные точки, образующие фрактал – салфетку Серпинского.



Причина такого поведения заключается в том, что салфетка Серпинского является аттрактором для системы из трёх линейных преобразований $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, которые задаются формулами (3)-(5).

Метод случайных итераций.

В методе случайных итераций в качестве начального множества выбирают одну точку. В этом случае алгоритм имеет такой вид:

z_0 – начальная точка (произвольная);

$$z_1 = t_1(z_0) \text{ или } z_1 = t_2(z_0) \text{ или } z_1 = t_3(z_0),$$

$$z_2 = t_1(z_1) \text{ или } z_2 = t_2(z_1) \text{ или } z_2 = t_3(z_1), \quad (8)$$

.....

$$z_n = t_1(z_{n-1}) \text{ или } z_n = t_2(z_{n-1}) \text{ или } z_n = t_3(z_{n-1}),$$

.....

На каждом шаге применяется не сразу три преобразования t_1 , t_2 , t_3 , как было в детерминированном методе, а только одно из них, выбранное случайным образом. Таким образом, на каждом шаге мы получаем одну точку. Оказывается, что после некоторого переходного этапа точки, сгенерированные в случайном алгоритме, заполняют салфетку Серпинского (разумеется, преобразования t_1 , t_2 , t_3 при этом определяются формулами (3)-(5)). Подчеркнём ещё раз, что выбор начальной точки является произвольным, и после нескольких итераций точки начинают заполнять салфетку Серпинского.

Возьмём равносторонний треугольник с вершинами в точках $A=(0,0)$, $C=(1,0)$, $B=(1/2, \sqrt{3}/2)$ (рис. 1). Выберем произвольным образом начальную точку z_0 . Бросим теперь игральную кость, представляющую собой кубик, на шести гранях которого проставлены буквы A , B и C . Пусть каждая буква присутствует на двух гранях, тогда вероятность выпадения любой буквы одинакова и равна $1/3$. Если выпала буква A , то соединим мысленно начальную точку z_0 с вершиной треугольника A отрезком прямой и на его середине поставим точку. Если выпала буква B , то аналогично поставим точку на середине отрезка, соединяющего точки z_0 и B . Если выпало C , то поставим точку на середине отрезка между точками z_0 и C . Назовём новую точку z_1 . Повторяя описанную процедуру, получаем последовательность точек $z_0, z_1, z_2, z_3, \dots$ на плоскости, каждая из которых находится на полпути до случайно выбранной вершины.

На рис. 8 (слева направо) показаны результаты этой игры соответственно с 1000, 5000 и 30000 точками. Невероятно, но факт – по мере увеличения числа точек все явственнее видна структура треугольника Серпинского. Видно, что, хотя каждый раз выбор вершины треугольника происходит чисто случайным образом, возникающее множество точек на плоскости отнюдь не случайно и обладает ярко выраженной фрактальной структурой.

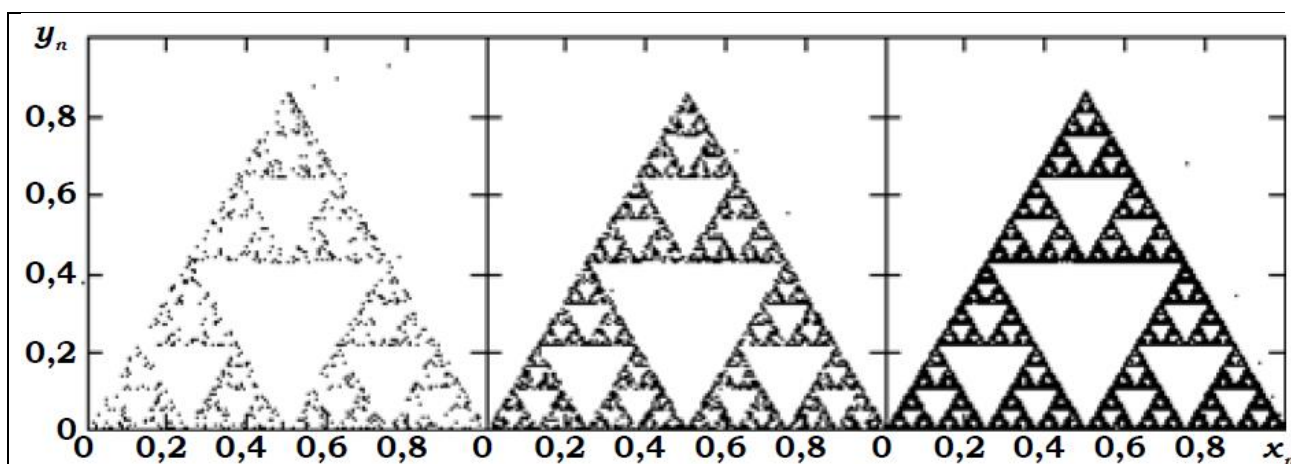


Рис. 8. Построение салфетки Серпинского, метод случайных итераций (слева направо 1000, 5000, 30000 итераций).

Как понять результат описанной выше игры? Дело в том, что эта игра есть не что иное, как алгоритм метода случайных итераций (8) для получения салфетки Серпинского. Действительно, можно заметить, что, по сути, на каждом шаге к точке z применялось (случайным образом выбранное) одно из трёх вышеописанных (формулы (3)-(5)) преобразований t_1, t_2, t_3 . В этом легко убедиться, с учётом того, что координаты вершин треугольника $A=(0,0)$, $C=(1,0)$, $B=(1/2, \sqrt{3}/2)$; тогда

$$t_1: f_1(z) = \frac{z+A}{2} = \frac{z}{2}, \quad (9)$$

$$t_2: f_2(z) = \frac{z+C}{2} = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}, \quad (10)$$

$$t_3: f_3(z) = \frac{z+B}{2} = \frac{z}{2} + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (11)$$

Попробуем, на качественном уровне, осмыслить этот удивительный результат, когда после случайной последовательности преобразований $t_n, t_m, t_j \dots$ при произвольном выборе начальной точки z_0 и, как следствие, разных последовательностей точек итерационного процесса мы, как результат, получаем совершенно одинаковые "фотографии". Возникает вопрос: «Как вообще случайность может порождать строгий порядок, присущий салфетке Серпинского?».

Оказывается, изображающая точка в результате бесконечной цепочки случайных итераций (назовём эту цепочку *орбитой*) сколь угодно близко подойдёт к *каждой* точке фрактального множества, образующего салфетку Серпинского. При этом орбита может не совпадать с салфеткой, но и более того, вообще может не иметь с ней ни одной общей точки. Рис. 9 поясняет эту мысль.

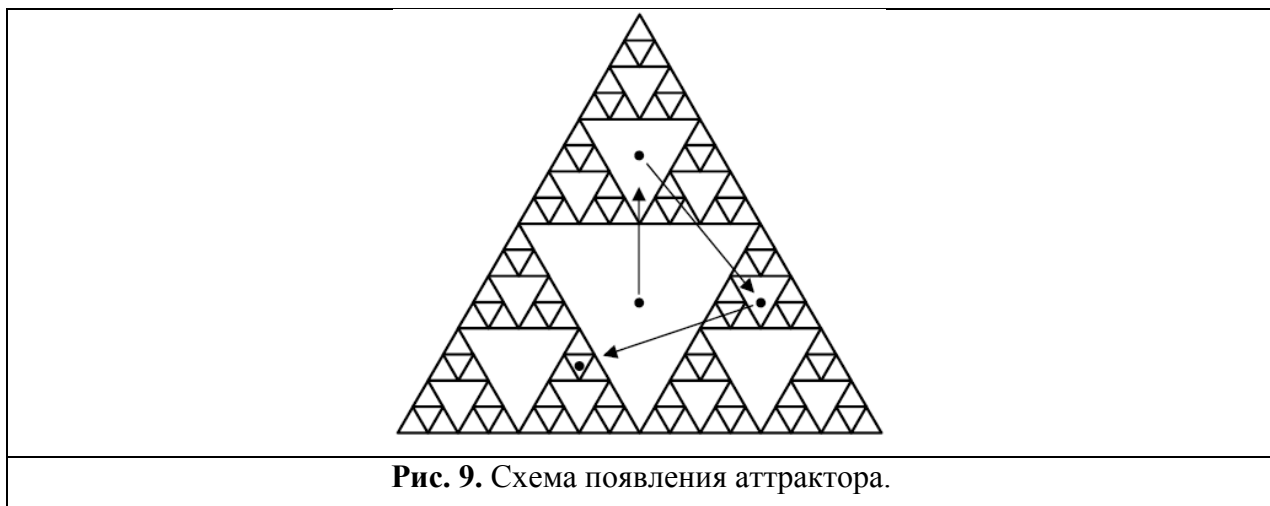


Рис. 9. Схема появления аттрактора.

Как видно, если точка z_0 принадлежит удаляемому на каком-то этапе центральному треугольнику, то её орбита не имеет с салфеткой Серпинского ни одной общей точки. Но и в этом случае орбита имитирует салфетку Серпинского. Причём орбита сходится к своему аттрактору (салфетке Серпинского) весьма быстро, потому что коэффициент подобия равен $1/2$, что меньше 1. Уже после небольшого числа итераций точка попадает в исключенный треугольник столь малого размера, что его для всех практических целей можно считать точечным. Так, после 10 итераций размер этого треугольника составляет $2^{-10} \approx 10^{-3}$ размера исходного треугольника.

В результате, образующиеся на экране сгущения вокруг точек салфетки создают зрительное восприятие салфетки Серпинского. Точки орбиты, которых отстоят от салфетки, тоже присутствуют на фотографии, но они расположены изолированно. Поэтому на ярком фоне самой салфетки они малозаметны и никак не влияют на общую картину.

Такая ситуация объясняется тем, что *каждая точка* салфетки Серпинского притягивает к себе неограниченно много точек орбиты $Z = \{z_0, z_1, \dots\}$ произвольной начальной точки z_0 . Другими словами, салфетка Серпинского является *предельным множеством*, т. е. множеством предельных точек, для орбиты $Z = \{z_0, z_1, \dots\}$ произвольной начальной точки. (Точка \tilde{z} называется *предельной* для орбиты Z , если для

каждого положительного ε найдется бесконечно много точек орбиты Z , которые лежат в ε -окрестности точки \tilde{z} .)

Додавим к сказанному следующий комментарий. Пусть числа j_n (n – номер итерации) принимают значения 1, 2 или 3 и тем самым определяют преобразования подобия t_1 , t_2 или t_3 . Бесконечную последовательность

$$j_1 j_2 j_3 \dots j_n \dots \quad (12)$$

можно назвать адресом точки z из салфетки Серпинского. Итак, каждой точке z салфетки Серпинского можно поставить в соответствие ее адрес (12), который является бесконечной последовательностью чисел 1, 2 или 3.

Рассмотрим игру в "Хаос". Пусть выбрана начальная точка z_0 и имеем бесконечную последовательность B чисел 1, 2 и 3, которые выбираются случайным образом. В теории вероятностей доказывается, что такая последовательность (назовем ее *универсальной*) содержит *любой* конечный набор чисел 1, 2 и 3. Последовательность устанавливает очередность применения преобразований подобия t_1 , t_2 или t_3 и тем самым определяет орбиту Z начальной точки z_0 .

Сформулируем теорему, которая является ключом к ответу на основной вопрос: почему орбита на "фотографии" выглядит как салфетка Серпинского.

Пусть B – универсальная числовая последовательность и Z – соответствующая орбита произвольной точки z_0 . Тогда предельное множество для орбиты Z есть салфетка Серпинского.

Не рассматривая доказательство этой теоремы, можно сказать следующее. Поскольку последовательность B является универсальной, то в ней всегда можно выделить такую комбинацию из чисел 1, 2 и 3 которая соответствует адресу (12) некоторой точки салфетки Серпинского тем самым дает возможность подойти орбите к этой точке как угодно близко. Заметим, что если взять какую-либо начальную точку z_0 и применять к ней систему итерированных функций строго определенной последовательности, то в итоге мы придем к циклическому процессу, состоящему из набора точек. Например, для рассмотренной выше системы итерированных функций (9)-(11) имели бы алгоритм:

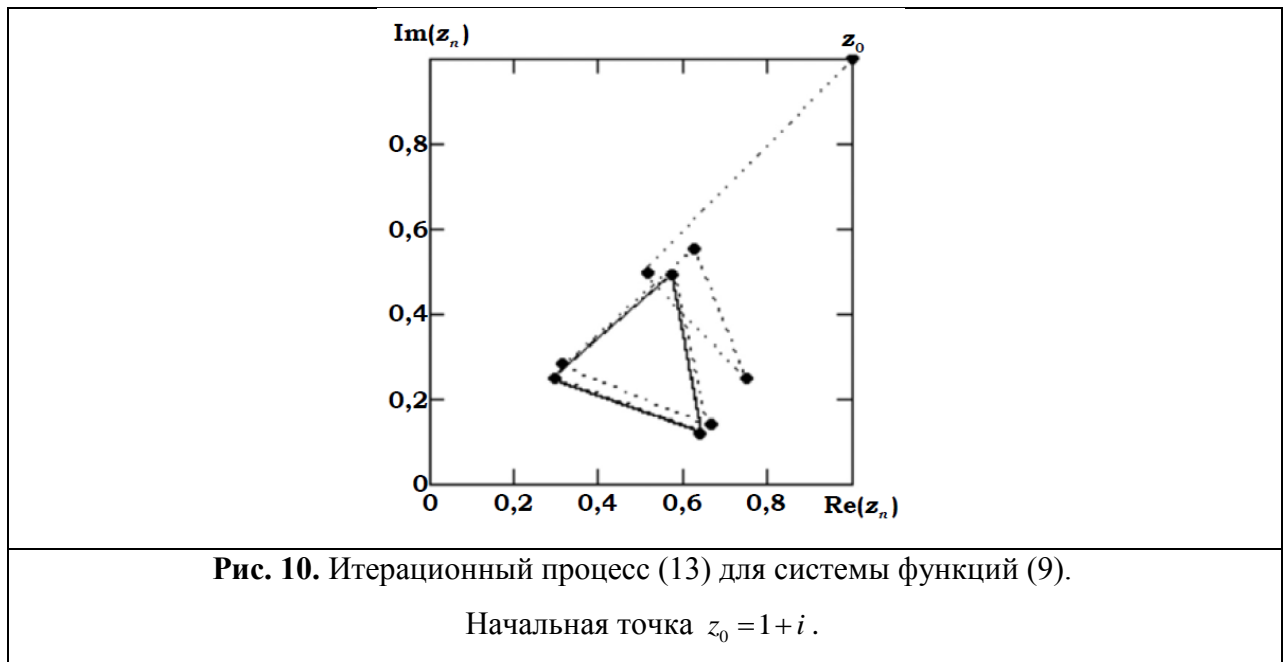
$$z_1 = f_1(z_0); z_2 = f_2(z_1); z_3 = f_3(z_2); z_4 = f_1(z_3); z_5 = f_2(z_4) \text{ и т.д.} \quad (13)$$

После ряда итераций образуется циклический процесс, при этом точки цикла $z^{(1)}$, $z^{(2)}$, $z^{(3)}$ определяются из системы линейных уравнений

$$z^{(1)} = f_3\left(f_2\left(f_1\left(z^{(1)}\right)\right)\right); z^{(2)} = f_1\left(f_3\left(f_2\left(z^{(2)}\right)\right)\right); z^{(3)} = f_2\left(f_1\left(f_3\left(z^{(3)}\right)\right)\right). \quad (14)$$

Такой результат является следствием теоремы о сжимаемых отображениях (см. (1), (2)). На рис. 10 показан ход итерационного процесса (13) для системы итерированных функций (9), при произвольном выборе начальной точки z_0 , а именно $z_0 = 1 + i$. Здесь крупные точки определяют ход итерационного процесса, а мелкие точки позволяют проследить последовательность процесса. Как видно, процесс быстро сходится к циклу, который состоит из трех точек:

$$z^{(1)} = 0.29 + i0.25; z^{(2)} = 0.64 + i0.12; z^{(3)} = 0.57 + i0.5. \quad (15)$$



Именно для того, чтобы не возникли точки, образующие цикл, систему итерированных функций следует применять либо к некоторому компактному множеству (множеству ненулевой меры), либо, в случае начального множества в виде одной точки, необходимо использовать случайный (нерегулярный) выбор функций отображения на каждом шаге итерации.

Пример мультифрактала.

До сих пор мы рассматривали фрактальные объекты, геометрические свойства которых характеризовались величиной фрактальной размерности. В качестве примера, на рис. 8 изображена салфетка Серпинского, построенная методом случайных итераций. Здесь система итерируемых функций состоит из трех линейных преобразований (9), каждое из которых выбиралось с одинаковой вероятностью, равной $1/3$. Для оценки меры данного множества, как обычно, покрываем салфетку сетью элементов покрытия, например, треугольниками со стороной δ . Очевидно, что меры отдельно взятых элементов покрытия будут одинаковы, поскольку примерно одинаковым будет число точек, попадающих в каждый элемент покрытия.

Нарушим теперь равенство вероятностей для преобразований (9). Пусть *первое* из них выбирается с вероятностью $0,9$, а *второе и третье* – с вероятностью $0,05$. Результат такой игры в хаос представлен на рис. 11. Как видим, точки внутри треугольника ABC распределены крайне неравномерно. Большая их часть расположена у вершины A и ее образов. У вершин B и C (и их образов) их значительно меньше. Тем не менее, данное множество точек (при стремлении числа итераций к бесконечности) является фракталом, поскольку сохранилось основное свойство фрактального множества – самоподобие. Действительно, треугольник DFC , по своим геометрическим и статистическим свойствам полностью подобен большому треугольнику ABC . Как и в большом треугольнике, точки в нем концентрируются в основном вблизи вершины D – образе вершины A .

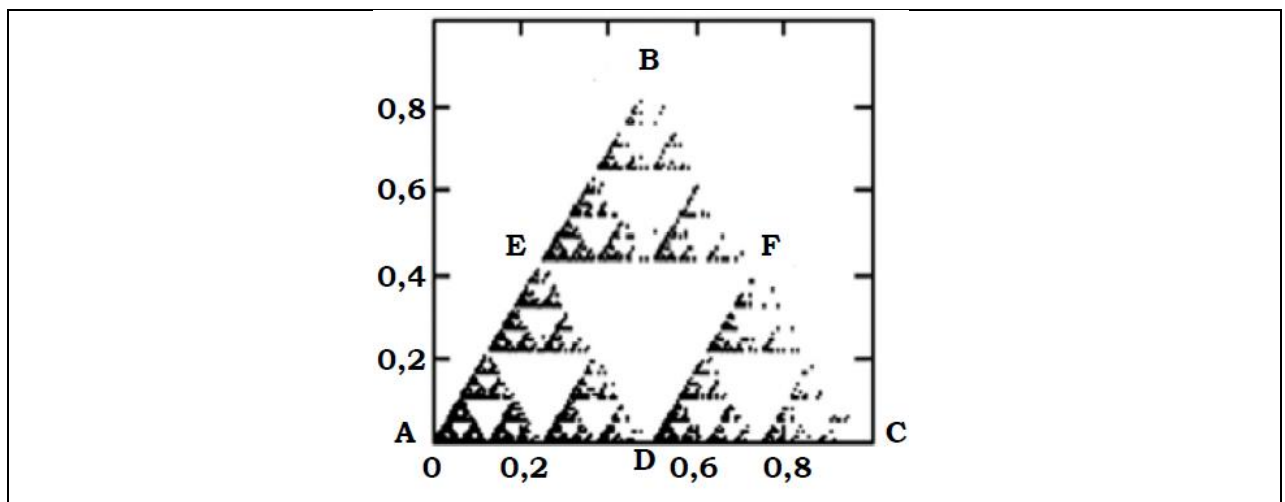


Рис. 11. Салфетка Серпинского, построенная с помощью метода случайных итераций при неравных вероятностях выбора итерируемых функций. Показано 10^6 итераций.

Салфетка Серпинского на рис. 11 (сравните с рис. 8) являет собою пример *неоднородного фрактала*. Под словом "неоднородный" понимаем неравномерное

распределение точек множества по фракталу. Подобные неоднородные фрактальные множества называют также **мультифракталами**.

Однако, несмотря на неравномерность распределения точек по фракталу, его фрактальная размерность осталась при этом прежней, $D = \ln 3 / \ln 2$. Действительно, покрытие этого множества все более мелкими треугольниками можно осуществить таким же образом, что и в случае однородного фрактала на рис. 8.

Следует сказать, что мультифракталы важны потому, что именно они, как правило, встречаются в природе, тогда как простые самоподобные объекты являются идеализацией реальных явлений. Важными представителями мультифракталов являются многие сигналы, регистрируемые в натурных экспериментах, например, сигналы биологического происхождения.

Нелинейные комплексные отображения. Множество Жюлиа.

Выше мы рассмотрели алгоритм *системы итерированных функций (СИФ)*, как метод построения фрактальных структур. Еще одним изящным алгоритмом создания фрактальных объектов на плоскости является использование комплексных отображений, сопоставляющих одному комплексному числу $z_n = x_n + iy_n$ другое комплексное число $z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$ согласно итерационному правилу $z_{n+1} = f(z_n)$, где $f(z)$ – нелинейная функция, n – номер итерации.

Пусть z_0 – начальная точка, тогда

$$z_1 = f(z_0, c); z_2 = f(z_1, c); \dots; z_{n+1} = f(z_n, c). \quad (15)$$

Существенным моментом здесь является именно нелинейная зависимость между результатом и начальным значением, т.е. закон $z_{n+1} = f(z_n)$ должен быть более сложным, чем пропорциональность $z_{n+1} = \text{const} \cdot z_n$. Итерируемый алгоритм (15) указывает также на то, что правило $z_{n+1} = f(z_n)$ зависит, в общем случае, от параметра c (или нескольких параметров).

В начале прошлого века нелинейные комплексные отображения исследовали Гастон Жюлиа и Пьер Фату. Так в 1918 г. Жюлиа представил труд в несколько сотен страниц, который был награжден призом Французской Академии.

	
<p>Гастон Морис Жюлиа Французский математик (1893 – 1978)</p>	<p>Пьер Жозе Луи Фату французский математик (1878–1929)</p>

Однако их исследования были забыты лет на пятьдесят, "поскольку в отсутствии современной компьютерной графики было почти невозможно передать их тонкие идеи".

Значительный интерес к работам Жулиа и Фату возник в конце 70-х годов XX века, когда Мандельброт и Хаббард получили компьютерное изображение некоторых множеств, которые исследовали Жулиа Фату. Их изображения оказались необычайно причудливы и изящны. Отличительной чертой этих множеств явилось самоподобие и сильная изрезанность их границ, что, по-видимому, дало основание Мандельброту назвать такого типа множества фракталами. Наиболее полно изучены нелинейные комплексные отображения, когда f – полином или рациональная функция.

Неподвижные точки. Циклы.

Прежде чем мы приступим к исследованию определённого комплексного отображения, напомним необходимые термины и понятия. Последовательность

$$\{z_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n(z_0)\}_{n=0}^{\infty} \quad (16)$$

называют орбитой точки z_0 . Здесь

$$f^{(1)}(z_0) = f(z_0); f^{(2)}(z_0) = f(f(z_0)); \dots; f^{(n)}(z_0) = f\left(\underset{n \text{ раз}}{f \dots f(z_0)}\right); \dots \quad (17)$$

Неподвижная точка \tilde{z} отображения $z_{n+1} = f(z_n)$ это корень уравнения

$$f(z) = z. \quad (18)$$

Очевидно, что начав процесс итераций в такой точке, мы никогда её не покинем. Можно сказать, что это есть своеобразное состояние равновесия. Равновесие, как известно, может быть трёх типов: *устойчивое*, *неустойчивое* и *безразличное*. В полной аналогии с этим неподвижная точка отображения может быть трёх типов: *притягивающая (устойчивая)*, *отталкивающая (неустойчивая)* и *нейтральная*.

Чтобы вычислить характер особой точки \tilde{z} отображения $f(z)$, нужно вычислить производную $f'(z)$. Если $|f'(z)| < 1$, то точка \tilde{z} – притягивающая, если $|f'(z)| > 1$, то точка \tilde{z} – отталкивающая, если $|f'(z)| = 1$, то точка \tilde{z} – нейтральная. Для притягивающей неподвижной точки z естественно ввести *область (бассейн) притяжения* как следующее множество:

$$A(\tilde{z}) = \{z: f^{(n)}(z) \rightarrow \tilde{z} \text{ при } n \rightarrow \infty\}. \quad (19)$$

Если точка \tilde{z} есть периодическая точка периода n , то она является неподвижной точкой отображения $f^{(n)}(z)$, то есть, выполняется равенство $\tilde{z} = f^{(n)}(\tilde{z})$. Условием ее устойчивости такой точки является неравенство:

$$|f'(\tilde{z}_1)f'(\tilde{z}_2)\dots\dots\dots f'(\tilde{z}_n)| < 1. \quad (20)$$

Если эта производная по модулю меньше единицы, то цикл называют *притягивающим*, если больше единицы, то – *отталкивающим* с отталкивающими периодическими точками.

Аттрактором на комплексной плоскости является точка или точки, к которым сходится процесс итераций $z_{n+1} = f(z_n)$ при $n \rightarrow \infty$. В качестве такого аттрактора может выступать притягивающая неподвижная точка или притягивающий цикл определённого периода.

Наполненным множеством Жюлиа для отображения вида (15) называется множество

$$K(f) = \{z: |f^n(z)| \leq R < \infty, n = 0, 1, 2, \dots, \infty\}, \quad (21)$$

где R – положительная константа, т. е. это множество точек комплексной плоскости, орбиты которых ограничены. Граница множества K называется просто *множеством Жюлиа* и обозначается $J(f)$. Множество $J(f)$ является подмножеством множества K ,

однако в любой ее ε -окрестности ($\varepsilon > 0$) точки из множества $J(f)$ содержатся как точки орбиты которых ограничены, так и точки орбиты которых уходят на бесконечность.

Мы рассмотрим множества Жюлиа для полиномов второй степени

$$f_c(z) = z^2 + c, \quad (22)$$

где c – комплексная константа. Исторически изучение нелинейных комплексных отображений начиналось именно с функций (22). Вид множества Жюлиа существенно зависит от значения параметра c в выражении (22). Заметим, что точка $z=0$ является критической точкой для функции (22), то есть, точка $z=0$ является корнем уравнения $f'_c(z)=0$.

Из наиболее известных примеров нелинейных комплексных отображений рассмотрим самое простое, а именно квадратичное отображение

$$z_{n+1} = f_c(z_n) = z_n^2 + c, \text{ при } n=0,1,2,\dots \quad (23)$$

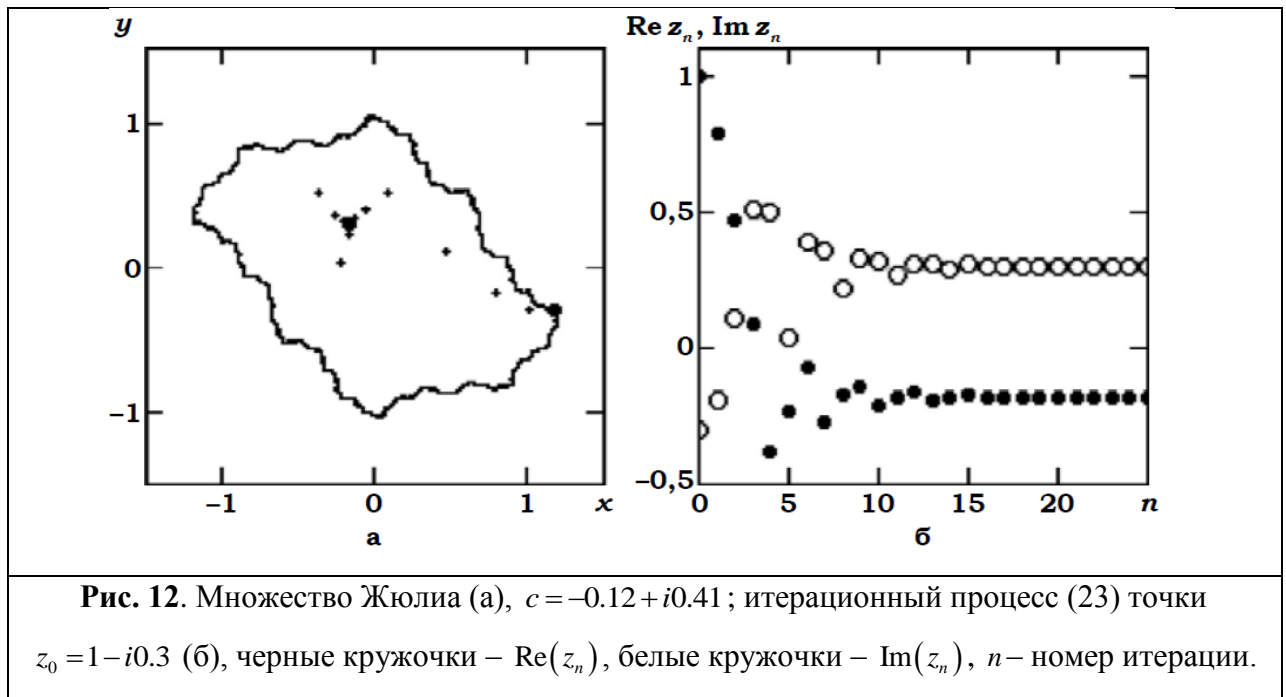
где $c = a + ib$ – комплексная константа. Это отображение всегда может быть представлено в виде двух вещественных отображений

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a; \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b. \end{cases} \quad (24)$$

в соответствии с которыми точка на комплексной плоскости с координатами (x_n, y_n) переходит в точку (x_{n+1}, y_{n+1}) .

При итерировании функции f_c представляет интерес поведение итераций z_n , а именно: либо итерации z_n ограничены, либо они стремятся к бесконечности. С этими ключевыми позициями связано определение множества Жюлиа J_c . Фактически множество Жюлиа J_c разделяет всю плоскость на два множества, одно из них состоит из точек, орбиты которых ограничены, а другое – из точек, орбиты которых уходят в бесконечность.

Пример множества Жюлиа отображения (23) для $c = -0.12 + i0.41$ показан на рис. 12.



Замкнутая кривая на рис. 12а представляет собой множество Жюлиа. Две крупные черные точки – это две неподвижные точки отображения f_c . Одна из них принадлежит множеству J_c (замкнутой кривой) – это неустойчивая неподвижная точка $z_1 \approx 1.18 - i0.3$, другая располагается внутри множества Жюлиа это устойчивая неподвижная точка $z_2 \approx -0.18 + i0.3$. Устойчивая неподвижная точка является аттрактором итерационного процесса для внутренних точек наполненного множества Жюлиа. Как пример, на рис. 12б показан итерационный процесс точки $z_0 = 1 - i0.3$. Как видно, после пятнадцатой итерации устанавливается предельный цикл, порожденный устойчивой неподвижной точкой $z_2 \approx -0.18 + i0.3$.

Линия, изображающая J_c сильно изломана и под лупой любого увеличения она будет также изломана, как и без неё. Заметим, что если бы функция f_c была бы линейной, то преобразование f_c было бы преобразованием подобия, как, например, для салфетки Серпинского. Однако f_c нелинейная, квадратичная функция. Поэтому отдельные фрагменты J_c не являются строго подобными друг другу, тем не менее, они во многом схожи между собой.

Таким образом, найденное множество Жюлиа обладает фрактальной структурой. Она напоминает извилистую линию морского берега, которая становится тем длиннее, чем более мелкий масштаб используется для её измерения.