(2) 489. Знайти методом максимальної (2)
(1) вірогідності точкову оцінку невідомого параметра p (ймовірність появи події в одному випробуванні) біноміального розподілу:

$$P_m(x_i) = C_m^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m-x_i},$$

де x_i – кількість появ події в i-му випробуванні, m – кількість випробувань в одному досліді, n – кількість дослідів.

Розв'язок. Побудуємо функцію вірогідності:

$$L = p(x_1, \theta) \cdot p(x_2, \theta) \cdots p(x_n, \theta.$$

Враховуючи, що $\theta = p$ і $P(\xi = x_i) = C_m^{x_i} p^{x_i} \times (1-p)^{m-x_i}$ отримуємо функцію вірогідності

$$L = \left[C_m^{x_1} p^{x_1} (1-p)^{m-x_2}\right] \cdot \left[C_m^{x_2} p^{x_2} (1-p)^{m-x_2}\right] \cdots \times \left[C_m^{x_n} p^{x_n} (1-p)^{m-x_n}\right], \text{ або}$$

$$L = \left(C_m^{x_1} C_m^{x_2} \cdots C_m^{x_n}\right) \cdot p^{x_1+x_2+\dots+x_n} \cdot (1-p)^{nm-(x_1+\dots+x_n)}$$

Запишемо логарифмічну функцію вірогідності

$$\ln L = \ln\left[C_m^{x_1} \cdot C_m^{x_2} \cdots C_m^{x_n}\right] + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln p + \left(nm - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p).$$

Знайдемо першу похідну по p:

$$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \left(nm - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \frac{1}{1-p}$$

Прирівнюємо першу похідну 0 і розв'яжемо рівняння, отримуємо критичну точку

$$p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) / (nm).$$

Знайдемо другу похідну по p:

$$\frac{d^2 \ln L}{dp^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p^2} + \frac{nm - \sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-p)^2}$$

0-2 3+ (3)'

Коли $p = \frac{\sum_{i=1} x_i}{nm}$ друга похідна від'ємна.
Тобто це точка максимуму і її слід прийняти
як оцінку максимальної вірогідності невідомого
параметра p біноміального розподілу:

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n \cdot m}$$

Якщо x_i появ події спостерігалися в n_i
експериментах, то

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{n m},$$

Задачі

Метод максимальної вірогідності

(1) 493. Знайти методом максимальної (2) вірогідності за вибіркою $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точкову оцінку невідомого параметра λ ~~[illegible]~~ показникового розподілу, щільність якого

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

Розвязок. Складемо функцію вірогідності:

$$L = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n; \theta),$$

враховуючи, що $\theta = \lambda$ та відповідно

$$f(x; \theta) = f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x};$$

$$L = (\lambda e^{-\lambda x_1}) \cdot (\lambda e^{-\lambda x_2}) \ldots (\lambda e^{-\lambda x_n}) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{k} x_i}$$

Знайдемо логарифмічну функцію вірогідності:

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Знайдемо першу похідну за λ:

$$\frac{d \ln L}{d \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Запишемо рівняння вірогідності, для чого прирівнюємо першу похідну нулю

$$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Знайдемо критичну точку, для цього розв'яжемо отримане рівняння відносно λ: (2)

$$\lambda = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}} = \frac{1}{\overline{x}_B}.$$

Знайдемо другу похідну за λ:

$$\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = (-n)/\lambda^2.$$

Коли $\lambda = \frac{1}{\overline{x}_B}$ друга похідна від'ємна; отже це є точкою максимуму, тобто за оцінку максимальної вірогідності потрібно взяти величину зворотню вибірковому середньому: $\lambda^* = \frac{1}{\overline{x}_B}$.

Інтервальні оцінки

<u>Інтервальною</u> називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу, який накриває параметр, що оцінюється.

Довірчим називають інтервал, який із заданою надійністю γ накриває параметр, що оцінюється.

1. Інтервальною оцінкою (із надійністю $\underline{\gamma}$) математичного сподівання $\underline{a}$ нормального розподілу кількісної ознаки $\underline{X}$ за вибірковим середнім $\overline{x}_B$ за умови невідомого середньо квадратичного відхилення $\underline{\sigma}$ генеральної сукупності є довірчий інтервал:

$$\bar{x}_B - t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) < a < \bar{x}_B + t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

де $t\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \delta$ – точність оцінки, n – об'єм вибірки, t – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$ (знаходиться за таблицею), за якого $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$;

коли σ – невідоме (та об'єм вибірки $n < 30$)

$$\bar{x}_B - t_\gamma\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) < a < \bar{x}_B + t_\gamma\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

де s – "виправлене" вибіркове середнє квадратичне відхилення, t_γ знаходиться за таблицями за даними n і γ.

2. Інтервальною оцінкою (з надійністю γ) середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої кількісної ознаки X за "виправленим" вибірковим середнім квадратичним відхиленням s є довірчий інтервал

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad (\text{коли } q < 1),$$

$$0 < \sigma < s(1+q) \quad (\text{коли } q > 1),$$

де q знаходиться за таблицею та даними n і γ.

3. Інтервальною оцінкою (з надійністю γ) невідомої ймовірності p біноміального розподілу за відносною частотою w є довірчий інтервал (з наближеними кінцями p_1 і p_2)

$$p_1 < p < p_2,$$

де

$$p_1 = \frac{n}{t^2+n}\left[w^2 + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\,\right],$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2+n}\left[w^2 + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right],$$

де n – загальна кількість випробувань; m – кількість появи події; w – відносна частота, яка дорівнює відношенню $\frac{m}{n}$; t – значення аргумента функції Лапласа за якого $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ (γ – задана надійність).

Зауваження. За великих значень n (порядку сотень) можливо застосувати як наближені границі довірчого інтервалу

$$p_1 = w - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}, \quad p_2 = w + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$$

3) 501 Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю $\gamma = 0{,}95$ невідомого математичного очікування a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma = 5$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 14$, а об'єм вибірки $n = 25$

Розв'язок. Необхідно знайти довірчий інтервал

$$\overline{x}_B - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Все величини, окрім t, відомі з умови задачі. Знайдемо t із співвідношення $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. За відповідною таблицею знаходимо $t = 1{,}96$. Підставляємо в формулу $t = 1{,}96$; $\overline{x}_B = 14$; $\sigma = 5$; $n = 25$. Отримуємо довірчий інтервал $12{,}04 < a < 15{,}96$.

(4) 506 Знайти мінімальний об'єм вибірки, за яким з надійністю 0,975 точність оцінки математичного сподівання а генеральної сукупності за вибірковим середнім $\delta = 0,3$, коли відоме середньо квадратичне відхилення $\sigma = 1,2$ нормально розподіленої генеральної сукупності.

Розвязок. Застосуємо формулу, за якою визначається точність оцінки математичного очікування генеральної сукупності за вибірковим середнім: $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Звідси маємо $n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$.

За умовою задачі, $\gamma = 0,975$; таким чином

$\Phi(t) = \frac{0,975}{2} = 0,4875$. За відповідного таблицею знаходимо $t = 2,24$. У формулу підставляємо $t = 2,24$, $\sigma = 1,2$ і $\delta = 0,3$, отримуємо мінімальний об'єм вибірки $n = 81$

$$n = \frac{(2,24)^2 \cdot (1,2)^2}{(0,3)^2} = 81.$$

(5) 508. Із генеральної сукупності вилучена вибірка, об'ємом $n = 10$:

Варіанти	x_i	-2	1	2	3	4	5
Частоти	n_i	2	1	2	2	2	1

Знайти оцінку з надійністю $\gamma = 0,95$ математичного сподівання а нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності за вибірковим середнім за допомогою довірчого інтервалу.

Розвязок: Вибіркове середнє та "виправлене" середнє квадратичне відхилення знайдемо відповідно за формулами:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}, \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}}.$$

6

Підставимо в ці формули дані задачі і отримаємо $\bar{x}_B = 2$, $s = 2,4$.

Знайдемо t_γ. Застосовуючи відповідну таблицю за даними $\gamma = 0,95$ і $n = 10$ знаходимо $t_\gamma = 2,26$.

Знайдемо довірчий інтервал:

$$\bar{x}_B - t_\gamma s/\sqrt{n} < a < \bar{x}_B + t_\gamma s/\sqrt{n}.$$

Підставляємо $\bar{x}_B = 2$, $t_\gamma = 2,26$, $s = 2,4$, $n = 10$ і отримуємо довірчий інтервал

$$0,3 < a < 3,7$$

який накриває невідоме математичне очікування a з надійністю 0,95.

6 512. За даними вибірки об'ємом $n = 16$ із генеральної сукупності знайдене "виправлене" середнє квадратичне відхилення $s = 1$ нормально розподіленої кількісної ознаки. Знайти довірчий інтервал, який накриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю 0,95.

Розв'язок. Задача зводиться до пошуку довірчого інтервалу

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad (\text{коли } q < 1),$$

або

$$0 < \sigma < s(1+q) \quad (\text{коли } q > 1).$$

За даними задачі $\gamma = 0,95$ і $n = 16$. За відповідною таблицею знайдемо $q = 0,44$.

Тому, що $q < 1$, то, підставивши $s = 1$, $q = 0{,}44$ у перше співвідношення, отримаємо довірчий інтервал
$$0{,}56 < \sigma < 1{,}44.$$

7) 516. Здійснюються незалежні випробування з однаковою, але невідомою ймовірністю p появи події A у кожному випробуванні. Знайти довірчий інтервал для оцінки ймовірності p з надійністю $\gamma = 0{,}95$, якщо в 60 випробуваннях подія A з'явилася 15 разів.

Розв'язок. За умовою задачі $n = 60$, $m = 15$, $\gamma = 0{,}95$. Знайдемо відносну частоту появи події A:
$$w = \frac{m}{n} = \frac{15}{60} = 0{,}25.$$
Знайдемо t із співвідношення $\Phi(t) = \gamma/2 = 0{,}95/2 = 0{,}475$. За таблицею функції Лапласа знаходимо $t = 1{,}96$.
Знайдемо межі довірчого інтервалу.
$$p_1 = \frac{n}{t^2 + n}\left[w + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right],$$
$$p_2 = \frac{n}{t^2 + n}\left[w + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right]$$
Підставляємо у наведені формули значення $n = 60$, $w = 0{,}25$, $t = 1{,}96$ і отримуємо
$$p_1 = 0{,}16, \quad p_2 = 0{,}37.$$
Таким чином, маємо довірчий інтервал $0{,}16 < p < 0{,}37$

(8) 518. Виготовлений експериментальний гральний автомат, який має забезпечити появу виграша в одному випадку із 100 опускань монети в автомат. Для перевірки роботи автомата здійснено 400 випробувань, за яких виграш з'явився 5 разів. Знайти довірчий інтервал, який накриває невідому ймовірність появи виграша з надійністю $\gamma = 0,999$. (8)

Розв'язок. Знайдемо відносну частоту появи виграша: $w = \frac{m}{n} = \frac{5}{400} = 0,0125$. Знайти t із співвідношення $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0,999/2 = 0,4995$. За таблицею функції Лапласа знаходимо $t = 3,3$.

Враховуючи, що $n = 400$ велике значення, застосуємо для пошуку меж довірчого інтервалу наближені формули:

$$p_1 = w - t\sqrt{w(1-w)/n}, \quad p_2 = w + t\sqrt{w(1-w)/n}.$$

Підставимо в ці формули $w = 0,0125$, $t = 3,3$, $n = 400$, Отримаємо $p_1 = -0,0058$, $p_2 = 0,0308$.

Маємо довірчий інтервал

$$0 < p < 0,0308.$$