


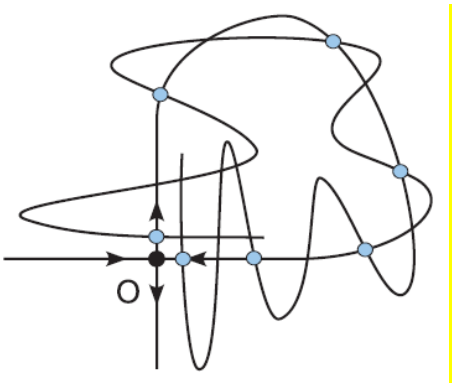
Лекція 10

Приклади хаотичної динаміки

Успіхи сучасної науки головним чином базувалися на принципі детермінізму. Випадковість вводилася вимушено як необхідний елемент, коли система виявлялася настільки складною, що відомі засоби не дозволяли її вивчати в рамках детермінізму. Зокрема, так було з системами статистичної фізики. Введення в ній законів ймовірності вважалося справою вимушеною, тому що об'єкти, які вона вивчає, наприклад, газ або рідина, мають таке велике число ступенів свободи, в рамках детермінованого опису, що вивчати їх просто неможливо.

Перший прорив в детермінізмі зробила квантова механіка. Однак найбільш вражаючим результатом є той факт, що він був усвідомлений тільки в останні 20-30 років. Цей факт полягає в тому, що хаотична динаміка може народжуватися відносно простими системами, які мають всього півтори ступеня свободи. Потрібно сказати, що можливість складної динаміки в простих системах була відома деяким математикам ще в кінці минулого століття. Так, Анрі Пуанкаре в 1889 році, в зв'язку з рішенням задачі трьох тіл, відкрив гомоклінічні структури (тобто структури замкнуті на себе), що є чином гамільтонових систем з хаотичною поведінкою в фазовому просторі.

А. Пуанкаре в 1880 році опублікував результати дослідження для кількох окремих випадків, в яких розв'язки у виді ряду можна було отримати. Але в одному випадку орбіта порошинки (модель порошинки, з якої взаємодіють два масивних тіла, а вона на їх рух не впливає) була надзвичайно заплутаною. Пуанкаре вивів цю заплутаність, використовуючи якісну теорію диференціальних рівнянь, з якої виросла вся нелінійна динаміка. Приклад гомоклінічної траєкторії показаний на рис. 1.

	
<p>Анрі Пуанкаре Французький фізик-математик (1854-1912)</p>	<p>Рис. 1. Приклад гомоклінічної траєкторії</p>

У своїй праці «Нові методи небесної механіки» А. Пуанкаре так описував гомоклінічну структуру: *«Якщо спробувати уявити собі фігуру, утворену цими двома кривими – стійка нестійка інваріантні криві, що проходять через сідлову особливу точку, – і їх нескінченними перетинами, кожне з яких відповідає двоасимптотичному розв'язку, то ці перетини утворюють щось на зразок решітки, тканини, мережі з нескінченно тісними петлями; жодна з двох кривих не повинна перетнути саму себе, але вона повинна навивається на саму себе найскладнішим чином, щоб перетнути нескінченно багато разів все петлі мережі».*

Тут треба відзначимо відзначити, що постановка крайової задачі стосовно до розв'язку двоасимптотичному до одного і того ж стану рівноваги x^* , полягає в знаходженні розв'язку $x(t)$ системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, \vec{\mu}),$$

де \vec{x} і $\vec{\mu}$ – вектори фазових змінних і відповідно параметрів, для якого

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*.$$

В теперішній час стало ясно, що більшість реальних систем мають область параметрів, в якій їх поведінка описується законами випадку. Детермінована поведінка, в деякому розумінні, є винятком. Переважне розвиток законів детермінізму можна пояснити тим, що успіхи сучасної науки базувалися в основному на лінійному описі. Переважне розвиток законів детермінізму можна пояснити тим, що успіхи сучасної науки базувалися в основному на лінійному описі. Нелінійне опис системи є більш складним, і в теперішній час відсутні універсальні засоби вивчення нелінійних систем. Засоби вивчення нелінійних явищ вивчені значно менше, ніж засоби вивчення лінійних, але в даний час вони бурхливо розвиваються.

Результати, які отримані при вивченні нелінійних систем, важко переоцінити. Одним з найбільш вражаючих з них є доказ того факту, що практично всі нелінійні системи мають хаотичну динаміку. Для широкої наукової громадськості цей факт став очевидним тільки після роботи Едварда Нортена Лоренца в 1963 році (*Lorenz E.N. (1963). Deterministic non-periodic flow. J.Atmos. Sci: 20, 131-141*). У цій роботі Лоренц, вивчаючи динаміку турбулентної атмосфери, показав, що навіть така проста система, яка описується всього трьома звичайними диференціальними рівняннями (така система має півтори ступеня свободи), може вести себе хаотично. Після цієї роботи з'явилася величезна кількість публікацій, в яких така поведінка була знайдено практично в усіх нелінійних системах.

Відзначимо найбільш важливі наслідки, отримані при цих результатах. Перш за все, стала ясною природа виникнення випадковості. Відзначимо найбільш важливі наслідки, отримані при цих результатах. Перш за все, стала ясною природа виникнення випадковості. По-друге, стало ясно, що закони в цьому випадку відіграють визначальну роль у багатьох явищах. Раніше ймовірними вважалися тільки експерименти, результати яких можна було повторити. Експерименти, результати яких змінювалися від експерименту до експерименту, не бралися до уваги. В даний час стало очевидним, що є величезна кількість експериментів, результати яких не можуть бути повторені від експерименту до експерименту.

Таким чином, в даний час сформувався новий напрям наукових досліджень, яке вивчає хаотичну динаміку нелінійних систем. Цей напрямок вже дало велику кількість важливих результатів, серед яких можна назвати обґрунтування статистичної фізики.

У цьому матеріалі викладено деякі найбільш важливі елементи математичного опису хаотичної динаміки коливальних систем. При цьому найбільш важливим є пошук умов, при яких виникає хаотична динаміка, а також коштів, що описують системи в цих умовах.

1. Приклади хаосу в простих моделях

Почнемо розгляд хаотичної динаміки на простих, але дуже важливих прикладах. **На першому прикладі розглянемо, як виникає непередбачуваність в системі сферичних куль, які стикаються.** Така модель може описувати різні фізичні системи, з яких найбільш важливою є система молекул. Важливість її обумовлена тим, що вона лежить в основі статистичної фізики, а умови, коли в такій системі виникає непередбачуваність і потрібно використовувати засоби теорії ймовірності, є умовами зберігання методів статистичної фізики. Ми звикли до того, що цими умовами є наявність великого числа молекул. Але непередбачуваність виникає і в дуже простих системах, що складаються всього з двох куль, які стикаються.

Отже, припустимо, що відбувається зіткнення двох куль, які рухаються один щодо іншого під кутом θ_0 (див. рис. 2). Кут θ_0 відомий з деякою точністю δ_0 . Так як кулі опуклі, то після зіткнення невизначеність кута буде більше, ніж δ_0^* , тобто $\delta_1 = \delta_0 K$, де $K > 1$. Після n зіткнень невизначеність стає рівною $\delta_n = \delta_0 K^n$. **Якщо ця невизначеність побільшає π ($\delta_n > \pi$), то напрямок руху куль неможна буде визначити.** Подивимося, до чого призводить така модель, якщо

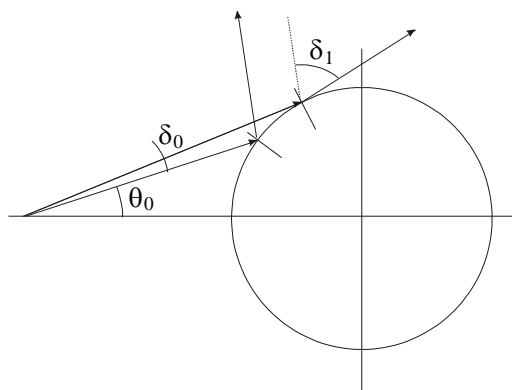


Рис. 2. Трансформація невизначеності кута при зіткненні двох куль.

кулі є молекули газу. Нехай τ – час вільного пробігу молекули. Тоді кількість зіткнень $n = \frac{t}{\tau}$, і умова непередбачуваності матиме вид

$$\delta(t) = K^{t/\tau} \delta_0 = \delta_0 \exp\left[\frac{t}{\tau} \ln K\right] \approx \pi. \quad (1)$$

В повітрі при атмосферному тиску $\tau \approx 10^{-12}$ сек. Отже, якщо ми захочемо прослідкувати за рухом будь-якої молекули протягом всього 1 сек, то нам необхідно знати напрямок її руху з точністю до $\delta_0 \approx e^{-10^{12}}$. Визначення кута з такою точністю виходить за всі розумні рамки.

Таким чином, найбільш проста і одночасно найбільш важлива для статистичної фізики модель зіткнення пружних куль показала неможливість прогнозування їх траєкторій через кілька зіткнень, а також показала, як виникає хаотична динаміка.

На перший погляд, немає більш передбачуваної поведінки, ніж рух самотньої кулі на більярдному столі. Однак, якщо стінки більярду увігнуті (більярд Синає), то рух кулі стає непередбачуваним. Причина цієї непередбачуваності полягає в експоненційній нестійкості індивідуальних траєкторій, яка призводить до чутливої залежності від початкових умов. Така чутливість – основна риса всіх систем з динамічним хаосом.

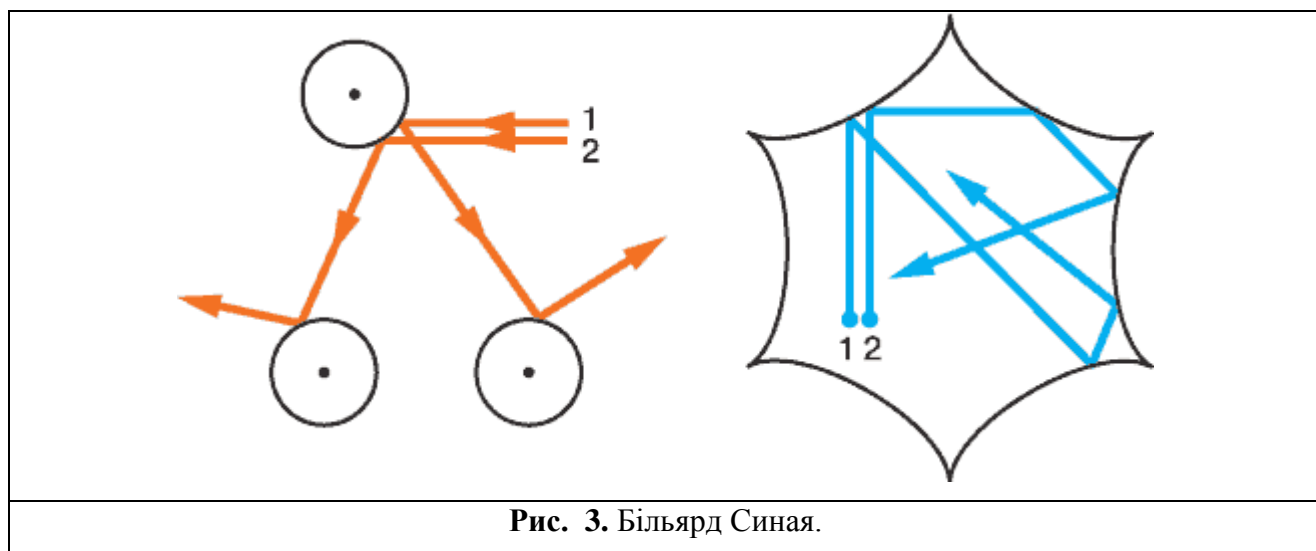


Рис. 3. Більярд Синає.



Зараз ми розглянемо ще одну дуже просту модель, яка зустрічається часто при аналізі хаотичних систем. Можна сказати, що ця модель є ключовою для розуміння виникнення хаотичності в динамічних системах, тому що в ній проявляється не тільки якісна картина виникнення хаотичної динаміки, але і з'являється можливість ввести кількісну характеристику динамічного хаосу.

Отже, розглянемо таке точкове відображення

$$\psi_{n+1} = \{K\psi_n\}, \quad (2)$$

де n – дискретне час, а фігурні дужки означають дробову частину числа в дужках.

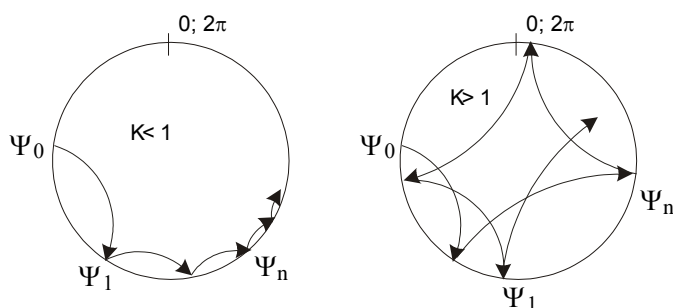


Рис. 4. Утворення хаотичного процесу в детермінованій системі.

На рис. 4 відображена послідовність ψ_n в принципово різних випадках: коли $K < 1$ і коли $K > 1$. З цих рисунків можна побачити, що в разі, коли $K < 1$, послідовність ψ_n сходиться до нуля і нуль є стійкою стаціонарною точкою. Коли ж $K > 1$ ця послідовність нерегулярна і тоді траєкторії перемішуються. Але це тільки якісна картина динаміки цієї системи. Для кількісної характеристики нерегулярності послідовності виберемо, наприклад, таку, як автокореляційна функція

$$R_n = \left\{ \int_0^1 [\psi_{m+n} - \langle \psi_{m+n} \rangle] [\psi_m - \langle \psi_m \rangle] d\psi_m \right\} \left\{ \int_0^1 [\psi_m - \langle \psi_m \rangle]^2 \right\}^{-1} d\psi_m =$$

$$= 12 \left(\int_0^1 \psi_{m+n} \psi_m d\psi_m - \langle \psi_m \rangle \langle \psi_{m+n} \rangle \right), \quad (3)$$

де

$$\langle \psi_m \rangle = \int_0^1 \psi_m d\psi_m = \frac{1}{2}, \quad \langle \psi_{m+n} \rangle = \int_0^1 \psi_{m+n} d\psi_m.$$

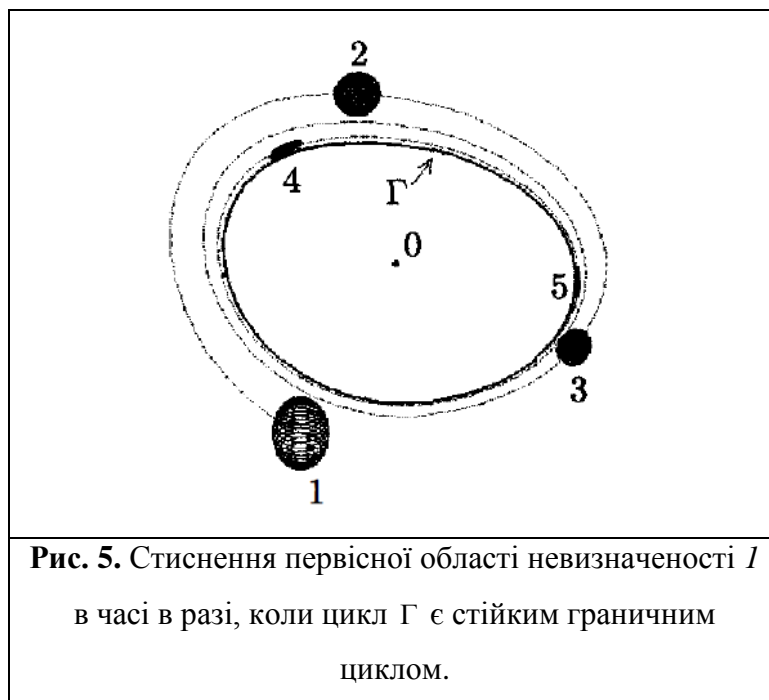
З рівняння (3) і визначення величин ψ_n , $\langle \psi_n \rangle$, $\langle \psi_{m+n} \rangle$, що входять в цю формулу, ми бачимо, що чисельник визначається як різниця середнього від твору величин ψ_{m+n} , ψ_m і твори середніх цих величин. З статистичної фізики відомо, що ця величина характеризує таку властивість системи як *перемішування*. Якщо $R_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то кажуть, що система не тільки *ергодична*, але й має властивість перемішування. При цьому поведінка системи повністю нерегулярна, тобто послідовність ψ_n є випадковою. Можна сказати також, що якщо з часом автокореляційна функція прямує до нуля і система не має стійких стаціонарних точок, то слід очікувати, що буде спостерігатися хаотичний режим коливань. *Прямуювання до нуля автокореляційної функції використовується в якості критерію динамічного хаосу.*

Пояснимо значення поняття перемішування.

У Лекції 9 ми встановили, що в дисипативних системах, розмірність фазового простору яких $N \geq 3$, теоретично можливий режим складних неперіодичних пульсацій. Цей тип руху детермінований і характеризується нестійкістю. Спробуємо розібратися, до чого це призводить. Спочатку поговоримо про стійкі режими руху в детермінованих дисипативних динамічних системах.

Розглянемо в якості початкового стану не точку \vec{x}_0 з певними координатами в просторі станів, а малу сферу радіуса $\varepsilon > 0$, яка оточує цю точку. Будь-яка точка всередині сфери характеризує мале відхилення від \vec{x}_0 . Сфера включає сукупність можливих відхилень

від вихідного стану, що не перевищують по модулю ε . Тепер застосуємо оператор еволюції і простежимо за трансформацією цієї сфери. В силу стійкості обраного нами режиму будь-яке мале відхилення в часі має затухати. Це означає, що під дією детермінованого закону еволюції кулька радіуса ε в часі буде зменшуватися і при $t \rightarrow \infty$ його радіус зменшиться до нуля. Цей процес показаний на рис. 5. Вихідний фазовий об'єм в дисипативних системах в часі зменшується. Це означає, що малі збурення в результаті будуть затухати, і система знову повернеться в початковий стійкий режим.



Виникає питання: що буде відбуватися в разі нестійкого режиму? Фазовий об'єм може збільшуватися до нескінченності, якщо нестійка система лінійна. Але якщо система нелінійна і дисипативна, то процес еволюції початкового малого фазового об'єму буде дуже нетривіальним. Дійсно, нестійкість режиму веде до зростання збурень. *Це перша обставина. Друге – дисипативні системи незалежно від виду стійкості викликають зменшення елемента фазового об'єму в часі до нуля, що пов'язано з втратами енергії.* Як поєднати ці два фактори? Існує єдине вирішення цієї дилеми: елемент фазового об'єму за деякими напрямками повинен розтягуватися, а за іншими – стискатися. Причому ступінь стиснення в середньому повинна обов'язково превалювати над ступенем розширення, щоб в результаті фазовий об'єм в часі зменшувався! У нелінійних дисипативних системах це виявляється можливим. вищесказане ілюструє рис. 6.

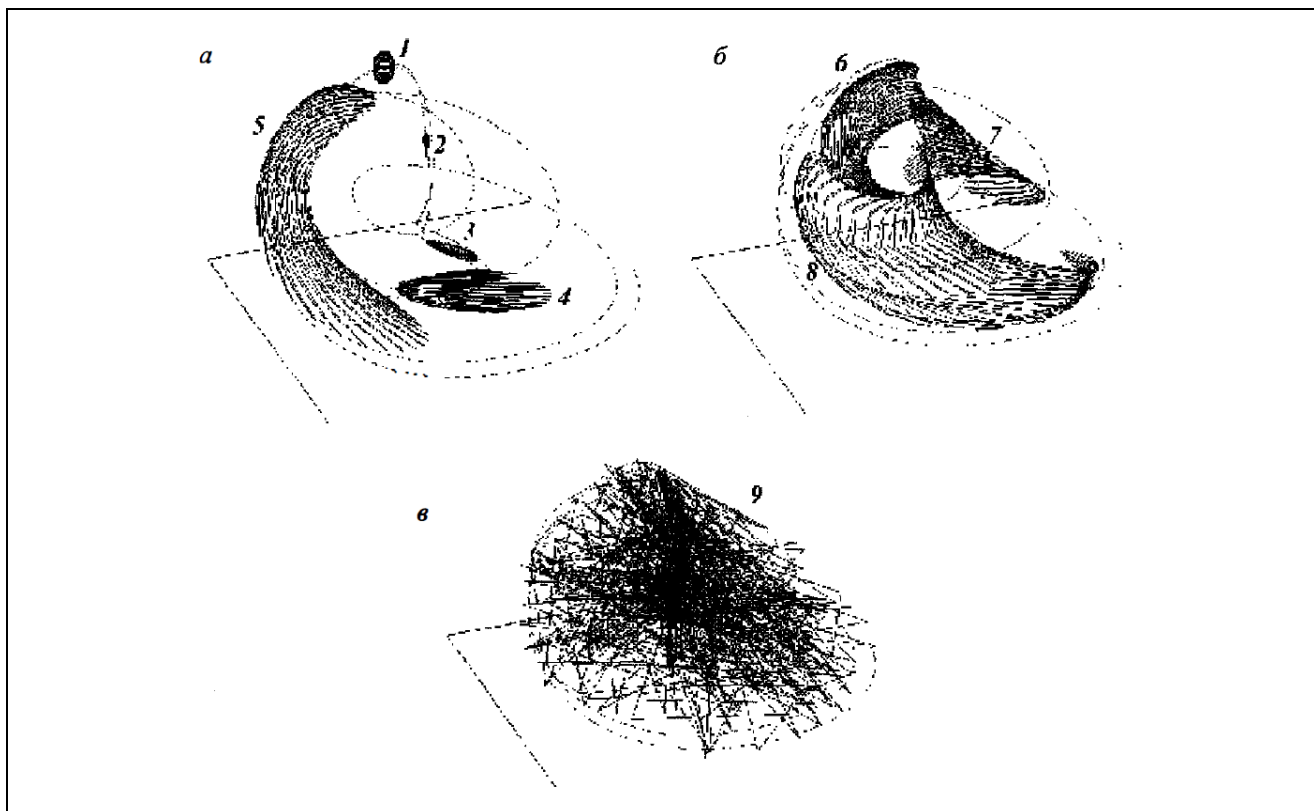
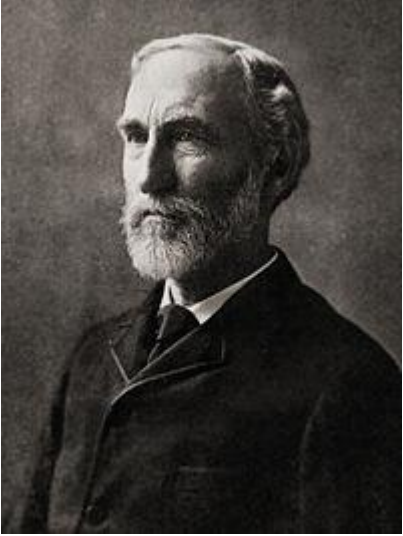
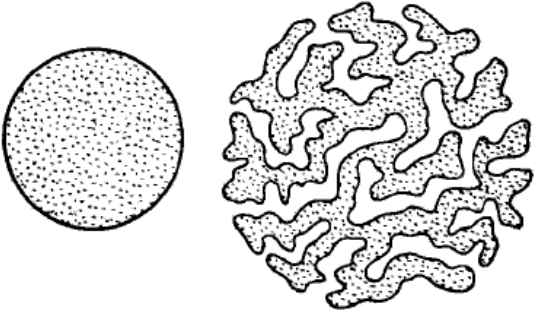


Рис. 6. Еволюція малого початкового фазового об'єму 1 в часі в системі з дивовижним аттрактором, що ілюструє перемішування. Вихідний об'єм 1 стискається, за одними і розтягується по інших напрямках (2, 3, 4), згинається (5,6) «складається» (7, 8) і в підсумку перемішується по аттрактору (9).

В силу наявності механізму нелінійного обмеження фазова траєкторія складного режиму коливань зосереджена в обмеженій області фазового простору. При цьому будь-який малий окіл вихідного початкового стану еволюціонує так, як показано на рис. 6 і в підсумку домішується по всій області, зайнятої траєкторією. Цей процес досить важко уявити собі наочно.

Проведемо наступний уявний експеримент, запропонований американським фізиком-математиком Дж. Гіббсом ще в 1902 р при аналізі основ статистичної механіки (див. рис. 7). У склянку з водою помістимо маленьку чайнку і розмішати воду чайною ложкою, викликавши нестійкість. Чайнка буде при цьому рухатися по складній спіралеподібній траєкторії, яка обумовлена рухом води в склянці. При цьому в будь-який заданий момент часу ми теоретично можемо зафіксувати її координати $x(t)$ в обсязі води. Тепер замість чайнки помістимо в стакан з водою дуже маленьку крапельку чорнила і знову розмішати воду чайною ложкою. Що при цьому відбудеться? Чорнило практично рівномірно розбіжеться по всьому об'єму води, злегка пофарбувавши її. Частинки чорнила, спочатку зосереджені в

маленькому обсязі крапельки, через час перемішування можна буде виявити в будь-якій частині обсягу води в склянці! У житті цей процес ми звикли називати *перемішуванням*. У математиці це поняття також існує і з точки зору фізичної інтерпретації виявляється дуже близьким за змістом. Дійсно, потік води склянці, створений рухом чайної ложки, можна інтерпретувати як дію *детермінованого еволюційного оператора* динамічної системи. Чайнка при цьому буде рухатися по складній, але *детермінованій* (хоча і дуже складній) траєкторії. А крапелька чорнила, яку можна інтерпретувати як якийсь маленький об'єм в фазовому просторі навколо чайнки, під дією оператора еволюції перемішається по всьому об'єму води.

	
<p>Джозайя Уїллард Гіббс Американський фізик-математик (1839-1903)</p>	<p>Рис. 7. Розпливання краплі при перемішуванні.</p>

Пояснимо значення поняття *ергодична система*.

Для цього необхідно дати короткі уявлення про *ергодичну гіпотезу* і *ергодичну теорію*. *Ергодична гіпотеза* в статистичній фізиці – припущення, що середні за часом значення фізичних величин, що характеризують систему, рівні їх середнім статистичним. Ця гіпотеза була запропонована знаменитим австрійським фізиком-теоретиком Людвігом Больцманом в 1887 р для обґрунтування статистичної фізики.



Людвіг Больцман
 Австрійський фізик-теоретик
 (1844-1906)

Ергодична теорія (метрична міра динамічних систем) – розділ теорії динамічних систем, що вивчає їх статистичні властивості. Виникнення ергодичної теорії (в 1-ій третині XX століття) був стимульований спробами довести ергодичного гіпотезу. Стан деякої фізичної системи, наприклад будь-якого об'єму газу, визначається імпульсами і координатами складових її частинок, тобто $6N$ величинами (N – число частинок). Можливі стану системи зручно уявляти собі як точки $6N$ -вимірного простору – фазового простору, а її еволюцію з плином часу – як деякий рух (траєкторію) в цьому просторі. Різні фізичні величини, які пов'язані з даною системою (температура, тиск і т. ін.), є, як правило, функціями координат і імпульсів, що становлять систему частинок, тобто функціями точки її фазового простору. Такі величини називаються фазовими функціями. При зіставленні теорії з експериментом доводиться порівнювати обчислені значення тих чи інших фізичних величин з дослідними даними. Зазвичай теоретично легко визначаються лише середні значення фазових функцій по всім станам, які відповідають даній енергії (так звані фазові середні). З іншого боку, так як вимір будь-якої фізичної величини займає кінцевий час, до того ж велика з точки зору швидкості молекулярних процесів, результат будь-якого вимірювання є середнім за часом (тобто вздовж траєкторії) від відповідної фазової функції. Таким чином, для порівняння дослідних даних з теоретичними необхідно обґрунтувати заміну часових середніх фазовими. **Система, в якій фазові середні збігаються з часовими, називається ергодичною.**

Повернемося до автокореляційної функції.

Обчислимо величину R_n . Обчислення цієї величини громіздка процедура, однак всі необхідні елементи цього обчислення є у обчислення простіший величини R_1 . Тому, щоб зрозуміти, як це робиться в загальному випадку, як приклад обчислимо величину R_1 .

$$R_1 = 12 \left[\int_0^1 \psi \{K\psi\} d\psi - \frac{1}{2} \int_0^1 \{K\psi\} d\psi \right], \quad (4)$$

де $\{K\psi\} = \psi_{m+n}$. Обчислимо перший інтеграл в квадратних дужках. Легко бачити, що цей інтеграл може бути представлений у виді суми інтегралів:

$$I_1 \equiv \int_0^1 \psi \{K\psi\} d\psi = \frac{1}{K^2} \int_0^K x \{x\} dx = \frac{1}{K^2} \sum_{n=0}^{K-1-\{K\}} \int_n^{n+1} x(x-n) dx + \frac{1}{K^2} \int_{K-\{K\}}^K x(x-K+\{K\}) dx. \quad (5)$$

Якщо величина K ціле число, то останній інтеграл дорівнює нулю. З огляду на значення суми

$$\sum_0^N n = N(N+1)/2, \quad (6)$$

після елементарного інтегрування отримаємо такий вираз для першого інтеграла

$$I_1 = \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{K}\right). \quad (7)$$

Аналогічно обчислюється і другий інтеграл. В результаті проведених обчислень отримуємо

$$R_1 \approx \frac{1}{K}. \quad (8)$$

Аналогічні обчислення для R_n показують, що вона зменшується за законом

$$R_n \sim \frac{1}{K^n}. \quad (9)$$

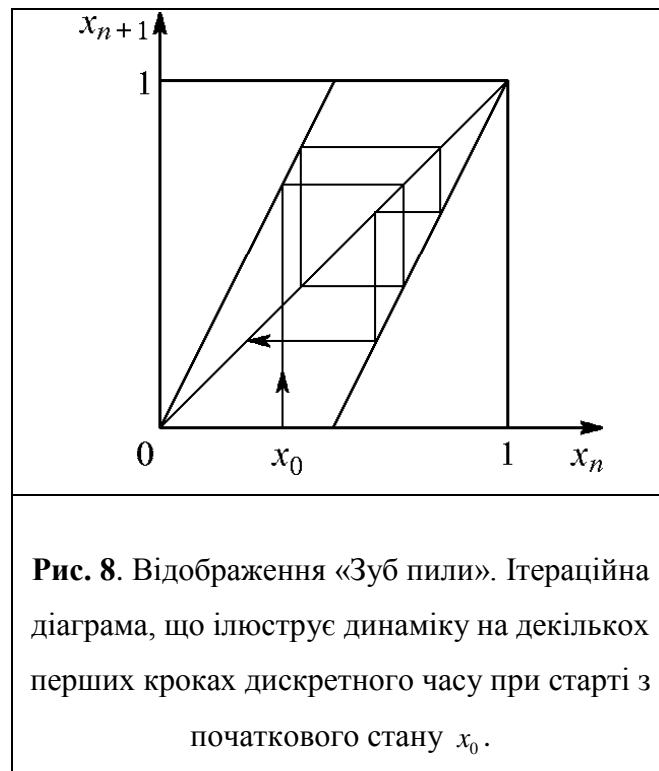
Таким чином, дійсно, в даному випадку маємо всі ознаки перемішування. Послідовність, породжувана точковим відображенням (2) при $K > 1$ виявляється *нерегулярної* (*випадкової*). Причому, мірою перемішування є величина кореляційної функції R_n . Чим більше K , тим швидше зменшується R_n з ростом n , тим швидше в системі настають непередбачуваність при перемішуванні.

Відображення «Зуб пили» (Зсув Бернуллі)

Розглянемо систему, оператор еволюції якої заданий наступним правилом визначення нового стану за попереднім:

$$x_{n+1} = \{2x_n\}. \quad (10)$$

Фігурні дужки означають дробову частину числа в дужках. Ця модель є динамічною системою, заданою одновимірним рекурентним відображенням, показаним на рис. 8.



Використовуючи це відображення, покажемо, як може виникати непередбачуваність і динамічний хаос в комп'ютерних обчисленнях.

1. *Перш за все, нагадаємо, як представляються числа в двійковій системі числення.*

Нас будуть цікавити числа від 0 до 1. Їх можна записати в наступному виді:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot 2^{-k}, \quad (11)$$

де число a_k приймає тільки два значення 0 або 1: $a_k = \{0;1\}$, N – число членів в сумі (11). Дійсно число 0 в цьому представленні буде в тому випадку, коли всі $a_k = 0$, а число 1 – буде, якщо $a_0 = 0$ і всі $a_k = 1$ (для $k \geq 1$). Будь-яке число (числа від 0 до 1) в цьому представленні представляються у виді: $0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_N$. Наприклад: 0,01011010. Числа після коми це значення чисел a_k .

Запишемо, як приклад число 1. У цьому випадку, як ми говорили вище, всі $a_k = 1$ (для $k \geq 1$) ($1 = 0,111111\dots111\dots$). Перевіримо. Підставимо ці значення в формулу (11):

$$\sum_{k=1}^N a_k \cdot 2^{-k} = \sum_{k=1}^N 2^{-k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{2^N} + \dots = 1 \quad \forall a_k = 1. \quad (12)$$

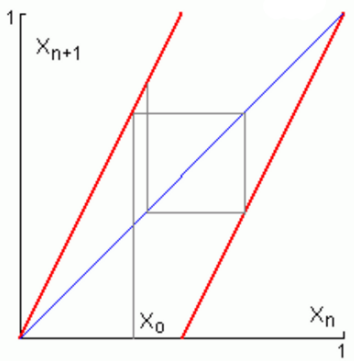
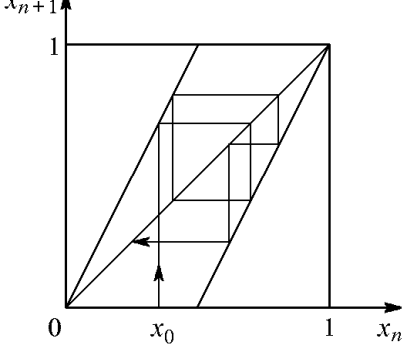
Ряд (12) є геометричною прогресією:

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + a \cdot q^4 + \dots a \cdot q^N = \frac{a(1 - q^{N+1})}{(1 - q)}. \quad (13)$$

У нашому випадку $a = 1/2$; $q = 1/2$. Тому, при досить великому $N \gg 1$ сума (12) дійсно дорівнює 1.

2. **Головне на що слід звернути увагу:** У двійковій формі запису чисел множення будь-якого числа (числа від 0 до 1) на 2 просто призводить до зміщення коми в запису числа на одну позицію вправо (при цьому мається на увазі виконання операції виділення дробової частини числа після множення на 2). Крім того, як легко побачити з (11), якщо перше число після коми буде 1, то число буде більшим ніж 0.5. Якщо перше число після коми буде 0, то число буде меншим ніж 0.5. Відображення «зуб пилки» означає послідовне множення дрібного числа на 2. Таким чином, в цьому відображенні зміна 0 на 1 означатиме, що наша система з лівої половини відрізка $[0,1]$ перескочила в праву половину ($0.5 < x \leq 1$). Зміна в

запису (при множенні на 2) від 1 до 0 означатиме перехід з правої половини відрізка в ліву половину.

	
<p>Рис. 9. Вид відображення «зуб пили» при двох ітераціях: $x_0 = 0.01011 \dots$; $x_1 = 0.1011 \dots$; $x_2 = 0.011\dots$</p>	<p>Рис. 10. Відображення «зуб пили» при трьох ітераціях: $x_0 = 0,0101101\dots$; $x_1 = 0,1011010 : \dots$ $x_2 = 0,0110100\dots$; $x_3 = 0,1101000\dots$</p>


2. Розглянемо тепер, як в цьому відображенні виникає непередбачуваність.

Для цього в якості початкового значення виберемо два дуже близьких числа. У двійковому запису це означає, що в цих числах збігаються перші, наприклад 100 символів (0 або 1). Наступні символи будуть різні. Тоді, користуючись відображенням «зуб пили» ми будемо отримувати однакові результати (передбачувані) протягом 100 ітерацій. Ітерація 101 дасть вже істотно інший результат. *Таким чином, так само, як і в разі відображення (розсіянні) на опуклих поверхнях, час передбачення положення досліджуваної системи обмежена.*

3. Розглянемо тепер, як можна продемонструвати виникнення хаосу (випадковості) в цьому відображенні.

Динаміка систем в розглянутому відображенні визначається числом типу $x_0 = 0,0101101\dots$. Візьмемо випадкову послідовність, яку можна отримати підкиданням монети, записуючи результати за правилом: орел – 0, решка – 1. Ясно, що наша послідовність випадкова послідовність. Буде випадкової і зміна 0 і 1. Це буде означати, що випадковим будуть переходи з лівої половини одиничного відрізка в праву половину. Випадковими будуть і зворотні переходи. *Тобто, початкове значення – деяка випадкова величина, отримана*

шляхом підкидання молнети. І ця випадкова послідовність «змушує слідувати собі» детерміноване рівняння. Це і буде означати хаос.

	<p>Перетворення двійковій послідовності, що складається в зсуві всіх її символів на одну позицію, називають зсувом Бернуллі. За асоціацією з відомої в теорії ймовірностей схемою Бернуллі, яка полягає в послідовності незалежних випробувань, коли кожне випробування має два можливих результати з можливостями p і $1 - p$.</p>
<p>Якоб Бернуллі Швейцарський математик (1655 – 1705)</p>	

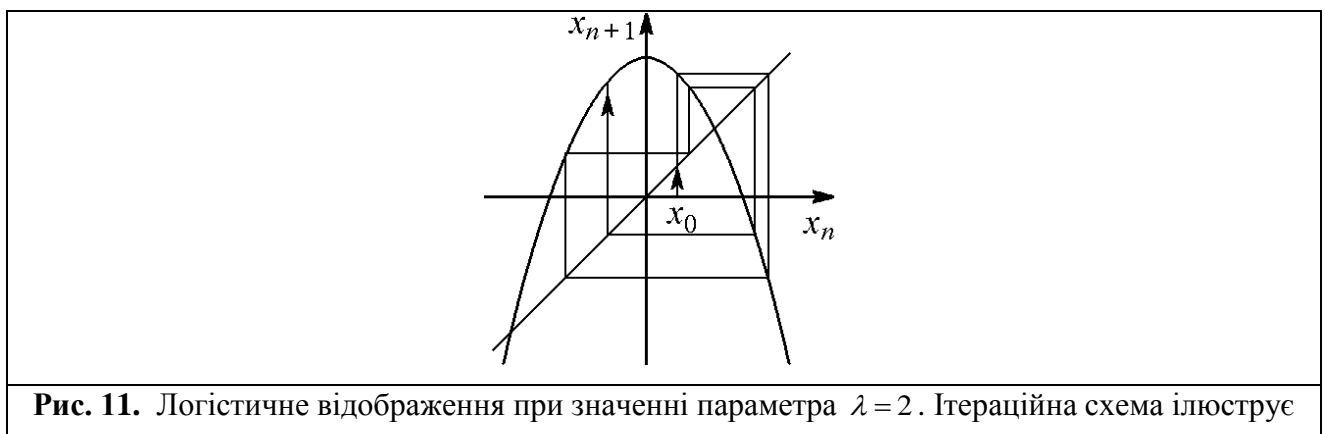
Логістичне відображення.

Це найбільш відоме відображення, що широко використовують. Воно має вид

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (14)$$

де x_n – динамічна змінна, а λ – параметр, від величини якого залежить характер динаміки.

Це теж штучно сконструйована модель динамічної системи, але вона має досить реалістичну інтерпретацію в біології для опису динаміки чисельності деяких біологічних популяцій.



динаміку на декількох перших кроках дискретного часу при старті з початкового стану x_0 .

Можна зустріти іншу форму записи цього відображення:

$$y_{n+1} = R(y_n - y_n^2). \quad (15)$$

Форма (14) переходить в форму (15) при наступній заміні змінної і параметра:

$$x = \frac{y - 1/2}{R/4 - 1/2}, \lambda = R(R/4 - 1/2). \quad (16)$$

Розглянемо простий окремий випадок формули (14), який був розглянутий в кінці 40-х років ХХ століття Уламом і фон Нейманом. Цей випадок відповідає випадку, коли параметр $\lambda = 2$. При такому значенні цього параметра відображення (14) зводиться до відображення «зуб пили». Доведемо це.

Відображення (14) набуває виду:

$$x_{n+1} = 1 - 2x_n^2. \quad (17)$$

1. Зробимо заміну:

$$x_n = -\cos 2\pi y_n. \quad (18)$$

2. Згадаймо формулу:

$$\cos^2 z = (1 + \cos 2z) / 2.$$

3. Підставивши (17) і (18) в формулу (14), отримаємо:

$$z_{n+1} = \{2z_n\}. \quad (19)$$

Це відображення є відображенням «Зуб пили». Ясно, що основні особливості динаміки системи, яка описується логістичним відображенням будуть (в цьому випадку) такими ж як і при відображенні «зуб пили».



Станіслав Мартін Улам
Польський і американський математик
(1909 – 1984)



Джон фон Нейман
Угорський і американський математик
(1903 – 1957)