

## ДИНАМІКА МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

У механіці для опису динамічних систем вводиться функція Лагранжа

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}, t), \quad (1)$$

де  $\mathbf{q}$  і  $\dot{\mathbf{q}}$  – вектори координат і швидкостей по всіх ступенях свободи (кількість ступенів свободи дорівнює порядку диференціального рівняння, яке описує динаміку системи, що розділено навпіл),  $T$  – кінетична енергія,  $U$  – потенційна енергетика.

Рівняння руху Лагранжа для кожної координати  $q_i$  мають вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2)$$

Для опису динамічних систем вводиться концепція функції Гамільтона:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (3)$$

де  $N$  – кількість векторного компонента  $\mathbf{q}$  (що дорівнює векторному компоненту  $\dot{\mathbf{q}}$ ), вектор швидкості  $\dot{\mathbf{q}}$  розглядається як функція  $\mathbf{q}$  і нової змінної  $\mathbf{p}$ , що називається вектором імпульсу. Тоді рівняння руху (2) для кожного з координат  $q_i$  може призвести до рівнянь руху для компонент  $p_i$  і  $q_i$  імпульсів і координат відповідно:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (4)$$

Для функцій Лагранжа і Гамільтона виконується таке співвідношення

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5)$$

Рівняння (4) і (5) називаються рівняннями Гамільтона. Змінні  $\mathbf{p}$  і  $\mathbf{q}$  називаються узагальненими імпульсами та координатами. Будь-який набір змінних  $\mathbf{p}$  і  $\mathbf{q}$ , еволюція яких з

часом описується рівняннями (4) називається канонічним, і самі змінні  $p_i$  і  $q_i$  – спряженими канонічними змінними. Для консервативних систем (без дисипативних втрат) функція Гамільтона не залежить від часу і являє собою повну енергію системи, тобто – в класичному сенсі – суму кінетичної і потенційної енергії системи.

Розглянемо математичний маятник. Математична модель маятника часто використовується у фізичних дослідженнях. Крім того, вивчення динаміки математичного маятника зводиться до вивчення динаміки будь-якої системи, гамільтоніан якої може бути представлений у виді  $H = H_0(p, q) + \varepsilon H_1(p, q, t)$ , де  $H_0$  – частина гамільтоніана, що інтегрується,  $\varepsilon H_1$  – мале періодичне збурення.

Рівняння математичного маятника можна представити в одному з наступних видів:

$$\dot{p} = -\omega_0^2 \sin q = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = p = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (6)$$

Система рівнянь (6) також може бути переписана як єдине диференціальне рівняння 2-го порядку відносно координат (*вимір відповідного фазового простору дорівнює 2, і кількість ступенів свободи – 1*).

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0. \quad (7)$$

Якщо використовувати позначення в попередніх лекціях

$$x_0 = q, \quad \dot{x}_0 = x_1 = p, \quad (8)$$

рівняння (6) і (7) буде переписано як

$$\dot{x}_0 = x_1, \quad \dot{x}_1 = -\omega_0^2 \sin x_0 \quad (6A)$$

і

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 \sin x_0 = 0. \quad (7A)$$

**Гамільтон для математичного маятника має вид:**

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} - \omega_0^2 \cos q = T(p) + U(q) = E = \text{const} \quad (9)$$

або, у позначеннях (8),

$$H = \frac{\dot{x}_1^2}{2} - \omega_0^2 \cos x_0 = W_k(x_1) + W_p(x_0) = \text{const} . \quad (9A)$$

У цих записах ми врахували, що гамільтоніан математичного маятника без дисипативних втрати являє собою повну енергію математичного маятника  $E$  і що ця енергія зберігається. Давайте доведемо цей факт:

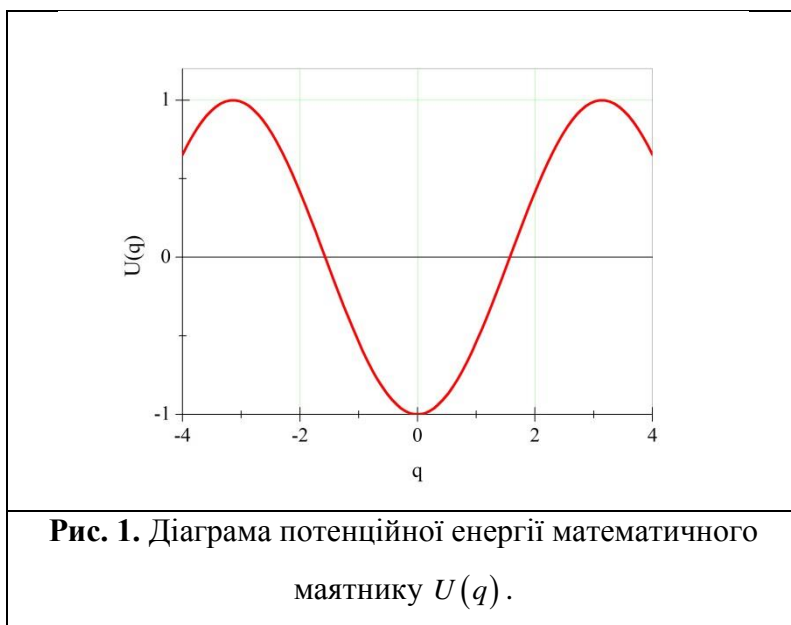
$$\dot{x}_0 \ddot{x}_0 + \omega_0^2 \dot{x}_0 \sin x_0 = 0 . \quad (10)$$

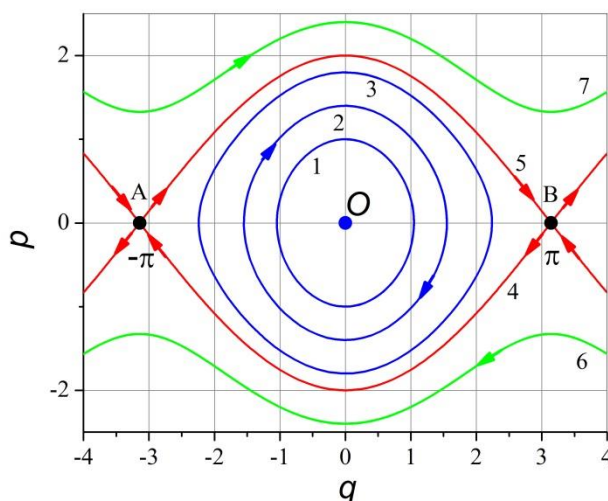
$$\int_{t_0}^t \dot{x}_0 \ddot{x}_0 dt = \left. \frac{\dot{x}_0^2}{2} - \frac{\dot{x}_0^2}{2} \right|_{t=t_0} , \quad (11)$$

$$\int_{t_0}^t \dot{x}_0 \sin x_0 \cdot dt = \int_{x_0(t_0)}^{x_0} \sin x'_0 \cdot dx'_0 = -\cos x_0 + \cos x_0(t_0) , \quad (12)$$

$$\frac{\dot{x}_0^2}{2} - \omega_0^2 \cos x_0 = \left[ \frac{\dot{x}_0^2}{2} - \omega_0^2 \cos x_0 \right]_{t=0} = \text{const} . \quad (13)$$

**Потенційна енергія або потенціал математичного маятника  $U(q)$**  представлений на рис. 1, а фазовий портрет - на рис. 2.





**Рис. 2.** Фазовий портрет математичного маятника. Особлива точка  $O$  – типу «центр», особливі точки  $A$  і  $B$  – типу «сідло», траєкторії 1, 2, 3 відповідають коливанням маятника, траєкторії 4 і 5 – руху маятника уздовж сепаратриси, траєкторії 6 і 7 – обертанням маятника.

З гамільтоніана (9) отримаємо наступний вираз для канонічного імпульсу

$$p = \pm \sqrt{2(H + \omega_0^2 \cos q)}. \quad (14)$$

Тут знак (+) відповідає руху маятника у верхній напівплощині ( $p > 0$ ) фазового простору  $(p, q)$ . З формули (14) випливає, якщо  $H > \omega_0^2$ , тоді всі значення канонічної змінної  $q$  доступні. Це відповідає обертанню маятника (траєкторії 6 і 7 на рис.2). Якщо  $H < \omega_0^2$ , то доступні лише обмежені значення канонічної змінної  $q$  (кута). Це відповідає коливанням маятника (траєкторії 1, 2 і 3 на рис. 2). Особливу роль грають значення  $H = \omega_0^2$ . Цьому значенню енергії на фазовій площині відповідає сепаратриса, який виходить з однієї сідлової точки (наприклад,  $p=0, q=-\pi$ ) і входить в другу сідлову точку ( $p=0, q=\pi$ ) (траєкторії 4 і 5 на рис.2). Час досягнення особливої точки по сепаратрісі прямує до нескінченності. Сідлу відповідає верхнє, нестійке положення рівноваги, а сепаратрісі - лімітаційні рухи маятника, при яких маятник асимптотично при  $t \rightarrow \infty$  наближається до верхнього положення рівноваги.

Особливі точки математичного маятника визначаються умовою  $\dot{p} = \dot{q} = 0$  і дорівнюють  $q_n = n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$  і  $p_n = 0$ . Ми вище вже аналізували ці особливі точки. Нагадаємо, що якщо

$n$  – парні, то особливі точки є точками типу центр (точка  $O$  на рис. 2). Якщо  $n$  – непарні, то особливі точки є сідловими точками (точки  $A$  і  $B$  на рис. 2).

Знайдемо аналітичний розв’язок рівняння (9) на сепаратрісі. При русі на сепаратрісі повна енергія маятника дорівнює  $H = \omega_0^2$  і

$$\dot{q} = p = \pm \sqrt{2\omega_0^2(1 + \cos q)} = \pm 2\omega_0 \cos \frac{q}{2}. \quad (15)$$

Враховуючи що

$$1 + \cos q = 2\cos^2\left(\frac{q}{2}\right)$$

формулу (15) можна переписати у виді

$$p = \pm 2\omega_0 \cos\left(\frac{q}{2}\right). \quad (16)$$

Тому рішення на сепаратрісі може бути представлено як

$$\int \frac{d\frac{q}{2}}{\cos \frac{q}{2}} = \pm \omega_0 t.$$

Після інтегрування остаточний розв’язок можна записати як

$$\ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{q}{4} \right) \right| = \pm \omega_0 (t - t_0), \quad (17)$$

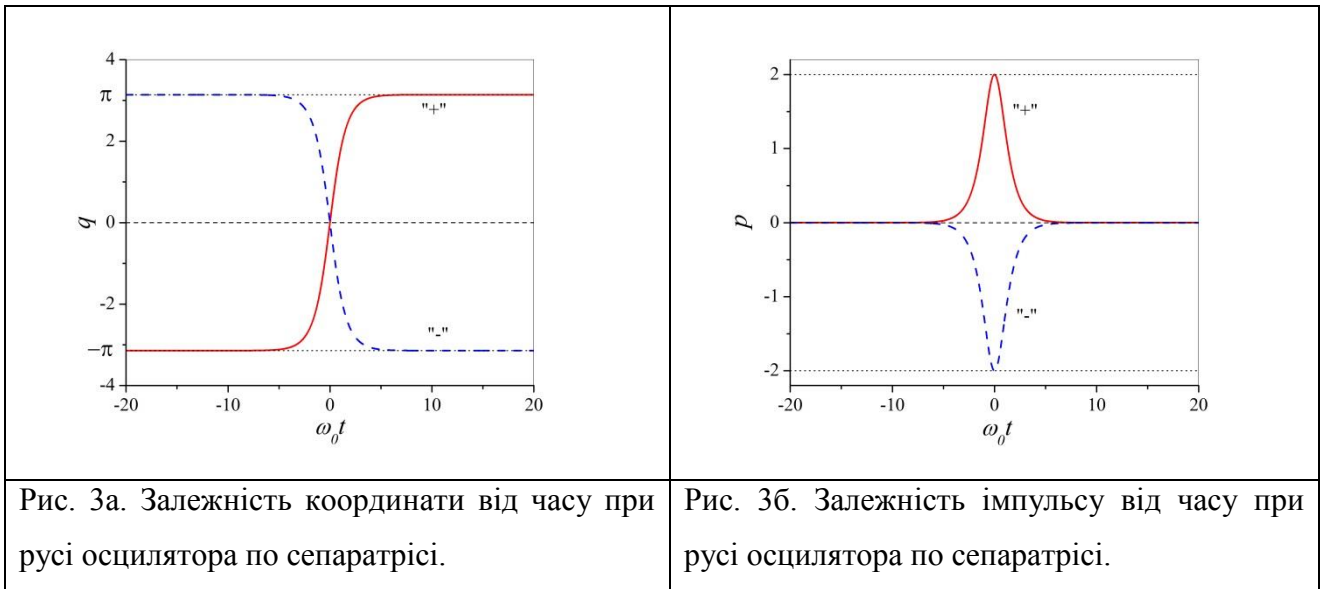
де  $t_0$  – постійна інтегрування. Верхній знак «+» відповідає руху по сепаратрісі, що лежить у *верхній* напівплощині фазового простору. Знак «–» відповідає руху по сепаратрісі, що лежить у *нижній* напівплощині фазового простору. З формули (17) випливає, що при русі по «верхній» сепаратрісі (знак «+» у формулі (17)) при  $t \rightarrow +\infty$  зображальна точка прямує до  $\pi$ , тобто ( $q \rightarrow \pi, p \rightarrow 0$ ). При русі по «нижній» сепаратрісі при зображальна точка прямує до  $-\pi$ , тобто ( $q \rightarrow -\pi, p \rightarrow 0$ ). З формули (17) отримуємо такі вирази для  $q$  і  $p$ :

$$q = 4\operatorname{arctg} \left\{ \exp \left[ \pm \omega_0 (t - t_0) \right] \right\} - \pi, \quad (18)$$

$$p = \dot{q} = \pm \frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}[\omega_0(t-t_0)]}. \quad (19)$$

Знаки «+» і «-» відповідають двом різним сепаратрисам, що лежать у верхній і нижній напівплощинах відповідно. Рішення (19) має вигляд усамітненої хвилі – солітона, характерна ширина профілю якого дорівнює  $1/\omega_0$ . Знак «+» відповідає руху солітона по верхній сепаратрисі, а знак «-» - руху солітона по нижній сепаратрисі.

Графіки відповідних залежностей наведені на рис. 3а і рис. 3б.



Для опису динаміки маятника в інших областях фазового простору (не на сепаратрисі) зручно перейти до змінних дія-кут. Величина дії за визначенням дорівнює

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p \cdot dq, \quad (20)$$

де інтегрування проводиться по одному періоду коливань. Підставивши в (20) вираз для імпульсу (14), отримаємо

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{q_{\max}} \sqrt{2(H + \omega_0^2 \cos q)} dq = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{q_{\max}} \sqrt{H + \omega_0^2 \cos q} dq, \quad (21)$$

де значення  $q_{\max}$  визначаються з рівняння

$$H + \omega_0^2 \cos q_{\max} = 0. \quad (22)$$

Звернемо увагу, що величина дії після інтегрування буде тільки функцією гамільтоніана  $H$ . Справедливо і зворотне твердження – гамільтоніан в нових змінних (змінні дія-кут) залежить тільки від нової канонічної змінної – дії. *Справедливо і зворотне твердження - гамільтоніан в нових змінних (змінні дія-кут) залежить тільки від нової канонічної змінної – дії.* Ми побачимо, що в даному випадку це дійсно так, хоча загальний розв'язок має досить складний вид і не може бути виражений через елементарні функції. Дія при цьому є інтегралом руху, а повна похідна за часом від нової канонічної змінної – кута є функцією тільки дії і тому також не змінюється.

Якщо маятник обертається  $H > \omega_0^2$ , то в якості  $q_{\max}$  вибирають  $\pi$ . Такий вибір обумовлений можливістю ототожнити точку  $(q = -\pi, p = 0)$  з точкою  $(q = \pi, p = 0)$  для маятника, що обертається.

$$I = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{H + \omega_0^2 \cos q} dq = I(H). \quad (23)$$

Для того, щоб ввести нову канонічну змінну «кут»  $\bar{q} = \theta$  необхідно знайти вираз для відповідної твірної функції  $S$ . Твірна функція  $S$  канонічного перетворення

$$(q, p) \rightarrow (\theta, I), \quad (24)$$

що вводить змінні дію ( $I$ ) – кут ( $\theta$ ), буде функцією  $(q, I)$ , тобто  $S = S(q, I)$  і визначається рівністю

$$S(q, I) = \int p(q, H(I)) dq. \quad (25)$$

Зміна змінних  $(q, p) \rightarrow (\theta, I)$  задається формулами

$$p = \frac{\partial S(q, I)}{\partial q}, \quad \theta = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I}. \quad (26)$$

Підставами в визначення твірної функції (25) вираз для імпульсу (14) і перепишемо його у виді

$$S(q, I) = \int_{q_0}^q p dq = \int_{q_0}^q \sqrt{2(H(I) + \omega_0^2 \cos q)} dq, \quad (27)$$

де  $q_0$  – деяка довільна постійна. Зауважимо, що інтеграл у виразі (27) відрізняється від інтеграла в визначенні дії (21) тільки значенням верхньої межі. Саме, вираз для  $S(q, I)$  буде відрізнятися від виразу для  $I(H)$  тільки деякою постійною. Крім цього, як буде показано далі, в вираз для  $S(q, I)$  замість повних еліптичних інтегралів (як для дії  $I(H)$ ), увійдуть неповні еліптичні інтеграли. Нова канонічна координата (кут) визначається формулою

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial I} = \frac{\partial S}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial I} = \left( \frac{\partial I}{\partial H} \right)^{-1} \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{2(H(I) + \omega_0^2 \cos q)}}. \quad (28)$$

Для подальшого аналізу нам необхідно ввести еліптичні інтеграли першого ( $F$ ) і другого ( $E$ ) роду:

$$F(\varphi, \kappa) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \alpha}} \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ при } \kappa \rightarrow 0 \text{ и } \varphi = \pi/2. \quad K(\kappa) = F\left(\frac{\pi}{2}, \kappa\right), \quad (29)$$

$$E(\varphi, \kappa) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ при } \kappa \rightarrow 0 \text{ и } \varphi = \pi/2. \quad E(\kappa) = E\left(\frac{\pi}{2}, \kappa\right). \quad (30)$$

$$K(\kappa) = F\left(\frac{\pi}{2}, \kappa\right) \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1 - \kappa^2}} \text{ при } \kappa \rightarrow 1. \quad (31)$$

Для того щоб скористатися цими формулами, введемо наступні параметри:

$$\omega_0^2 = H_s, \quad \kappa^2 = \frac{H_s + H}{2H_s}, \quad (32)$$

$$\kappa \sin \xi = \sin\left(\frac{q}{2}\right) - \text{при описі коливання маятника } (\kappa < 1), \quad (33)$$



$$\sin \xi = \sin\left(\frac{q}{2}\right) \text{ – при описі обертання маятника } (\kappa > 1). \quad (34)$$

Використовуючи ці параметри, ми можемо написати

$$\begin{aligned} H + H_s \cos q &= H + H_s \left(1 - 2 \sin^2 \frac{q}{2}\right) = (H + H_s) - 2H_s \sin^2 \frac{q}{2} = \\ &= (H + H_s) \left[1 - \frac{2H_s}{H + H_s} \sin^2 \frac{q}{2}\right] = (H + H_s) \left[1 - \kappa_1^2 \sin^2 \frac{q}{2}\right], \end{aligned} \quad (35)$$

де  $\kappa_1^2 = 2H_s / (H + H_s) = 1 / \kappa^2$ .

**Якщо маятник обертається** ( $H > H_s$ ), то параметр  $\kappa_1 < 1$  і вираз для дії може бути представлено у вигляді еліптичного інтеграла другого роду

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{H + H_s} \sqrt{1 - \kappa_1^2 \sin^2 \frac{q}{2}} \cdot dq = \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{H + H_s} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \kappa_1^2 \sin^2 \xi} d\xi = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{H + H_s} \cdot E(\kappa_1). \end{aligned} \quad (36)$$

**Якщо маятник коливається** ( $H < H_s$ ), то параметр  $\kappa_1 > 1$  і вираз для дії можна представити у вигляді комбінації повних еліптичних інтегралів першого та другого роду:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{q_{\max}} \sqrt{H + H_s} \sqrt{1 - \kappa_1^2 \sin^2 \frac{q}{2}} \cdot dq = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \kappa \sqrt{H + H_s} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sin^2 \xi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \xi}} d\xi = \\ &= \frac{8\sqrt{H_s}}{\pi \kappa_1^2} \left[ (1 - \kappa_1^2) \cdot K(\kappa) + \kappa_1^2 E(\kappa) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

У змінних дія-кут рівняння руху будуть такими:

$$\dot{I} = -\frac{\partial H(I)}{\partial \theta} = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H(I)}{\partial I} = \omega(I). \quad (38)$$

Звідси випливає що

$$I = I_0 = \text{const}, \quad \theta(t) = \omega(I)t + \omega_c, \quad (39)$$

де  $\omega_c$  – деяка постійна. Величина  $\omega$  називається частотою періодичного руху, що розглядається.

Для обчислення частоти за цією формулою необхідно знати значення похідних від повних еліптичних інтегралів. Із загальної визначення еліптичних інтегралів (29), (30) легко знайти такі вирази для цих похідних:

$$\frac{\partial K(\kappa)}{\partial \kappa} = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{1}{1-\kappa^2} E(\kappa) - K(\kappa) \right], \quad \frac{\partial E}{\partial \kappa} = \frac{1}{\kappa} [E(\kappa) - K(\kappa)]. \quad (40)$$

Використовуючи ці формули легко знаходимо

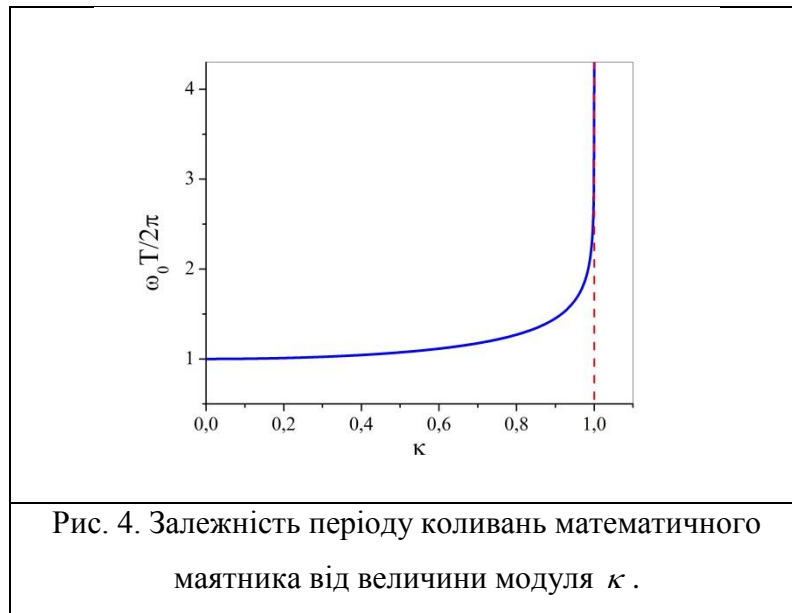
$$\omega(I) = \frac{\pi \omega_0}{2} \begin{cases} \frac{1}{K(\kappa)} & ; \kappa_1 > 1 \text{ або } (\kappa < 1). \text{ Коливання.} \\ \frac{1}{\kappa_1} \frac{1}{K(\kappa_1)} & ; \kappa_1 < 1 \text{ або } (\kappa > 1). \text{ Обертання.} \end{cases} \quad (41)$$

Перший вираз в фігурних дужках відповідає випадку коливань маятника, друге – обертанню. Отриманий вище вираз для частоти (41) визначає тільки той факт, що за час дорівнює періоду

$$T(I) = 2\pi / \omega(I) \quad (42)$$

положення маятника повернеться в початковий стан (для *коливального режиму*) або до його еквівалентного стану (для *режиму обертання*). Ця частота мало говорить про спектральних властивостях руху маятника. Інтуїтивно ясно, що коли маятник здійснює малі за амплітудою коливання, то вони є лінійними і частота цих коливань збігається з  $\omega_0$ . Якщо ж амплітуда коливання маятника збільшується, то на фазовій площині це відповідає переходу до траєкторій, які наближаються до сепаратриси. При цьому, як ми бачили, і, як це впливає з формул (41), частота прямує до нуля, а період - до нескінченності. При цьому коливання виявляються нелінійними і складними.

Відзначимо також, що при обертальному русі період монотонно убуває від нескінченності до нуля при зміні повної енергії від значення  $H = \omega_0$  (при цьому  $\kappa = 1$ ) до нескінченно великого значення ( $H \rightarrow \infty$ ,  $\kappa \rightarrow \infty$ ).



Точні розв'язки рівняння математичного маятника виражаються через еліптичні функції Якобі. Розглянемо інтеграл

$$u = F(\varphi, \kappa) = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \alpha}}, \quad (43)$$

званий неповним еліптичним інтегралом 1-го роду. Функція, що обернена до  $F(\varphi, \kappa)$  називається «амплітудою  $u$ » і позначається як

$$\varphi = \text{am}(u, \kappa) \quad (\text{амплітуда}). \quad (44)$$

В свою чергу,

$$u = \arg(\varphi) \quad (\text{аргумент}) \quad (45)$$

називають аргументом. При цьому вводять такі функції Якобі:

$$\text{sn}(u, \kappa) = \sin \varphi = \sin \text{am}(u, \kappa) - \text{еліптичний синус (або синус амплітуди)}, \quad (46)$$

$$\text{cn}(u, \kappa) = \cos \varphi = \cos \text{am}(u, \kappa) - \text{еліптичний косинус (або косинус амплітуди)}, \quad (47)$$

$$\text{dn}(u, \kappa) = \Delta(\varphi, \kappa) = \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \text{am}(u, \kappa)} - \text{дельта амплітуди}. \quad (48)$$

Властивості цих функцій, їх розкладання в ряди можна знайти в довідниках по спеціальних функцій.

Скористаємося цими функціями для з'ясування спектру коливань нелінійного маятника. Для цього запишемо вираження для змінних  $q$  і  $p$  маятника в наступному виді:

$$q = \pm 2 \arcsin[\kappa \operatorname{sn}(\omega_0 t, \kappa)], \quad (49)$$

$$p = \dot{q} = \pm \frac{\omega_0}{\kappa} \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am}(u, \kappa)} = \pm 2\omega_0 \kappa \operatorname{cn}(\omega_0 t, \kappa), \quad \kappa_1 > 1 \text{ или } (\kappa < 1). \text{ Коливання.} \quad (50)$$

$$q = 2 \operatorname{am}\left(\kappa \omega_0 t, \frac{1}{\kappa}\right), \quad (51)$$

$$p = \dot{q} = \pm \sqrt{2(H + H_s \cos q)} = \pm \frac{2\omega_0}{\kappa_1} \sqrt{1 - \kappa_1^2 \sin^2 \operatorname{am}(u, \kappa)} = \pm \frac{2\omega_0}{\kappa_1} \operatorname{dn}\left(\frac{\omega_0 t}{\kappa_1}, \kappa_1\right), \quad \kappa_1 < 1 \text{ или } (\kappa > 1). \text{ Обертання.} \quad (52)$$

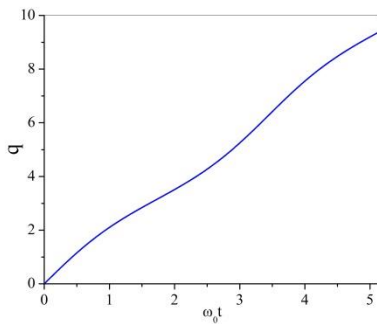


Рис. 5а. Залежності  $q(t)$ .

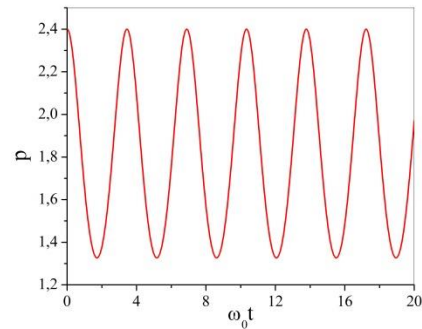


Рис. 5б. Залежності  $p(t)$ .

Зауважимо, що при обертальному русі залежність  $q(t)$  не є періодичною. Однак швидкість осцилятора  $p(t)$  залишається періодичною функцією часу.

У формулах (50), (52) швидкість (імпульс) виражена через функції Якобі. Знаходячи в довіднику розкладання цих функцій в ряд Фур'є, можна проаналізувати спектр швидкості маятника. З'ясуємо основні особливості цього спектра. Розкладання швидкості в ряд Фур'є можна представити у виді:

$$p = 2\kappa \operatorname{cn}(\omega_0 t, \kappa) = 8\omega \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a^{n-1/2}}{1 + a^{2n-1}} \cos[(2n-1)\omega t] \right], \quad \text{при } \kappa < 1. \text{ Коливання.} \quad (53)$$

$$p = 2\kappa \operatorname{dn}\left(\kappa t, \frac{1}{\kappa}\right) = 8\omega \left[ \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \cos(2n\omega t) \right], \text{ при } \kappa > 1. \text{ Обертання.} \quad (54)$$

$$a = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right), \quad K = K(\kappa), \quad K' = K(\kappa'), \quad (55)$$

де  $\kappa' = \sqrt{1-\kappa^2}$  – додатковий модуль, а частота  $\omega$  визначається формулою (41).

Зауважимо, що вираз (53) містить тільки непарні гармоніки, що пояснюється симетрією коливань маятника щодо заміни змінних  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . Вираз (54) містить тільки парні гармоніки. Правильно буде сказати, що основна частота в спектрі в цьому випадку дорівнює « $2\omega$ ».

Досліджуємо структуру виразу (53) (для коливального руху) більш детально. Введем величину  $N = \omega_0/\omega$ . При слабо нелінійних коливаннях поблизу дна потенційної ями маємо

$$\kappa \rightarrow 0, \quad K \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \omega \rightarrow \omega_0, \quad N \rightarrow 1. \quad (56)$$

Для визначення  $K'$  використовуємо наближене вираження для повного еліптичного інтеграла, коли його модуль прямує до одиниці

$$K(\kappa') \approx \ln\left(\frac{4}{\sqrt{1-\kappa'^2}}\right) \text{ при } \kappa' \rightarrow 1. \quad (57)$$

Тоді  $K(\kappa') \approx \ln(4/\kappa)$ , і, отже,

$$a \approx \exp[-2\ln(4/\kappa)] = \kappa^2/16. \quad (58)$$

Таким чином, амплітуда гармоніки з номером  $n$  дорівнює

$$A_n = \frac{8\omega a^{n-1/2}}{1+a^{2n-1}} \approx \left(\frac{\kappa}{4}\right)^{2n-1}. \quad (59)$$

Оскільки  $\kappa \ll 1$ , амплітуди спектральних складових швидко зменшуються з номером  $n$ , отже, коливання є квазігармонічними. Тепер розглянемо рух поблизу сепаратриси. В цьому випадку  $\kappa \rightarrow 1$  і для  $K(\kappa)$  слід використовувати співвідношення (57). Враховуючи що  $H/H_s = 2\kappa^2 - 1$ , його можна записати у виді

$$K \approx \ln \left( \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1-H/H_s}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{32H_s}{H-H_s} \right). \quad (60)$$

Тоді для величини  $N$  маємо

$$N \approx \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{32H_s}{H-H_s} \right) \quad (61)$$

і, отже,

$$a \approx \exp \left( -\frac{\pi}{N} \right). \quad (62)$$

Вираз для Фур'є-гармоніки можна записати у виді

$$A_n \approx \frac{8\omega (\exp(-\pi/N))^{n-1/2}}{1 + (\exp(-\pi/N))^{2n-1}} = \frac{4}{\cosh \left[ \frac{\pi(n-1/2)}{N} \right]}. \quad (63)$$

При  $n \ll N$  амплітуди гармонік приблизно однакові:  $A_n \approx 4\omega$ . При  $n > N$  амплітуди гармонік експоненціально зменшуються з ростом  $n$ . Таким чином, величину  $N$  можна інтерпретувати як ефективне число гармонік в спектрі. Відзначимо, що частота гармоніки з номером  $N$  завжди дорівнює одиниці. Що стосується основної частоти  $\omega$ , то вона прямує до нуля при  $\kappa \rightarrow 1$ . Дійсно, на сепаратрісі рух не є періодичним, тому спектр повинен бути суцільним.

Добре відомо, що поняття резонансу грає виключно важливу роль в сучасній фізиці. Однак це поняття добре сформульовано і широко відомо в рамках лінійної теорії. З явищем резонансу були пов'язані великі надії, наприклад, в теорії прискорювачів елементарних частинок. Передбачалося, що здійснивши умови резонансного взаємодії заряджених частинок з полем електромагнітних хвиль вдасться досягти практично необмежених значень енергій прискорених частинок. Однак, як виявилось, нелінійні процеси перешкоджають такої можливості. Причину цієї перешкоди можна тепер легко пояснити. Дійсно, як ми бачили на прикладі динаміки математичного маятника, частота коливальності цього маятника залежить від амплітуди коливальності. Тим самим умови резонансного взаємодії маятника, який має маленьку амплітуду коливальності, істотно відрізняються від умов резонансного взаємодії при кінцевому значенні амплітуди. Картина резонансного збудження математичного маятника може виглядати таким чином. Зовнішня періодична сила, діючи на нерухомий маятник починає його розгойдувати. Амплітуда маятника лінійно зростає зі збільшенням часу. Однак, як ми

бачили вище, зі збільшенням амплітуди маятника частота його зменшується. При цьому умови лінійного резонансу порушуються. Ефективність передачі енергії від зовнішньої сили до маятника зменшується. Нарешті, настає стан, при якому маятник отриману енергію від зовнішньої сили повертає зовнішній силі (биття). Обмін енергії припиняється. Для характеристики нелінійної взаємодії коливальні системи з зовнішньою силою вводять поняття нелінійного резонансу. Центральною характеристикою нелінійного резонансу є його ширина  $\Delta$ . Ширина визначається як максимальна відстань між верхньою і нижньою гілками сепаратриси. Користуючись, наприклад, формулою (14), цю ширину можна представити у виді:

$$\Delta = 2\sqrt{2}\omega_0. \quad (64)$$

Поняття нелінійного резонансу широко використовується в теорії динамічних систем, особливо при знаходженні умов виникнення динамічного хаосу за допомогою критерію Чирикова.