

Лекція 2

1. Коливання лінійного осцилятора. Мат. Модель.
2. Позитивне і негативне загасання (тертя).
3. Особливі точки: стійкі, нестійкі, центр (еліптична точка), вузол, фокус, сідло. На прикладі осцилятора із загасанням.
4. Фазовий простір.
5. Простір параметрів. Розташування особливих точок на площині параметрів.

Лінійні коливання

1. Математичні моделі:

«Шкільна» модель (коливання вантажу на пружині, коливальний LC-контур):

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (1)$$

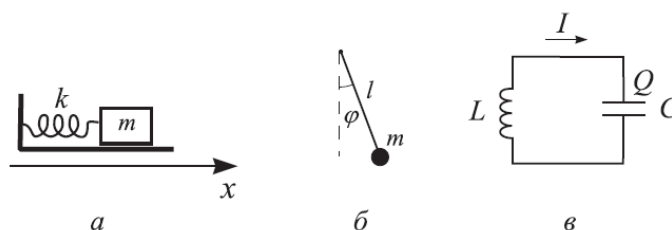


Рис.1. Приклади осциляторів.

Канонічна (комп'ютерна):

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1, \\ \dot{x}_1 = -\omega^2 x_0 \end{cases} \quad (2)$$

Матрична модель:

$$\dot{\vec{x}} = \hat{M} \cdot \vec{x}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}; \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

$$x(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (4)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (5)$$

$$x_0 = A \cos \varphi_0, \quad v_0 = -\omega A \sin \varphi_0. \quad (6)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{-v_0/\omega}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}. \quad (7)$$

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (8)$$

$$\dot{x}_i = F_i(\vec{x}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (9)$$

$$\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = -2\nu x_1 - \omega^2 x_0 \end{cases} \quad (11)$$

Два параметра (ω^2, ν).

Порядок диференціального рівняння визначається ступенем старшої похідної, що входить до нього. Порядок рівняння збігається з числом незалежних початкових умов, які необхідно задати в фіксований момент часу, щоб однозначно визначити розв'язок. Крім порядку диференціального рівняння використовують також поняття числа ступенів свободи. Воно дорівнює порядку диференціального рівняння, що поділений на два. Рівняння другого порядку відповідає система з одним ступенем свободи, третього порядку - з півтора ступенями, четвертого порядку - з двома і так далі. Лінійний осцилятор - це система з одним ступенем свободи.

2. Позитивне і негативне загасання.

$$\nu > 0; \nu < 0. \quad (12)$$

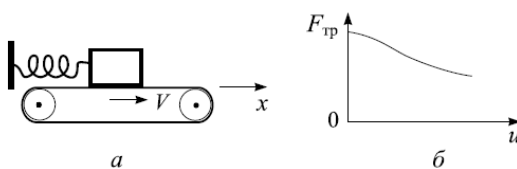


Рис.2. Механічна система з негативним тертям (а) і залежність сили «сухого» тертя від відносної швидкості бруска і стрічки (б).

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(V - \dot{x}). \quad (13)$$

Умова малості: $|\dot{x}| \ll V$.

$$F(V - \dot{x}) \approx F(V) - \dot{x}F'(V). \quad (14)$$

$$m\ddot{x} + [\lambda + F'(V)]\dot{x} + kx = F(V). \quad (15)$$

Зсув положення рівноваги на величину $x_0 = F(V)/k, \lambda = 2\nu$.

Малі відхилення: $\xi = x - x_0$.

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + k\xi = 0, \quad (16)$$

де $2\gamma = [\lambda + F'(V)]/m$. Це рівняння співпадає з рівнянням (10), але зараз параметр γ може бути від'ємним. Це трапляється, коли $F'(V) < -\lambda$. Тіло не буде знаходитися в стані спокою, а буде здійснювати переривчасті коливання.

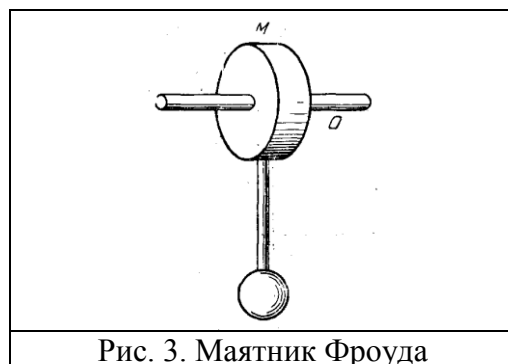


Рис. 3. Маятник Фроуда

Ще одним прикладом системи з негативним тертям може служити так званий маятник Фроуда. На вал, що обертається з рівномірною швидкістю, надіта муфта, яка жорстко пов'язана з маятником. Ця муфта може обертатися на валу і на неї діє сила тертя.

Для розв'язку рівняння (10) зручно ввести нову функцію:

$$x(t) = z(t) \cdot e^{-\nu t}; \quad \dot{x} = (\dot{z} - \nu \cdot z) e^{-\nu t}; \quad \ddot{x} = [(\ddot{z} - \nu \dot{z}) - \nu(\dot{z} - \nu z)] \cdot e^{-\nu t}. \quad (17)$$

$$\ddot{z} + (\omega^2 - \nu^2) z = 0. \quad (18)$$

Це рівняння осцилятора без загасання. Таким чином, іноді вдається введенням нових залежних і незалежних змінних істотно спростити модель даної системи. Наприклад система (18) стала просто системою лінійного осцилятора. У неї замість двох параметрів з'явився (можна вважати) тільки один параметр « $\omega^2 - \nu^2$ ».

Розв'язок рівняння (18) можна представити як:

$$z = A \cdot \cos(\omega_1 t) + B \cdot \sin(\omega_1 t), \quad \text{де } \omega_1^2 \equiv \omega^2 - \nu^2. \quad (19)$$

Тоді загальним розв'язком вихідного рівняння (10) буде функція:

$$x = e^{-\nu t} [A \cdot \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)]. \quad (20)$$

Деякі властивості розв'язку:

1. При $\nu > 0$ цей розв'язок загасає. Час загасання (час життя) оцінюється величиною $T_L \sim 1/\nu$.
2. Константи A і B визначаються початковими умовами.
3. Якщо $\nu < 0$, то розв'язок зростає. Це випадок моделювання активних осциляторних систем.

Введемо деякі потрібні нам надалі терміни

- 1) Система типу (10) є автономною, якщо її коефіцієнти (ω і ν) не залежать від часу. Ці коефіцієнти ми будемо називати параметрами системи. В даному випадку ми маємо двопараметричну систему.
- 2) Якщо $\nu = 0$, то система називається консервативною. Така система зберігає енергію ($W = W_{\text{кин.}} + W_{\text{пот.}}$).

Відзначимо, що енергію зберігає і більш загальна система: $\ddot{x} + \omega^2 x = \phi(x)$. У загальному випадку, це нелінійна система. Легко довести, що вона дійсно зберігає енергію.

Доведення:

1. Зобразимо це рівняння у вигляді:

$$\ddot{x} = F(x) = \phi(x) - \omega^2 x. \quad (21)$$

2. Помножимо ліву і праву частини на \dot{x} і проінтегруємо по dt :

$$\dot{x}\ddot{x} = F \cdot \dot{x}; \quad \int \dot{x}\ddot{x}dt = \int F \cdot \dot{x}dt; \quad \int_0^t \dot{x}d\dot{x} = \left[\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\dot{x}^2(0)}{2} \right]; \quad \int_0^t F(x)\dot{x}dt = \int_0^t F(x)dx = \Phi(x) - \Phi(x_0), \quad (22)$$

де $x_0 = x(0)$. В результаті отримуємо наступний інтеграл:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \Phi(x) = \frac{\dot{x}(0)^2}{2} - \Phi(x_0) = C = const. \quad (23)$$

3. Врахуємо, що вираз $W_k \equiv \dot{x}^2 / 2$ визначає кінетичну енергію, а вираз $W_n = -\Phi(x)$, яке залежить тільки від координати, можна розглядати в якості потенційної енергії, то інтеграл (15) визначає закон збереження енергії:

$$W \equiv W_k + W_n = const. \quad (24)$$

3. Класифікація особливих точок (ОТ)

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = -2\nu x_1 - \omega^2 x_0 \end{cases} \quad (25)$$

Алгоритм:

1. За визначенням в ОТ похідні дорівнюють нулю. Тому для нашої системи вони будуть відповідати таким співвідношенням

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 = 0 \\ \dot{x}_1 = -2\nu x_1 - \omega^2 x_0 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad x_{0,0} = x_{1,0} = 0. \quad (26)$$

Таким чином, всі особливі точки нашої системи розташовані на початку координат фазового площині.

2. Визначимо характер ОТ. Для цього злегка змістимо координату точки на фазовій площині від координати ОТ, тобто покладемо $x_0 = x_{0,0} + \delta x_0$, $x_1 = x_{1,0} + \delta x_1$. Підставимо ці вирази в (26). В результаті отримаємо систему рівнянь, яка описує динаміку цих малих відхилень від стаціонарних точок:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_0 = \delta x_1 \\ \delta \dot{x}_1 = -2\nu \delta x_1 - \omega^2 \delta x_0 \end{cases} \quad (27)$$

Запишемо характеристичне рівняння цієї системи $x \sim \exp(\lambda t)$:

$$\lambda^2 + 2\nu\lambda + \omega^2 = 0. \quad (28)$$

Коріння цього характеристичного рівняння рівні:

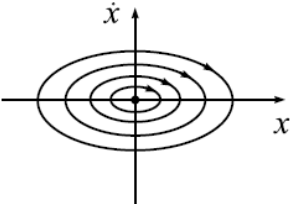
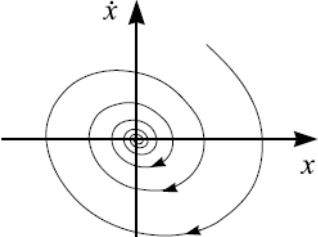
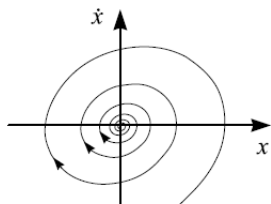
$$\lambda_{1,2} = -\nu \pm \sqrt{\nu^2 - \omega^2}. \quad (29)$$

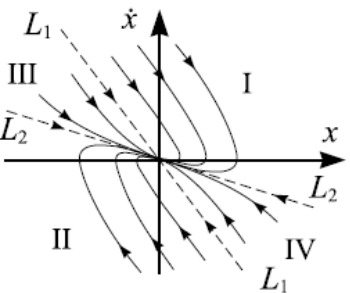
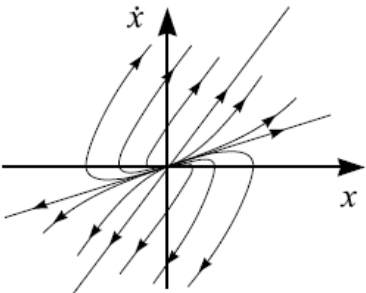
Ці корені визначають характер ОТ. За ним проводиться класифікація цих ОТ. Наведемо цю класифікацію.

- Якщо $\nu = 0$, то $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Це ОТ типу «**центр**». (30)

- Якщо $\nu \neq 0$, $\nu > 0$, $\omega > \nu$, то $\lambda_{1,2} = -\nu \pm i\sqrt{\omega^2 - \nu^2}$. ОТ в цьому випадку є стійким фокусом. Якщо $\nu \neq 0$, $\nu < 0$, то ОТ- **нестійкий фокус**. (31)

- Якщо $\nu > \omega$, то $\lambda_{1,2} = [-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - \omega^2}]$. Ми маємо **стійкий** $\nu > 0$ **або** $\nu < 0$ **нестійкий вузол**. (32)

		
Рис. 4. Центр. $\nu = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.	Рис. 5. Стійкий фокус. $\nu > 0$, $\omega > \nu$, $\lambda_{1,2} = -\nu \pm i\sqrt{\omega^2 - \nu^2}$.	Рис. 6. Нестійкий фокус. $\nu < 0$, $\omega > \nu$, $\lambda_{1,2} = -\nu \pm i\sqrt{\omega^2 - \nu^2}$.

	
Рис. 7. Стійкий вузол. $\nu > 0$, $\nu > \omega$, $\lambda_{1,2} = [-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - \omega^2}]$.	Рис. 8. Нестійкий вузол. $\nu < 0$, $\nu > \omega$, $\lambda_{1,2} = [-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - \omega^2}]$.

Особливу увагу слід звернути на випадок коли $\nu=0$, $\omega^2 < 0$. ОТ у цьому випадку носить назву «сідло». Ця точка, як ми побачимо далі є джерелом хаотичної динаміки. Для ілюстрації випадку, коли $\nu=0$, $\omega^2 < 0$ розглянемо рух зарядженої частинки поблизу максимуму потенційної енергії.

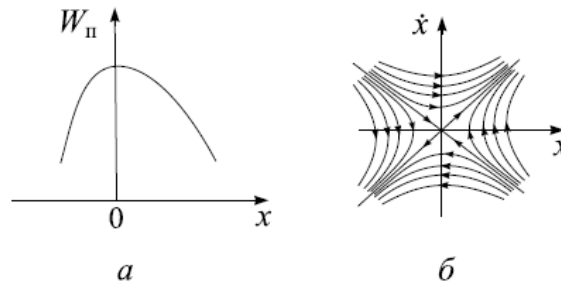


Рис. 9. Особлива точка типу сідло: вид потенційної функції поблизу максимуму (а) і картина фазових траєкторій поблизу нерухомої точки (б). Приклад сідлової точки.

Відраховуючи координату x точки частки від точки максимуму, запишемо розкладання потенційної енергії в ряд поблизу цієї точки:

$$W_p = W(0) - \beta^2 x^2/2 + O(x^3), \quad \beta^2 = -\omega^2 > 0. \quad (33)$$

$$\ddot{x} - \beta^2 x = 0. \quad (34)$$

$$x(t) = C_1 \exp(\beta t) + C_2 \exp(-\beta t), \quad (35)$$

$$\dot{x}(t) = \beta(C_1 \exp(\beta t) - C_2 \exp(-\beta t)), \quad (36)$$

де $C_{1,2}$ – константи інтегрування.

$$C_1 \exp(\beta t) = \frac{1}{2} \left(x(t) + \frac{\dot{x}(t)}{\beta} \right), \quad C_2 \exp(-\beta t) = \frac{1}{2} \left(x(t) - \frac{\dot{x}(t)}{\beta} \right). \quad (37)$$

Нехай $C_1 C_2 \neq 0$.

$$\frac{x^2}{4C_1 C_2} - \frac{\dot{x}^2}{4C_1 C_2} = 1. \quad (38)$$

Нехай, спочатку $C_2 = 0$. $\dot{x}(t) = \beta x(t)$.

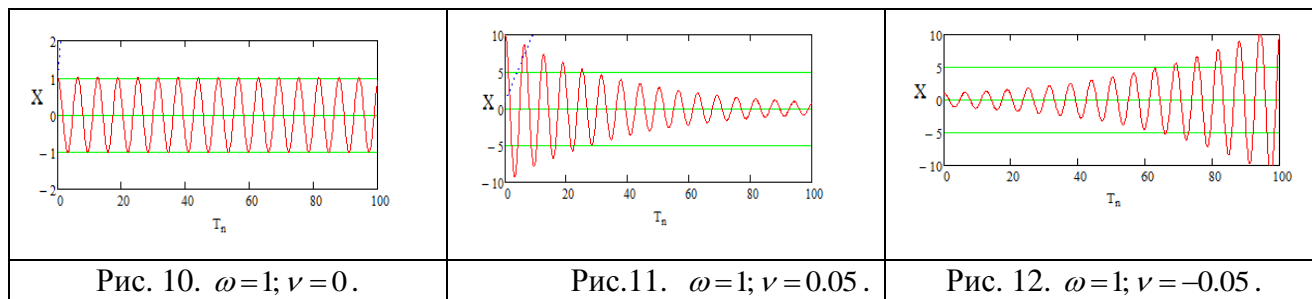
Нехай $C_1 = 0$. $\dot{x}(t) = -\beta x(t)$.

Таким чином, в загальному випадку картина фазових траєкторій поблизу сідла складається з нерухомої точки (особливої точки), чотирьох особливих траєкторій - пари сепаратрис, які входять в особливу точку і пари сепаратрис, які виходять з неї, і інших траєкторій, які поблизу сідла близькі за формою до гіпербол.

Приклади просторів.

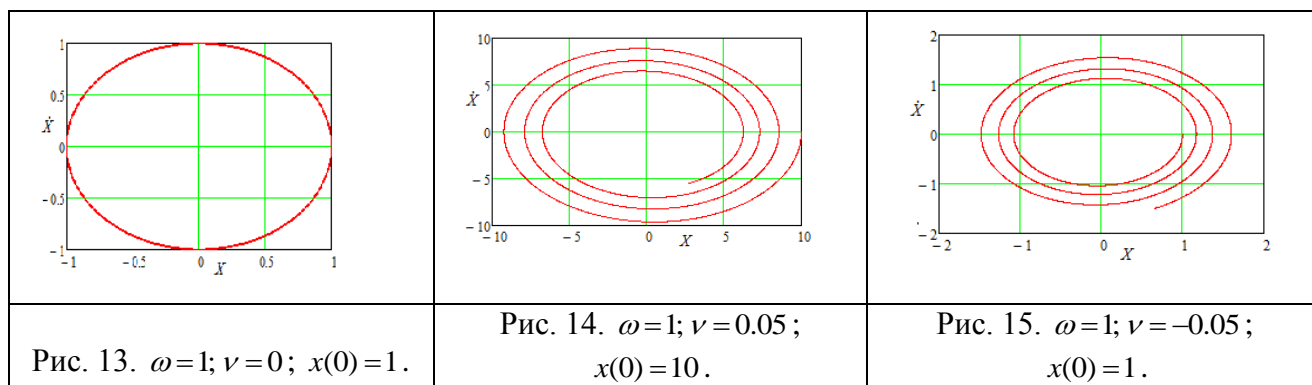
1. Простір координат і часу $\{\bar{x}, t\}$. У таких просторах горизонтальною віссю зазвичай є вісь часу, а перпендикулярними осями позначаються просторові осі. Приклади коливальних процесів представлені на рисунках 10-12.

2.



3. Фазовий простір $\{\bar{x}, \dot{\bar{x}}\}$. Осями цього простору є шуканий вектор функцій (\bar{x}) і його похідні $(\dot{\bar{x}})$.

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = -2\nu x_1 - \omega^2 x_0 \end{cases} \quad \ddot{x} + 2\nu \dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (37)$$



4. Простір параметрів

