

## Лекция 11

### Синхронизация колебаний

#### Содержание

1. История.
2. Объекты, которые изучаются. Примеры.
3. Главные особенности изучаемых объектов.
4. «Строгое» рассмотрение явления синхронизации.
5. Обобщения.

#### 1. История

Несколько слов об истории открытия явления синхронизации.



Голландский ученый Христиан Гюйгенс, наиболее известный своими работами по оптике и конструкцией телескопа и часов, был, по всей видимости, первым исследователем, наблюдавшим и описавшим явление синхронизации еще в 17-ом столетии.

*Он открыл то, что двое маятниковых часов, висящих на общей опоре, синхронизируются, т.е. их колебания идеально совпадают, а маятники движутся всегда в противоположных направлениях.* Это открытие было сделано во время морских испытаний часов, предназначенных для определения долготы. Создание и конструирование маятниковых часов было одним из важнейших достижений Гюйгенса. Оно оказало огромное влияние на технологическое и научное развитие той эпохи и очень сильно увеличило точность определения времени.


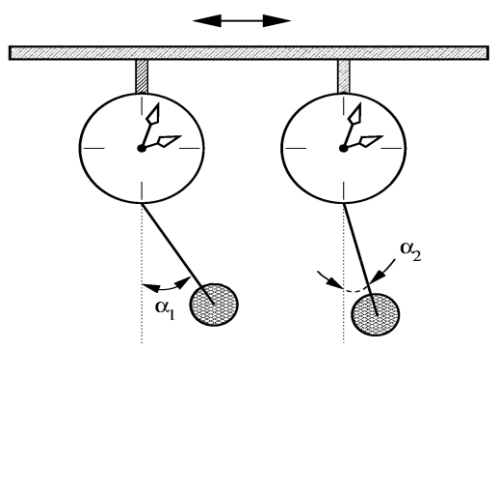
***Письмо Христиана отцу, Константину Гюйгенсу, от 26 февраля 1665 года:***

«Мой Отец,

... я заметил удивительный эффект, о котором ранее никто даже и не думал. Двое часов, висящих на стене друг рядом с другом на расстоянии одного или двух футов, поддерживали согласованность хода с такой высокой точностью, что их маятники всегда качались вместе, без отклонений. Наблюдая это с восхищением в течение некоторого времени, я, наконец, пришел к выводу, что это происходит вследствие некоторой симпатии: когда я придавал маятникам разный ход, то я обнаружил, что через полчаса они всегда возвращаются к синхронизму и сохраняют его до тех пор, пока я не нарушу их ход...

Наблюдаемая согласованность была следствием некоторой симпатии, которая, по моему мнению, не может быть вызвана ничем иным, кроме как незаметным движением воздуха, вызванным движением маятников».

Гюйгенс продолжил наблюдения за часами, помещая их на общей балке, размещенной на двух стульях (см. рис. 1). И всякий раз маятники часов синхронизовались в противофазе.

	
<p><b>Рис.1.</b> Рисунок Христиана Гюйгенса</p>	<p><b>Рис.2.</b> Обратите внимание, что до синхронизации углы <math>\alpha_1</math> и <math>\alpha_2</math> различны</p>

Гюйгенс не только привел точное описание явления, но и дал изумительное качественное объяснение эффекта взаимной синхронизации: ***он правильно понял, что согласованность ритмов двух часов была вызвана недоступными восприятию движениями балки. Гюйгенс писал о «симпатии часов», в современной терминологии это означает, что часы синхронизовались в противофазе за счет слабой связи через балку.***

Собственноручный рисунок Гюйгенса, иллюстрирующий его эксперименты с двумя маятниковыми часами, подвешенными на общей балке, представлен на ри. 1.

## 2. Объекты, которые изучаются. Примеры

Необходимо отметить, что термин «синхронизация» используется очень широко. Он используется не только в теории колебаний волн, но и во многих других направлениях в науке. В частности, он используется в компьютерных технологиях. Например, в компьютерных науках используется термин «синхронизация данных». Этот термин означает ликвидацию различий между двумя копиями данных. Предполагается, что ранее эти копии были одинаковы, а затем одна из них либо обе были независимо изменены.

Имеется и много других процессов, которые используют слово синхронизация. Мы будем анализировать только синхронизацию колебательных процессов. Отметим, что всё вокруг нас подвержено колебаниям, поэтому синхронизация таких колебательных процессов является очень распространенным процессом в окружающем нас мире. Дадим краткое определение изучаемым нами процессам:

**Синхронизация колебаний (фазовая синхронизация)** — процесс установления и поддержания режима колебаний двух и более связанных осцилляторов, при котором частоты этих осцилляторов близки друг к другу (или их отношение близко к отношению двух небольших целых чисел). *Синхронизация колебаний возможна только в случае нелинейных осцилляторов.*

Примерами автоколебательных систем являются электронные автогенераторы, лазеры, среды, в которых идут реакция Белоусова-Жаботинского (открыта в 1951 г. и представляет собой периодическое изменение цвета раствора при протекании химической реакции) или другие колебательные химические реакции, водители ритма (пейсмекеры) сердца человека или кардиостимуляторы, используемые при кардиологических патологиях, и многие другие естественные или искусственные колебательные системы.

Важно понять круг процессов, которые могут быть объединены единой особенностью, а именно синхронизацией. Важно понять механизм синхронизации, а также научиться управлять этим процессом и его использовать. В частности, в настоящее время синхронизация используется для стабилизации разнообразных колебательных процессов.

Оказалось, что обеспечить стабильность частоты маломощного вспомогательного генератора технически гораздо проще, чем мощного генератора. Однако благодаря эффекту синхронизации можно добиться генерации стабильной частоты мощного генератора,

который находится под влиянием маломощного стабильного генератора. Можно отметить также на синхронной вспышке светлячков, на синхронные аплодисменты в театре.

В настоящее время в направлении изучения процесса синхронизации ведутся значительные работы. Получены важные новые результаты. Например, разработана теория синхронизации странных хаотических и нехаотических аттракторов. Естественно, что в настоящей лекции эти результаты не будут изложены. Однако ниже мы постараемся изложить основные ключевые элементы, которые позволяют анализировать и изучать процессы синхронизации.

### 3. Главные особенности изучаемых объектов

*Чтобы эффективно управлять процессом синхронизации, необходимо знать особенности тех колебательных систем, которые желательно синхронизовать.* Отметим наиболее важные из них:

1. Прежде всего, мы рассматриваем колебательные процессы. *Такие процессы имеют основной период.* В этом случае колебательный процесс удобно характеризовать амплитудой колебания и фазой колебания. Амплитуда колебаний определяет интенсивность колебаний, фаза – динамику вдоль предельного цикла.
2. Во многих случаях фазу нелинейного колебания можно определить достаточно просто. Иногда сделать это труднее. Однако во всех случаях для невозмущенной колебательной системы фазу можно выбрать в виде:  $\dot{\varphi} = \Omega$ . Важно также, что фаза является безразлично устойчивой особой точкой.
3. Так как фаза безразлично (нейтрально) устойчива, ***то даже незначительные внешние силы могут существенно менять фазу. Это главная особенность синхронизованных нелинейных элементов.*** Отметим, что амплитуда колебаний при этом может практически не замечать влияния внешних малых сил.

### 4. «Строгое» рассмотрение явления синхронизации

В данной лекции мы ограничимся обсуждением классической синхронизации периодических автоколебаний внешним воздействием, которая, по сути дела, может рассматриваться как фундамент для дальнейших обобщений. Добавим в уравнение Ван-дер-Поля внешнее периодическое воздействие, дописав дополнительный член, зависящий от времени по гармоническому закону:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = a \sin \omega t, \quad (1)$$

где  $a$  – амплитуда внешнего воздействия,  $\omega$  – частота этого воздействия. Далее будем считать, что  $\lambda$  невелико, а  $\omega$  – близка к 1 (т.е. к собственной частоте колебаний системы).

Будем искать решение уравнения (1) в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой:

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ A(t) \exp(i\omega t) \} = \frac{1}{2} [ A(t) \exp(i\omega t) + A^*(t) \exp(-i\omega t) ]. \quad (2)$$

Мы вместо одной зависимой переменной ввели две. Поэтому мы можем наложить на эти новые зависимые переменные дополнительные условия. Обычно эти условия выбирают в виде:

$$\dot{A}(t) \exp(i\omega t) + \dot{A}^*(t) \exp(-i\omega t) = 0. \quad (3)$$

Таковыми условиями мы пользовались при анализе динамики осциллятора Ван-дер-Поля (см. Лекцию 7). Вычислим величины  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$ , и подставим эти выражения в уравнение (1). Учтем, что

$$a \sin \omega t = a \frac{\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)}{2i}.$$

Далее умножим обе части получившегося уравнения на  $\exp(-i\omega t)$ , и проведем усреднение за период  $2\pi/\omega$ , считая комплексную амплитуду  $A(t)$  медленно меняющейся функцией времени (см. формулы Лекции 7 о динамике осциллятора Ван-дер-Поля). В результате приходим к укороченному уравнению

$$\dot{A} - i \frac{(\omega^2 - 1)}{2\omega} A - \frac{\lambda}{2} A = -\frac{|A|^2}{8} A - \frac{a}{2\omega}; \quad \dot{A} = \frac{1}{2} [\lambda - |A|^2] A. \quad (4)$$

Далее удобно ввести нормировку величин с тем, чтобы уменьшить количество параметров в уравнении. Заметим, что нас интересует случай, когда автономная система совершает автоколебания, т.е.  $\lambda > 0$ . Полагая, что

$$\tau = \frac{\lambda t}{2}; \quad z = \frac{A}{\sqrt{4\lambda}}; \quad \Delta = \frac{(\omega^2 - 1)}{\omega\lambda}; \quad \varepsilon = \frac{a}{2\omega\lambda^{3/2}}, \quad (5)$$

перепишем уравнение (4) в новых переменных:

$$\dot{z} - i\Delta \cdot z - z = -|z|^2 z - \varepsilon. \quad (6)$$

Здесь точка означает производную по  $\tau$ , параметр  $\varepsilon$  характеризует амплитуду внешнего воздействия, а  $\Delta$  – отстройку частоты воздействия от собственной частоты автоколебаний. Удобно представить комплексную амплитуду  $z$  в виде

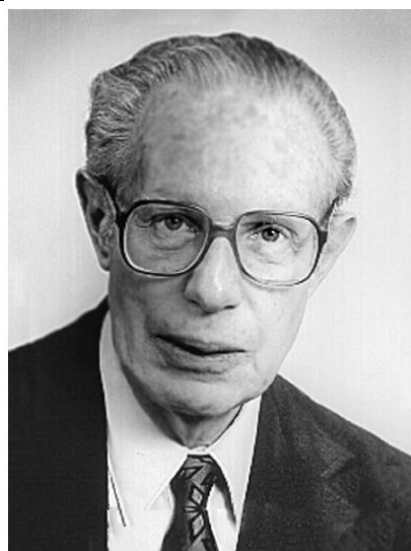
$$z = R \cdot \exp(i\varphi).$$

Тогда уравнение (6) можно представить в виде

$$\dot{R} = R - R^3 - \varepsilon \cos \varphi; \quad \dot{\varphi} = -\Delta + \frac{\varepsilon}{R} \sin \varphi. \quad (7)$$

Параметр  $\varepsilon$  мал. В нулевом порядке по  $\varepsilon$  из первого уравнения (7) найдем амплитуду стационарных колебаний  $R = \pm 1$ . Легко увидеть, что только  $R = +1$  является устойчивым решением в нулевом приближении по  $\varepsilon$ . Это решение подставим во второе уравнение системы (7):

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin \varphi. \quad (8)$$



**Уравнение Адлера**

**Роберт Адлер**

Robert Adler

Австрийско-американский  
физик-теоретик и  
экспериментатор  
(1913-2007)

Параметр  $\varepsilon$  определен через отношение величин  $a$  и  $(\lambda)^{3/2}$ , которые для применимости метода медленно меняющихся амплитуд обе должны быть малыми, т.е. меньшими единицы. Однако соотношение между ними мы вправе задать любым, в частности, определить его так, чтобы параметр  $\varepsilon$  был малым. Это обеспечено при  $a \ll \lambda^{3/2}$ . **Условием применимости рассматриваемого приближения будет, следовательно, двойное неравенство**

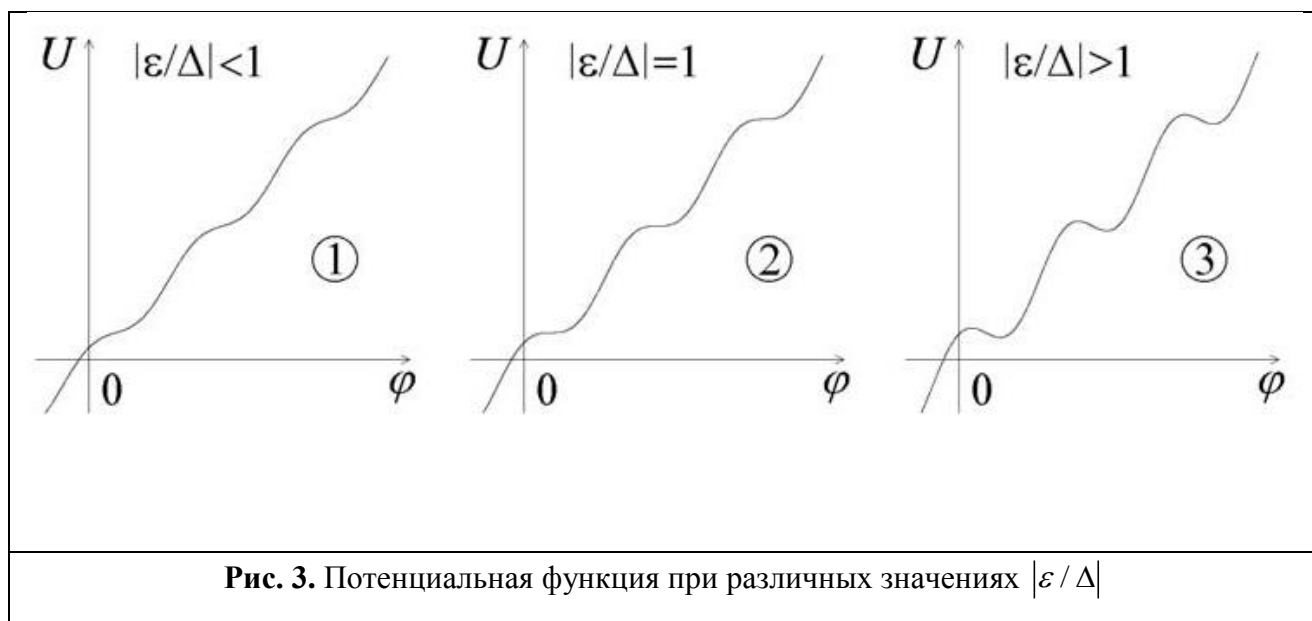
$$a \ll \lambda^{3/2} < 1.$$

Для его анализа его удобно переписать:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad (9)$$

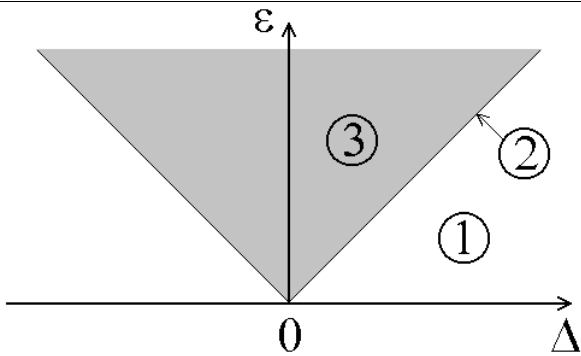
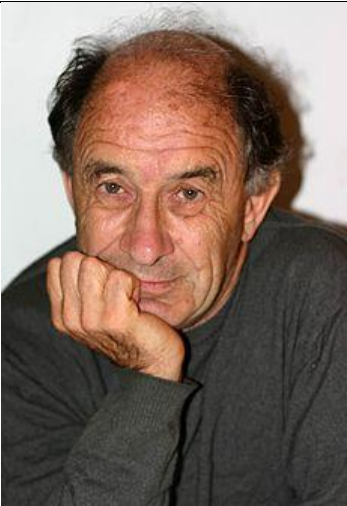
где  $U = \Delta \left[ \varphi + \frac{\varepsilon}{\Delta} \cos \varphi \right]$  – «эффективный потенциал».

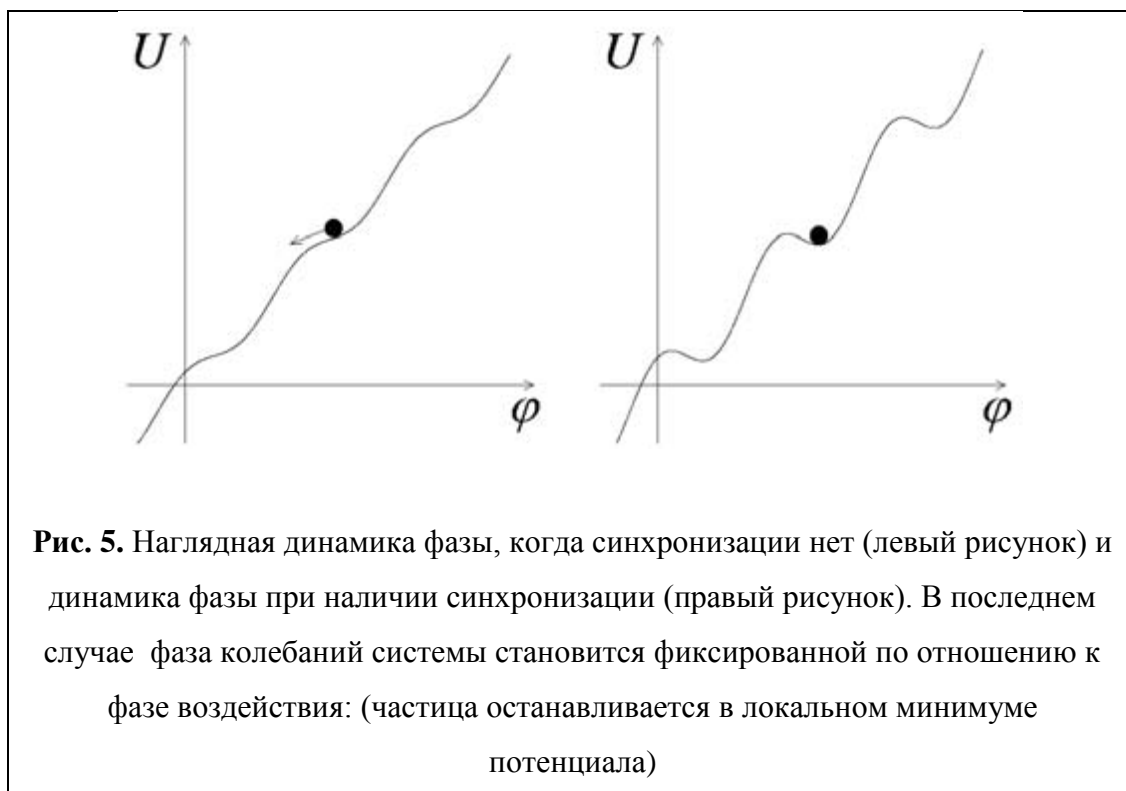
График этой функции при различных значениях параметра  $|\varepsilon / \Delta|$  представлен на рис. 3.



При  $|\varepsilon / \Delta| < 1$  зависимость  $U(\varphi)$  – монотонная, причем обратная функция гладкая – имеет непрерывную производную на всём множестве определения. Очень часто под гладкими функциями подразумевают функции, имеющие непрерывные производные всех порядков. При  $|\varepsilon / \Delta| = 1$  зависимость  $U(\varphi)$  по-прежнему монотонная, но имеет точки перегиба. Обратная функция больше не является гладкой – первая и вторая производные стремятся к бесконечности при приближении к сингулярным точкам, отвечающим точкам

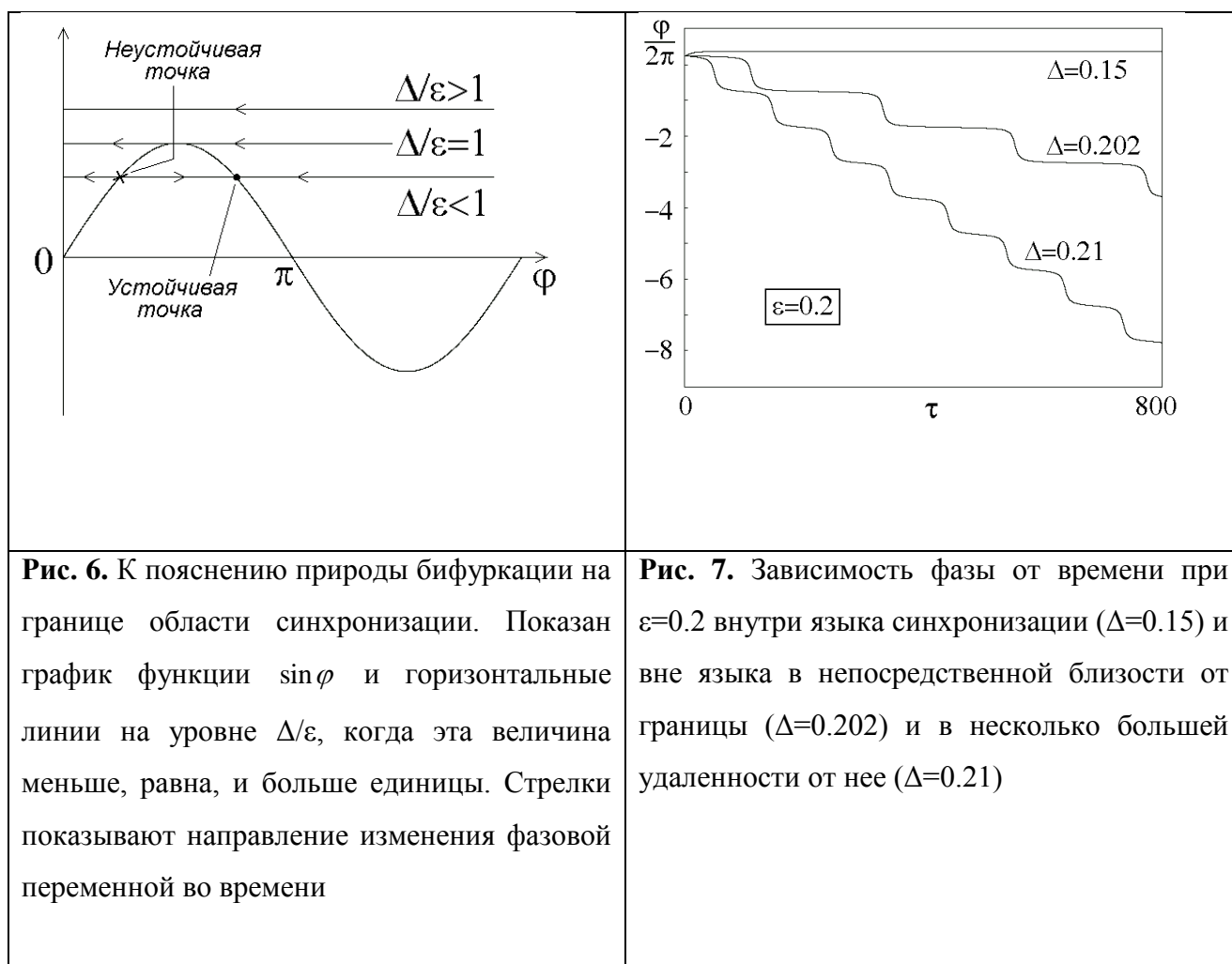
перегиба функции  $U(\varphi)$ . При  $|\varepsilon/\Delta| > 1$  функция становится немонотонной, она имеет максимумы и минимумы (по одному на каждый период).

	
<p><b>Рис.4.</b> Область синхронизации или язык Арнольда (серый цвет) на плоскости параметров <math>(\Delta, \varepsilon)</math>. Область, в которой выполняется условие <math> \varepsilon/\Delta  &gt; 1</math>.</p>	<p><b>Академик Владимир Игоревич Арнольд</b> Российский математик (1937 – 2010)</p>





Точка остановки определяется из условия локального минимума потенциала,  $U'(\varphi)=0$ ,  $U''(\varphi)>0$  или  $\sin \varphi_0 = \Delta / \varepsilon$ ;  $\cos \varphi_0 < 0$ .



Рассмотрим детальнее область синхронизации, а также переход (бифуркацию) от режима синхронизации к режиму отсутствия синхронизации, т.е. при переходе через границу языка Арнольда. Для этого воспользуемся рис. 6. На нем представлена функция  $\sin \varphi$ , а также прямые линии...  $\Delta/\varepsilon < 1$ ;  $\Delta/\varepsilon = 1$ ;  $\Delta/\varepsilon > 1$ . Точки пересечения прямых линий с функцией  $\sin \varphi$  являются стационарными точками уравнения (8). На рис. 6 при  $\Delta/\varepsilon < 1$  видны две стационарные точки. Одна из них – устойчивая, другая – неустойчивая. При  $\Delta/\varepsilon = 1$  эти две точки сливаются. Происходит бифуркация слияния устойчивой и неустойчивой точек. При  $\Delta/\varepsilon > 1$  система находится в режиме отсутствия синхронизации.

Проверим справедливость характера указанных точек. Для этого уравнение (8) удобно переписать в виде:

$$\dot{\varphi} = \varepsilon \left[ -\frac{\Delta}{\varepsilon} + \sin \varphi \right]. \quad (10)$$

Стационарные точки будут определяться условием равенства нулю правой части (10)  $\sin \varphi_0 = \Delta / \varepsilon$ . Для определения характера стационарных точек введем малое отклонение от этих точек ( $\varphi = \varphi_0 + \delta$ ). Подставляя это выражение в уравнение (10) и учитывая малость добавки ( $\delta \ll 1$ ), получим следующее уравнение для малой добавки:

$$\dot{\delta} = \delta (\cos \varphi_0). \quad (11)$$

При выводе (11) было учтено следующее:

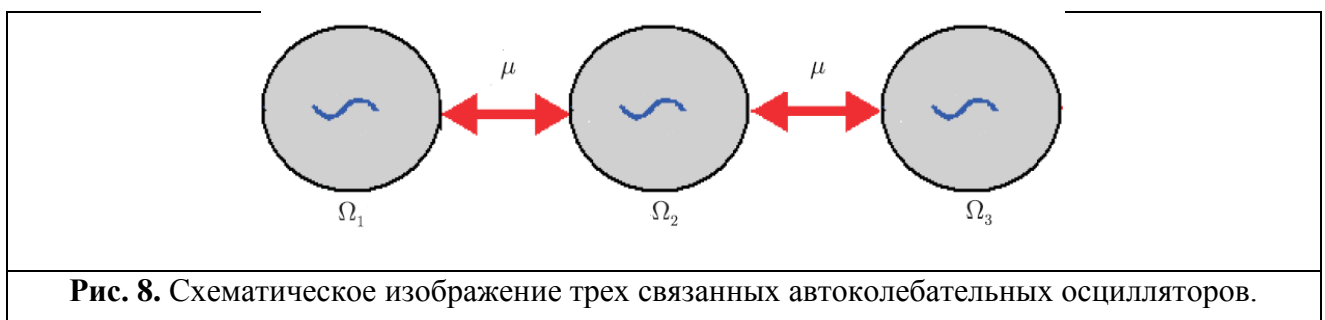
$$\sin(\varphi_0 + \delta) = \sin \varphi_0 \cos \delta + \sin \delta \cos \varphi_0 \approx \sin \varphi_0 + \delta \cos \varphi_0 = \Delta / \varepsilon + \delta \cos \varphi_0.$$

Уравнение (11) показывает, что точки, в которых  $\cos \varphi_0 < 0$  являются устойчивыми точками, а точки, в которых  $\cos \varphi_0 > 0$  будут неустойчивыми точками. Этот вывод согласуется с рис. 6. Легко также видеть, что если  $\Delta / \varepsilon > 1$ , то синхронизация отсутствует.

**В качестве примера рассмотрим систему трех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля**, соединенных в цепочку, как показано на рис. 8. Система дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие таких осцилляторов, имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\lambda$  – параметр возбуждения автономных осцилляторов,  $\Delta_1$  – частотная расстройка второго осциллятора относительно первого,  $\Delta_2$  – третьего относительно первого,  $\mu$  – коэффициент диссипативной связи. Частот первого осциллятора принята за единицу.



Если параметр возбуждения  $\lambda$  мал, а также малы частотные расстройки и другие соответствующие параметры в системе уравнений (12), то для решения этой системы можно применить метод Ван-дер-Поля, рассмотренный в Лекции 7. Для этого необходимо динамические переменные представить в виде

$$\begin{aligned}x(t) &= a(t)\exp(it) + a^*(t)\exp(-it), \\y(t) &= b(t)\exp(it) + b^*(t)\exp(-it), \\z(t) &= c(t)\exp(it) + c^*(t)\exp(-it),\end{aligned}\tag{13}$$

где  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  – комплексные амплитуды осцилляторов, которые будем считать медленно меняющимися на фоне колебаний с единичной частотой. Традиционные дополнительные условия для метода Ван-дер-Поля имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{a}(t)\exp(it) + \dot{a}^*\exp(-it) &= 0, \\ \dot{b}(t)\exp(it) + \dot{b}^*\exp(-it) &= 0, \\ \dot{c}(t)\exp(it) + \dot{c}^*\exp(-it) &= 0.\end{aligned}\tag{14}$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= i[a(t)\exp(it) - a^*(t)\exp(-it)], \\ \dot{y}(t) &= i[b(t)\exp(it) - b^*(t)\exp(-it)], \\ \dot{z}(t) &= i[c(t)\exp(it) - c^*(t)\exp(-it)].\end{aligned}\tag{15}$$

Подставим соотношения (13)-(15) в уравнения (12), умножим полученные выражения на  $\exp(-it)$  и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. После соответствующих преобразований приходим к следующим укороченным уравнениям:

$$\begin{aligned}2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_1 b - \mu(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_2 c - \mu(c - b).\end{aligned}\tag{16}$$

В полученных уравнениях управляющий параметр  $\lambda$  можно убрать перенормировкой переменных и параметров:

$$a = \sqrt{\lambda \bar{a}}, \quad b = \sqrt{\lambda \bar{b}}, \quad c = \sqrt{\lambda \bar{c}}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\lambda}, \quad \mu = \frac{\bar{\mu}}{\lambda}, \quad \Delta_{1,2} = \lambda \bar{\Delta}_{1,2}. \quad (17)$$

Будем считать такую перенормировку выполненной, а для сокращения записи черту над нормированными величинами будем опускать. Теперь отнормированные параметры можно считать уже не малыми. Положим далее

$$\begin{aligned} a(t) &= R(t) \exp[i\psi_1(t)], \\ b(t) &= r(t) \exp[i\psi_2(t)], \\ c(t) &= v(t) \exp[i\psi_3(t)], \end{aligned} \quad (18)$$

где  $R(t)$ ,  $r(t)$ ,  $v(t)$  – медленно изменяющиеся действительные амплитуды,  $\psi_{1,2,3}(t)$  – медленно изменяющиеся действительные фаза осцилляторов. Тогда получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{R}(t) &= R(t) - R(t)^3 + \mu \{ r(t) \cos[\psi_2(t) - \psi_1(t)] - R(t) \}, \\ 2\dot{r}(t) &= r(t) - r(t)^3 + \mu \{ R(t) \cos[\psi_1(t) - \psi_2(t)] + v(t) \cos[\psi_3(t) - \psi_2(t)] - 2r(t) \}, \\ 2\dot{v}(t) &= v(t) - v(t)^3 + \mu \{ v(t) \cos[\psi_2(t) - \psi_3(t)] - v(t) \}, \\ \dot{\psi}_1(t) &= \frac{r(t)}{2R(t)} \mu \sin[\psi_2(t) - \psi_1(t)], \\ \dot{\psi}_2(t) &= \frac{\Delta_1}{2} + \frac{1}{2} \mu \sin[\psi_1(t) - \psi_2(t)] + \frac{v(t)}{2r(t)} \mu \sin[\psi_3(t) - \psi_2(t)], \\ \dot{\psi}_3(t) &= \frac{\Delta_2}{2} + \frac{r(t)}{2v(t)} \mu \sin[\psi_2(t) - \psi_3(t)]. \end{aligned} \quad (19)$$

В уравнениях для фаз (19) полагаем, что осцилляторы движутся в окрестностях стационарных невозмущенных орбит:  $R(t) = r(t) = v(t) = 1$ . Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= \mu \sin[\psi_2(t) - \psi_1(t)], \\ \dot{\psi}_2(t) &= \frac{\Delta_1}{2} + \mu \sin[\psi_1(t) - \psi_2(t)] + \mu \sin[\psi_3(t) - \psi_2(t)], \\ \dot{\psi}_3(t) &= \frac{\Delta_2}{2} + \mu \sin[\psi_2(t) - \psi_3(t)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Размерность системы (20) может быть понижена на единицу, если ввести относительные фазы осцилляторов

$$\theta(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t), \quad \varphi(t) = \psi_2(t) - \psi_3(t). \quad (21)$$

Тогда получаем

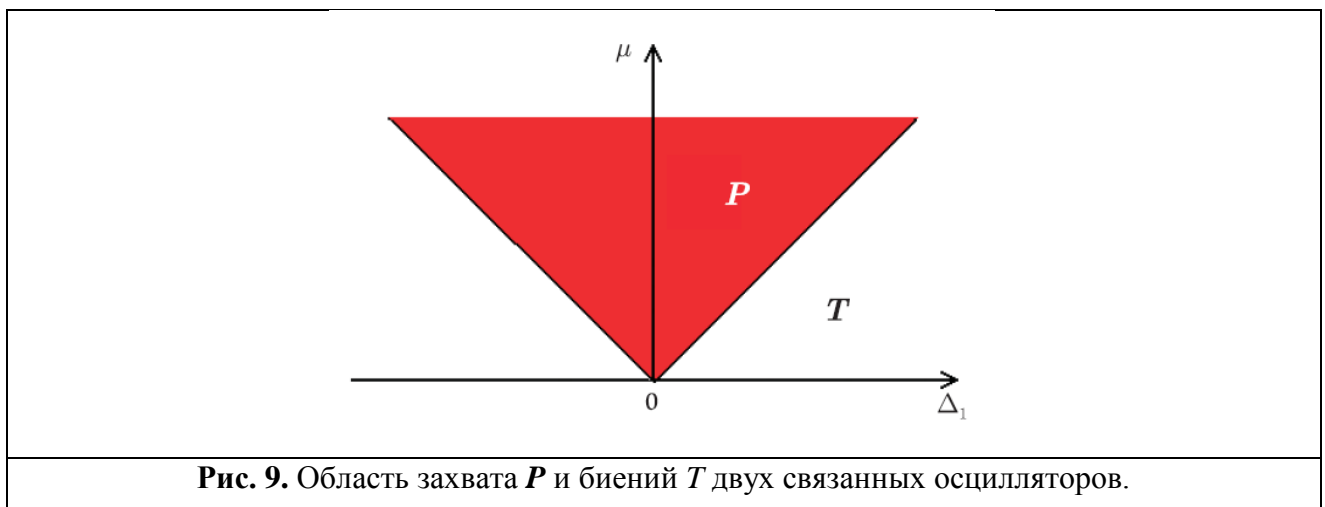
$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= -\frac{\Delta_1}{2} - 2\mu \sin \theta(t) + \mu \sin \varphi(t), \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \mu \sin \theta(t) - 2\mu \sin \varphi(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Это и есть фазовые уравнения, описывающие взаимодействие трех взаимно связанных автоколебательных осцилляторов.

Выключим связь между вторым и третьим осциллятором. Тогда вместо системы (22) будем иметь одно уравнение:

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\Delta_1}{2} - 2\mu \sin \theta(t). \quad (23)$$

Это классическое уравнение Адлера, которое описывает возможность двух режимов колебаний: захвата относительной фазы при  $|\Delta_1| < 4\mu$  и режима биений при  $|\Delta_1| > 4\mu$ . На плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи  $(\Delta_1, \mu)$ » указанным режимам отвечают области внутри и вне языка Арнольда соответственно.



**Рис. 9.** Область захвата  $P$  и биений  $T$  двух связанных осцилляторов.

Основание языка расположено в точке  $\Delta_1 = 0$ , что соответствует резонансному условию в системе, когда собственные частоты первого и второго осциллятора совпадают. При  $\Delta_1 = 0$

синхронизация осцилляторов может происходить при сколь угодно малой связи  $\mu$ . Захват двух осцилляторов происходит на их центральной частоте. В наших обозначениях в этом случае скорость изменения относительной фазы равна нулю  $\dot{\theta}=0$ , так что  $\dot{\psi}_1=\dot{\psi}_2$ . Тогда из уравнений (20) и (23) получаем для частоты захвата выражение:

$$\dot{\psi}_1=\dot{\psi}_2=\frac{\Delta_1}{4}, \quad (24)$$

что равно среднему арифметическому собственных частот первого и второго осциллятора, которые, в соответствии с (20), равны нулю и  $\Delta_1/2$ .

Аналогично, если оставить связь только между вторым и третьим осциллятором, то приходим к режиму их захвата при  $|\Delta_1 - \Delta_2| < 4\mu$  и режиму биений при  $|\Delta_1 - \Delta_2| > 4\mu$ . В таком случае осцилляторы также захватываются на своей центральной частоте.

Приведем сводку основных характерных частот в безразмерном виде. Так, собственные частоты осцилляторов равны:

$$\Omega_1=0, \quad \Omega_2=\frac{\Delta_1}{2}, \quad \Omega_3=\frac{\Delta_2}{2}. \quad (25)$$

Частота захвата пар осцилляторов (1-2), при выключенной связи с осциллятором 3 равна:

$$\Omega_{1-2}=\frac{\Delta_1}{4}. \quad (26)$$

Частота захвата пар осцилляторов (2-3), при выключенной связи с осциллятором 1 равна:

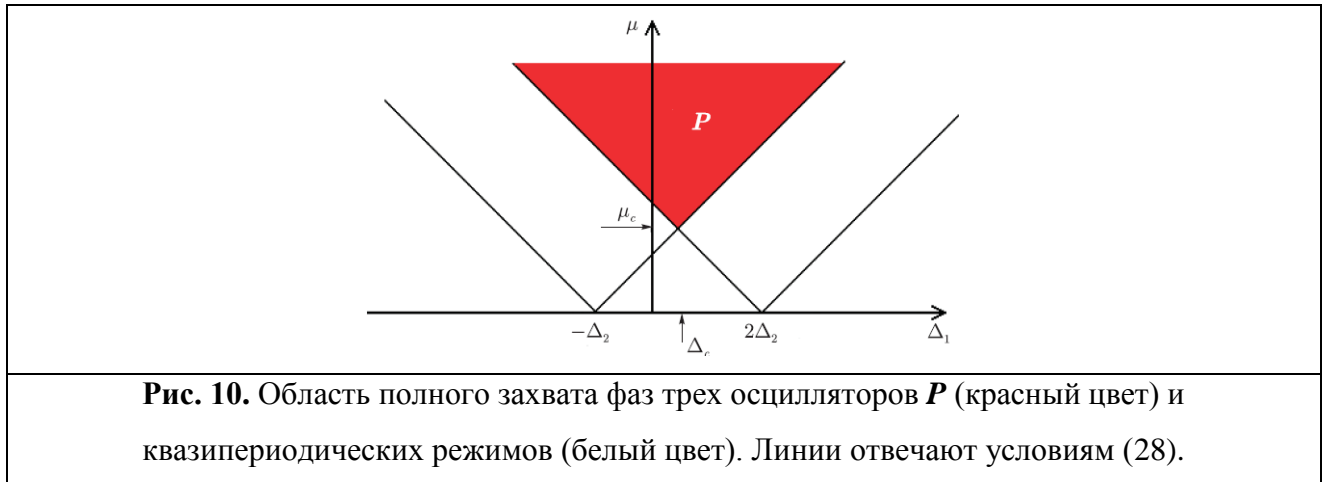
$$\Omega_{2-3}=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{4}. \quad (27)$$

В случае захвата (т.е. взаимной синхронизации) сразу трех осцилляторов имеют вид:

$$\mu=\pm\frac{\Delta_1+\Delta_2}{6} \text{ и } \mu=\pm\frac{\Delta_1-2\Delta_2}{6}. \quad (28)$$

В пространстве параметров  $(\Delta_1, \Delta_2, \mu)$  условия (28) задают некоторые поверхности.

Зафиксируем расстройку  $\Delta_2$  и исследуем область синхронизации в плоскости параметров  $(\Delta_1, \mu)$ . Эта область показана красным цветом на рис. 10.



На рис. 10. показана область пересечения двух языков Арнольда, начинающихся в точках

$$\Delta_1 = -\Delta_2 \text{ и } \Delta_1 = 2\Delta_2. \quad (29)$$

В отличие от режима захвата двух осцилляторов, языки с вершинами в точках (29) при малой величине связи  $\mu$  не отвечают состояниям равновесия. Объединив условия (28), найдем критическое значение параметра связи  $\mu$ , при котором возникает синхронизация трех осцилляторов:

$$\mu_{cr} = \frac{3}{2}\Delta_2 \text{ при } \Delta_{1cr} = \frac{\Delta_2}{2}. \quad (30)$$

## 5.Обобщения

Выше, в предыдущем разделе, мы рассмотрели конкретный пример синхронизации осциллятора Ван-дер-Поля внешним периодическим воздействием. Видели, что основной особенностью анализа было сведение общего уравнения к анализу уравнения для фазы. Выше мы уже отмечали, что такая особенность анализа процесса синхронизации является достаточно общей особенностью. Во всех случаях, которые изучены к настоящему времени, именно этот алгоритм – **алгоритм сведения анализа к анализу динамики фазы** – является общим алгоритмом. Он справедлив не только для анализа синхронизации внешним возмущением, но также реализуется при анализе синхронизации большого ансамбля

взаимодействующих нелинейных колебательных элементов. Представим некоторые основные элементы этого алгоритма:

1. На первом шаге определяются уравнения для фаз невзаимодействующих элементов

$$\dot{\varphi} = \Omega. \quad (31)$$

2. Далее, при наличии внешнего возмущения или при наличии влияния других элементов ансамбля в правую часть уравнения (31) добавляется некоторая функция, которая определяет взаимодействия между элементами ансамбля или, как это было в предыдущем разделе, определяет влияние внешнего возмущения.

$$\dot{\varphi} = \Omega + \Phi(\varphi). \quad (32)$$

3. Мы учтем, что уравнение (31) описывает динамику вдоль предельного цикла, т.е. вдоль замкнутой кривой. Это означает, что фаза будет периодически повторять своё значение. При этом удобным приемом является использование метода отображений Пуанкаре. В этом случае вместо дифференциального уравнения (32) можно ввести разностное уравнение:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + F(\varphi_n). \quad (33)$$

Если внешнее возмущение и взаимодействие с другими элементами отсутствует, то  $F(\varphi_n) = \Omega$ .

4. В большинстве известных примерах анализа синхронизации функцию  $F(\varphi_n)$  раскладывают в ряд Фурье и оставляют только первых два не исчезающих слагаемых:

$$F(\varphi_n) = F(\varphi_0) + k \sin(\varphi_n). \quad (34)$$

Вид разложения (34), конечно, частный вид, но очень распространенный.

5. В результате уравнению (33) можно придать форму:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta + k \sin(\varphi_n), \quad (35)$$

где  $F(\varphi_0) = \Delta$ . Четкий физический смысл величины  $\Delta$  и  $k$  имеют, например, при рассмотрении воздействия на автоколебательную систему последовательности импульсов.



Тогда величина  $\Delta$  имеет смысл расстройки между частотой следования импульсов и частотой автоколебаний, а величина  $k$  – амплитуды импульсных толчков.

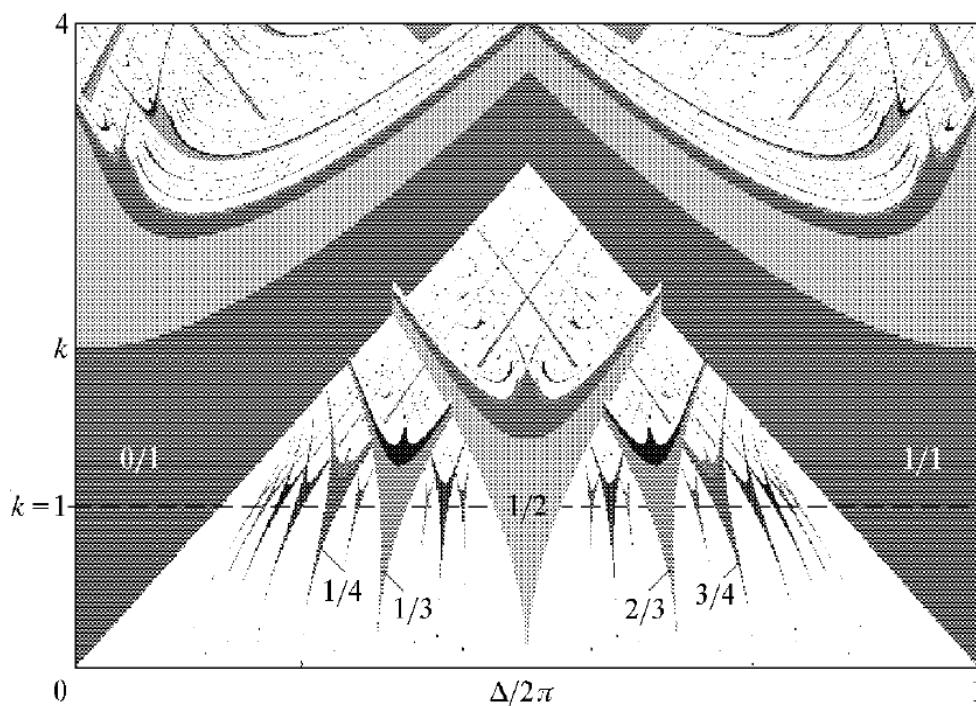
6.  $k = 0$  происходит равномерный сдвиг фазы по «окружности».
7.  $k \neq 0$ ; В этом случае вводят новую характеристику – число вращения  $\rho$ , которая имеет смысл среднего набег фазы за один период внешней силы:

$$\rho(\varphi_0, \Delta, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n - \varphi_0}{2\pi n} ; \quad (36)$$

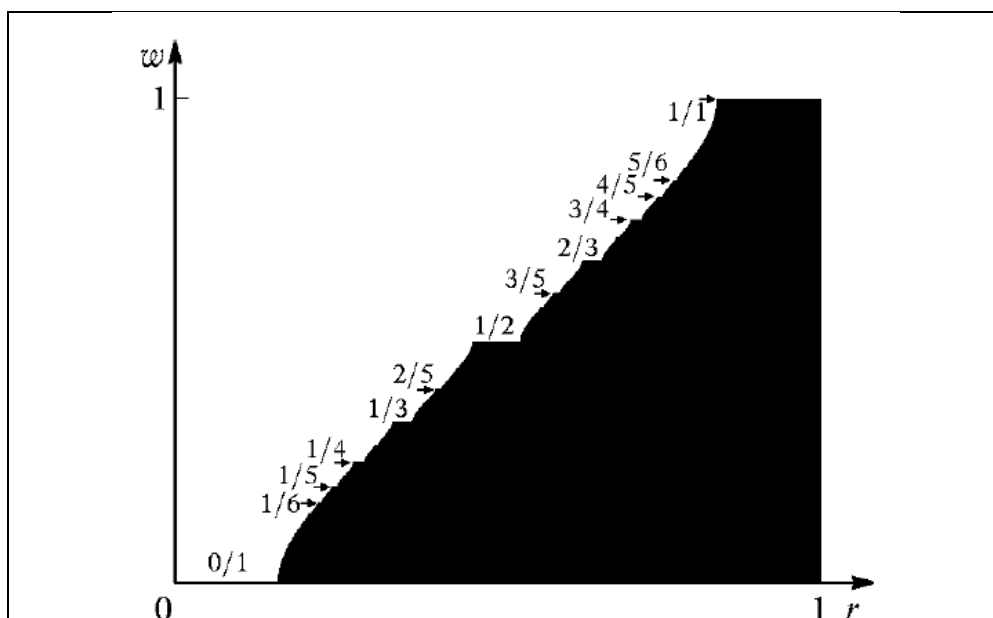
8. В большинстве случаев рассматривается значение параметра  $k$ , который меньше единицы:  $k \leq 1$ . В этом случае оказывается, что число вращения не зависит от начального значения фазы:  $\rho = \rho(\Omega, k)$ .
9. Следуя Арнольду, проанализируем поведение числа вращения в зависимости от параметров  $\Delta$  и  $k$ . Мы будем строить области синхронизации на плоскости параметров  $(\Delta, k)$ , называемой еще «плоскостью частотная расстройка систем  $\Delta$  – величина связи  $k$ ». Если  $k = 0$ , то очевидно, что число вращения совпадает с равномерным сдвигом фазы на окружности  $\Delta$ .
10. Пусть  $k \neq 0$ . При этом важно, какое число  $\rho$  мы выберем. Если это число рациональное (такие числа составляют счетное множество – *бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами*), то возникают резонансы. Например, если точка соответствует числу вращений  $\rho = 1/2$ , то это означает два оборота внешней силы и один оборот изучаемой системы; если число вращения равно две третьих ( $\rho = 2/3$ ), то это означает три оборота внешней силы (знаменатель) и два оборота системы. В каждой из таких точек образуются языки синхронизации (языки Арнольда, см. рис. 11). Если же будут выбраны иррациональные числа (*мощность таких чисел составляет континуум – мощность (или кардинальное число) множества всех вещественных чисел*), то тоже появляются исчезающие тонкие языки синхронизации. Отметим, что мера (площадь) таких языков превышает меру (площади) рациональных языков. Динамика движения изучаемой системы, число вращения которых совпадает с иррациональным числом, соответствует квазипериодическому движению. Динамика с рациональным числом вращения соответствует периодическому движению (хотя может и много периодическому движению). На рис. 11 в области  $k < 1$  возможны периодические и квазипериодические режимы, в области  $k > 1$  – периодические и хаотические режимы. Линия  $k = 1$ , разграничивающая области существенно разного

динамического поведения, называется критической линией. При  $k=0$  число вращения  $\rho = \Delta/2\pi$ , так что при рациональных значениях  $\rho = \Delta/2\pi$  имеют место периодические, а при иррациональных – квазипериодические режимы. На плоскости параметров  $(\Delta, k)$  области периодичности имеют вид характерных зыков Арнольда, которые остриями подходят к рациональным точкам оси абсцисс. При фиксированном  $0 < k < 1$  для каждого рационального числа  $p/q$  существует свой интервал значений параметра расстройки, в пределах которого число вращения фиксировано и равно  $p/q$ . Этот интервал определяется шириной соответствующего языка Арнольда при данном  $k$ .

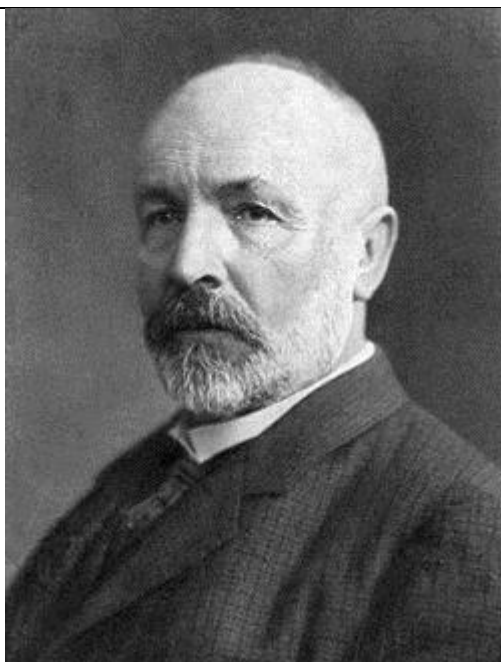
11. Зависимость числа вращения от параметра расстройки  $\rho(\Delta/2\pi)$  оказывается монотонной непрерывной функцией, содержащей бесконечное число горизонтальных ступенек (см. рис. 12). Ее называют чертовой лестницей (devil's staircase). При  $k \rightarrow 0$  суммарная длина всех ступенек чертовой лестницы стремится к нулю. При увеличении  $k$  она монотонно возрастает и при  $k=1$  становится равной единице. Множество значений параметров  $\Delta/2\pi$ , не принадлежащих ступенькам, соответствуют иррациональным числам вращения и квазипериодическим режимам динамики. В закритической области  $k > 1$  языки Арнольда частично перекрываются, что говорит о наличии мультистабильности: при одних и тех же значениях параметров может сосуществовать несколько аттракторов, отвечающих различным динамическим режимам. Каждый из них реализуется при задании начальных условий в бассейне притяжения соответствующего аттрактора. Чем больше знаменатель рационального числа вращения  $\rho = p/q$ , тем ближе к критической линии  $k=1$  располагается в данном языке Арнольда область Хаоса.



**Рис. 11.** Карта динамических режимов на плоскости параметров  $(\Delta, k)$ . Области, изображенные различными тонами серого цвета, отвечают периодическим режимам (языки Арнольда), для нескольких языков указано число вращения. Области квазипериодичности и хаоса показаны белым;  $k=1$  – критическая линия.



**Рис. 12.** «Чертова лестница» (Канторова лестница) – зависимость числа вращения  $\rho$  от параметра  $r = \Delta/2\pi$ .



**Георг Кантор**

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

Немецкий математик

(1845-1918)