Лекція 3
Силовий резонанс

Модель лінійного осцилятора. Роль загасання на динаміку лінійних осциляторів. Фазовий простір. Простір параметрів. Особливі точки диференціальних рівнянь.

Вступ

Основна роль цього курсу навчитися аналізувати динаміку нелінійних систем. Однак ключові поняття динаміки нелінійних систем мають своїм фундаментом динаміку лінійних систем. Алгоритми вивчення лінійних систем добре відомі і вивчені на багатьох прикладах. У цій лекції ми розглянемо одне з фундаментальних понять лінійних систем. Цим поняттям є резонанс. Потрібно відзначити, що саме умови резонансу дозволяють найбільш ефективно організовувати необхідні процеси. Резонанси лежать в основі практично всіх помітних досягнень цивілізації. Крім важливості поняття резонансу в цій лекції ми використовуємо для аналізу резонансу багато ключових поняття, які будуть використані для аналізу нелінійних систем.

Перелічимо найбільш важливі властивості силового резонансу:

1. Образ: Гойдалки.
2. Рівняння, яке описує особливості силового резонансу, можна записати у виді:

$$\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos(\omega t)$$

- тут – ліва частина описує динаміку вільного осцилятора;
- другий член в лівій частині описує загасання коливань осцилятора;
- ω – власна частота осцилятора;
- права частина описує силу, яка діє на цей осцилятор.

Якщо частота цієї зовнішньої сили збігається з власною частотою осцилятора $\omega_0 = \omega$, виникає так званий силовий резонанс.

3. Амплітуда резонансу наростає пропорційно першого ступеня часу (тобто наростає лінійно з часом).

4. Максимальна амплітуда коливань осцилятора при резонансі визначається величиною амплітуди зовнішньої сили і обернено пропорційна величині загасання: $x_{\max} \approx f/(2\omega\nu)$

Доведемо ці властивості резонансу.

1. Почнемо розгляд з найпростішої моделі лінійного осцилятора без загасання:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 . \tag{1}$$

Це відома найпростіша модель осцилятора. У ній є всього один параметр – частота коливань. Загальний розв'язок динаміки осцилятора має простий вид:

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t , \tag{2}$$

де A і B – константи. Для подальшого зручно рівняння (1) переписати в канонічному виді, тобто у виді системи двох звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases} . \tag{3}$$

Уже, дивлячись на рівняння (3), ми можемо ввести поняття фазового простору. Це простір, по осях якого відкладені залежні змінні. В даному випадку таким змінними будуть змінні x і y. У загальному ж випадку, систему звичайних диференціальних рівнянь можна представити у виді системи з N зв'язаних диференціальних рівнянь:

$$\dot{X}_i = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{ik} X_k = F_i \text{ , де } i = \{1, 2, ..., N\} . \tag{4}$$

Прийнято вважати, що розмірність фазового простору це число залежних змінних. В даному випадку це число N. Нагадаємо собі, що так зване число ступенів свободи системи в два рази менше розмірності, тобто $N/2$. Важливу роль в динаміці будь-яких систем грають механізми загасання. Легко узагальнити математичну модель (1) коливальної системи на випадок наявності загасання. Відповідне рівняння має вид:

$$\ddot{x}+2\nu\dot{x}+\omega^2 x=0. \qquad (5)$$

Ми бачимо, що рівняння (5) вже містить два параметри: частоту ω і коефіцієнт загасання ν. Як ми вже відзначали в першій лекції при розгляді моделі «хижак-жертва», заміною змінних можна кількість параметрів зменшити. Для цього введемо нову залежну змінну “ y ”:

$$x=ye^{-\nu\tau},\ \dot{x}=\left(\dot{y}-\nu\cdot y\right)e^{-\nu\tau},\ \ddot{x}=\left(\ddot{y}-2\nu\dot{y}+\nu^2 y\right)e^{-\nu\tau}. \qquad (6)$$

Підставляючи цей вираз в початкове рівняння (5), ми отримаємо наступне рівняння для визначення нової залежною змінною:

$$\ddot{y}+\left(\omega^2-\nu^2\right)y=0. \qquad (7)$$

Розв’язок цього рівняння має вид:

$$y=C\cdot\cos\Omega\tau+D\sin\Omega\tau, \qquad (7.1)$$

де $\Omega\equiv\sqrt{\omega^2-\nu^2}$ - частота коливань при наявності дисипативних втрат. Потрібно, звичайно, пам'ятати як розв’язок вихідного рівняння (5) пов'язане з розв’язком (7): $x=ye^{-\nu\tau}$. Ми бачимо, що рівняння (7) для залежної змінної « y »формально не відрізняється від вихідного рівняння (1) для залежної змінної «x», тобто це рівняння лінійного осцилятора без загасання. Однак необхідно пам'ятати, що вихідним було рівняння (5), в якому параметр загасання був в явному виді. Тому остаточне рішення системи (5) буде мати вид:

$$x=\left[A\cos\Omega t+B\sin\Omega t\right]\exp(-\nu t). \qquad (8)$$

Видно, що загасання міститься в експоненційному множнику перед коливальними складовими. Розв’язок (8) можна уявити ще в такому виді

$$x=Ke^{-\nu t}\cos\left(\Omega t+\alpha\right), \qquad (8.1)$$

де $K=\sqrt{A^2+B^2}$, $\mathrm{tg}\alpha=-B/A$. Таким чином, наявність загасання призвело, з одного боку, до зміни частоти коливань. Замість ω, ми маємо $\Omega=\sqrt{\omega^2-\nu^2}$ (дивіться коментар до формули (7.1)). Вона стала меншою, а, з іншого боку, *з'явився експонентний множник, у показнику якого міститься параметр загасання.*

Треба зауважити, що функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$ *не є періодичними функціями*. Дійсно, періодичними функціями називаються, як відомо, такі функції $f(t)$, для яких можна вказати деяку величину τ , таку, що

$$f(t+\tau)=f(t) \tag{8.2}$$

при будь-якому значенні аргументу t. Найменша величина τ називається періодом функції $f(t)$. Функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$ не підходять під це визначення, так як для них наведена умова (8.2) не задовольняється для будь-яких значеннях аргументу. Тому періоду в строгому сенсі цього слова в цьому випадку не існує. Однак проміжок часу між двома послідовними проходженнями системи через положення рівноваги (в одному і тому ж напрямку) або між двома послідовними максимальними відхиленнями (в одну і ту ж сторону) постійний і дорівнює

$$T=2\pi/\Omega. \tag{8.3}$$

Цей проміжок часу ми будемо називати «умовним періодом» затухаючого осцилляторного процесу. Відзначимо важливу особливість. Відзначимо важливу особливість. У загальному випадку, параметр загасання може бути як позитивним ($\nu>0$),так і негативним ($\nu<0$).Приклади таких систем ми вже з вами розглядали на минулій лекції. Перепишемо рівняння (5) в канонічній формі, тобто представимо у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-2\nu y-\omega^2 x\end{cases}. \tag{9}$$

Ми вже з вами користувалися поняттям особлива точка системи диференціальних рівнянь. Уточнимо це поняття. Як відомо, через ті точки, для яких виконуються умови Коші (в числі останніх є умова, що диференціальне рівняння дає певний напрям дотичній до інтегральної кривої), проходить одна і тільки одна інтегральна крива; щодо точок же в яких напрямок дотичної стає невизначеним і в яких, отже, умови теореми Коші не виконуються, вже не можна стверджувати (на підставі цієї теореми), що через них проходить одна і тільки одна крива. Такі точки, в яких напрямок невизначено, носять назву особливих точок даного диференціального рівняння.

<u>Розглянемо випадок</u> $\omega^2 > \nu^2$, $\nu > 0$.

Отримаємо аналітичний вираз для сімейства фазових кривих для нашої системи рівнянь. Згідно зі слів (8.1) для розв’язку рівняння лінійного осцилятора із загасанням параметричні рівняння траєкторій на фазовій площині (*x*,*y*) мають вид

$$x = Ke^{-\nu t}\cos(\Omega t + \alpha),\ \Omega = \sqrt{\omega^2 - \nu^2}\,, \tag{9.1}$$

$$\dot{x} = -Ke^{-\nu t}\left[\nu\cos(\Omega t + \alpha) + \Omega\sin(\Omega t + \alpha)\right], \tag{9.2}$$

Покажемо, що це – сімейство спіралей, що мають асимптотичну точку на початку координат. Для цієї мети скористаємося лінійним перетворенням координат. Саме, перейдемо від змінних (x, y) до змінних

$$u = \Omega x\,,\ v = y + \nu x\,. \tag{9.3}$$

Які ми будемо інтерпретувати як Декартові координати на іншій площині (u, v). якщо позначити

$$\Omega K = C_1, \tag{9.4}$$

то

$$u = C_1 e^{-\nu t}\cos(\Omega t + \alpha),\ v = -C_1 e^{-\nu t}\sin(\Omega t + \alpha). \tag{9.5}$$

Перейдемо до полярних координат:

$$u = \rho\cos(\varphi),\ v = \rho\sin(\varphi), \tag{9.6}$$

$$\rho = C_1 e^{-\nu t},\ \varphi = -(\Omega t + \alpha). \tag{9.7}$$

Тоді, виключивши час, отримаємо:

$$\rho = C\exp\left(\frac{\nu}{\Omega}\varphi\right), \quad C = C_1\exp\left(\frac{\nu\alpha}{\Omega}\right). \tag{9.8}$$

Таким чином, на площині (u, v) фазовими траєкторіями буде сімейство логарифмічних спіралей з асимптотичною точкою на початку координат. При цьому, оскільки фаза φ убуває з часом (оскільки вона негативна – см. рівняння (9.7); по модулю вона зростає), а величина $\rho \to 0$ при $t \to +\infty$, зображуюча точка, рухаючись по спіралях на площині (u, v), асимптотично наближається до початку координат.

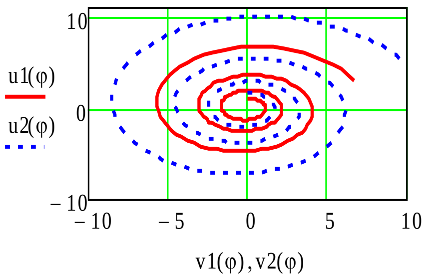

Рис. 1. Сімейство логарифмічних спіралей.

Таким чином, ми з'ясували характер фазових траєкторій лінійного осцилятора із загасанням. Можна показати, що через кожну точку фазової площини проходить одна і тільки одна спіраль, відповідна певному значенню константи C у формулі (9.8), або, інакше кажучи, відповідна певним початковим умовам. Вся площина заповнена спіралями, вкладеними один в одного (як показано на рис. 1), за якими зображуюча точка асимптотично наближається до початку координат. Виняток становить лише стан рівноваги – точка (0,0), тобто сам початок координат, яку слід розглядати як окрему фазову траєкторію. При русі зображуючої точки по спіралі фазова швидкість ніколи не звертається в нуль, поступово зменшуючись з кожним оборотом, так що час кожного обороту залишається незмінним і рівним $T = 2\pi/\Omega$. За класифікацією особливих точок, яку ми ввели на попередній лекції, така особлива точка називається ***фокусом***.

Розглянемо докладніше загасаючий аперіодичний процес.

<u>*Розглянемо випадок*</u> $\omega^2 < \nu^2$, $\nu > 0$.

В цьому випадку, позначаючи

$$q = +\sqrt{\nu^2 - \omega^2}\ , \tag{9.9}$$

отримаємо такі коріння характеристичного рівняння:

$$\lambda_1 = -\nu + q = -q_1,\ \lambda_2 = -\nu - q = -q_2, \left(q_2 > q_1 > 0\right). \tag{9.10}$$

Рівняння інтегральних кривих має вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\nu y - \omega^2 x}{y}. \tag{9.11}$$

Єдина особлива точка цього сімейства кривих є точка $x = 0$, $y = 0$, що відповідає стану рівноваги системи. Розв'язками рівняння (9.11) є сімейство кривих, описуваних наступним рівнянням:

$$\left(y + q_1 x\right)^{q_1} = C\left(y + q_2 x\right)^{q_2}. \tag{9.12}$$

Серед цих інтегральних кривих є дві прямолінійні інтегральні криві, що проходять через початок координат. Для їх відшукання підставимо рівняння прямої

$$y = \beta x \tag{9.13}$$

в рівняння інтегральних кривих (9.11). Тоді для кутового коефіцієнта β отримаємо рівняння

$$\beta^2 + 2\nu\beta + \omega^2 = 0, \tag{9.14}$$

яке збігається з характеристичним рівнянням вихідної системи (9). В результаті рівняння цих інтегральних кривих мають вид

$$y = -q_1 x \text{ (лінія } L_2),\ \ y = -q_2 x \text{ (лінія } L_1). \tag{9.15}$$

Вдалині від положення рівноваги всі траєкторії шикуються паралельно прямий L_1. При наближенні до початку координат кожна траєкторія прагне торкнутися прямий L_2. Кожна з цих прямих складається з трьох траєкторій: точки рівноваги і двох променів, що лежать у верхній і нижній півплощинах фазової площини. Необхідно робити відмінності між інтегральними кривими і фазовими траєкторіями, так як однієї інтегральної кривої може відповідати кілька різних фазових траєкторій.

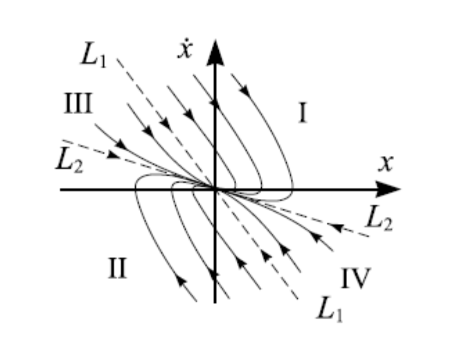

Рис. 2.

Перейдемо тепер безпосередньо до аналізу резонансу.

Для цього запишемо математичну модель, яка враховує вплив зовнішнього періодичної сили на динаміку коливальної системи:

$$\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega_0^2 x = F\cos\omega t \quad . \tag{10}$$

Формула (10) відрізняється від формули (5) (*рівняння вільних затухаючих коливань*) тільки тим, що в правій частині замість «*0*» міститься зовнішня сила. Ця зовнішня сила характеризується своєю амплітудою і частотою. Аналізувати модель (10) можна відомими традиційними методами. Однак це досить громіздкий аналіз. *Для отримання всіх основних особливостей динаміки системи (10) при резонансі, ми можемо скористатися більш простим прийомо*м. Ми знаємо, що загальне рішення диференціального рівняння типу рівняння (10) складається з двох частин. *Перша частина* описує динаміку однорідної системи рівняння (10), тобто без урахування правій частині в системі (10). *Друга частина* являє собою окремий розв'язок рівняння (10). Звернемо тепер увагу на те, що перша частина розв’язку, тобто розв’язок однорідної частини (10) містить в собі експонентний множник.

Асимптотичний розв’язок при $\nu t >> 1$

При досить великому інтервалі часу ($\nu t >> 1$) першу частину загального розв’язка неоднорідного рівняння можна не враховувати, тобто обмежитися тільки приватним рішенням рівняння (10). *Це перше спрощення*. Це спрощення зберігає всі основні особливості динаміки коливальні системи при резонансі. *Другим спрощенням* аналізу є перехід до комплексних змінних. Для цього ми крім рівняння (10) розглянемо ще й рівняння:

$$\ddot{y} + 2\nu \dot{y} + \omega_0^2 y = F \sin \omega t \quad . \tag{11}$$

Тепер введемо нову залежну комплексну змінну:

$$z = x + iy \, . \tag{12}$$

Будемо вважати, що амплітуда зовнішньої сили (F) є дійсною величиною. Тоді з рівняння (10) (для змінної «*x*») і (11) (для змінної «*y*») легко знаходимо (множачи рівняння (11) на уявну одиницю і складаючи з рівнянням (10)), рівняння для нової залежною змінною:

$$\ddot{z} + 2\nu \dot{z} + \omega_0^2 z = F \exp\left(i\omega t\right) . \tag{13}$$

Відшукання розв’язка неоднорідного рівняння (13) значно легше, ніж відшукання розв’язків вихідних неоднорідних рівнянь. Дійсно, розв’язок рівняння (13) можна шукати у виді:

$$z = ae^{i\left(\omega \cdot t + \varphi\right)} . \tag{14}$$

Відзначимо, що шуканий розв’язок нашого вихідного рівняння (10) буде $x = \mathrm{Re}\, z = a \cos\left(\omega t + \varphi\right)$. Тут параметри a і φ є дійсними величинами. Підставляючи (14) в рівняння (13), знаходимо наступний проміжний зв'язок між параметрами даної системи:

$$ae^{i\varphi}\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+2i\omega\nu\right]=F\,. \tag{15}$$

Співвідношення (15) – це співвідношення між комплексними числами. Як відомо, два комплексних числа рівні тільки в тому випадку, коли у них збігаються окремо дійсні частини і окремо уявні частини. Мають дорівнювати і модулі цих комплексних функцій:

$$a^2\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2\nu^2\right]=\left|F^2\right|\,. \tag{16}$$

Використовуючи формулу (16), відразу можна знайти дійсну величину (амплітуду) досліджуваної коливальні системи:

$$a^2=\frac{F^2}{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2\nu^2\right]}\,. \tag{17}$$

Формула (17) визначає одну з найбільш істотних особливостей резонансу. А саме, якщо частота зовнішньої сили буде наближатися до власної частоти осцилятора, то знаменник буде зменшуватися, а амплітуда, відповідно, буде наростати. При точному резонансі $\left(\omega-\omega_0\right)\to 0$ значенням амплітуди – буде величина:

$$a_{res}=\frac{F}{2\omega\nu}\,. \tag{18}$$

Видно, що наявність загасання (навіть маленького загасання) обмежує можливу амплітуду коливань системи. Це одне з істотних характеристик резонансу. Зауважимо, що величина (18) не найбільша з можливих її значень. Якщо ми візьмемо похідну від функції $a(\omega)$ (дивіться вираз (17)) і прирівняємо її нулю, то отримаємо значення частоти зовнішньої сили, при якій амплітуда вимушених коливань досягне максимального значення. Це така частота:

$$\omega_{\max}=\sqrt{\omega_0^2-2\nu^2}\,. \tag{18.1}$$

Максимальна амплітуда при цьому дорівнює

$$a_{\max} = \frac{F}{2\nu\sqrt{\omega_0^2 - \nu^2}}. \tag{18.2}$$

Для відшукання другого параметра – фази вимушених коливань, рівність комплексних функцій (15) перепишемо, як рівність окремо дійсної та уявної частини цього виразу:

$$\begin{cases} a\cos\varphi\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - 2a\omega\cdot\nu\sin\varphi = F \\ a\sin\varphi\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 2\omega\nu\cdot a\cos\varphi = 0 \end{cases}. \tag{19}$$

Звідси знайдемо такий вираз, яке визначає другий параметр – фазу коливань при резонансі:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\omega\nu}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}. \tag{20}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{2\omega\nu}{\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{20.1}$$

Поблизу резонансу ($\omega^2 - \omega_0^2 \to 0$):

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{2\omega\nu}{\omega^2 - \omega_0^2} = \mathrm{arctg}\frac{2\omega\nu}{\left(\omega - \omega_0\right)\left(\omega + \omega_0\right)} \approx \mathrm{arctg}\frac{\nu}{\omega - \omega_0}. \tag{20.2}$$

З (20.2) видно, що в околі резонансу фаза буде дорівнювати або плюс $\pi/2$ або мінус $\pi/2$ навпіл. Все залежить від співвідношень між частотами.

Таким чином, ми отримали асимптотичний розв’язок вихідного рівняння (10) для змінної «x». З цього розв’язку видно, що максимальна амплітуда осцилятора, на який діє резонансна зовнішня сила ($\omega \to \omega_0$), описується формулою (18.2). З цієї формули видно, що максимальне значення амплітуди є пропорційною величині зовнішньої сили і обернено пропорційна величині загасання. Тобто *наявність завжди існуючого загасання обмежує величину амплітуди осцилятора при резонансі. Це одна з перших важливих особливостей резонансу*.

Інша асимптотика $t < (1/\nu)$

Будемо вважати, що загасання маленьке, а інтервал часу, на якому ми вивчаємо динаміку, не дуже великий, так що виконується умова: $t << 1/\nu$. У цьому випадку ми можемо вихідне рівняння вимушених коливань (10) істотно спростити, поклавши в ньому $\nu = 0$. Тоді загальним розв'язком вихідного рівняння (10) буде функція

$$x = \left[A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right] + D\cos\omega t = x_{об} + x_ч\,. \tag{21}$$

Перші два доданка в квадратних дужках являють собою спільний розв'язок однорідного рівняння (10). *Третя складова* – це окремий розв'язок рівняння (10). Підставляючи розв'язок (21) в рівняння (10) і враховуючи, що загальний розв'язок однорідного рівняння (доданок в квадратних дужках) задовольняє однорідному рівнянню (10), знайдемо такий вираз для амплітуди окремого розв'язку:

$$D = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}\quad. \tag{22}$$

Скористаємося початковими умовами. Будемо для простоти вважати, що вони нульові, тобто .:

$$x_{(0)} = \dot{x}_{(0)} = 0\,. \tag{23}$$

Це відповідає розгойдуванню осцилятора зі стану спокою в положенні рівноваги. Використовуючи ці умови, отримаємо наступне співвідношення між невідомими амплітудами:

$$A + D = 0\,;\ B = 0\,. \tag{24}$$

Ці співвідношення дозволяють нам написати явний вид загального рішення (21):

$$x = D\left(\cos\omega t - \cos\omega_0 t\right) = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega_0 t\right)\ . \tag{25}$$

Дивлячись на формулу (25), видно, що при резонансі ($\omega \to \omega_0$)чисельник і знаменник звертаються в нуль. Скористаємося розкладанням першого доданка в чисельнику в ряд Тейлора (по ω в околі ω_0):

$$\omega = \omega_0 + \delta \,, \ |\delta| << 1 \,,$$

$$\cos(\omega t) = \cos(\omega_0 t + \delta t) = \cos(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t)\delta t + O\left(\delta^2 t^2\right),$$

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{(\omega - \omega_0) \cdot 2\omega_0} = -\left[\frac{1}{2\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t\right]. \qquad (26)$$

Використовуючи значення цієї межі, остаточно випишемо розв’язок рівняння (10):

$$x = \frac{F}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\left(\cos \omega t - \cos \omega_0 t\right) = -\frac{F}{2\omega} \cdot t \cdot \sin \omega t \,. \qquad (27)$$

Таким чином, на часах $t << 1/\nu$ амплітуда осцилятора, на який діє зовнішня резонансна сила, буде рости за степеневим законом. Звернемо увагу на те, що цей розв’язок справедливий тільки на маленьких часах $t < 1/\nu$. При великих часах необхідно враховувати загасання. Як ми бачили вище, врахування загасання призводить до появи експоненціального множника $\exp(-\nu t)$. Цей експонентний множник перешкоджає зростанню величини амплітуди осцилятора. Асимптотичний розв’язок при великих часах ми вже знайшли вище. Зауважимо, що під час відсутності тертя ідеалізована система «йде в рознос» і встановлення вимушених коливань при неможливо, так як амплітуда коливань необмеженої зростає. Висновок: при описі резонансу необхідно враховувати тертя, як малим би воно не було. Зростання енергії осцилятора відбувається при цьому за рахунок роботи зовнішнього джерела.

Розглянутим вище процесам резонансної взаємодії осцилятора з зовнішнім періодичним джерелом можна зіставити, наприклад, відомі в оптиці явища поглинання і вимушеного випускання світла атомами. Осцилятор можна розглядати як аналог атома, точніше, його оптичного електрона, пов'язаного в атомі квазіпружною силою і здатного здійснювати власні коливання на певній частоті. Зовнішнє джерело, що розгойдує осцилятор, можна розглядати як аналог електромагнітного поля світлової хвилі, яка взаємодіє з атомом.

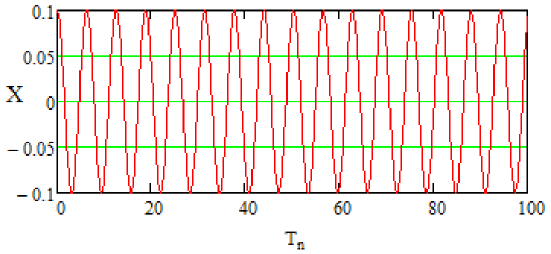	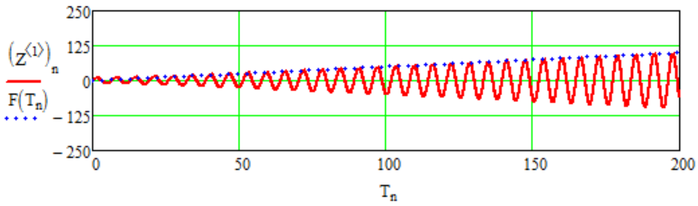
Рис.3. Вільні коливання в відсутність загасання.	Рис. 4. Вимушені коливання при резонансі. Загасання відсутнє. $\omega = \omega_0 = 1$ $F(t) = t/2$.

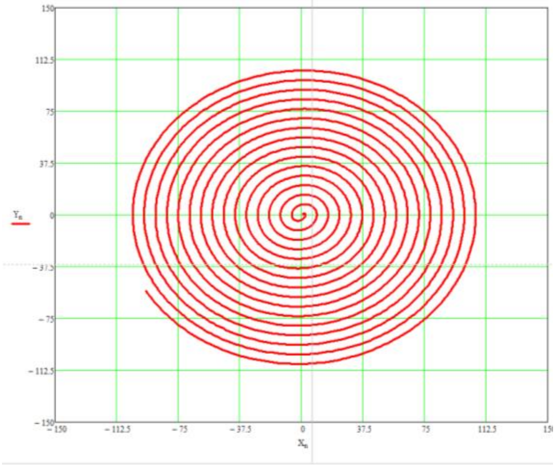

Рис. 5. Вимушені коливання при резонансі. Загасання відсутнє. Фазовий портрет системи. Спіраль з постійним кроком.

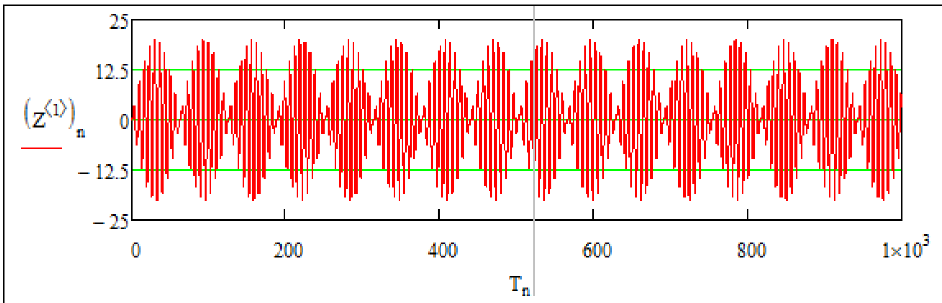

Рис. 6. За відсутності тертя внесок коливань на власній частоті не загасає, і протягом перехідного процесу відбувається складання двох близьких по частоті гармонійних коливань з незмінними амплітудами. При нульових початкових умовах їх амплітуди відносяться як ω/ω_0. В результаті виникають незгасаючі биття, тобто майже гармонійні коливання на середній частоті з амплітудою, яка повільно змінюється з часом за синусоїдальним законом.

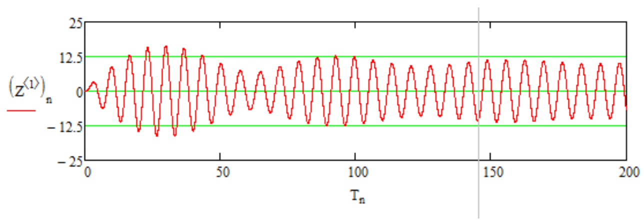

Рис. 7. Вимушені коливання.
Перехідний процес поблизу резонансу.
Близькі частоти ω і ω_0. Врахування загасання.

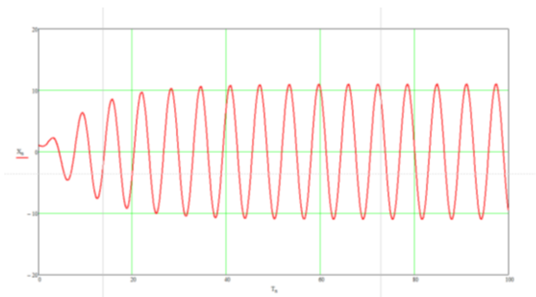

Рис. 8. Вимушені коливання. Резонанс.
Врахування загасання. Точне збіг частот
$\omega = \omega_0 = 1$. Биття відсутні.

Коментар до рис. 7: Виникають биття в результаті складання коливань з близькими частотами ω_0 і ω. Таке накладення коливань породжує модульоване коливання, тобто майже синусоїдальне коливання з середньою частотою, амплітуда якого повільно по черзі зростає і зменшується з порівняно низькою частотою биття $|\omega - \omega_0|$, рівній модулю різниці власною і змушуючою частот. При наявності втрат процеси модуляції, тобто чергування повільного зростання і убування амплітуди (перехідні биття) стають все менш вираженими в міру загасання вкладу коливань на власній частоті.

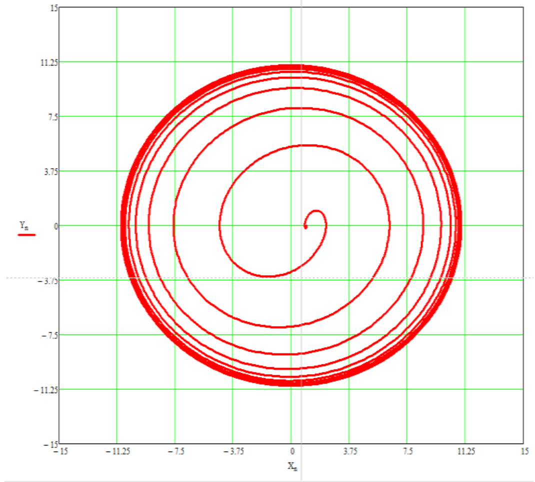

Рис. 9. Вимушені коливання при резонансі.
Врахування загасання. Фазовий портрет системи.
В системі встановлюються незгасаючі періодичні коливання. Виникає граничний цикл – аттрактор (множина, яка притягує).

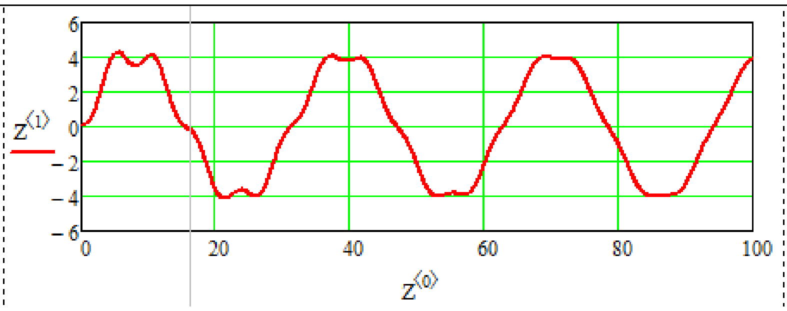

Рис. 10. Вимушені коливання. Врахування загасання. Перехідні процеси далеко від резонансу. $\omega = 0.2\omega_0$. У міру загасання власних коливань високочастотні спотворення графіка зменшуються, і, врешті-решт, повільні вимушені коливання приймають правильну синусоїдальну форму.

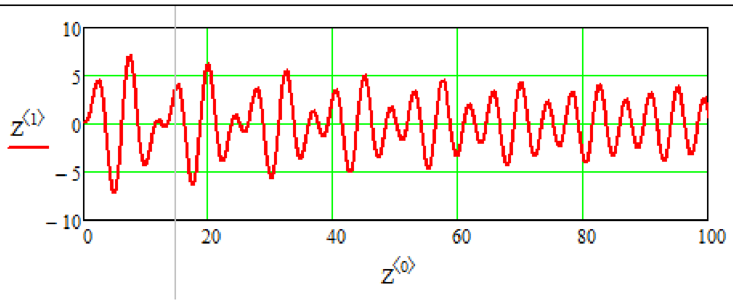

Рис. 11. Вимушені коливання. Врахування загасання. $\omega = 1.5\omega_0$. Перехідні процеси далеко від резонансу. Швидкі вимушені коливання незмінною амплітуди відбуваються близько деякого рухомого середнього положення, яке здійснює повільні затухаючі коливання на власній частоті осцилятора. Коли повільні власні коливання загасають, залишаються тільки швидкі коливання.