4. Практичні заняття

Перевірка статистичних гіпотез

Основні поняття.

Статистичною називають гіпотезу про вид невідомого розподілу або про параметри відомих розподілів.

Нульовою (основною) називають висунуту гіпотезу H_0.

Конкуруючою (альтернативною) називають гіпотезу H_1, яка суперечить нульовій.

Розрізняють гіпотези, які містять одне або більше одного припущень.

Простою називають гіпотезу, яка містить лише одне припущення.

Складною називають гіпотезу, яка складається зі скінченного або нескінченного числа простих гіпотез.

За результатом перевірки гіпотез можуть бути припущені помилки двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна нульова гіпотеза. Ймовірність помилки першого роду називають рівнем значущості і позначають літерою α.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята неправильна нульова гіпотеза. Ймовірність помилки другого роду позначають літерою β.

Статистичним критерієм (або просто критерієм) називають випадкову величину K, яка застосовується для перевірки гіпотези.

Емпіричним (або таким, що спостерігається) значенням $K_{спост.}$ називають те значення критерію, яке визначене (обраховане) за вибірками.

Критичною множиною називають сукупність значень критерію, за яких нульову гіпотезу відхиляють.

Множиною прийняття гіпотези (множиною допустимих значень) називають сукупність значень критерію, за яких нульову гіпотезу приймають.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез:

якщо значення критерію, яке спостерігається, належить критичній множині, то нульову гіпотезу відхиляють; якщо значення критерію, яке спостерігається, належить множині прийняття гіпотези, то гіпотезу приймають.

Критичними точками (границями) $k_{кр}$ називають точки, які відділяють критичну множину від множини прийняття гіпотези.

Правобічною називають критичну множину, яка визначається нерівністю $K > k_{кр}$, де $k_{кр}$ – додатне число.

Лівобічною називають критичну множину, яка визначається нерівністю $K < k_{кр}$, де $k_{кр}$ – від'ємне число.

Двобічною називають критичну множину, яка визначається нерівністю $K < k_1$, $K > k_2$, де $k_2 > k_1$. Зокрема, якщо критичні точки симетричні відносно нуля, то двобічна критична множина визначається нерівностями (допускаючи, що $k_{кр} > 0$)

$$K < -k_{кр}, \quad K > k_{кр}$$

або рівносильною нерівністю

$$|K| > k_{кр}$$

Для пошуку критичної множини задаються рівнем значущості α і знаходять критичні ~~точки~~ точки, виходячи із таких співвідношень:

а) для правобічної критичної множини
$$P(K > k_{кр}) = \alpha \quad (k_{кр} > 0);$$

б) для лівобічної критичної множини
$$P(K < k_{кр}) = \alpha \quad (k_{кр} < 0);$$

в) для двобічної симетричної множини
$$P(K > k_{кр}) = \frac{\alpha}{2} (k_{кр} > 0), \quad P(K < -k_{кр}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Потужністю критерію називають ймовірність потрапляння критерію до критичної множини за умови, що справедливою є конкуруюча гіпотеза.

Тобто (інакше) потужністю критерію є ймовірність того, що нульова гіпотеза буде відкинута, коли правильною є конкуруюча гіпотеза.

1. Порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей.

За незалежними вибірками, об'єми яких n_1 і n_2 та які взяті із нормальних генеральних сукупностей знайдені виправлені вибіркові дисперсії S_X^2 та S_Y^2. Потрібно порівняти ці дисперсії.

Правило 1. Для того, щоб за умови заданого рівня значимості α перевірити нульову гіпотезу $H_0: D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій нормальних сукупностей за конкуруючої гіпотези $H_1: D(X) > D(Y)$, потрібно вирахувати значення критерію, що спостерігається

(відношення більшої виправленої дисперсії до меншої)

$$F_{спост.} = \frac{S_Б^2}{S_М^2}$$

і за таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора, за заданим рівнем значимості α та числом ступенів свободи $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ (k_1 - число ступенів свободи більшої виправленої дисперсії) знайти критичну точку $F_{кр}(\alpha; k_1, k_2)$. Якщо $F_{спост.} < F_{кр}$ - немає підстав відкидати нульову гіпотезу. Якщо $F_{спост.} > F_{кр}$ - нульова гіпотеза відкидається.

Правило 2. За умови конкуруючої гіпотези $H_1: D(X) \neq D(Y)$ критичну точку $F_{кр}(\frac{\alpha}{2}; k_1, k_2)$ шукають за рівнем значимості $\frac{\alpha}{2}$ (вдвічі меншого заданого) та числом ступенів свободи k_1 і k_2 (k_1 - число ступенів свободи більшої дисперсії). Якщо $F_{спост.} < F_{кр}$ - немає підстав відкидати нульову гіпотезу. Якщо $F_{спост.} > F_{кр}$ - нульову гіпотезу відкидають.

Приклад 1. За двома незалежними вибірками, об'єми яких $n_1 = 11$ і $n_2 = 14$, які вибрані із нормальних генеральних сукупностей X та Y, знайдені виправлені вибіркові дисперсії $S_X^2 = 0{,}76$ і $S_Y^2 = 0{,}38$. За умови рівня значимості $\alpha = 0{,}05$, перевірити нульову гіпотезу $H_0: D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій, за умови конкуруючої гіпотези $H_1: D(X) > D(Y)$.

Розв'язок. Знайдемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої

$$F_{спост.} = \frac{0{,}76}{0{,}38} = 2.$$

За умовою задачі конкуруюча гіпотеза має вигляд $D(X) > D(Y)$, тому критична множина (область) — правобічна.
За таблицею "Критичні точки розподілу F Фішера-Снедекора" (додаток 7 в збірнику задач В. Ю. Гмурмана) або за посиланням в Internet: https://math.semestr.ru/corel/table-fisher.php
за рівнем значимості $\alpha = 0,05$ та числами ступенів свободи $k_1 = n_1 - 1 = 11 - 1 = 10$ і $k_2 = n_2 - 1 = 14 - 1 = 13$ знаходимо критичну точку

$$F_{кр}(0,05; 10, 13) = 2,67.$$

Через те, що $F_{спост.} < F_{кр}$ — відсутні підстави відкидати гіпотезу про рівність генеральних дисперсій. Інакше: вибіркові виправлені дисперсії відрізняються незначно.
Приклад 2 За двома незалежними вибірками, об'єми яких $n_1 = 14$ і $n_2 = 10$ і які вибрані із нормальних генеральних сукупностей X та Y, знайдені виправлені вибіркові дисперсії $S_X^2 = 0,84$ та $S_Y^2 = 2,56$. За умови рівня значимості $\alpha = 0,1$, перевірити нульову гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій за умови конкуруючої гіпотези $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.
Розв'язок. Знайдемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої:

$$F_{спост} = \frac{2,52}{0,84} = 3.$$

За умовою задачі, конкуруюча гіпотеза є такою $D(X) \neq D(Y)$, тому критична множина (область) є двобічною. У відповідності з другим правилом пошук критичної точки слід здійснювати з рівнем значимості вдвічі меншим заданого.

За таблицею (посилання у прикладі 1) за рівнем значимості $\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$ та числом ступенів свободи $k_1 = 10 - 1 = 9$ і $k_2 = 14 - 1 = 13$, знаходимо критичну точку

$$F_{кр}(0{,}05;\ 9, 13) = 2{,}72.$$

Через те, що $F_{спост.} > F_{кр}$ — нульова гіпотеза про рівність генеральних дисперсій відкидається..

2. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності за критерієм Пірсона.

А. Емпіричний розподіл заданий у вигляді послідовності рівновіддалених варіант і відповідних їм частот:

$$\begin{array}{lllll} x_i & x_1 & x_2 & \ldots & x_N \\ n_i & n_1 & n_2 & \ldots & n_N \end{array}$$

Потрібно, застосовуючи критерій Пірсона, перевірити гіпотезу про те, що генеральна сукупність X розподілена нормально.

Правило 1. Для того, щоб за заданим рівнем значимості α перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, потрібно:

1. Безпосередньо розрахувати (за умови малої кількості спостережень) або розрахувати спрощеним методом (за умови великої кількості спостережень), наприклад методом добутку або сум вибіркове середнє $\bar{x}_B$ та вибіркове середнє квад-

ратичне відхилення σ_B.

2. Обчислити теоретичні частоти

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_B} \cdot \varphi(u_i),$$

де n – обєм вибірки (сума всіх частот), h – крок (різниця між двома сусідніми варіантами),

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}, \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

3. Порівняти емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона.

Для цього:

а) скласти розрахункову таблицю, за якою знаходять спостережені значення критерію

$$\chi^2_{\text{спост}} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'};$$

б) за таблицею критичних точок розподілу χ^2, за заданим рівнем значимості α та за числом ступенів свободи $k = s - 3$ (s – число груп вибірки) знаходять критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ правобічної критичної множини (області).

Якщо $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{кр}}$ – відсутні підстави відкидати гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності. Іншими словами, емпіричні та теоретичні частоти відрізняються незначимо (або випадково). Якщо $\chi^2_{\text{спост}} > \chi^2_{\text{кр}}$ – гіпотезу відкидають. Іншими словами, емпіричні та теоретичні частоти відрізняються значимо.

Зауваження. Нечисленні частоти ($n_i < 5$) 8 ПЧ
слід об'єднувати; в цьому випадку і відповідні їм теоретичні частоти також потрібно додавати. Якщо здійснювалося об'єднання частот, то при визначенні числа ступенів свободи за формулою $k = s - 3$ слід за s прийняти число груп вибірки, які залишилися після об'єднання частот.

Приклад 3. Застосовуючи критерій Пірсона, за умови рівня значимості 0,05 перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X з емпіричним розподілом вибірки об'ємом $n = 200$:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Розв'язок.
1. Застосовуючи метод добутків, знайдемо вибіркове середнє $\bar{x}_B = 12,63$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_B = 4,695$.
2. Знайдемо теоретичні частоти, враховуючи, що $n = 200$, $h = x_{i+1} - x_i = 2$, $\sigma_B = 4,695$

За формулою

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_B} \cdot \varphi(u_i) = \frac{200 \cdot 2}{4,695} \cdot \varphi(u_i) = 85,2 \cdot \varphi(u_i).$$

Значення функції $\varphi(u)$ знаходяться за таблицею у додатку 1 збірника задач В. Ю. Гмурмана. Або, наприклад, за посиланням в Інтернет
www.ekonomika-st.ru/drugie/metodi/t-ver-1-4-0.html
(локальна функція Лапласа)

Складемо тепер розрахункову таблицю. 9 ПЧ

i	x_i	$u_i = \frac{x_i - \overline{x}_B}{\sigma_B}$	$\varphi(u_i)$	$n_i' = 85,2 \cdot \varphi(u_i)$
1	5	−1,62	0,1074	9,1
2	7	−1,20	0,1942	16,5
3	9	−0,77	0,2966	25,3
4	11	−0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

3. Порівняємо емпіричні та теоретичні частоти.

а) Складемо розрахункову таблицю із якої знайдемо спостережуване значення критерію

$$\chi^2_{спост} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2 / n_i'$
1	15	9,1	5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	5,5
3	25	25,3	−0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	−2,0	4,00	0,1
5	26	33,9	−7,9	62,41	1,8
6	21	29,8	−8,8	77,44	2,6
7	24	22,0	2,0	4,00	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
$\sum$	200				$\chi^2_{спост} = 22,2$

З таблиці знаходимо $\chi^2_{спост} = 22,2$

б) За таблицею критичних точок розподілу χ^2 (див додаток 5 збірника задач В. Ю. Гмурмана, або за посилання в Internet https://math.semestr.ru/group/xixi.php) за рівнем значимості $\alpha = 0,05$ та за числом ступенів свободи $k = s - 3 = 9 - 3 = 6$ знаходимо критичну правобічної критичної величини (області)

$$\chi^2_{кр}(0,05;6) = 12,6.$$

Через те, що $\chi^2_{спост} > \chi^2_{кр}$ – гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності відкидається.

Іншими словами, емпіричні та теоретичні частоти відрізняються значимо.