Контрольна робота
з вищої математики
студента групи КС-21
Безрука Юрія
Варіант № 2

1) $\frac{d^2}{dx^2}y(x)+2\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)+y(x)-4e^{x}(x+1)=0$ ; $y(0)=1$; $y'(0)=1$

$y''+2y'+y=4e^{x}(x+1)$. Решение методом вариации постоянной:

ЛОДУ:

характеристическое у-е:

$\lambda^2+2\lambda+1=0$

$\lambda_{1,2}=\frac{-2}{2}=-1$ - кратный корень, кратность $k=2$

Общее решение ЛОДУ $y_0=(C_1+C_2x)e^{-x}=C_1e^{-x}+C_2e^{-x}x$

у-е установит ~~...~~ систему (при переходе к $C_1=C_1(x)$; $C_2=C_2(x)$):

ЛНДУ:

$$\begin{cases} C_1'e^{-x}+C_2xe^{-x}=0 \\ -C_1'e^{-x}+C_2'(e^{-x}-xe^{-x})=4e^{x}(x+1) \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} :e^{-x} \\ :e^{-x} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} C_1'+C_2'x=0; \\ -C_1'+C_2'(1-x)=4e^{2x}(x+1) \end{cases} \Bigg|\overset{I+II}{\Rightarrow} \begin{matrix} C_2'(1-x)+C_2'x=4e^{2x}(x+1) \\ C_2'=4e^{2x}(x+1) \end{matrix}$$

$C_1'=-C_2'x=-4xe^{2x}(x+1)$

$C_1(x)=-4\int xe^{2x}(x+1)dx=-4\cdot\frac{x^2e^{2x}}{2}=-2x^2e^{2x}$

$C_2(x)=4\int e^{2x}(x+1)dx=(2x+1)e^{2x}$

Частное решение ЛНДУ: $y_r=(-2x^2e^{2x}+(2x+1)e^{2x}x)e^{-x}=xe^{x}$

Общее решение ЛНДУ: $y=y_0+y_r=(C_1+C_2x)e^{-x}+xe^{x}$

константы $C_1$ и $C_2$ определяем из начальных условий:

$y(0)=C_1=1 \Rightarrow \underline{C_1=1}$

$y'(x)=C_2e^{-x}-e^{-x}(C_1+C_2x)+e^{x}+xe^{x} \Rightarrow y'(0)=C_2-C_1+1\Big|_{C_1=1}=1 \Rightarrow \underline{C_2=1}$

Общее решение ЛНДУ: $y=(1+x)e^{-x}+xe^{x}$

2-й способ решения ЛНДУ – метод преобразования Лапласа

$y''+2y'+y=4e^x(x+1) \quad y(0)=1 \quad y'(0)=1$

Выполняем преобразование Лапласа:

$y''(x) \xrightarrow{L} p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-p-1$

$y'(x) \xrightarrow{L} pY(p)-y(0)=pY(p)-1$

$y(x) \xrightarrow{L} Y(p)$

$4e^x(x+1)=4e^x x+4e^x \xrightarrow{L} \frac{4}{(p-1)^2}+\frac{4}{p-1}$

Переписываем у-е:

$p^2Y(p)-p-1+2pY(p)-2+Y(p)=\frac{4}{(p-1)^2}+\frac{4}{p-1}$

$p^2Y(p)+2pY(p)+Y(p)=\frac{4p}{(p-1)^2}+p+3$

$Y(p)(p^2+2p+1)=\frac{4p}{(p-1)^2}+p+3$

$Y(p)=\frac{4p}{(p-1)^2(p+1)^2}+\frac{p}{p^2+2p+1}+\frac{3}{p^2+2p+1}=$

$=\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{p+3}{(p+1)^2}$

Выполняя обратный переход Лапласа:

$\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{p+3}{(p+1)^2} \xrightarrow{L^{-1}} xe^x-xe^{-x}+e^{-x}(2x+1)=$

$=xe^x-e^{-x}(x-2x-1)=\underline{xe^x+e^{-x}(x+1)}$

Решения двумя способами совпадают.

2.) $\frac{d^2}{dx^2}y(x) - \frac{2y(x)}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

$y'' - \frac{2}{x^2}y = \frac{\ln x}{x^2}$ Выполняем подстановку

$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$; $y' = e^{-t}y_t'$; $y'' = e^{-2t}(y_{tt}'' - y_t')$

у-е после подстановки:

$e^{-2t}(y_{tt}'' - y_t') - \frac{2}{e^{2t}} \cdot y = \frac{t}{e^{2t}} \quad \Big| \cdot e^{2t}$

$y_{tt}'' - y_t' - 2y = t$

ЛОДУ: Характеристическое у-е:

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = -1$

Общее решение ЛОДУ: $y_0 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$

ЛНДУ: Методом вариации постоянных, $C_1 = C_1(t)$; $C_2 = C_2(t)$

$\begin{cases} C_1' e^{2t} + C_2' e^{-t} = 0 \\ 2C_1' e^{2t} - C_2' e^{-t} = t \end{cases} \Bigg|$ I+II $\quad 3C_1' e^{2t} = t \Rightarrow C_1' = \frac{t}{3e^{2t}}$

$\frac{t}{3} + C_2' e^{-t} = 0 \Rightarrow C_2' = \frac{-te^t}{3}$

$C_1(t) = \frac{1}{3}\int \frac{t}{e^{2t}}dt = -\frac{1}{12}(2t+1)e^{-2t} + C_3$

$C_2(t) = -\frac{1}{3}\int te^t = -\frac{1}{3}(t-1)e^t + C_4$

$y(t) = \left(-\frac{1}{12}(2t+1)e^{-2t} + C_3\right)e^{2t} + \left(-\frac{1}{3}(t-1)e^t + C_4\right)e^{-t} =$

$= C_3 e^{2t} + C_4 e^{-t} - \frac{1}{6}t - \frac{1}{12} - \frac{1}{3}t + \frac{1}{3} = C_3 e^{2t} + C_4 e^{-t} - t/3 + 1/4$

Обратная замена $t = \ln x$:

$y(x) = C_3 x^2 + C_4 \cdot x^{-1} - \frac{\ln x}{3} + 1/4$

3.) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

Составляем х-ое у-е: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Вычисляя определитель, получим: $-1 + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} + \lambda^2 - 8 = 0$

$\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = -3$ - собственные значения

Теперь найдём собственные векторы:

при $\lambda_1 = 3$ имеем $\begin{cases} -4\alpha + 8\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2\beta$, $\beta = \frac{\alpha}{2}$

При $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 1/2$

Собственный вектор $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

При $\lambda_2 = -3$: $\begin{cases} 2\alpha + 8\beta = 0 \\ \alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -4\beta$, $\beta = -\frac{\alpha}{4}$ при $\alpha = 1$, $\beta = -1/4$

собственный вектор $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}$

Общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

или $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} \\ y = \frac{1}{2} C_1 e^{3t} - \frac{1}{4} C_2 e^{-3t} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^{t} \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$

ЛОДУ: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1$

$\lambda_1 = 3: \begin{cases} -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad \alpha = \beta, \quad \alpha = 1 : \beta = 1 \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1: \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \alpha = -\beta, \quad \alpha = 1 : \beta = -1 \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ЛНДУ: Методом ~~по~~ преобразований Лапласа:

$\begin{cases} pX - C_1 = 2X + Y + \frac{2}{p-1} \\ pY - C_2 = X + 2Y - \frac{3}{p-4} \end{cases}$ где: $C_1 = x(0)$, $C_2 = y(0)$

$\begin{cases} (p-2)X - Y = C_1 + \frac{2}{p-1} \\ -X + (p-2)Y = C_2 - \frac{3}{p-4} \end{cases}$ $\quad \Delta = (p-2)^2 - 1 = p^2 - 4p + 3 = (p-3)(p-1)$

$\Delta x = \begin{vmatrix} C_1 + \frac{2}{p-1} & -1 \\ C_2 - \frac{3}{p-4} & p-2 \end{vmatrix} = C_1(p-2) + \frac{2p-4}{p-1} + C_2 - \frac{3}{p-4}$

$X = \frac{C_1(p-2) + \frac{2p-4}{p-1} + C_2 - \frac{3}{p-4}}{(p-3)(p-1)} = \frac{C_1}{p-3} + \frac{C_1 + C_2}{2}\left(\frac{1}{p-3} + \frac{1}{p-1}\right) +$

$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-3} + \frac{1}{p-1}\right) - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-4} - \frac{1}{p-3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-3}\right)$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p-2 & C_1 + \frac{2}{p-1} \\ -1 & C_2 - \frac{3}{p-4} \end{vmatrix} = C_2(p-2) - \frac{3p-6}{p-4} + C_1 + \frac{2}{p-1}$$

$$Y = \frac{C_2(p-2) - \frac{3p-6}{p-4} + C_1 + \frac{2}{p+1}}{(p-3)(p-1)} =$$

$$= \frac{C_2}{p-3} + \frac{C_2+C_1}{2}\left(\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p+1}\right) - \frac{2}{p-4} + \frac{1}{p-3} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-3}\right)\Big) + \frac{2}{(p-1)^2}$$

Выполняя обратные преобразования Лапласа:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} e^t (2t + e^{2t} + 2e^{3t} - 1) \\ y(t) = 2e^t t + 3e^{3t} - 2e^{4t} \end{cases}$$