Завдання до Лабораторної роботи 13

Темою роботи є побудова фрактальних об'єктів і обчислення їх розмірності.

Коментар до програми.

У випадку 1 розглянуто побудову фрактала, званого серветкою Серпінського. Цей фрактал може бути створений не тільки повторними вилученнями «трикутників з трикутників», як описано в Лекції 13. Серветку Серпінського також можна побудувати в результаті випадкового блукання точки на площині. Цей спосіб називається «*грою хаосу*».

Суть цього алгоритму полягає в наступному. На площині зафіксовано правильний трикутник A1A2A3. Відзначають будь-яку початкову точку B0. Потім випадковим чином вибирають одну з трьох вершин трикутника і відзначають точку B1 - середину відрізка з точкою B1, щоб отримати B2. Потім отримують точки B3, B4 і т. д. Важливо, щоб точка «стрибала» випадковим чином, тобто, щоб кожен раз вершина трикутника вибиралася випадково, незалежно від того, що було вибрано в попередні кроки. Якщо багаторазово відзначати на графіку послідовність точок Bi, то почне вимальовуватися серветка Серпінського.

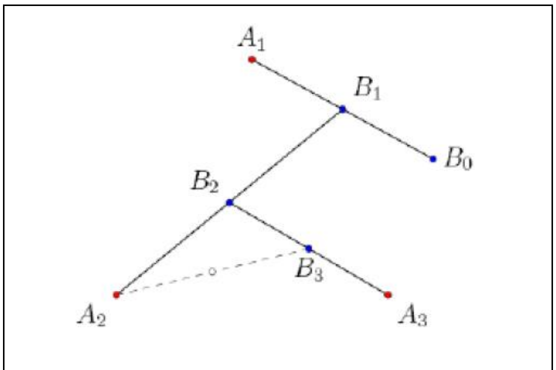

Рис. 1. Схема алгоритму вибору точок при побудові серветки Серпінського.

Опис алгоритму.

1) Задаємо вершини трикутника A1A2A3.
2) Потім, програма вибирає положення точки B0 випадковим чином. Для цього використовується вбудована функція rnd(10). Це означає, що координати для точки B0 будуть випадкові в межах від 0 до 10.
3) 3) Будуємо точку B1, розташовану посередині між точкою B0 і випадково обраної вершиною трикутника A1A2A3. Для цього треба кожен раз випадковим чином вибирати вершину трикутника. Це завдання вирішується за допомогою функції

"floor(rnd(3))+1". Після вибору вершини трикутника знаходимо координати середина відрізка між точкою B0 і обраної вершиною, тобто знаходимо координати точки B1.

4) Аналогічним чином знаходяться координати точки B2 і т.д. При досить великому числі точок виходить серветка Серпінського.

У випадку 2 програма використовує систему інтегрованих функцій, що задає сукупність генеруючих комплексних чисел на комплексній площині:

$$F(z)_j = \frac{z + i(r-1)v_j}{r}, \tag{1}$$

де z – комплексне число; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця; $r > 1$ – коефіцієнт стиснення (перетворення подібності) - деяке число, яке вибирається геометричною побудовою так, щоб наступна точка ставилася на відстані в l/r від відповідної вершини; l – відстань до неї початкової точки; v_j – комплексне число, що задається формулою

$$v_j = Ri\exp\left(\frac{i2\pi}{k} j\right), \tag{2}$$

k – кількість генеруючих відрізка однакової довжини. Формула (2) задає комплексні координати вершин рівностороннього k-кутника на описаної навколо нього кола радіусом R з центром на початку координат; $j = 0,1,2,...k-1$. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича одержуваної фрактальної фігури дорівнює

$$D = \frac{\ln k}{\ln r}. \tag{3}$$

Послідовність комплексних чисел, що відтворюють фрактальную лінію, генерується випадковим чином по рекурсивної формулою:

$$z_{n+1} = F(z_n)_{1+[\mathrm{rnd}(k)]}, \tag{4}$$

де $z_0 = 0$; $n = 0,1,...N$; $\mathrm{rnd}(k)$ – випадкове число, рівномірно (рівновірогідно) розподілене на інтервалі $(0,k)$; $[\xi]$ – позначення цілої частини від ξ. Для кращої виразності фракталів кількість ітерацій доцільно прийняти $N \geq 5 \cdot 10^4$.

Завдання

1. Для випадку 1 побудувати серветку Серпінського для N = 1000; 5000; 50000 точок. Кожен з отриманих рисунків вставити в звіт і вказати розмірність Dc отриманого фрактала. Також в звіті привести опис алгоритму побудови серветки Серпінського разом з пояснюючим рисунком.
2. Для випадку 2 до звіту привести описаний вище метод побудови фрактальних багатокутників.
3. В звіт вставити структури, що виходять при: $k=1$ (точки, розмірність $D_1=0$), $k=2$ (пряма лінія $D_2=1$), $k=3$ (серветка Серпінського $D_3=1.585$), $k=4$ (квадрат, що заповнює площину $D_4=2$), $k=5$ (5-ти кутник $D_5=1.672$), $k=6$ (6-ти кутник $D_5=1.631$). Тут D_k – розмірність Хаусдорфа-Безиковича відповідної фігури.
4. Кожну з фігур підписати так, як це зроблено в пункті 2.
5. Вказати, що послідовність наведених об'єктів відображає перехідні форми і еволюцію фрактальних структур.