Коментар та завдання до Лабораторної 10

Заданы два близких начальных значения x_0 и f_0 дискретных динамических величин x_n и f_n, эволюция которых с дискретным временем n задается рекуррентным отображением вида «зуб пилы»:

$$x_{n+1} = \{2x_n\} \text{ и } f_{n+1} = \{2f_n\}. \qquad (1)$$

Для каждой из последовательностей x_n и f_n построены графики зависимостей от дискретного времени n, графики отображений $x_{n+1}(x_n)$ и $f_{n+1}(f_n)$, и график зависимости $x_n - f_n$ для первых $M = 9$ ***одинаковых*** двоичных знаков после запятой в представлении начальных значений x_0 и f_0 (*для выбранных в программе конкретных значений x_0 и f_0*).

Комментарии к графикам

1) Запишем представление числа x_0=0.1 в двоичной системе счисления:

x_0=0.0001100110011001100 (с точностью до 19-го знака после запятой). (2)

Из этого представления видно, что, поскольку x_0 рациональное число, то состояние системы будет периодически повторять исходные через число временнЫх шагов, равное периоду двоичного кода x_0.

Действительно, в двоичной форме записи чисел умножение любого числа (числа от 0 до 1) на 2 приводит к смещению запятой в записи числа на одну позицию вправо. Если первое число после запятой (**в двоичном представлении**) будет 1, то число (**в десятичном представлении**) будет бóльшим, чем 0.5. Если первое число после запятой (**в двоичном представлении**) будет 0, то число (**в десятичном представлении**) будет меньшим 0.5. В результате, в отображении «зуб пилы» смена 0 на 1 (**в двоичном представлении**) будет означать, что наша система из левой половины отрезка [0,1] перескочила в правую половину ($0.5 < x \le 1$). Смена в двоичной записи числа (при умножении на 2 от 1 до 0 будет означать переход из правой половины отрезка в левую половину.

Можно убедиться, что для выбранного значения x_0=0.0001100110011001100 зависимость x_n от дискретного времени «n» будет периодической послей одной итерации с периодом равным 4.

Вообще, если x_0=p/q – рациональное число, то зависимость x_n от дискретного времени «n» будет периодической, если q – нечетное. При четном q – зависимость x_n от дискретного времени «n» становится периодической через несколько итераций.

2) Возьмем начальное значение f_0, мало отличающееся от x_0. Например, f_0=0.101. Представим число f_0=0.1 в двоичной системе счисления:

f_0=0.0001100111011011001 (с точностью до 19-го знака после запятой). (3)

Из сравнения начальных значений x_0 и f_0 в двоичном представлении видно:

x_0=0.000110011 0011001100;

f_0=0.000110011 1011011001,

что первые 9 двоичных знаков после запятой одинаковые, а, начиная с 10-го знака – различаются. Это означает, что последовательность посещения изображающей точкой «левой» и «правой» половины графика будет разной, начиная с «момента времени» n=10.

Если у двух близких значений x_0 и f_0 равны первые M двоичных знаков, то для отображения «зуб пилы», пока n $\le$ M для «расстояние» между величинами x_n и f_n можно найти по формуле:

$$x_n - f_n = 2^n(x_0 - f_0) = (x_0 - f_0)\exp(n\ln 2). \tag{4}$$

Таким образом, расстояние между двумя близкими последовательностями экспоненциально расходится с ростом дискретного времени “n”. Это свойство называют также ***чувствительностью к начальным условиям***. Оно означает, кроме того, что все периодические последовательности (или «*орбиты*») отображения неустойчивы. Показатель экспоненты называется *показателем Ляпунова* и для этого отображения $\lambda = \ln(2)$. При $n > M$ итераций расстояние между x_n и f_n будет порядка 1. Для выбранных в программе значений x_0 *и* f_0 *имеем* M=9.

Можно сделать вывод о том, что, имея возможность контролировать точность задания начального условия для динамической переменной x_n до *M*-й позиции после запятой двоичного кода (*до 9-го – в нашем конкретном примере*), мы можем правильно предсказать попадание величины x_n в «левую» и «правую» половину единичного интервала на протяжении *M* временнЫх шагов. Дальнейшая динамика и последовательность посещений «левой» и «правой» половины единичного интервала будет определяться структурой «хвоста» (начиная с *M+1* позиции после

запятой двоичного кода) и будет совершенно другой, чем это имело место до *M*-й позиции после запятой двоичного кода.

Наличие экспоненциальной неустойчивости индивидуальных траекторий, которая приводит к чувствительной зависимости от начальных условий, является основной чертой всех систем с динамическим хаосом.

ЗАДАНИЕ

1) Задать начальное значение x_0 в виде рационального числа, меньшего единицы. Задать близкое (по аналогии с рассмотренным в программе примером) начальное значение f_0.

2) Записать x_0 и f_0 в двоичной системе счисления (привести эти представления в отчете). Определить периодичность по n получившихся представлений в двоичной системе. Указать ее в отчете.

3) Сравнить эти представления и определить число одинаковых двоичных знаков после запятой. Присвоить это число величине M. Указать значение M в отчете.

4) Привести в отчете получившиеся графики зависимостей x_n и f_n от дискретного времени n, графики отображений $x_{n+1}(x_n)$ и $f_{n+1}(f_n)$, и график зависимости $x_n - f_n$ для первых M ***одинаковых*** двоичных знаков после запятой в представлении начальных значений x_0 и f_0.

5) Так прокомментировать график зависимостей x_n и f_n от дискретного времени n: «графики демонстрируют совпадение периодов изменения величин x_n и f_n до момента времени $n = M$, и, одновременно, возрастающее по величине расхождение траекторий x_n и f_n.».

6) Так прокомментировать график отображений $x_{n+1}(x_n)$ и $f_{n+1}(f_n)$: «до $n \le M$ шагов изображающие точки зависимостей x_n и f_n одинаковым образом «посещают» левую и правую половины единичного интервала. При $n > M$ последовательность таких посещений для зависимостей x_n и f_n будет разной».

7) Так прокомментировать график зависимости $x_n - f_n$ для первых M ***одинаковых*** двоичных знаков после запятой в представлении начальных значений x_0 и f_0: «график демонстрирует экспоненциальный рост расстояние между двумя близкими последовательностями с ростом времени, что свидетельствует о чувствительности исследуемой динамической системы к начальным условиям».

8) Сделать вывод: «имея возможность контролировать точность задания начального условия для динамической переменной x_n до *M*-й позиции после запятой двоичного кода (*до M-го – указать свое значение*), мы можем правильно предсказать попадание величины x_n в «левую» и «правую» половину

единичного интервала на протяжении M временных шагов. Дальнейшая динамика и последовательность посещений «левой» и «правой» половины единичного интервала будет определяться структурой «хвоста» (начиная с $M+1$ позиции после запятой двоичного кода) и будет совершенно другой, чем это имело место до M-й позиции после запятой двоичного кода. Наличие экспоненциальной неустойчивости индивидуальных траекторий, которая приводит к чувствительной зависимости динамики системы от начальных условий, является основной чертой всех систем с динамическим хаосом».