



Доля П.Г.
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
факультет математики і інформатики
кафедра теоретичної і прикладної інформатики
2019 р.

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Залікові завдання.

Факультети : всі
Семестр : весінній
Форма навчання : денна
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень): бакалавр
Навчальна дисципліна: комп'ютерна математика.

Використовуючи систему символьних обчислень Mathematica розв'язати наступні задачі.

Завдання затверджено на засіданні кафедри теоретичної та прикладної інформатики, протокол №_____ від _____ травня 2019 р.

Завідувач кафедри: (підпис) (доц. Зарецька І.Т.)

Екзаменатор: (підпис) (доц. Доля П.Г.)

Варіант - 1

1. Створіть матрицю Z елементи якої обчислюються за формулою $Z_{ij} = X_i^2 - Y_j^2$, де $X = [-3, 0, 1, 2, 5]$, $Y = [-5, 0, -4, 1, 3]$ одновимірні масиви. Додайте до Z стовпець, складений з натуральних чисел $1, 2, 3, 4, 5$. Потім між першим і другим рядками вставте рядок, складений з одиниць.

2. Дано тетраедр з вершинами в точках $A(0,0,0)$, $B(2,1,0)$, $C(1,2,0)$, $D(1,3,1,2)$. Обчислити об'єм тетраедра, площу грані ABC та довжину висоти $h = |DE|$. Графічно зобразити контур тетраедра, висоту DE та точку E .

3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'''(x) + y''(x) - 6y'(x) = (20x + 14) \cdot e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

та побудувати його графік.

Варіант - 2

1. Для цілих чисел a від 1 до 10 створити список, елементи якого обчислюються за формулами

$$f = \begin{cases} a^2, & a < 3 \\ a + 5, & 3 \leq a < 7 \\ a, & a \geq 7 \end{cases}$$

2. Побудувати графік функції

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2), & 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ 3 - \sqrt{x^2 + y^2}, & 4 \leq x^2 + y^2 < 9 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 9 \end{cases}$$

3. Побудувати графік функції $y = 2x + \frac{1}{x}$ та дотичну до неї в точці $x_0 = 1.4$. Всі обчислення (зокрема значення похідної в точці x_0) виконати за допомогою функцій системи Mathematica.

Варіант - 3

1. Знайти довжини сторін, величини кутів та площу трикутника з вершинами в точках $A(1, -2, 3)$; $B(2, -1, 2)$; $C(3, -4, 5)$.

2. Використовуючи систему Mathematica, знайти площу під кривою $y = \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^2}$ на відрізку $[0, 1]$. Графічно зобразити зону, площа якої обчислюється.

3. Чисельно розв'язати систему ЗДР з початковими умовами Коші.

$$\begin{cases} x'_t = y - z, & x(0) = 1 \\ y'_t = z - x, & y(0) = 0 \\ z'_t = x - 2 \cdot y, & z(0) = 2 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 20.$$

Побудувати графіки розв'язку та фазову траєкторію.

Варіант - 4

1. Створити матрицю A розміром 5×5 , у якої на головній діагоналі розташовані натуральні числа від 1 до 5, на верхній побічній діагоналі – одиниці, на нижній побічній – мінус одиниці, а інші елементи дорівнюють нулю. Створити матрицю B розміром 5×5 , всі рядки якої співпадають з вектором $5, 4, 3, 2, 1$. Створити матрицю C розміром 5×5 , всі стовпці якої

співпадають з вектором $2, 4, 6, 8, 10$. Скласти всі масиви $D=A+B+C$. В масиві D замінити другий рядок одиницями, видалити останній стовпець та дописати праворуч до отриманого масиву масив з нулів розміром 5×2 . В отриманому масиві замінити елементи, індекси яких одночасно задовольняють нерівностям $1 \leq i \leq 3, 3 \leq j \leq 5$, на трійки.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 5, \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

чотирма способами: за допомогою функцій `Solve`, `LinSolve`, за допомогою оберненої матриці та правила Крамера.

3. Знайти розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь другого порядку.

$$\begin{cases} x'' + y' - 7x - 5y = 0 \\ x'' + x' - x - y = 0 \end{cases}, \quad x(0) = -1, y(0) = 0, x'(0) = 0.$$

Побудувати графіки отриманих розв'язків.

Варіант - 5

1. У трикутнику з вершинами $A\{2, 2, 7\}$; $B\{0, 0, 6\}$; $C\{-2, 5, 7\}$ знайти довжину медіани, проведеної з вершини B на протилежну сторону. Графічно зобразити трикутник, медіану і вектор нормалі до площини трикутника в точці A .

2. Використовуючи систему `Mathematica`, знайти площу під кривою $y = \frac{x^3}{x^2 + 4}$ на відрізку $[0, 2]$. Графічно зобразити зону, площа якої обчислюється.

3. Розв'язати систему ЗДР з початковими умовами Коші.

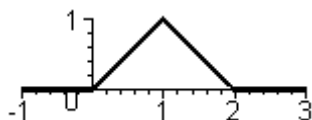
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_2 - 5y_1 + \sin t \end{cases}, \quad y_1(0) = 1, y_2(0) = 0.$$

Побудувати графіки розв'язку та фазову траєкторію.

Варіант - 6

1. Скласти рівняння площини, яка проходить крізь точки $A\{-3, 4, -7\}$; $B\{1, 5, -4\}$; $C\{-5, -2, 0\}$. Графічно зобразити точки та площину.

2. Побудувати рівняння ламаної, яка зображена на рисунку. Координати вузлів взяти з графіка.



Записати рівняння за допомогою формули Бернштейна, за допомогою функцій Piecewise та Interpolation. Для кожного способу побудувати графік (вони будуть однакові).

3. Обчислити довжину дуги кривої $y = x\sqrt{x}$ для $0 \leq x \leq 1$. Побудувати графік кривої та криволінійного відрізка, довжина якого обчислюється.

Вказівка. Довжина дуги плоскої кривої, заданої в декартових координатах явним рівнянням $y = y(x)$, обчислюється за формулою $L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$, де x_0 та x_1 визначають початкову та кінцеву точки дуги.

Варіант - 7

1. Дано координати вузлів $(x_i, y_i) = (0,0), (1,3), (2,1), (3,3)$. Знайти рівняння інтерполяційного полінома. Побудувати інтерполяційний кусково-кубічний поліном, що проходить крізь ці точки. Використовуючи ті ж самі точки, побудувати графік інтерполяційного кусково-кубічного сплайна. Виконати лінійну апроксимацію множини точок (x_i, y_i) . Зобразити точки та всі функції на одному графіку.

2. Використовуючи систему Mathematica, знайти площу під кривою $y = \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3}$ на відрізку $[0, \pi/4]$. Графічно зобразити зону, площа якої обчислюється.

3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + 0.2 y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Побудувати графік розв'язку, його похідної та фазову траєкторію. При побудові графіків обрати діапазон незалежної змінної $0 \leq t \leq 20$.

Вказівка. Фазовою траєкторією диференціального рівняння другого порядку є крива на площині з параметричним рівнянням $(y(t), y'(t))$.

Варіант - 8

1. Побудувати анімацію руху кривої $y = \sin x \cdot \sin t$ ($0 \leq x \leq \pi$) на відрізку часу $0 \leq t \leq 2\pi$.

2. Використовуючи систему Mathematica, знайти площу під кривою $y = \frac{8x - \arctg 2x}{1 + 4x^2}$ на відрізку $[0, 1/2]$. Графічно зобразити зону, площа якої обчислюється.

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x$. Призначити довільним сталим значення $C_1 = 1, C_2 = -1$ та побудувати графік цього окремого розв'язку.

Варіант - 9

1. Побудувати графік функції

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x^2 + y^2 \geq 4 \\ \sqrt{4 - x^2 - y^2} & , \quad 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ \sqrt{3}(x^2 + y^2) & , \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}.$$

Додати графік кривої, яка зображує переріз поверхні функції вертикальною площиною $y - x = 0$.

2. Використовуючи систему Mathematica, знайти площу під кривою $y = \frac{1 + 1/(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x} + x)^2}$ на відрізку $[1, 4]$. Графічно зобразити зону, площа якої обчислюється.

3. Знайти розв'язок задачі Коші для лінійної системи трьох диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

$$\begin{cases} x'_t = -2x + z & , \quad x(0) = 1 \\ y'_t = -y - z & , \quad y(0) = -1. \\ z'_t = y - z & , \quad z(0) = -3 \end{cases}$$

Побудувати графіки розв'язків та фазову траєкторію. При побудові графіків обрати діапазон незалежної змінної $0 \leq t \leq 10$.

Вказівка. Фазовою траєкторією системи трьох диференціальних рівнянь першого порядку є крива в просторі з параметричним рівнянням $(x(t), y(t), z(t))$.

Варіант - 10

1. У трикутника з вершинами $A\{-1, 2, 3\}$; $B\{0, 1, -2\}$; $C\{3, -4, 5\}$ знайти довжину медіани, проведеної із вершини В на протилежну сторону. Графічно зобразити трикутник, медіану і вектор нормалі до площини трикутника в точці А.

2. Побудувати графік кускової функції

$$y(x) = \begin{cases} 1 - (x + 1)^2, & x \leq 0 \\ (x - 1)^2 - 1, & x > 0 \end{cases}$$

3. Використовуючи функцію DSolve системи «Mathematica», знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$. Призначити довільним сталим значення $C_1 = 1, C_2 = -1$ та побудувати графік цього окремого розв'язку.

Варіант - 11

1. Знайти точку перетинання прямої $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-4}$ і площини $-3x + y - 3z + 6 = 0$. Використовуючи систему «Mathematica», зобразити пряму, площину і точку їх перетинання.
2. Побудувати графік, який складається з 18 точок, рівномірно розосереджених по одиничному колу, та з 12 точок, рівномірно розкладених по колу радіуса 0.5.
3. Використовуючи функцію DSolve системи «Mathematica», знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}.$$

Призначити довільним сталим одиничні значення та побудувати графік такого окремого розв'язку.

Варіант - 12

1. Знайти асимптоти функції $y = (x^3 - 4x)/(3x^2 - 4)$. Побудувати графік функції та всі її похилі і горизонтальні асимптоти. Якщо у функції є вертикальні асимптоти в точках x_i , то ці точки виключити з графіка.
2. Створити масив В розміром 5×5 , всі рядки якого співпадають з вектором 1,2,3,4,5. Створити масив С розміром 5×5 , всі стовпці якого співпадають з вектором 10,20,30,40,50. Скласти масиви $D = B + C$. В масиві D замінити другий рядок одиницями. В отриманому масиві замінити елементи, індекси яких одночасно задовольняють нерівностям $1 \leq i \leq 3$, $3 \leq j \leq 5$, на нулі.

Вказівка. Працювати зі списками списків, які відображати у вигляді матриць.

3. Є 2 вантажу маси M , які розташовані на струні довжиною $L = 3a$ в точках $x=a$ і $x=2a$. Відрізки струни між вантажами однакові, невагомі і підкоряються закону Гука. Натяг в рівновазі дорівнює T . Нехай вертикальне відхилення вантажів від положення рівноваги позначається $y_1(t)$ і $y_2(t)$. Рівняння малих коливань такої струни з вантажами має вигляд:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= T \left(\frac{y_2 - y_1}{a} \right) - T \left(\frac{y_1 - y_0}{a} \right) \\ M \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= T \left(\frac{y_3 - y_2}{a} \right) - T \left(\frac{y_2 - y_1}{a} \right), \end{aligned}$$

де y_0, y_3 - зміщення лівого і правого кінців закріпленої струни, тобто нулі. При $a=1, M=1, T=1$ система має вигляд

$$\begin{cases} \frac{d^2 y_1}{dt^2} = y_2 - 2y_1 \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -2y_2 + y_1 \end{cases}$$

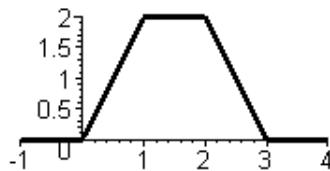
Розв'яжіть цю систему з одиничними (протилежно спрямованими) початковими зміщеннями вантажів ($y_1(0)=1, y_2(0)=-1$) і нульовими початковими швидкостями. Побудуйте графік струни і положення вантажів (у вигляді точок або маленьких дисків) в фіксовані моменти часу, наприклад, $t=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$.

Варіант - 13

1. Скласти рівняння площини, яка проходить крізь точки $A\{-1, 2, -3\}$; $B\{4, -1, 0\}$; $C\{2, 1, -2\}$. Графічно зобразити точки та площину.
2. Побудувати графік функції $y = \sin \pi x + \cos \pi x$ та дотичну до неї в точці $x_0 = 0.75$.
Вказівка. Рівняння дотичної до графіка функції $y = y(x)$ в точці x_0 має вид $Y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Рішення зводиться до побудови графіків функцій $y(x)$ та $Y(x)$.
3. Обчислити невизначений інтеграл $\int e^{-x^2} \sin^2 4x dx$ і побудувати його графік.

Варіант - 14

1. Побудувати рівняння ламаної, яка зображена на рисунку. Координати вузлів взяти з рисунка.



2. Записати рівняння за допомогою формули Бернштейна, за допомогою функцій Piecewise та Interpolation. Для кожного способу побудувати графік.
2. Побудувати графік параметрично заданої кривої $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (циклоїда). Побудувати графіки дотичної та нормалі до кривої в точці $t = 2\pi/3$.
Вказівка. Для кривої на площині, яка задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, рівняння дотичної в точці $t = t_0$ може мати вигляд: $x_t = x(t_0) + t \cdot x'(t_0)$, $y_t = y(t_0) + t \cdot y'(t_0)$. Рівняння нормалі в цій точці можна записати у вигляді $x_n = x(t_0) + t \cdot y'(t_0)$, $y_n = y(t_0) - t \cdot x'(t_0)$. Рішення зводиться до побудови графіків параметрично заданих кривих: $(x(t), y(t))$, $(x_t(t), y_t(t))$, $(x_n(t), y_n(t))$.
3. Розв'язати рівняння $y^{(4)} = x e^{-x}$ з початковими умовами $y(0)=1/32$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1/8$, $y'''(0)=0$. Побудувати графік розв'язку.

Варіант - 15

1. Використовуючи графічні примітиви, створити двовимірний малюнок «будинку».
2. У спільних осях побудуйте графіки неявно заданих кривих: квадрата, з рівнянням $2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2} = 0$ і трикутника, з рівнянням $2 - x + y - |x| - |x - 2y - |x|| = 0$.
3. Знайти об'єм тіла, яке задано нерівностями.

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49; \quad -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}; \quad -x \leq y \leq 0;$$

Побудувати зображення тіла.

Варіант - 16

1. Знайти об'єм тіла, яке задано нерівностями.

$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64; \quad -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}; \quad -\sqrt{3}x \leq y \leq 0;$$

Побудувати зображення тіла.

2. Побудувати графік неявно заданої кривої $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ (еліпс). Перевірити, що точка $(-2, \sqrt{20}/3)$ належить кривій. В цій точці побудувати графіки дотичної та нормалі до еліпса.

Вказівка. Якщо крива задана неявним рівнянням $F(x, y) = 0$, і точка (x_0, y_0) належить кривій, то рівняння дотичної до кривої в цій точці має вигляд

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

а рівняння нормалі

$$F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) - F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) = 0.$$

Розв'язання зводиться до побудови графіків неявно заданих кривих (еліпса та двох прямих).

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь чотирма способами: за допомогою функцій `Solve`, `LinSolve`, оберненої матриці та правила Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x - 5y + 2z = -7 \\ 4x - 7y + z = -12 \end{cases}$$

Варіант - 17

1. Дано координати точок на площині $\{1,3\}, \{2,1\}, \{5,3\}, \{6,5\}, \{8,2\}, \{9,4\}, \{11,2\}$. Побудувати інтерполяційний поліном, який проходить крізь ці точки. Виконати лінійну апроксимацію множини цих точок. Зобразити точки та обидві функції на одному графіку.

2. Побудувати графіки функцій $y = x$ та $y = x^2$. Зафарбувати сірим кольором зону, що обмежена зверху і знизу кривими, а зліва і справа – точками перетинання, які знайти, розв'язавши відповідне рівняння. Обчислити площу отриманої зони.

3. Змодельовати поперечні коливання мас, які закріплені на невагомій пружній струні. Маса розбивають струну на три ділянки однакової довжини. Нехай y_1 представляє вертикальне зміщення 1-ї маси, y_2 - зміщення 2-ї маси. Відомо, що коливання системи може бути представлено у вигляді

$$\begin{aligned}y_1(t) &= A_1 \cos w_1 t + A_2 \sin w_2 t, \\ y_2(t) &= B_1 \cos w_1 t + B_2 \sin w_2 t\end{aligned}$$

де значення сталих визначається з початкових умов. Нехай довжина струни дорівнює 3. Покладіть $w_1 = 1, w_2 = 2$. Виберіть довільні початкові положення частинок y_1^0, y_2^0 (наприклад, 0.5 і -1) і нульові початкові швидкості, і підберіть відповідні їм значення сталих. Побудуйте форму струни в фіксовані момент часу, наприклад, $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6$. На струні у вигляді невеликих дисків зобразити маси.

Варіант - 18

1. Дано координати вузлів $(x_i, y_i) = (0,0), (1,1), (2,-1), (3,0)$. Знайти рівняння інтерполяційного полінома. Побудувати інтерполяційний кусково-кубічний поліном, що проходить крізь ці точки. Використовуючи ті ж самі точки, побудувати графік кубічного сплайна. Зобразити точки та всі функції на одному графіку.

2. Знайти значення матричного многочлена $3A^2 + 5A \cdot B - 2E$, якщо E одинична матриця,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайти обернену матрицю A^{-1} . Обчислити визначник матриці A . Обчислити суму, різницю, матричний та поелементний добуток матриць A та B . Обчислити різницю між матричним та поелементним добутком матриць A і B . Розв'язати матричне рівняння $AX = B$ відносно невідомої матриці X .

3. Знайти довжину кривої $x = e^{t/5}(\cos t + \sin t)$, $y = e^{t/5}(\cos t - \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$, яка задана параметрично. Побудувати графік криволінійного відрізка, довжина якого обчислюється.

Вказівка. Довжина дуги плоскої кривої, заданої в параметричному вигляді $x = x(t)$, $y = y(t)$, обчислюється за формулою $L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$, де t_0 та t_1 – значення параметра в початковій та кінцевій точках дуги.

Варіант - 19

- В тетраедрі з вершинами в точках $A = \{-1, 2, 0\}$; $B = \{3, -5, -3\}$; $C = \{5, 2, 6\}$; $D = \{8, 4, -9\}$ обчислити висоту $h = |\vec{DE}|$. Графічно зобразити тетраедр, висоту DE і точку E.
- Знайти значення матричного многочлена $A^2 - 5A + 2E - B^2$, якщо E – одинична матриця,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайти обернену матрицю A^{-1} . Обчислити визначник матриці **B**. Обчислити суму, різницю, матричний та поелементний добуток матриць **A** та **B**. Обчислити різницю між матричним та поелементним добутком матриць **A** і **B**. Розв'язати матричне рівняння $AX = B$ відносно невідомої матриці X.

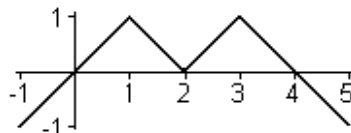
- Використовуючи функцію DSolve системи «Mathematica», знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x.$$

Призначити довільним сталим одиничні значення та побудувати графік такого окремого розв'язку.

Варіант - 20

- Побудувати рівняння ламаної, яка зображена на рисунку. Координати вузлів взяти з рисунка.



Записати рівняння за допомогою формули Бернштейна, за допомогою функцій Piecewise та Interpolation. Для кожного способу побудувати графік.

- Обчислити довжину дуги відрізка кривої $y = xe^{-x^2}$ для $-1 \leq x \leq 1$. Побудувати графік кривої та криволінійного відрізка, довжина якого обчислюється.

Вказівка. Довжина дуги плоскої кривої, заданої в декартових координатах явним рівнянням $y = y(x)$, обчислюється за формулою $L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$, де x_0 та x_1 визначають початкову та кінцеву точки дуги.

3. Не використовуючи функцію DSolve, розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 1/8$. Побудувати графік розв'язку.

Вказівка. Лінійне диференціальне рівняння першого порядку записується у виді $y' + P(x)y = Q(x)$.

Його загальний розв'язок має вигляд

$$y = \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right) e^{-\int P(x) dx},$$

де C – довільна стала. Записати загальний розв'язок, потім знайти значення сталої C .

Варіант - 21

1. Скласти рівняння площини, яка проходить крізь точки $A\{-3, -1, 1\}$; $B\{-9, 1, -2\}$; $C\{3, -5, 4\}$. Графічно зобразити точки та площину.

2. Побудувати тривимірну криву по параметричному рівнянню

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t/8, \quad 0 \leq t \leq 8\pi.$$

В точці $t = \pi/4$ зобразити дотичний вектор до кривої.

3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 2 \ln 2, \quad y'(0) = 3 \ln 2.$$

Побудувати графік розв'язку та фазову траєкторію.

Варіант - 22

1. Побудувати анімацію руху кривої $y = (1 - \cos^2 x) \cdot \sin t$ ($0 \leq x \leq \pi$) на відрітку часу $0 \leq t \leq 2\pi$.

2. Побудувати зображення поверхні функції $z = \sin x \cdot \sin y \cdot (x^2 + y^2)$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$. В точці $(\pi/6, \pi/6)$ зобразити вектор нормалі до поверхні.

3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + y' = \frac{e^x}{2 + e^x}, \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = 1 - \ln 9.$$

Побудувати графік розв'язку та фазову траєкторію.

Варіант - 23

1. Дано координати вузлів (x_i, y_i) .

$$(x_i, y_i) = (0,0), (1,1), (2,1), (3,0); \quad g_i = (0,0,0,0).$$

Побудувати інтерполяційний кусково-кубічний поліном, що проходить крізь ці точки. Використовуючи ті ж самі точки та додатково задані в цих вузлах похідні g_i до кривої, побудувати графік інтерполяційного кусково-кубічного полінома Ерміта. Виконати лінійну апроксимацію множини точок (x_i, y_i) . Зобразити точки та всі функції на одному графіку.

2. Обчислити частинні похідні першого і другого порядків функції

$$z = x^2 y - x y^2 + 1$$

в точці $x_0 = 0.5, y_0 = 0.5$. Побудувати графік функції, точку $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ на поверхні і вектор нормалі до поверхні в цій точці.

3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Побудувати графік розв'язку та фазову траєкторію.

Варіант - 24

1. Згенеруйте список з 16 випадкових чисел. Відсортуйте його за спаданням, перетворіть на список із списків по 4 елементи, і потім зобразіть як матрицю розміром 4×4 .

2. Побудувати поверхню тора по параметричному рівнянню

$$x = (R + r \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \tau$$

$$y = (R + r \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \tau, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \tau \leq 2\pi.$$

$$z = r \cdot \sin \varphi$$

Покласти $R = 3, r = 1$.

3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 3 \ln 3, \quad y'(0) = 5 \ln 3.$$

Побудувати графік розв'язку та фазову траєкторію.

Варіант - 25

1. Створіть матрицю B розміром 4×4 складену з одних п'ятірок. Згенеруйте матрицю C розміром 4×4 , елементи якої C_{ij} обчислюються за формулою $C_{ij} = i^2 - j^2$. Згенеруйте діагональний масив D з елементами на діагоналі $[1, -1, 2, -2]$. Обчисліть матрицю $B - C - D + E - 3$, де E одинична матриця розміром 4×4 .

Вказівка. Працювати треба зі списками списків, які відображати у вигляді матриць.

2. Побудувати поверхню стрічки Мебіуса. Вона утворюється рухом і обертанням відрізка прямої вздовж замкненої просторової кривої. Якщо ця крива є окружністю радіуса R (в площині XY), а n позначає кількість напівобертів відрізка при обході кривої, то її параметричне рівняння буде мати вигляд

$$\begin{aligned}x(u, v) &= \left(R + v \cos\left(\frac{nu}{2}\right) \right) \cos u, \\y(u, v) &= \left(R + v \cos\left(\frac{nu}{2}\right) \right) \sin u, \\z(u, v) &= v \sin\left(\frac{nu}{2}\right),\end{aligned}$$

де $0 \leq u < 2\pi$, $-h/2 \leq v \leq h/2$, h – ширина стрічки. При побудові поверхні покласти $R = 3$, $h = 2$, $n = 1$.

3. Знайти подвійний інтеграл $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}$, якщо область D обмежена півколом $y = \sqrt{1 - x^2}$ та віссю Ox . Графічно зобразити зону інтегрування.

Варіант - 26

1. Створіть матрицю Z , елементи якої обчислюються за формулою $Z_{ij} = X_i^2 - Y_j^2$, де $X = [-3, 0, 1, 4, 5]$, $Y = [-2, 0, -1, 1, 3]$ одновимірні масиви. Додайте до Z стовпець, складений з натуральних чисел $1, 2, 3, 4, 5$. Потім між першим і другим рядками вставте рядок, складений з одиниць.

Вказівка. Працювати треба зі списками списків, які відображати у вигляді матриць.

2. Використовуючи тривимірні графічні примітиви побудувати спрощене зображення будинку.

3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz$, де тіло V обмежене

поверхнями: $V: \begin{cases} x = 0, y = 1, y = x \\ z = 0, z = 1 \end{cases}$. Графічно зобразити тіло.

Варіант - 27

1. Скласти рівняння площини, яка проходить крізь точки $A\{1, -1, 1\}$; $B\{-2, 0, 3\}$; $C\{2, 1, -1\}$. Графічно зобразити точки та площину.
2. Дано координати вузлів (x_i, y_i) .

$$(x_i, y_i) = (0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 0); \quad g_i = (1, 1, -1, -1)$$

Побудувати інтерполяційний кусково-кубічний поліном, що проходить крізь ці точки. Використовуючи ті ж самі вузли та додатково задані похідні g_i до кривої в цих точках, побудувати графік інтерполяційного кусково-кубічного полінома Ерміта. Виконати лінійну апроксимацію множини точок (x_i, y_i) . Зобразити точки та всі функції на одному графіку.

3. Знайти розв'язок задачі Коші $y'' + 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$ та побудувати його графік. Побудувати фазову траєкторію задачі.

Вказівка. Фазовою траєкторією для диференціального рівняння другого порядку є крива на площині з рівнянням $X = y(t)$, $Y = y'(t)$.

Варіант - 28

1. Створити матрицю A розміром 5×5 , у якої на головній діагоналі розташовані числа 1, 2, 3, 4, 5, на верхній побічній діагоналі – одиниці, на нижній побічній – мінус одиниці, а інші елементи дорівнюють нулю. Обчислити матричний поліном $A^2 + 2A - E$, де E – одинична матриця.

Вказівка. Працювати треба зі списками списків, які відображати у вигляді матриць.

2. Побудувати графік функції $f(x) = \operatorname{tg} x / x$, її похідної і первісної. Виключити з графіка особливі точки.
3. Розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами Коші.

$$x' = y(t), \quad y' = -x^3(t) + x(t), \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0.1$$

Побудувати графіки розв'язку та фазову траєкторію.

Варіант - 29

1. Побудувати графік кускової функції

$$y(x) = \begin{cases} -1 - x, & x \leq -1 \\ x(1 + x), & -1 < x \leq 0 \\ x(1 - x), & 0 < x \leq 1 \\ 1 - x, & x > 1 \end{cases}$$

2. Знайти довжини сторін, величини кутів та площу трикутника з вершинами в точках $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$. Намалювати трикутник, точку E – середину сторони BC , та медіану AE .

3. Розв'язати ЗДР третього порядку $z''' - x^2 z'' + x z' - z = 0$ з початковими умовами $z(0) = 0$; $z'(0) = 2$; $z''(0) = -5$. Побудувати графік розв'язку.

Варіант - 30

1. Згенерувати одновимірний масив A з 9 випадковими дійсними числами на відрізку $[-1, 1]$. Реорганізувати його в масив 3×3 . Замінити в отриманому масиві останній рядок на одиниці. Обчислити матричний поліном $A^2 - 3A + E$, де E – одинична матриця.

Вказівка. Працювати зі списками списків, які відображати у вигляді матриць.

2. В просторі дано плоский паралелограм, три вершини якого мають координати $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$. Знайти координати четвертої вершини D , яка протилежна вершині A . Обчислити площу паралелограма. Графічно зобразити контур цього паралелограма, та точки його вершин. В точці C зобразити вектор нормалі до площини паралелограма.

3. Побудувати графік функції $g(y) = \int_0^{\pi} \cos(y \cos t) dt$.

Варіант - 31

1. В просторі дано плоский паралелограм, три вершини якого мають координати $A\{1, -2, 3\}$; $B\{0, -1, 2\}$; $C\{3, 4, 5\}$. Знайти координати четвертої вершини D , яка протилежна вершині A . Обчислити площу паралелограма. В системі Mathematica побудувати контур цього паралелограма, та точки його вершин. В точці A зобразити вектор нормалі до паралелограма. Зобразити діагоналі паралелограма.

2. Згенерувати матрицю A випадкових цілих чисел розміром 5×5 . Замінити елементи двох побічних діагоналей на одиниці. Обчислити матрицю $A^3 - A^2 + A - E$, де E – одинична матриця.

3. Платівка D задана нерівностями $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, з поверхневою густиною $\mu(x, y) = x \cdot y$. Намалювати платівку та знайти її масу.

Вказівка. Якщо $\mu = \mu(x, y)$ представляє густину матеріалу двовимірного тіла (масу одиниці площі в точці x, y), то маса платівки, яка займає область D на площині, обчислюється за формулою $M = \iint_D \mu(x, y) dx dy$. Записати цей подвійний інтеграл, як повторний, і обчислити його.

Варіант - 32

1. Згенерувати масив 20 випадкових дійсних чисел на відрізок $[-10,10]$. Обчислити суму його елементів. Реорганізувати масив в прямокутну матрицю розміром 5×4 .
2. Дано тетраедр з вершинами в точках $A(0,0,0)$, $B(2,1,0)$, $C(1,2,0)$, $D(1.3,1.1,2)$. Обчислити об'єм тетраедра, площу грані ABC та довжину висоти $h=|DE|$. Графічно зобразити контур тетраедра, висоту DE та точку E.
3. Обчислити невизначений інтеграл $\int (4-3x)e^{-x} dx$. Побудувати графіки підінтегрального виразу та первісної.

Варіант - 33

1. В просторі дано плоский паралелограм, три вершини якого мають координати $A\{0,-3,6\}$; $B\{-2,-3,-3\}$; $C\{-9,-3,-6\}$. Знайти координати четвертої вершини D, яка протилежна вершині A. Обчислити площу паралелограма. В системі Mathematica побудувати контур цього паралелограма, та точки його вершин. Побудувати вектор нормалі до площини паралелограма в точці перетину його діагоналей.
2. Дано координати вузлів $(x_i, y_i) = (0,1), (1,2), (2,1), (3,2)$. Знайти рівняння інтерполяційного полінома. Побудувати інтерполяційний кусково-кубічний поліном, що проходить крізь ці точки. Використовуючи ті ж самі точки, побудувати графік кубічного сплайна. Виконати лінійну апроксимацію множини точок. Зобразити точки та всі функції на одному графіку.
3. Знайти подвійний інтеграл $\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy$ по області D, яка обмежена кривими: $x=1$, $y=x^2$, $y=-\sqrt{x}$. Графічно зобразити область інтегрування.

Варіант - 34

1. Дано координати вузлів (x_i, y_i) .
 $(x_i, y_i) = (-1,2), (0,1), (1,2), (2,5); \quad g_i = (-1,-1,3,3)$
Побудувати інтерполяційний кусково-кубічний поліном, що проходить крізь ці точки. Використовуючи ті ж самі точки та додатково задані похідні g_i до кривої в цих вузлах, побудувати інтерполяційний кусково-кубічний поліном Ерміта. Виконати лінійну апроксимацію цієї множини точок. Зобразити точки та всі функції на одному графіку.
2. Використовуючи функцію DSolve системи «Mathematica», знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$. Призначити довільним константам значення $C_1=1, C_2=-1$ та побудувати графік цього окремого розв'язку.

3. Чисельно визначити площу області між кривими $y = x^2 + 2x - 1$ та $y = x - e^x$. Побудувати графіки кривих та зобразити зону, площа якої обчислюється.
Вказівка. Для пошуку точок перетину кривих складіть і чисельно розв'яжіть відповідне рівняння.

Варіант - 35

1. Дано координати вузлів $(x_i, y_i) = (-2, -8), (-1, -2), (2, 4), (3, 16)$. Знайти рівняння інтерполяційного полінома. Побудувати інтерполяційний кусково-кубічний поліном, що проходить крізь ці точки. Використовуючи ті ж самі точки, побудувати графік кубічного сплайна. Виконати лінійну апроксимацію цієї множини точок. Зобразити точки та всі функції на одному графіку.
2. Зобразити одиничну окружність і поле її нормалей, тобто вектора одиничної довжини, що рівномірно розташовані вздовж окружності і нормальні до неї.
3. Побудувати графік розв'язку задачі Коші $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 1/8$.

Варіант - 36

1. В просторі дано плоский паралелограм, три вершини якого мають координати $A\{3, 3, -1\}$; $B\{5, 5, -2\}$; $C\{4, 1, 1\}$. Знайти координати четвертої вершини D, яка протилежна вершині A. Обчислити площу паралелограма. В системі Mathematica побудувати контур цього паралелограма, та точки його вершин. Побудувати вектор нормалі до площини паралелограма в точці C.
2. Використовуючи систему Mathematica, знайти площу під кривою $y = \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x}$ на відрізку $[\pi, 2\pi]$. Графічно зобразити область, площа якої обчислюється.
3. Скласти рівняння дотичної та нормалі до параметрично заданої кривої $x = \sin^3 t$, $y = \cos^3 t$ в точці $t_0 = \pi/3$. Побудувати графіки всіх кривих.

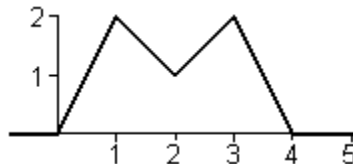
Варіант - 37

1. Дано координати чотирьох вершин паралелепіпеда $A = \{-2, -6, -4\}$; $B = \{-1, 7, 1\}$; $C = \{4, -8, -4\}$; $D = \{1, -4, 6\}$. Знайти координати інших вершин і графічно зобразити фігуру. Обчислити об'єм паралелепіпеда.
2. Знайти розв'язок задачі Коші
$$y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x, \quad y(\pi) = \pi e^\pi, \quad y'(\pi) = e^\pi$$
Побудувати графік розв'язку та фазову траєкторію.

3. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 (2x^3 - 4x^2 + 5) dx$. Графічно зобразити зону, площу якої він представляє.

Варіант - 38

1. Побудувати рівняння ламаної, яка зображена на рисунку. Координати вузлів взяти з рисунка.



Записати рівняння за допомогою формули Бернштейна, за допомогою функцій Piecewise та Interpolation. Для кожного способу побудувати графік.

2. Знайти довжини сторін, величини кутів та площу трикутника з вершинами в точках $A(0, -3, 6)$; $B(-12, -3, -3)$; $C(-9, 5, -6)$. Знайти точку перетину його медіан. Графічно зобразити трикутник, медіани і точку їх перетину.

3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4) dx dy$ по області D , де область D обмежена кривими: $x=1$, $y=x^3$, $y=-\sqrt{x}$. Графічно зобразити область D .

Варіант - 39

1. Знайти значення матричного многочлена $2A^2 + 3A \cdot B + 5E - 1$, якщо E одинична матриця, і

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти обернену матрицю A^{-1} . Перевірити, що $A \cdot A^{-1} = E$. Обчислити визначник матриці A .

2. Побудувати контурний графік функції $z = \sin(xy) e^{\frac{-x^2-y^2}{3}}$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$.

3. Обчислити першу і другу похідні функції

$$y = \frac{3x^6 + 4x^4 - x^2 - 2}{15\sqrt{1+x^2}}.$$

Побудувати графік функції $y(x)$ та її похідних $y'(x)$, $y''(x)$. Обчислити значення першої похідної в точках $x=0$, $x=0.5$, $x=1$.

Варіант - 40

1. Знайти довжини сторін, величини кутів та площу трикутника з вершинами в точках $A(0, -3, 6)$; $B(-12, -3, -3)$; $C(-9, 5, -6)$. Графічно зобразити трикутник, його медіани і точку їх перетину. В точці перетину медіан зобразити вектор нормалі до площини трикутника.
2. Дано координати точок на площині $\{1,3\}, \{-2,4\}, \{3,4\}, \{4,6\}$. Побудувати інтерполяційний поліном, який проходить крізь ці точки. Виконати лінійну апроксимацію цієї множини точок. Зобразити точки та обидві функції на одному графіку.
3. Використовуючи функцію DSolve системи «Mathematica», знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x)$. Призначити довільним константам значення $C_1 = 1, C_2 = -1$ та побудувати графік цього окремого розв'язку.