Контрольна робота
з вищої математики
студента групи КС-21
Безрука Юрія

Варіант №2

1) По $\operatorname{Im} f(z) = V(x,y) = 2xy + x^2 - y^2$ найти $\operatorname{Re} f(z) = U(x,y)$
Найти $f'(z)$.

$\frac{\partial V}{\partial y} = 2x - 2y$ Согласно условию Коши-Римана: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$

$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x - 2y$ $U(x,y) = \int (2x-2y)dx = x^2 - 2xy + \varphi(y)$,
где $\varphi(y)$ - произвольная ф-я от y

тогда $\frac{\partial U}{\partial y} = -2x + \varphi'(y)$. Согласно усл. Коши-Римана $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$

тогда $\frac{\partial V}{\partial x} = -(-2x + \varphi'(y)) = 2x - \varphi'(y)$

По условию задачи $V(x,y) = 2xy + x^2 - y^2$,
отсюда $\frac{\partial V}{\partial x} = 2y + 2x$

Значит, $2x + 2y = 2x - \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = -2y$
Отсюда $\varphi(y) = -y^2 + C$

Значит $\underline{U(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 + C}$

$f(z) = U(x,y) + iV(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 + C + i(2xy + x^2 - y^2) =$
$= x^2 - 2xy - y^2 + C + 2xyi + x^2 i - y^2 i =$
$= (x^2 + 2xyi - y^2) + C - 2xy + x^2 i - y^2 i =$
$= (x+iy)^2 - 2xy + i(x^2 - y^2) + C = (x+iy)^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xyi - 2xyi) + C =$
$= (x+iy)^2 - 2xy + i((x+iy)^2 - 2xyi) + C =$
$= (x+iy)^2 + i(x+iy)^2 + \cancel{2xy} - \cancel{2xy} + C$. т.к. $z = x + iy \Rightarrow$
$\Rightarrow z^2 + iz^2 + C = z^2(1+i) + C$

Тогда $\underline{f'(z) = 2z(1+i)}$

2) Разложить в ряд Лорана $f(z)=\frac{6z}{z^2+2z-3}$ в области $1<|z|<3$

$$\left[\begin{array}{ll} z^2+2z-3=0 & \text{Значит, } z^2+2z-3=(z-1)(z+3) \\ z_1+z_2=-2 \quad z_1=-3 & \\ z_1z_2=-3 \quad z_2=1 & \end{array}\right]$$

$$f(z)=\frac{6z}{(z-1)(z+3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+3}\text{; отсюда: } A(z+3)+B(z-1)=6z$$

$$\underline{Az}+\underline{\underline{3A}}+\underline{Bz}\underline{\underline{-B}}=6z \qquad \begin{array}{l} z^1: \\ z^0: \end{array}\begin{cases} A+B=6 \\ 3A-B=0 \end{cases}\Big|+ \Rightarrow \begin{cases} 4A=6 & A=3/2 \\ B=6-A & B=9/2 \end{cases}$$

$$\text{Значит, } f(z)=\frac{6z}{z^2+2z-3}=\frac{3/2}{z-1}+\frac{9/2}{z+3}$$

Рассмотрим $\frac{9/2}{z+3}$

$$\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{z+3}=\frac{9}{2}\frac{1}{3(1+\frac{z}{3})}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+z/3}=\left|\begin{array}{l}\text{при } |z|<3 \\ \left|\frac{z}{3}\right|<1\end{array}\right|=$$

$$=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{3}\right)^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{3^{n-1}}\text{. сх-ся при } |z|<3$$

Рассмотрим $\frac{3/2}{z-1}$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{3}{2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\left|\begin{array}{l}\text{при } |z|>1 \\ \left|\frac{1}{z}\right|<1\end{array}\right|=\frac{3}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

сх-ся при $|z|>1$

$$\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\left|m=-n-1\right|=\frac{3}{2}\sum_{m=-\infty}^{-1}\frac{1}{z^{-m}}=\frac{3}{2}\sum_{m=-\infty}^{-1}z^m$$

$$f(z)=\frac{6z}{z^2+2z-3}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{3^{n-1}}+\frac{3}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n$$

3) Найти $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z-1}{z^3-z}dz$

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{i} f(z)$$

$$f(z) = \frac{e^z-1}{z^3-z} = \frac{e^z-1}{z(z^2-1)} = \frac{e^z-1}{z(z-1)(z+1)}$$

Особые точки ф-ии: 0, 1, -1. т. 0 – устранимая особенность
1, -1 – полюса 1-го порядка (простые)

Вычет для простого полюса: $\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0}(f(z)(z-z_0))$

$$\operatorname*{Res}_{1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{e^z-1}{z\cancel{(z-1)}(z+1)}\cancel{(z-1)} = \frac{e-1}{2}$$

$$\operatorname*{Res}_{-1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{e^z-1}{z(z-1)\cancel{(z+1)}}\cancel{(z+1)} = \frac{e^{-1}-1}{2}$$

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z-1}{z^3-z}dz = 2\pi i\left(\frac{e-1}{2} + \frac{e^{-1}-1}{2}\right) = \cancel{2}\pi i\,\frac{e+\frac{1}{e}-2}{\cancel{2}} = \underline{\pi i(e+1/e-2)}$$

4) Вычислить $\int\limits_{-\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2+2x+2}$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+2x+2=0 \quad D=b^2-4ac=4-4\cdot2=-4 \\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm2i}{2}=-1\pm i \end{array}\right]$$

Функція $f(z)=\frac{ze^{iz}}{(z+1-i)(z+1+i)}$ є аналітичною у верхній напівплощині за винятком полюса 1-го порядку в точці $-1+i$

Тому $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2+2x+2}=\mathrm{Re}\left[2\pi i \operatorname*{Res}_{-1+i} f(z)\right]=$

$$=\mathrm{Re}\left[2\pi i \lim_{z\to-1+i}\frac{ze^{iz}}{\cancel{(z+1-i)}(z+1+i)}\cancel{(z+1-i)}\right]=$$

$$=\mathrm{Re}\left[2\pi i\,\frac{(-1+i)e^{i(-1+i)}}{\cancel{-1}+i\cancel{+1}+i}\right]=\mathrm{Re}\left[\cancel{2}\pi\cancel{i}\,\frac{(-1+i)e^{i(-1+i)}}{\cancel{2i}}\right]=$$

$$=\mathrm{Re}\left[\pi(-1+i)e^{-i}\cdot e^{-1}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{\pi(-1+i)(\cos(-1)+i\sin(-1))}{e}\right]=$$

$$=\mathrm{Re}\left[\frac{\pi}{e}(-\cos(-1)-i\sin(-1)+i\cos(-1)-\sin(-1)\right]=$$

$$=\underline{\frac{\pi}{e}(-\cos(-1)-\sin(-1))}$$