Контрольна робота
з вищої математики
студентки групи КС-21
Дідцевої Анни
Варіант №7

$\boxed{1.}$ По $Re f(z) = u(x,y) = y^3 - 2x^2$ знайти $Im f(z) = v(x,y)$ і $f'(z)$

$u(x,y) = y^3 - 2x^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$ усл. Коши-Римана

$\frac{\partial u}{\partial x} = -2 \cdot 2x = -4x \xRightarrow{\text{по усл. Коши-Римана}} \frac{\partial v}{\partial y} = -4x$

$v(x,y) = \int(-4x)dy = -4xy + \varphi(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -4y + \varphi'(x)$

$\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}$ по усл. Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y - \varphi'(x)$

а по усл. задачи $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -4y + \varphi'(x)$

$\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}$ по усл. Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y - \varphi'(x)$

а по усл. задачи $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2$

$3y^2 = 4y - \varphi'(x)$

$\varphi'(x) = -3y^2 + 4y$

$\varphi(x) = -3xy^2 + 4xy + C$

$v(x,y) = \cancel{-4xy} + \cancel{4xy} - 3xy^2 + C = -3xy^2 C$

$\frac{\partial u}{\partial x} = -4x \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -6xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ усл. Коши-Римана не выполнено $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ функция не дифференцируема

$\boxed{2.}$ Разложить в ряд Лорана

$f(z) = \frac{3}{(z-2)(z^2+1)}$ при $1 < |z| < 2$

$$f(z)=\frac{3}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{3}{5(z-2)}-\frac{3(z+2)}{5(z^2+1)}$$

Рассмотрим $\frac{3}{5(z-2)}$

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{(z-2)}=-\frac{3}{5}\frac{1}{(2-z)}=-\frac{3}{10}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)}\left|\begin{matrix}\text{При } |z|<2\\ \left|\frac{z}{2}\right|<1\end{matrix}\right|=-\frac{3}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{3\cdot z^k}{10\cdot 2^k} \text{ сх. при } |z|<2$$

Рассмотрим $-\frac{3(z+2)}{5(z^2+1)}$

$$-\frac{3(z+2)}{5}\frac{1}{(z^2+1)}=\frac{3(z+2}{5}\frac{1}{z^2\left(1-\frac{1}{z^2}\right)}=\left|\begin{matrix}\text{При } |z|>1\\ \left|\frac{1}{z^2}\right|<1\end{matrix}\right|$$

$$=\frac{3(z+2)}{5z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2k}}=\frac{3}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+2)}{z^{2k+2}} \text{ сх. при } |z|>1$$

$$\frac{3}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+2)}{z^{2k+2}}=\left|m=-k-1\right|=\frac{3}{5}\sum_{m=-\infty}^{-1}\frac{z+2}{z^{-2m}}$$

$$f(z)=\frac{3}{(z-2)(z^2+1)}=-\frac{3}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k+\frac{3}{5}\sum_{m=-\infty}^{-1}\frac{z+2}{z^{-2m}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k+\sum_{m=-\infty}^{-1}(z+2)z^{2m}$$

КС-21 Дібцевої Анни:

3. Знайти $f(z)=\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos\pi z}{z^2+2z}dz$

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}_i f(z)$$

$$f(z) = \frac{\cos\pi z}{z^2+2z} = \frac{\cos\pi z}{z(z+2)}$$

Особые точки ф-ции: 0, -2.

0, -2 – полюса первого порядка (простые)

Вычет простого полюса: $\operatorname{Res}\limits_{z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0}(f(z)(z-z_0))$

$$\operatorname{Res}_0 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos\pi z}{z^2+2z}(z-0) = \lim_{z\to 0}\frac{\cos\pi z}{\cancel{z}(z+2)}\cancel{(z-0)} =$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}_{-2} f(z) = \lim_{z\to -2}\frac{\cos\pi z}{z(z+2)}(z+2) =$$

$$=\lim_{z\to -2}\frac{\cos\pi(-2)}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{\cos\pi z}{z^2+2z}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

14. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \sin x\, dx}{x^2+2x+5}$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+2x+5=0 \\ D = b^2-4ac = 4-4\cdot 1\cdot 5 = -16 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \end{array}\right]$$

Ф-я $f(z) = \frac{z e^{iz}}{(z+1-2i)(z+1+2i)}$ явл. аналитической в верхней полуплоскости за исключением полюса 1-го порядка в т-ке $-1+2i$

Поэтому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \sin x\, dx}{x^2+2x+5} = \mathrm{Re}\left[2\pi i \operatorname*{Res}_{-1+2i} f(x)\right] =$

$$= \mathrm{Re}\left[2\pi i \lim_{z \to -1+2i} \frac{z e^{iz}}{\cancel{(z+1-2i)}(z+1+2i)} \cancel{(z+1-2i)}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[2\pi i \frac{(-1+2i)e^{i(-1+2i)}}{\ldots}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[2\pi i \lim_{z \to -1+2i} \frac{z e^{iz}}{\cancel{(z+1-2i)}(z+1+2i)} \cancel{(z+1-2i)}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[2\pi i \frac{(-1+2i)e^{i(-1+2i)}}{\cancel{-1}+2i+\cancel{1}+2i}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\cancel{2}\pi \cancel{i} \frac{(-1+2i)e^{-i}\cdot e^{-2}}{\cancel{4i}_{2}}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{\pi(-1+2i)(\cos(-1)+i\sin(-1))}{e^2}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{\pi}{e^2}(-\cos(-1) - i\sin(-1) + 2i\cos(-1) - 2\sin(-1))\right] =$$

$$= \frac{\pi}{e^2}(-\cos(-1) - 2\sin(-1))$$