

Лекция 13


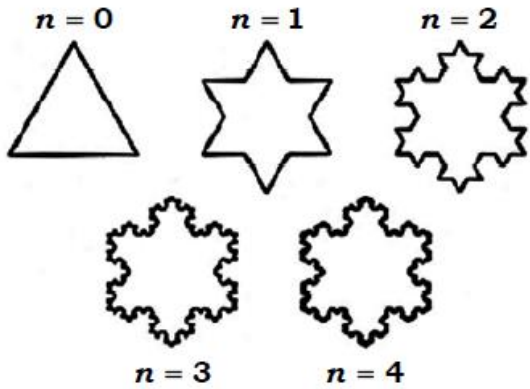
Введение во фракталы. Часть 1.

1. Определение фрактала и его свойства.
2. Примеры природных фракталов.
3. Минимальный масштаб самоподобия. Броуновское движение.
4. Длина береговой линии. Метод Ричардсона.
5. Снежинка Коха.
6. Примеры фрактальных математических функций.
7. Понятие размерности множества А. Пуанкаре.

Фрактальная геометрия возникла в результате преодоления кризиса в математике 1875-1925 годов, связанного, по словам Бенуа Мандельброта, создателя фрактальной геометрии, с осознанием невозможности «истинного понимания неправильности и фрагментации (равно как правильности и связности), по-прежнему определяя размерность как число пространственных координат... Главным здесь, на мой взгляд, является то, что довольно расплывчатое понятие размерности, судя по всему, имеет много математических аспектов, которые не только принципиально различны, но еще дают различные числовые значения этой размерности» (Бенуа Мандельброт. «Фрактальная геометрия природы», 1982 г.).

	<p>Бенуа Мандельброт ввел понятие «фрактал» в 1975 г. Слово «фрактал» происходит от латинского слова <i>fractus</i>, что означает дробный, изрезанный. По нестрогому определению Б. Мандельброта, фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.</p>
<p>Бенуа Мандельброт Французско-американский математик (1924 – 2010)</p>	

Чтобы получить наглядное представление о фракталах, построим геометрический объект, который будет являться фракталом. Представим себе равносторонний треугольник (рис. 1). Теперь мысленно сделаем следующую несложную процедуру: удалим на каждой стороне треугольника среднюю треть и заменим ее двумя отрезками такой же длины. Получим фигуру, состоящую из двенадцати сторон. Повторим предыдущую операцию, заменяя теперь среднюю треть каждой из двенадцати сторон двумя отрезками соответствующей длины. Если эту процедуру проделывать вновь и вновь, то число деталей в образуемом контуре будет увеличиваться, и процесс можно продолжать до бесконечности. Изображение приобретает вид снежинки с геометрически идеальными очертаниями. Оно известно как кривая Коха, по имени Хельге фон Коха, впервые описавшего подобный феномен в 1904 г.

	
<p>Нильс Фабиан Хельге фон Кох Шведский математик (1870-1924)</p>	<p>Рис. 1. Построение снежинки Коха.</p>

Построение снежинки Коха позволяет осознать следующие основные свойства фракталов:

- 1) Внутренне подобие, т.е. понятие «фрактальный» – означает внутренне подобный.
- 2) Фрактальная кривая на любых, даже очень малых масштабах не сводится к прямой линии и является в общем случае геометрически нерегулярной, т.е. для нее характерна изрезанность, извилистость. Это означает, что не существует понятия касательной в точке для фрактальной кривой.

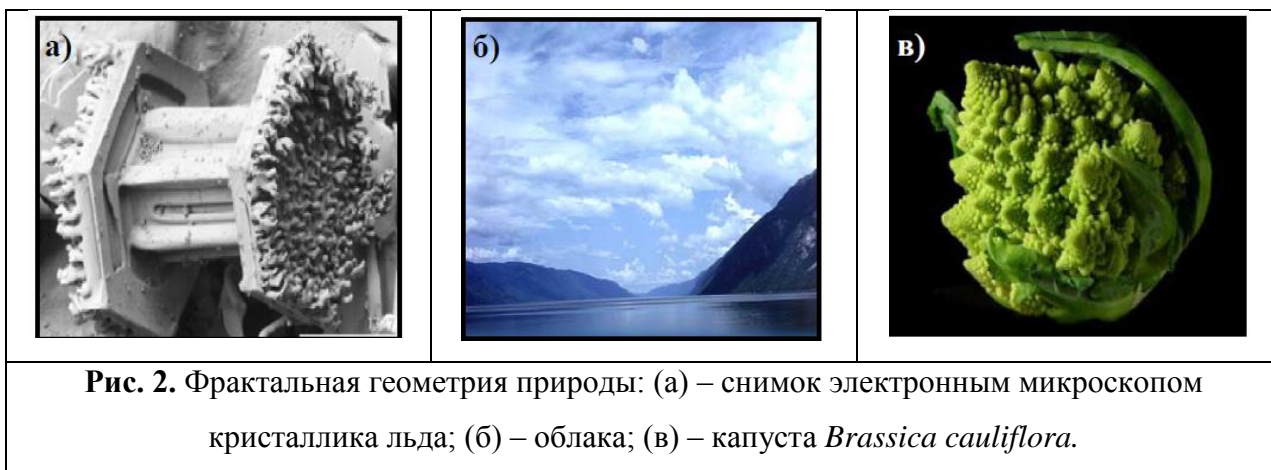
Действительно, если мы направим микроскоп в какую-либо точку привычной для нас дифференцируемой функции, то при увеличении изображения мы увидим прямую линию,

касательную к данной точке. Это означает, что *классические объекты упрощаются при увеличении изображения*, т.е. «в малом» классические объекты становятся линейными. В то же время, фракталам присуща внутренняя бесконечность.

Таким образом, можно сказать, что фракталами являются геометрические объекты: линии, поверхности, пространственные тела, имеющие изрезанную форму и обладающие *свойством самоподобия* или, как еще называют это свойство, *масштабной инвариантности* (от. англ. invariants – неизменный) или *скейлинга* (от англ. scaling – измерять, масштабировать).

Накопленные знания о фракталах были обобщены и впервые представлены в книгах Бенуа Мандельброта «Фракталы: форма, случай, размерность» (1977г.) и «Фрактальная геометрия природы» (1982г.). Во второй книге Б. Мандельброт замечает, что природа любит фракталы ничуть не меньше (если не больше) регулярных форм. Например, возьмем кучевые облака. Они состоят из больших холмов, на которых располагаются холмы поменьше, на них – холмы еще меньше и так далее. В результате, можно констатировать, что в среднем на разных масштабах наблюдается одна и та же картинка. То же происходит и при рассмотрении горного хребта, кроны дерева, морских волн, речной сети на поверхности Земли, структуры разломов в горных породах, ледяных рисунках на окнах в морозные дни.

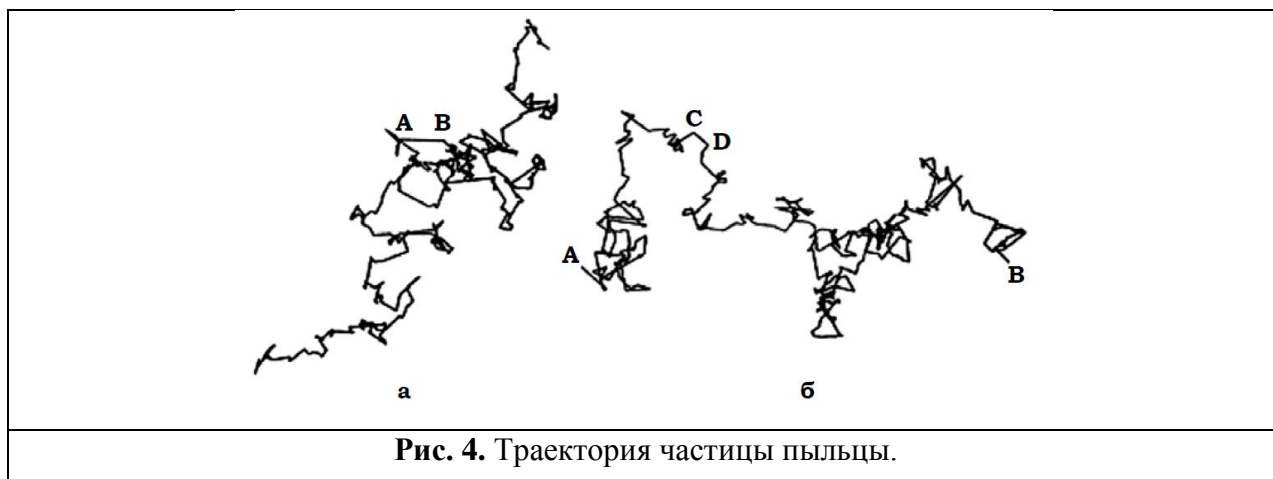
Некоторые примеры природных фракталов приведены на рис. 2 и 3.





Характеризуя новые идеи, связанные с понятием фрактал, Б. Мандельброт писал (1982 г.): «Почему геометрию часто называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы дерева или берега моря. Облака – это не сферы, горы – это не конусы, линии берега – это не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой... Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно». В качестве примера можно привести кровеносную систему человека, состоящую из множества капилляров и сосудов, структуру легких и почек, напоминающие по структуре деревья с ветвистой кроной.

Здесь следует сделать одно замечание. Для реального фрактального объекта существует некоторый минимальный масштаб длиной l_{\min} , такой, что на расстояниях $l \approx l_{\min}$ его основное свойство – самоподобие – пропадает. Кроме того, на больших масштабах длиной $l > l_{\max}$, где l_{\max} – характерный геометрический размер объектов, это свойство самоподобия также нарушается. Поэтому свойства природных фракталов рассматриваются лишь на масштабах длиной l , удовлетворяющих соотношению $l_{\min} < l < l_{\max}$.



Рассмотрим в качестве примера замечательный случайный фрактал – броуновское движение (рис. 4). На рис. 4а показано как выглядит под микроскопом типичная траектория частицы пыльцы, совершающей броуновское движение. Возникает вопрос: действительно ли частица между вершинами ломаной линии движется вдоль прямой. Безусловно, нет. Тогда как движется частица из точки *A* в точку *B* на рис. 4а? Чтобы ответить на этот вопрос сфотографируем движение частицы, увеличив скорость затвора камеры в 100 раз. Это позволит нам получить в 100 раз больше промежуточных положений частицы между точками *A* и *B*. Результаты такой съёмки, увеличенные в 10 раз, представлены на рис. 4б. Прямая линия, соединяющая точку *A* с точкой *B*, превратилась в 100 прямолинейных отрезков, каждый из которых имеет (в среднем) такую же длину, как прямолинейные звенья ломаной на рис. 4а.

Движется ли частица вдоль прямой между точками *C* и *D* на рис. 4б? Естественно, нет. Если увеличить частоту наблюдения за движением частицы из точки *C* в точку *D* в 100 раз, а затем подвергнуть десятикратному увеличению, то полученная картина окажется статистически подобна той, которую мы видим на рис. 4б. Именно поэтому броуновское движение называют *статистически самоподобным*. В броуновском движении диапазон изменения масштабов, в пределах которого сохраняется самоподобие, очень велик. Однако на маленьких масштабах сказывается конечность массы и размеров броуновской частицы, а также конечность времени соударения. При учёте этих обстоятельств траектория броуновской частицы становится плавной линией, и понятие самоподобия утрачивается.

Первоначально понятие фрактала в физике возникло в связи с задачей об определении длины береговой линии. Пусть требуется по имеющейся карте местности измерить длину береговой линии между точками *A* и *B* (рис. 5).

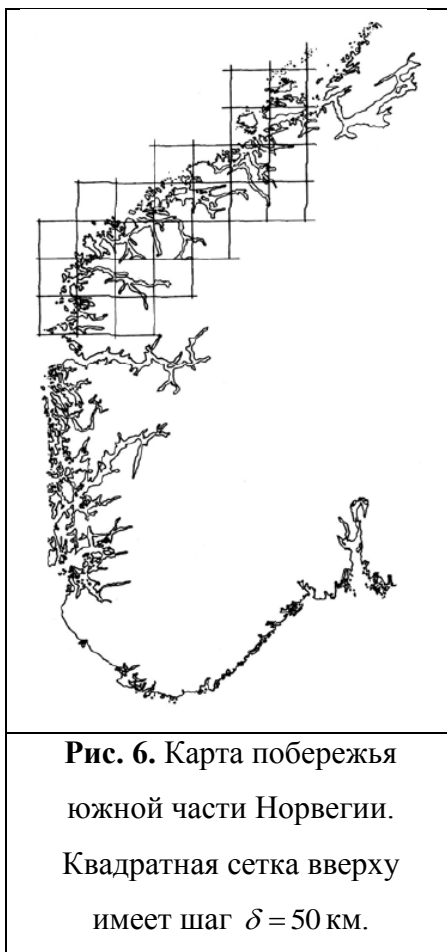


Рис. 5. Береговая линия между точками *A* и *B*.

Чтобы измерить длину береговой линии между этими точками мы, с помощью циркуля, расставим по берегу жёстко связанные друг с другом вешки так, чтобы расстояние между соседними вешками равнялось, например, $\delta = 10$ км. Длину береговой линии между точками A и B примем равной числу вешек минус одна умноженному на 10 км. Следующее измерение этой длины произведём подобным же образом, но расстояние между соседними вешками примем равным $\delta = 1$ км. Уменьшение δ приводит к увеличению числа шагов циркуля вдоль береговой линии.

Заметим, что при использовании циркуля у нас будут возникать проблемы с островами и реками. Другой способ измерения береговой линии состоит в том, чтобы покрыть карту сеткой с квадратными ячейками размером $\delta \times \delta$. Так делал норвежский физик Е. Фёдер при измерении длины береговой линии Норвегии (рис. 6).

Попробуем сначала применить этот метод для определения длины окружности радиусом R . Заменим окружность ломаной линией, отрезки которой расположены на окружности. Понятно, что чем большее число отрезков мы берем, тем ближе ломаная линия приближается к окружности.



Длина отрезка δ ломаной линии, состоящей из n звеньев, равна $\delta = 2R \sin(\pi/n)$.

Поскольку ломанная состоит из n отрезков, то ее суммарная длина

$$L_n = 2nR \sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (1)$$

При больших n значение $\sin(\pi/n) \approx \pi/n$ и, в пределе, при $n \rightarrow \infty$, выражение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 2R \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi R. \quad (2)$$

Если бы береговая линия также имела вполне определённую длину L , то можно было бы ожидать, что число шагов циркуля или число квадратных ячеек $N(\delta)$, необходимых для покрытия береговой линии на карте, будет обратно пропорционально δ , а длина аппроксимирующей ломанной

$$L(\delta) = N(\delta)\delta \quad (3)$$

при уменьшении δ будет стремиться к L . Однако, это не так.



Льюис Фрай Ричардсон
Английский физик-математик
(1881– 1953)

1961 г. вышла работа Л. Ф. Ричардсона, посвящённая измерению длин береговых линий. Им было установлено, что, в отличие от гладкой кривой, береговая линия оказывается зачастую настолько изрезанной (вплоть до самых маленьких масштабов), что с уменьшением шага δ длина аппроксимирующей ломанной $L(\delta) = N(\delta)\delta$ неограниченно растёт. В тоже время неизменным остается значение

$$a = N(\delta)\delta^{1-D}, \quad (4)$$

где $D = \text{const} > 1$. Оказалось, что для побережья Англии константа $D = 1.24$. Сравнивая выражения

$$L(\delta) = N(\delta)\delta \quad \text{и} \quad a = N(\delta)\delta^{1-D},$$

находим, что длина аппроксимирующей ломанной, при уменьшении δ увеличивается по степенному закону

$$L(\delta) = a\delta^{1-D}. \quad (5)$$

Таким образом, при определении длины береговой линии $L(\delta)$ с помощью жёсткого масштаба δ необходимо сделать $N(\delta) = L(\delta)/\delta$ шагов. При этом значение $L(\delta)$ изменяется при изменении длины δ так, что зависимость $N(\delta)$ определяется степенным законом

$$N(\delta) = \frac{a}{\delta^D}. \quad (6)$$

Для другой береговой линии закон (6) сохраняется, но D и a будут другими, причем для более изрезанной береговой линии значение D возрастает.

Константу D в формулах (5) и (6) называют фрактальной размерностью береговой линии. Для обычной гладкой кривой (типа окружности, эллипса) можно ожидать, что $a = L$ (при достаточно малых δ), а показатель D равен единице.

Найдем соотношение, которое позволит вычислить фрактальную размерность D по данным, полученным при измерении длины береговой линии. Для этого, прологарифмировав формулу (5), запишем её в виде

$$\log L(\delta) = \log a + (1-D)\log \delta. \quad (7)$$

Выражение (7) устанавливает линейную зависимость между $\log L(\delta)$ и $\log \delta$, что графически представляет собой прямую линию. При этом угловой коэффициент прямой $(1-D)$ определяется фрактальной размерностью D исследуемой береговой линии.

Аналогично, прологарифмировав формулу (6), устанавливаем линейную зависимость между $\log N(\delta)$ и $\log \delta$:

$$\log N(\delta) = \log a - D \log \delta. \quad (8)$$

Из выражений (7) и (8), принимая во внимание малость величин δ (напомним, что величина δ уменьшается с каждой итерацией), можно записать следующие асимптотические формулы

$$\log L(\delta) = (1 - D) \log \delta. \quad (9)$$

$$\log N(\delta) = -D \log \delta. \quad (10)$$

В соответствии с (9) и (10), определить фрактальную размерность береговой линии можно, измеряя угловой коэффициент графика $\log L(\delta)$ или $\log N(\delta)$ от $\log \delta$. Размерность D , которая определяется из формул (9), (10) как результат подсчета числа клеток, необходимых для покрытия данной линии (или вообще некоторого множества), принято называть клеточной размерностью. Например, подсчеты показали, что размерность береговой линии побережья Норвегии $D=1.52$, для гадкого побережья юга Африки – $D \approx 1$, а для изрезанного западного побережья Британии – $D=1.3$.

Представим себе остров виде снежинки Коха и найдем длину его береговой линии.

На нулевом шаге, т.е. при $n=0$, число элементов $N(\delta_0)=3$, длина элемента $\delta_0=1$, длина береговой линии $L(\delta_0)=N(\delta_0)\delta_0=3$.

На шаге $n=1$: $\delta_1=(1/3)\delta_0=1/3$, $N(\delta_1)=4N(\delta_0)=3 \cdot 4$, длина береговой линии $L(\delta_1)=N(\delta_1)\delta_1=3 \cdot (4/3)$.

На шаге $n=2$: длина элемента $\delta_2=(1/3)\delta_1=(1/3)^2$, число элементов $N(\delta_2)=4N(\delta_1)=3 \cdot 4^2$, длина береговой линии $L(\delta_2)=N(\delta_2)\delta_2=3 \cdot (4/3)^2$.

На шаге n : длина элемента $\delta_n=(1/3)^n$, число элементов $N(\delta_n)=3 \cdot 4^n$. Тогда число шагов можно выразить через длину элемента: $n=-\ln \delta_n / \ln 3$, а соответствующую длину береговой линии записать в виде следующей формулы:

$$\begin{aligned} L(\delta_n) &= 3 \left(\frac{4}{3} \right)^n = 3 \exp \left[n \ln \left(\frac{4}{3} \right) \right] = 3 \exp \left[\left(1 - \frac{\ln 4}{\ln 3} \right) \ln \delta \right] = \\ &= 3 \exp \left(\ln \delta^{1 - \ln 4 / \ln 3} \right) = 3 \delta^{1 - \ln 4 / \ln 3}. \end{aligned} \quad (11).$$

Сопоставляя полученное выражение с формулой (5), полученной Ричардсоном для длин береговых линий ($L(\delta) = a\delta^{1-D}$), получим равенство для длины береговой линии на n -том шаге создания острова Коха:

$$L(\delta_n) = 3\delta^{1-\ln 4/\ln 3} = a\delta^{1-D}. \quad (12).$$

Из выражения (12) находим фрактальную размерность береговой линии острова Коха:


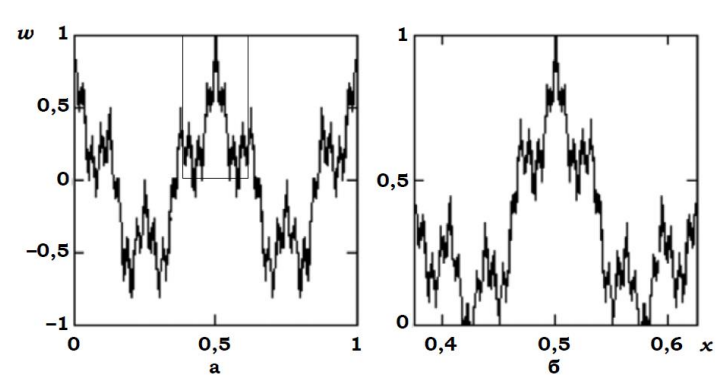
$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.2628 > 1. \quad (13)$$

При $n \rightarrow \infty$, величина $\delta \rightarrow 0$, следовательно, длина береговой линии стремится к бесконечности. Здесь сделаем одно замечание. С математической точки зрения, процедура построения кривой может продолжаться бесконечно. Если же попытаться построить береговую линию острова Коха с помощью карандаша и бумаги, то реальный процесс построения прекратиться, как только длина отрезка между соседними точками излома сравняется с толщиной линии. Например, если начальная длина стороны треугольника равна одному метру, а карандаш оставляет линию толщиной 0.1мм, то количество итераций при реальном построении будет равно $n=8$, а длина береговой линии острова Коха $L \approx 30$ м.


Приведем некоторые примеры фрактальных функций.

Одним из примеров функций, обладающих свойством скейлинга (самоподобия), является непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция, предложенная Карлом Вейерштрассом («отцом современного математического анализа»):

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x). \quad (14)$$

 <p style="text-align: center;"><i>Weierstrass</i></p>	
<p style="text-align: center;">Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс Немецкий математик (1815 – 1897)</p>	<p style="text-align: center;">Рис. 7. Функция Вейерштрасса. $a = 0.5$, $b = 4$. а) Интервал: $0 \leq x \leq 1$; б) Интервал: $0.375 \leq x \leq 0.625$.</p>

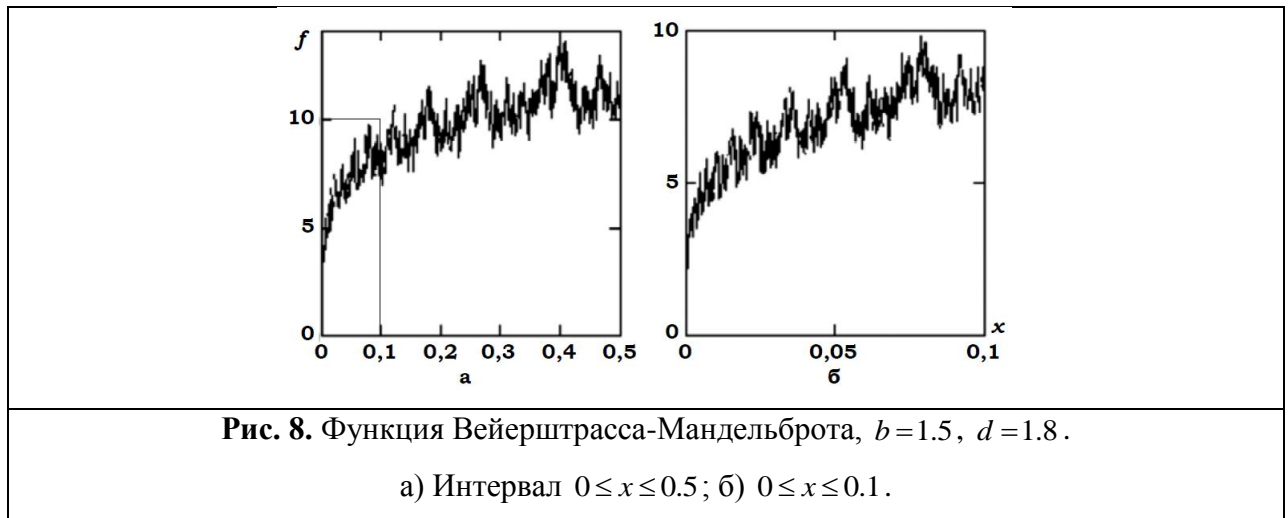
Вейерштрасс доказал, что эта функция не имеет производной, если $0 < a < 1$, b – нечетное число и $ab > 1 + (3/2)\pi$. В 1916 г. английский математик Годфри Харольд Харди показал, что такая функция не является дифференцируемой нив одной точке и при более слабом условии: $a < 1$, $b > 1$, $ab > 1$. На рис. 7 показан пример такой функции. Видно, что при более подробном рассмотрении качественное поведение функции не изменяется, т.е. такая функция обладает свойством самоподобия (скейлинга).


<p style="text-align: center;">Годфри Харольд Харди Английским математик (1877 - 1947)</p>

Еще одним примером может служить функция Вейерштрасса-Мандельброта:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(b^k x)}{b^{(2-d)k}}, \quad (15)$$

здесь параметр d принимает значения в диапазоне $1 < d < 2$. Функция Вейерштрасса-Мандельброта непрерывна, но не дифференцируема ни в одной точке. Принято считать, что клеточная размерность этой функции примерно равна значению d .



Из рис. 8 видно, что, как и в предыдущем случае, функция демонстрирует свойство самоподобия (или скейлинга).

Обсудим понятие размерности множества.

Очевидно, представленные результаты измерения длины береговой линии кажутся совершенно неожиданными. Действительно, чем меньше длина линейки, тем больше измеренная длина побережья. Простейшая процедура измерения длины оказывается не такой простой, как кажется вначале. К тому же величина D в формуле $L(\delta) = a\delta^{1-D}$ (формула 5), которую мы назвали фрактальной размерностью береговой линии, является дробным числом, что совершенно не соответствует нашему интуитивному представлению о размерности.

Попытаемся и мы, не вдаваясь в математические тонкости, осмыслить важнейшее понятие: *размерность множества*.

Если рассматривать геометрические объекты как множества точек евклидова пространства (свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии), то понятие топологической размерности можно ввести по рекуррентной схеме, предложенной французским математиком Анри Пуанкаре.

Положим размерность любого конечного или счётного множества точек (бесконечного множества, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами) равным нулю; размерность связного множества будем считать равной $D_T + 1$ (где D_T – топологическая размерность множества), если оно может быть разрезано на две несвязанные части исключением из него как минимум D_T -мерного множества точек, т. е. проведением D_T -мерного разреза. При таком определении, если положить размерность точки равной нулю, то топологическая размерность линии будет равна единице, плоскости и сферы – двум, шара – трём и т. д.

Из определения видно, что топологическая размерность может быть только целым числом, и совпадает с интуитивным представлением о минимальном количестве переменных, которые нужно задать для определения положения точки на объекте. В 1902 году в книге «Наука и гипотеза» А. Пуанкаре писал, что «размерность пространства – это минимальное число параметров, которые необходимы, чтобы отличать точки пространства друг от друга»; полное зрительное пространство «имеет как раз три измерения; т. е. элементы наших зрительных ощущений ... будут вполне определены, когда известны три из них». И если в пространстве это число равно трём, на плоскости достаточно двух координат, на линии – одной; в этом смысле пространство – трёхмерно, плоскость – двумерна, линия – одномерна.

В статье «Почему пространство имеет три измерения» (1912 г.) А. Пуанкаре определил размерность, которую можно было бы назвать *антропной*. Он пишет о существовании *«экспериментальных фактов, которые заставляют нас приписывать пространству три измерения. Именно ввиду этих данных нам было удобнее приписать ему три измерения, а не четыре или два. Но слово «удобный», пожалуй, в данном случае недостаточно сильно: Существо, которое приписывало бы пространству два или четыре измерения, оказалось бы менее приспособленным к борьбе за существование в мире, подобном нашему»*. В случае двух измерений оно предполагало бы существование таких соотношений, которые мы, люди, не допускаем; а в случае четырёх – отбрасывало бы такие, которыми мы пользуемся.

Бенуа Мандельброт обратил внимание на то, что мнение о размерности как внутренней характеристики тела, поверхности или кривой, неверно. В действительности, размерность объекта зависит от наблюдателя, точнее от связи объекта с внешним миром.

Приведем следующий наглядный пример из книги *Ю.А.Данилова, Б.Б.Кадомцева. Нелинейные волны. Самоорганизация, 1983 г.* Представим себе, что мы рассматриваем клубок ниток. Если расстояние, отделяющее нас от клубка достаточно велико, то клубок мы видим как точку, лишенную какой бы то ни было внутренней структуры. Перед нами геометрический объект с топологической размерностью $D_T = 0$. Приблизив клубок на некоторое расстояние, мы будем видеть его как плоский диск, т.е. как геометрический объект размерности $D_T = 2$. Приблизившись к клубку ещё на несколько шагов, мы увидим, что он состоит из нитей. Теперь топологическая размерность клубка станет равной $D_T = 1$. Наконец, если бы разрешающая способность наших глаз позволяла нам различать отдельные атомы, то, проникнув внутрь нити, мы увидели бы отдельные точки; клубок рассыпался на атомы, стал геометрическим объектом размерности $D_T = 0$.

Таким образом, если размерность зависит от конкретных условий, то её можно выбирать по-разному. Можно сказать, что трудность определения понятия размерности как раз и состоит в том, что намеченный путь не единствен. Можно сформулировать и иные, столь же естественные, подходы её определения.

Например, рассмотрим такой вариант определения размерности геометрических объектов. Сколько отрезков длиной в $1/10$ см понадобится, чтобы разместить их на отрезке длиной 1 см? Совершенно очевидно, что десять. А сколько квадратов со стороной в $1/10$ см потребуется для того, чтобы покрыть квадрат со стороной в 1 см? Сто. Аналогичным образом куб с ребром в 1 см можно заполнить тысячей кубами с рёбрами в $1/10$ см. Мы видим, что величина, совпадающая с топологической размерностью, появляется в показателях степеней: 10^1 , 10^2 , 10^3 , Эту последовательность показателей можно обнаружить, независимо от того, какой масштаб будет выбран нами для проведения процедуры измерения отрезка, стороны квадрата, ребра куба! Не вдаваясь в подробности, отметим самое существенное: *геометрический объект характеризуется минимальным числом "клеток", необходимых для покрытия объекта.* Число D , которое мы назовём размерностью объекта, появляется как показатель степени в соотношении, связывающем число N "клеток" и их характерный размер δ . Из рассмотренных нами примеров следует, что $N = 1/\delta^D$.