

Лекция 12

Квантовый эффект Зенона. Принцип юлы.

Прежде чем описывать сам квантовый эффект Зенона, обратим внимание на некоторые философско-важные исторические факты. Речь пойдет о парадоксах.

Парадокс (от греч. *paradoxos* – неожиданный) – это ситуация, когда в теории доказываются два взаимно исключающих друг друга суждения, причем каждое из этих суждений выведено убедительными с точки зрения данной теории средствами (рассуждениями). В отличие от **софизма**, умышленно ложного умозаключения с замаскированной ошибкой, парадокс, как правило, указывает на более глубокие недостатки рассматриваемой теории. Часто обнаружение парадоксов приводит к существенной перестройке всей теории в целом, привлекает внимание к новым явлениям и, конечном счете, служит стимулом дальнейших исследований. Уже в античной философии обсуждалось несколько парадоксов, известных под названием **апорий**.

Апория (от греч. *aporia* – безвыходность положения) – понятие, означающее в древнегреческой философии трудноразрешимую проблему. Апория возникает на основании того, что в *самом предмете или в понятии заложено противоречие*. Апоретическое (апорийное) суждение фиксирует *несоответствие эмпирического факта и описывающей его теории*.

Апориями принято называть рассуждения древнегреческого философа Зенона Элейского (V в. до н. э., сам он не употребляет этот термин) о невозможности движения. Наиболее известными являются такие апории: «*Дихотомия*», «*Ахиллес и черепаха*», «*Парадокс кучи*», «*О полете стрелы*». Две из них «*Дихотомия*» и апория об «*Ахиллесе и черепахе*» относятся к исчислению бесконечно малых, которые в настоящее время изучаются на первых курсах высших учебных заведений. **Дихотомия** (от [греч.](#) *dihotomia* деление надвое) – раздвоенность, последовательное деление на две части, более связанные внутри, чем между собой.

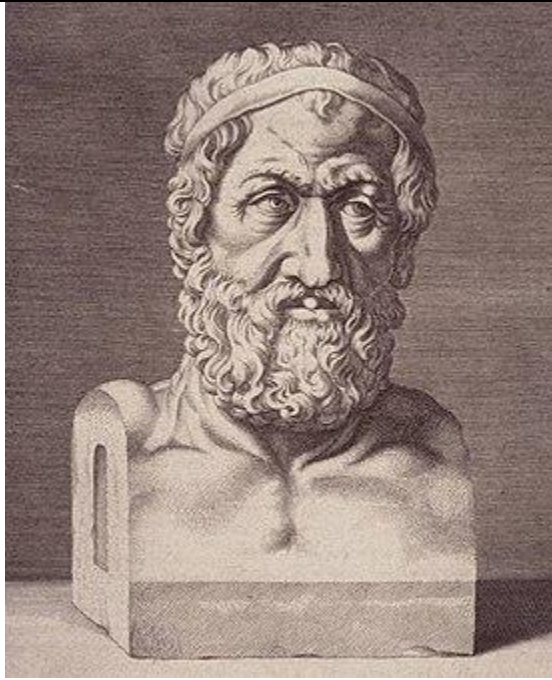
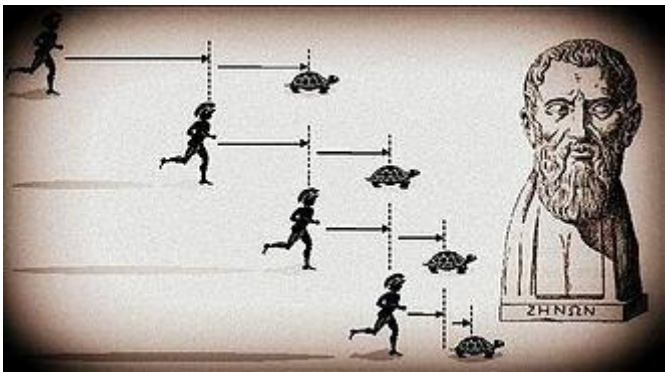
Апория «Дихотомия» звучит примерно так: «Объект должен преодолеть единичное расстояние (расстояние длиной 1). Вначале объект преодолевает половину этого пути. На это уходит некоторое время. Затем он должен преодолеть половину оставшегося пути. На следующем этапе он должен преодолеть еще половину того, что осталось. Итак, на каждом следующем этапе он должен преодолевать то, что осталось». Зенон выписывает такую последовательность:

$$(1/2) + (1/2)^2 + (1/2)^3 + (1/2)^4 + \dots \quad (1)$$

Зенон не знает, как оборвать эту последовательность. *Она бесконечна*. Как работать с этими бесконечно малыми величинами он в то время не знал. Он приходит к выводу, что те знания, которыми он владеет, не дают ответа о возможности преодолеть это расстояние *за конечное время*. Однако современный школьник может легко увидеть в последовательности (1) *геометрическую прогрессию*. Школьник может также написать сумму геометрической прогрессии:

$$S = a \sum_{n=0}^N (q)^n = \frac{a(q^{N+1} - 1)}{q - 1}. \quad (2)$$

Легко видеть, что при $a = 1/2$ (первый член последовательности) и $q = 1/2$ (знаменатель прогрессии) сумма (2) равняется 1. Аналогичное объяснение имеет и *апория «Ахилл и черепаха»*.

	
<p>Зенон Элэйский (490 – 430 гг. до н.э.) Древнегреческий философ.</p>	<p>Апория Зенона «Ахилл и черепаха».</p>

В ней утверждается, что быстроногий Ахилл никогда не догонит черепаху, так как за то время, пока бегун достигает того места, где находится черепаха в момент «старта», черепаха успеет продвинуться на какое-то расстояние вперед и т.д.

Эти апории основываются на двух постулатах: во-первых, пространство континуально; во-вторых, движение есть процесс перехода тела из одной точки пространства в другую, соседнюю. Однако эти два постулата несовместимы. В континуальном пространстве для данной точки не существует непосредственно следующей, ведь между любыми двумя сколь угодно близкими точками всегда расположено бесконечное число точек. Поэтому движение, если его понимать как переход из одной точки пространства к следующей, по мнению Зенона невозможно в принципе.

Апория, известная также под названием «*Парадокс кучи*» состоит в следующем. Одна песчинка, очевидно, не образует кучи песка. Если n песчинок не могут образовать кучи песка, то и после прибавления еще одной песчинки они по-прежнему не могут образовать кучи. Следовательно, никакое число песчинок не образует кучи.

В современной терминологии к этому парадоксу можно сделать следующий комментарий: метод полной математической индукции нельзя применять, как показывает парадокс, к объемно неопределенным понятиям, каковым является «куча песчинок».

Четвертая апория касается *полета стрелы*, за которой ведется наблюдение. По представлениям философов того времени такое наблюдение оставляет стрелу неподвижной.

Рассмотрим апорию «Летящая стрела».

В литературе можно найти такую формулировку этой апории: *Летящая стрела неподвижна, так как в каждый момент времени она покоится, а поскольку она покоится в каждый момент времени, то она покоится всегда.*

Эта формулировка требует пояснений. В те времена, когда жил Зенон, считалось, что для описания окружающего нас мира достаточно воспользоваться понятиями *пространства* и *времени*. Относительно *процессов движения* возникали проблемы. Именно эта проблема и была сформулирована в этой апории. Действительно, если я зафиксирую стрелу в каком-то месте пространства, то нет причины, почему она должна перемещаться. Отметим, что в настоящее время для нас является очевидным, что нужно *пользоваться не только пространством и временем, а фазовым пространством*, в котором наряду с пространством и временем включается еще одно измерение – *вектор скорости*. Таким образом, в настоящее время мы описываем окружающий нас мир с помощью фазового пространства. В этом смысле рассматриваемая апория Зенона имеет только историческое и философское значение. Она показывает, как меняется наше представление об окружающем мире. Отметим, что во второй половине прошлого

столетия велась дискуссия относительно того, что в фазовое пространство не обходимо добавить дополнительный вектор направления – вектор ускорения. Однако ускорение, как мы знаем, появляется только при наличии силы (первый закон Ньютона).

Именно эта апория легла в основу квантового эффекта Зенона, который можно сформулировать следующим образом: *если мы наблюдаем за возбужденной квантовой системой, то она остается возбужденной или: квантовая система, которая находится под наблюдением, не меняет своего состояния.*

Квантовый эффект Зенона

<p>Суть этого эффекта состоит в том, что наблюдение за нестабильной частицей (то есть простая проверка – распалась частица или нет) вызывает замедление ее распада. С классической точки зрения этот результат кажется невозможным и парадоксальным. В предельно жесткой формулировке утверждается, что непрерывное наблюдение за частицей вообще не даст ей распасться.</p>	<p>Эффект предсказан в 1958 г. Леонидом Александровичем Халфиным. Физик-теоретик. Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН (1932 – 1998)</p>
--	---

Имеется две физические причины, которые определяют квантовый эффект Зенона:

1. *Не экспоненциальный закон распада.*
2. Коллапс волновой функции (процесс наблюдения).

Поясним содержание этих процессов. Для нас является *привычным экспоненциальный закон* распада неустойчивых систем (например, радиоактивный распад атомов ^{235}U , ^{210}Bi , ^{210}Tl). Действительно, если мы имеем $N(t)$ неустойчивых элементов, то в течение малого интервала времени некоторое количество этих элементов (атомов) распадется

$$\Delta N = -\gamma N \Delta t, \quad (3)$$

где γ – некоторый характерный коэффициент, который зависит от свойств возбужденных элементов. Этот коэффициент можно назвать обратным временем полураспада возбужденной системы. Используя это соотношение, легко получить, привычный для нас экспоненциальный закон распада:

$$\frac{dN}{N} = -\gamma dt; \ln N - \ln N_0 = -\gamma(t - t_0), \quad (4)$$

$$N = N_0 \exp[-\gamma(t - t_0)]. \quad (5)$$

Если интервал времени очень мал $\gamma\Delta t \ll 1$, то формулу (5) можно представить в виде разложения в ряд по этому малому параметру


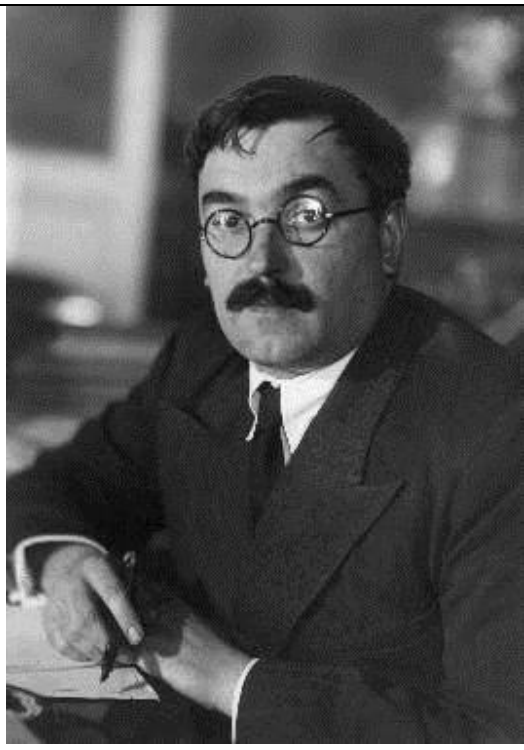
$$N = N_0 (1 - \gamma\Delta t \dots). \quad (6)$$

Аналогичный вид имеет вероятность того, что **квантовая система останется в своем исходном состоянии**:

$$w = \exp(-G \cdot t); \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial t} = -G. \quad (7)$$

Таким образом, экспоненциальный закон распада, в самой своей природе проявления, содержит линейную зависимость от времени числа распавшихся атомов при малых интервалах времени Δt .

В своей пионерской работе Крылов и Фок (Крылов Н.С., Фок В.А. О двух основных толкованиях соотношения неопределенности для энергии и времени // ЖЭТФ. – 1947. – Т.17. – Вып. 2. – С. 93–107) показали, что *в квантовой механике ситуация существенно отличается – вероятность количества распавшихся атомов на малых интервалах времени пропорциональна не первой степени малого интервала времени, а пропорциональна квадрату этого малого интервала времени* $\Delta N \sim (\Delta t)^2$. (В опытах исследователей из Техасского университета изучался вылет атомов натрия из лазерной ловушки за счет квантового туннелирования. Как оказалось, по меньшей мере на интервалах порядка 10^{-6} с процесс имеет неэкспоненциальный характер. *Nature* 587, Issue 7834, 19 November 2020).

	
<p>Николай Сергеевич Крылов (1917 – 1947 гг.) Физик-теоретик.</p>	<p>Владимир Александрович Фок (1898 – 1974 гг.) Физик-теоретик.</p>

Это главный элемент, из которого состоит квантовый эффект Зенона. Докажем его.

Состояние квантовой системы, как известно, описывается волновой функцией $\psi(\vec{r}, t)$. Вероятность любого квантового состояния описывается квадратом модуля волновой функции $|\psi|^2$. Сама волновая функция подчиняется уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_0 \psi + \hat{V}(t) \psi. \quad (8)$$

Здесь \hat{H}_0 – оператор Гамильтона невозмущенной системы,

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta, \quad (9)$$

$\hbar \approx 6.626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ – оператор Лапласа, $\hat{V}(t)$ – возмущение.

Будем считать, что возмущение мало:

$$\langle \hat{V}(t) \rangle \sim \varepsilon \langle \hat{H}_0 \rangle, \quad (10)$$

где $\varepsilon \ll 1$, скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по промежутку времени значительно большему, чем характерное время изменения возмущения.

$$\psi(t) = \sum_n A_n(t) \psi_n(t); \quad \psi_n(t) = \varphi_n \exp(i\omega_n t) \quad (11)$$

где

$$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}, \quad (12)$$

где E_n – энергия n -го состояния частицы, ω_n – частота n -го состояния частицы. Для невозмущенной системы уравнение Шредингера имеет вид

$$\hat{H}_0 \varphi_n = E_n \varphi_n. \quad (13)$$

Подставим (11) в возмущенное уравнение Шредингера (8) и учтем, что функции $\psi_n(t)$ удовлетворяют уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \hat{H}_0 \psi_n. \quad (14)$$

Далее, воспользовавшись условием нормировки волновых функций

$$\int \psi_m \psi_n^* dq = \delta_{m,n}, \quad (15)$$

где dq – элементарный фазовый объем, $\delta_{m,n}$ – символ Кронекера,

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (16)$$

В результате, получим систему связанных уравнений для нахождения комплексных амплитуд A_n :

$$i\hbar \dot{A}_n = \sum_m V_{nm}(t) A_m, \quad (17)$$

где $V_{nm}(t)$ – матричные элементы возмущения,

$$V_{nm}(t) = \int \varphi_m^* \hat{V}(t) \varphi_n \exp\left[it \frac{E_n - E_m}{\hbar} \right] dq. \quad (18)$$

Будем рассматривать двухуровневую квантовую систему (см. рис. 1). Кроме того, будем рассматривать простейший случай, когда возмущением является гармоническая функция:

$$V(t) = V_0 \exp(i\omega_0 t). \quad (19)$$

Частота этой функции совпадает с разностью энергий двухуровневой квантовой системы ($\hbar\omega_0 = E_1 - E_0$). В этом случае для отыскания коэффициентов A_n можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} i\hbar\dot{A}_0 = V_{01}A_1, \\ i\hbar\dot{A}_1 = V_{10}A_0. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь V_{ik} – матричные элементы возмущения. В большинстве случаев можно считать, что эти элементы равны друг другу:

$$V_{01} = V_{10} \equiv V. \quad (21)$$

Из системы (20) видно, что уравнение для каждого из коэффициентов представляет собой просто уравнение линейного маятника:

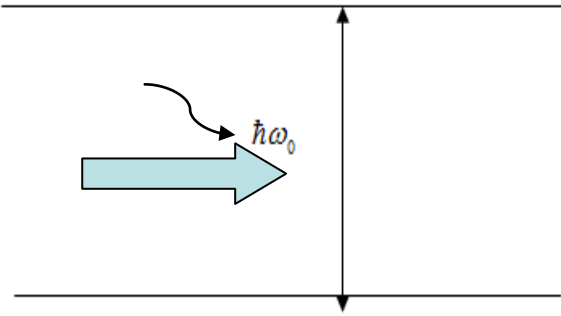
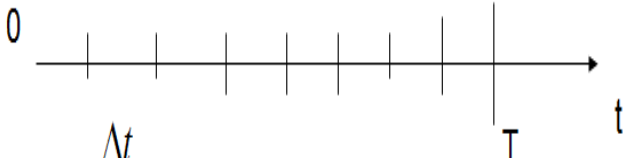
$$\ddot{A}_1 + \Omega^2 A_1 = 0, \quad (22)$$

где Ω – частота Раби (частота флуктуаций населенностей двух атомных уровней, участвующих в атомном переходе в данном световом поле),

$$\Omega = \Omega_R = \frac{V}{\hbar} = \frac{2\pi}{T_R}, \quad (23)$$

$T_R = T$ – период частоты Раби. Если рассматриваемая двухуровневая квантовая система в начальный момент времени находится на верхнем возбужденном уровне, то решениями системы (20) будут функции:

$$A_1 = \cos(\Omega \cdot t); \quad A_0 = \sin(\Omega \cdot t). \quad (24)$$

	
<p>Рис.1. Двухуровневая система.</p>	<p>Рис.2. Разбиение периода Раби на N малых временных интервалов.</p>

Если интервалы времени малы ($\Omega\Delta t \ll 1$), то выражение для A_1 приобретет вид:

$$A_1 = 1 - \frac{(\Omega\Delta t)^2}{2}. \quad (25)$$

В этом случае вероятность того, что квантовая система под действием выбранного гармонического возмущения *осталась в своем исходном возбужденном* состоянии, будет иметь вид:

$$w_1(t) = |\psi_1|^2 = |A_1|^2 \approx 1 - (\Omega\Delta t)^2. \quad (26)$$

или

$$w_1 = \left[1 - (\Omega_R \cdot \Delta t)^2 \right] = \left[1 - \left(\frac{\Delta t \cdot 2\pi}{T_R} \right)^2 \right]. \quad (27)$$

Это означает, что в предельном случае нестабильная частица в условиях частого наблюдения $\Delta t \ll T$ за ней никогда не может распасться.

Измерения состояний квантовых систем.

Разобьем временной интервал, который равен периоду частоты Раби T , на N малых временных интервалов $\Delta t = T/N$ (см. рис. 2). По истечении первого интервала времени Δt проведем измерения состояния изучаемой квантовой системы. Вероятность того факта, что она останется в своем исходном возбужденном состоянии будет определяться формулой (26). По истечении второго интервала времени Δt снова проведем измерения нашей системы. В квантовой механике все переходы считаются случайными переходами. Более того, все они независимые переходы, поэтому *вероятность найти изучаемую систему при втором измерении будет просто равна произведению вероятности при первом измерении и вероятности при втором измерении*. Процесс измерения будем повторять. В результате получим следующую серию вероятностей:

$$w_2 = w_1 w_1 = w_1^2 ; w_3 = w_1^3 \dots w_N = \prod_{i=1}^N w_i = \left[1 - (\delta)^2\right]^N. \quad (28)$$

Здесь $\delta = \Omega \Delta t \ll 1$. Легко видеть, что при большом числе измерений ($N \rightarrow \infty$) **вероятность увидеть систему в исходном невозмущенном состоянии будет стремиться к единице** ($w_N \rightarrow 1$). Возможно, более наглядным этот предел будет после процедуры логарифмирования:

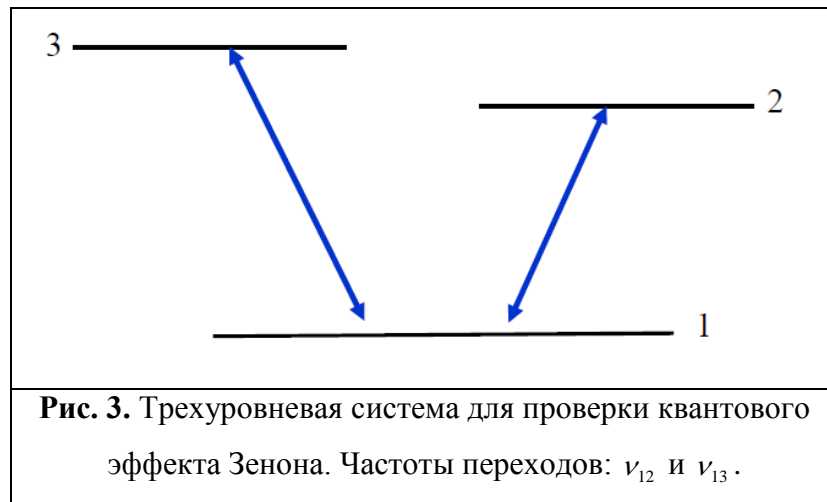
$$\ln w_N = N \cdot \ln(1 - \delta^2) \approx -N\delta^2 \text{ при } \delta^2 \ll 1, \quad (29)$$

$$w_N = \exp\left[-N(\Omega\Delta t)^2\right] = \exp\left[-N\frac{(2\pi\Delta t)^2}{T_R^2}\right] = \exp\left[-\frac{N \cdot (2\pi)^2}{N^2}\right] \approx e^{-1/N} \rightarrow 1, \quad (30)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} w_N \rightarrow 1. \quad (31)$$

Следует заметить, что в наших рассуждениях о процедуре измерения предполагалось наличие **коллáпса волновых функций** (от. латинского *collapsus* – упавший. Процесс разрушения какой-либо структуры). Несколько слов о коллапсе волновых функций. Часто

говорят, что состояние квантовой системы находится в суперпозиции. Это означает, что имеется большое количество разнообразных состояний (иногда бесконечное число), в которых может находиться рассматриваемая квантовая система. Каждая из этих состояний может реализоваться с некоторой вероятностью. **Процедура измерения** квантовой системы означает, что эта процедура определяет именно то состояние квантовой системы, в котором она в действительности находится. В этом случае говорят о том, что **произошел коллапс волновой функции именно к данному состоянию**. Все остальные состояния уже имеют вероятность равную нулю.



Надо сказать, что квантовый эффект Зенона нестабильных состояний (атомов, ядер, элементарных частиц) экспериментально пока не обнаружен. Однако этот эффект для вероятности перехода между атомными уровнями был экспериментально наблюден в конце 1989 г. группой физиков из США (*Science*, November 1989, V. 246. P. 888).

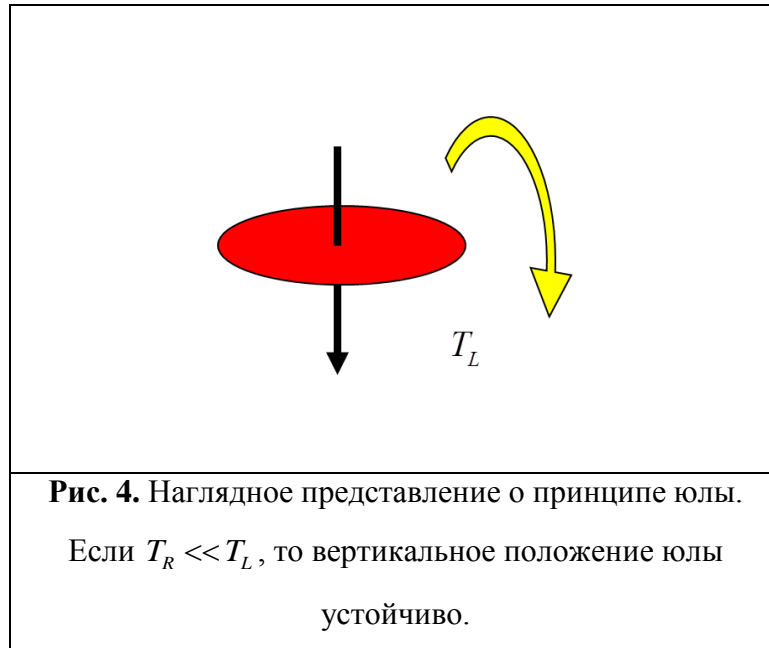
Идея эксперимента состоит в следующем. Рассмотрим трехуровневую атомную систему. Время жизни уровня 3 очень мало, так что атом, возбужденный из основного состояния (уровень 1) на уровень 3, практически сразу же возвращается на уровень 1, излучая при этом фотоны с частотой ν_{13} . Измеряя число фотонов с частотой из обратного перехода $3 \rightarrow 1$, мы измеряем тем самым число атомов, находящихся на основном уровне 1. Описываемый эксперимент состоит в следующем. Лазером с частотой фотонов ν_{12} в течение интервала времени T облучают атомы, находившиеся в начальном состоянии 1, переводя их в состояние 2. Одновременно лазером с частотой фотонов ν_{13} через малые интервалы времени $\Delta t \ll T$ облучают те же атомы и, измеряя число фотонов с частотой ν_{13} от обратного перехода $3 \rightarrow 1$, измеряют тем самым число атомов в начальном состоянии 1 в моменты времени $t_n = n\Delta t$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Экспериментально наблюдаемый квантовый эффект Зенона состоит в том, что чем через меньший интервал времени Δt

производят измерение числа атомов в начальном состоянии 1, тем с меньшей вероятностью они в течение интервала времени T переходят в возбужденное состояние 2(!).

Принцип юлы.

Принцип юлы оказывается очень простым и удобным инструментом, который позволяет определить условия, которые необходимо создавать, чтобы подавить нежелательные неустойчивости изучаемой системы. Более того, этот принцип очень нагляден, и дает не только качественную картину процесса подавления неустойчивости, но может подсказать и количественные характеристики тех параметров, которые нужны для подавления нежелательной неустойчивости. Сформулируем этот принцип:

1. Вертикальное положение юлы является неустойчивым, если юла не вращается. Юла падает (см. рис. 4).
2. Падение происходит в течение некоторого времени. Это время можно назвать временем жизни юлы T_L .
3. Если юла начинает вращаться и период ее вращения T_R будет существенно меньшим времени жизни юлы: $T_R \ll T_L$, то вертикальное положение юлы будет устойчивым



Выскажем вначале кратко некоторые общие соображения, которые позволяют понять механизм стабилизации, который мы называем механизмом стабилизации юлы. В подавляющем большинстве случаев неустойчивые состояния динамических систем локально характеризуются особыми точками типа "седло". Неустойчивые узлы и фокусы встречаются значительно реже.

Поясним на примере неустойчивой точки типа "седло", как такая особая точка может быть трансформирована в эллиптическую точку (в точку типа "центр"). Фазовые портреты окрестности седловой точки представлены на рис. 5 и 6. Уравнения на фазовой плоскости, которые описывают динамику фазовых траекторий в окрестности седловой точки, имеют вид:

$$\dot{x}_0 = \gamma x_1; \quad \dot{x}_1 = -\gamma x_0. \quad (32)$$

<p>Рис. 5. Фазовый портрет в окрестности особой точки типа "седло". Трехмерный случай.</p>	<p>Рис. 6. Фазовый портрет в окрестности особой точки типа "седло". Двумерный случай.</p>	<p>Рис. 7. Фазовый портрет в окрестности особой точки типа "центр".</p>

В большинстве реальных случаев каждая из зависимых переменных уравнений (32) представляет собой какую-то характеристику собственной степени свободы изучаемой динамической системы. Например, это могут быть комплексные амплитуды нелинейно-взаимодействующих волн. Поэтому *в этой работе будем считать*, что *каждое такое уравнение первого порядка описывает одну из степеней свободы изучаемых систем*. Пусть, теперь перед нами стоит задача, чтобы окрестность седловой особой точки преобразовать в окрестность, которая соответствует устойчивой особой точке, например, эллиптической точке (рис. 7). Для этого можно поступить таким образом. *Введем в нашу изучаемую систему дополнительную степень свободы, которая связана с одной из степеней свободы изучаемой неустойчивой системы*. Простейшая модель, которая будет описывать динамику системы в окрестности седловой точки при такой модификации системы, будет отличаться от уравнения (32) только *добавлением еще одного уравнения*:

$$\dot{x}_0 = \gamma x_1 + \delta x_2; \quad \dot{x}_1 = \gamma x_0; \quad \dot{x}_2 = -\delta x_0. \quad (33)$$

Здесь в отличие от (32) мы ввели *дополнительную степень свободы, которой соответствует зависимая переменная x_2* . Причем, эта новая степень свободы связана с одной из степеней свободы исходной системы коэффициентом δ . Система уравнения (33) эквивалентна уравнению линейного маятника:

$$\ddot{x}_0 + (\delta^2 - \gamma^2)x_0 = 0. \quad (34)$$

Из уравнения (34) сразу видно, что как только коэффициент, описывающий связь между степенями свободы, будет бóльшим, чем инкремент неустойчивости ($\delta > \gamma$), *неустойчивая седловая точка превратится в эллиптическую точку*. Фазовое пространство, представленное на рис. 6, станет фазовым пространством, представленном на рис. 7.

Этот простой алгоритм перевода неустойчивой седловой точки в эллиптическую точку хорошо характеризует принцип юлы. Действительно, если мы не вводили дополнительную степень свободы, то наша система была неустойчивой (юла падает). Причем, время развития неустойчивости ($T \sim 1/\gamma$) можно отождествить со временем падения юлы. Включение *дополнительной степени свободы*, которая

стабилизирует нашу систему, аналогично *наличию вращения юлы*. Более того, в образе юлы имеются не только качественные аналогии, но и количественные.

Действительно, **чтобы вертикальное положение юлы было устойчивым, необходимо, чтобы период вращения был меньшим времени падения**. В наших моделях (см. уравнение (34)) для того, чтобы система стала устойчивой, нам также необходимо, чтобы коэффициент связи был бóльшим инкремента неустойчивости $\delta > \gamma$. Более того, если инкремент неустойчивости равен нулю, то система уравнений (33) или (34) описывает просто колебания с частотой $\delta = 2\pi / T_{rot}$. **Таким образом, имеется качественная и количественная аналогия рассматриваемого механизма стабилизации с механизмом стабилизации вертикального положения юлы.**

Использование принципа юлы для стабилизации квантовых систем.

Выше при рассмотрении эффекта Зенона (формулы (8)-(20)) мы ограничились гармоническим возмущением. Для иллюстрации использования принципа юлы удобно рассматривать случай *бигармонического возмущения*.

Рассмотрим наиболее простой случай бигармонического возмущения, который может быть описан таким выражением:

$$\hat{V}(t) = \hat{U}_0 \cdot \exp(i\omega_0 t) + \hat{U}_1 \cdot \exp(i\omega_1 t). \quad (35)$$

Тогда матричные элементы взаимодействия приобретут следующее выражение:

$$U_{nm}^{(k)} = V_{nm}^{(k)} \exp \left\{ it \left[\frac{E_n - E_m}{\hbar} + \Omega \right] \right\}; \quad V_{nm}^{(k)} = \int \varphi_n^* \hat{U}_k \varphi_m dq; \quad \Omega = \{\omega_0, \omega_1\}. \quad (39)$$

Рассмотрим динамику трехуровневой системы ($|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$). Будем считать, что частота внешнего возмущения и собственные значения энергий этих уровней удовлетворяют соотношениям:

$$m = 1; n = 0; \hbar\omega_0 = E_1 - E_0, \quad (40)$$

$$m = 2; n = 0; \hbar(\omega_0 + \omega_1) = E_2 - E_0; \hbar\omega_1 = E_2 - E_1. \quad (41)$$

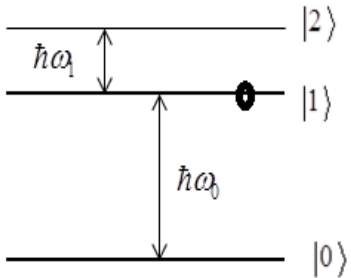
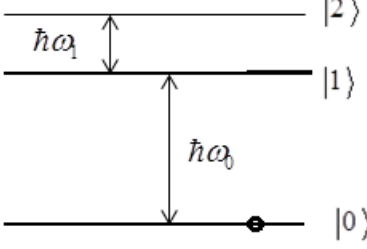
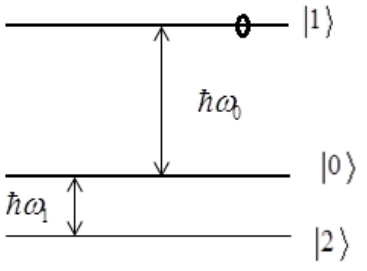
Соотношения (40) и (41) указывают на тот факт, что частота ω_0 внешнего возмущения является резонансной для переходов между нулевым и первым уровнями, а частота ω_1 является резонансной для переходов между первым и вторым уровнями. Используя эти соотношения в системе (17), можно ограничиться тремя уравнениями:

$$\begin{cases} i\dot{A} = A_1, \\ i\dot{A}_1 = A_0 + \mu A_2, \\ \dot{A}_2 = \mu A_1. \end{cases} \quad (42)$$

Систему уравнений (42) представим в несколько другом виде:

$$\begin{cases} \ddot{A}_1 + \Omega^2 A_1 = 0, \\ i\dot{A}_0 = A_1, \\ i\dot{A}_2 = \mu A_1. \end{cases} \quad (43)$$

где $\Omega^2 = (1 + \mu^2)$. Схема энергетических уровней при этом представлена на рис. 8. В (43) для простоты и удобства положили: $V_{12} = V_{21}$; $V_{10} = V_{01}$; $\dot{A}_i = dA_i / d\tau$, где $\tau = V_{10}t / \hbar$. Кроме того, введен параметр $\mu \equiv V_{12} / V_{10}$.

		
<p>Рис. 8а. Схема энергетических уровней.</p> <p>В начальный момент времени ($\tau = 0$) система находилась на возбужденном уровне $1\rangle$</p>	<p>Рис. 8б. Схема энергетических уровней.</p> <p>При $\tau = 0$ система находилась на стационарном, невозбужденном уровне $0\rangle$</p>	<p>Рис. 8с. Схема энергетических уровней.</p> <p>При $\tau = 0$ система находилась на возбужденном уровне $1\rangle$</p>

Пусть, в начальный момент времени ($t = 0$) рассматриваемая квантовая система находится на первом, возбужденном уровне. Тогда, как легко видеть, решениями системы (43) будут функции:

$$A_0 = \frac{1}{i\Omega} \sin(\Omega t); \quad A_1 = \cos(\Omega t); \quad A_2 = -i \sin(\Omega t). \quad (44)$$

Обратим внимание, что система уравнений (43) третьего порядка, а система (44) – четвертого. В результате, если мы будем решать задачу с начальными условиями

$$|A_0(0)|^2 = 1, |A_1(0)| = |A_2(0)| = 0, \quad (45)$$

т.е. в начальный момент времени система находится в основном невозбужденном уровне, а быструю динамику совершают те уровни, на которые система из исходного уровня должна перейти под влиянием внешнего ВЧ-возмущения. В этом случае запишем решение системы (43) в виде:

$$A_1 = a \exp(i\Omega t) + b \exp(-i\Omega t). \quad (46)$$

Учтем начальные условия для A_1 : $A_1(0) = 0$. Тогда решениями системы уравнений (43) будут функции:

$$A_0 = -\frac{a}{\Omega} [\exp(i\Omega t) + \exp(-i\Omega t)] + C_0, \quad (47)$$

$$A_1 = a [\exp(i\Omega t) - \exp(-i\Omega t)], \quad (48)$$

$$A_2 = -\frac{a\mu}{\Omega} [\exp(i\Omega t) + \exp(-i\Omega t)] + C_2. \quad (49)$$

У нас оказалось три константы a, C_0, C_2 и только два не использованных начальных условия – для A_0 и A_2 . Такое положение возникло из-за того, что второе уравнение первого порядка в системе (43) заменили первым уравнением системы (44), которое является уравнением второго порядка. Поэтому кроме начальных условий необходимо, чтобы полученные решения удовлетворяли еще и второму уравнению системы (42). Из начальных условий получим:

$$C_0 = 1 + \frac{2a}{\Omega}; \quad C_2 = \frac{2a\mu}{\Omega}. \quad (50)$$

Потребуем, чтобы полученные решения удовлетворяли уравнению

$$i\dot{A}_1 = A_0 + \mu A_2. \quad (51)$$

В результате, находим значение постоянной a :

$$a = -\frac{1}{2\Omega}. \quad (52)$$

Окончательно выражения для амплитуд волновых функций приобретают вид:

$$\begin{cases} A_0 = 1 - \frac{1}{\Omega^2} [1 - \cos(\Omega t)], \\ A_1 = -\frac{i}{\Omega} \sin(\Omega t), \\ A_2 = -\frac{\mu}{\Omega^2} [1 - \cos(\Omega t)]. \end{cases} \quad (53)$$

Из вида решений (53) следует важный и несколько неожиданный результат. Он заключается в том, что если параметр μ будет большим, то, несмотря на тот факт, что внешнее стабилизирующее воздействие не оказывает влияния на основное состояние системы, однако это состояние оказывается устойчивым. *Таким образом, оказывается возможным стабилизировать неустойчивые состояния квантовых систем не только, действуя на те состояния, в которых находится квантовая система, а, действуя только на те состояния (делая их динамическими), в которые система должна перейти.*