Ст 1

Екзаменаційна робота
з курсу
„Вища математика,
теорія ймовірності"
студентки ФКН групи КС-21
Дібцевої Анни Миколаївни
Білет №7

1. Обчислення невласних інтегралів за допомогою лишків, приклади.

Если $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z \geq 0$), за исключением точек a_k ($k=\overline{1,n}$), $\operatorname{Im} a_k > 0$, и $|f(z)| \leq M/|z|^{\alpha}$ с $\alpha > 1$, то

$$\exists \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} f(z)$$

▲ По теореме о вычетах: $\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} f(z)$

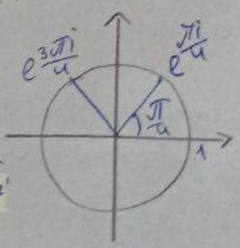
Оцениваем второй интеграл: $\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \int_{C_R} |f(z)|\,|dz| \leq$

$$\leq \frac{M}{R^{\alpha}} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R^{\alpha-1}} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

Поэтому $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}_{a_k} f(z)$ ▼

Пример: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ $\qquad f(z) = \frac{1}{1+z^4}$

$= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{1}{1+z^4} + \operatorname{Res}_{e^{\frac{3\pi i}{4}}} \frac{1}{1+z^4} \right) \circleddash$ $\qquad z^4 = -1$



$\operatorname{Res}_{e^{\frac{\pi i}{4}} = z_1} \frac{1}{1+z^4} = \lim_{z \to z_1} \frac{z - e^{\frac{\pi i}{4}}}{z^4+1} =$ по пр. Лопиталя

$Z_k = e^{\frac{\pi + 2k\pi}{4} i}$

$= \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}} = \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\operatorname{Res}_{e^{\frac{3\pi i}{4}}} \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

$\circleddash\ 2\pi i \left(-\frac{i\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Если $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости при $\operatorname{Im} z>0$, кроме a_k $(k=\overline{1,n})$ $\operatorname{Im} a_k>0$

и $f(z) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{a_k}\left(f(z)\, e^{iz}\right)$

□ $\int_{-R}^{R} e^{ix} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z) e^{iz}\,dz = 2\pi i \sum_{a_k} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{iz}\right)$

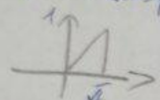
Оценивали второй интеграл:

$$\left|\int_{C_R} f(z) e^{iz}\,dz\right| \le \int_{C_R} \left|f(z)\right| e^{-R\sin\varphi} \left| R\,dz \right| < \varepsilon \int_0^{\pi} e^{-R\sin\varphi} R\,d\varphi$$

$$\le 2\varepsilon \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\varphi R}{\pi}} R\,d\varphi$$

$$\le 2\varepsilon \frac{\pi(1-e^{-R})}{2} < \pi\varepsilon$$

$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$



$\sin\varphi > \frac{2\varphi}{\pi}$

$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$

Пример:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}\,dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}\,dx}{x^2+a^2} = \operatorname{Re}\, 2\pi i \operatorname{Res}_{ai} \frac{e^{iz\lambda}}{z^2+a^2} \ominus$$

$z = \pm ia$

$$\operatorname{Res}_{ai} \frac{e^{iz\lambda}}{z^2+a^2} = \lim_{z\to ai} \frac{e^{iz\lambda}\cancel{(z-ai)}}{(z+ai)\cancel{(z-ai)}} = \frac{e^{-a\lambda}}{2ai}$$

$$\ominus\ 2\pi i \frac{e^{-a\lambda}}{2ai} = \frac{\pi e^{-a\lambda}}{a}$$

2. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами. Загальний розв'язок лінійних однорідних систем (ЛОС) вид частнового розв'язку.

Имеем линейную однородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$y' = Ay$$

Решение ищем в виде $y = e^{\lambda t}\cdot v$, где v — постоянный вектор. Поставляем функцию в систему и получаем:

$\lambda\cdot e^{\lambda t}\cdot v = e^{\lambda t} A v$

$(A-\lambda E)v = 0$

Чтобы полученная линейная однородная система имела ненулевое решение, необходимо, чтобы $\det(A-\lambda E)=0$.

Получим характеристическое уравнение для системы, корни кот. есть собственные значения матрицы A. Каждому значению λ_k соотв. собственный вектор v_k и решение линейной однородной системы $y_k(t)=e^{\lambda_k t}v_k$.

Если $\lambda_k \in \mathbb{R}$, то решение будет действительным. Если λ_k - комплексное, то решение - комплексное. Тогда, взяв вещественную и мнимую часть этого решения, получаем действительное решение. Если λ_k - кратный корень характеристического уравнения, а собственных векторов меньше, чем кратность корня, то решение ищем в вид $y(t)=e^{\lambda t}P(t)$, где степень полиномиального вектора $P(t)$ равна разности кратности корня и числа линейно независимых векторов.

Например:

$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ Собственное значения данной матрицы $\lambda_1=2$ и $\lambda_{2,3}=1$.

Ищем собственный вектор v_1, соответствующий значению $\lambda_1=2$ из системы:

$(A-2E)v_1=0$; $\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \alpha=0, \beta=1, \gamma=1$

Тогда собственный вектор $\bar{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Далее ищем собственный вектор, отвечающий $\lambda_2=1$ по системе $\begin{cases}v_1-v_2+v_3=0\\ v_3=0\\ -v_1+v_2=0\end{cases}$; откуда $\begin{cases}v_{1,2}=1;\\ v_3=0;\end{cases}$

Т.е. имеется только 1 собственный вектор, а u - постоянный вектор. В координатном виде решение имеет вид:

$y_1=e^t(t+u_1)$;

$y_2=e^t(t+u_2)$;

$y_3=e^t u_3$;

Эти функции подставляем в линейную однородную систему.

$$\begin{cases} e^t(t+u_1+1)=2e^t(t+u_1)-e^t(t+u_2)+e^t u_3 \\ e^t(t+u_2+1)=e^t(t+u_2)+e^t u_3 \\ e^t u_3=-e^t(t+u_1)+e^t(t+u_2)+e^t u_3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} u_1-u_2+u_3=1 \\ u_3=1 \\ u_2-u_1=0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} u_{1,2}=1 \\ u_3=1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y_1(t)=e^t(t+1) \\ y_2(t)=e^t(t+1) \\ y_3(t)=e^t \end{cases}$$

Общее решение данной линейной однородной системы тогда имеет такой вид:

$$y(t)=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+C_3e^t\begin{pmatrix}t+1\\t+1\\1\end{pmatrix}$$

3. Звести диференціальне рівняння до нормальної системи $y'+ty''+y\cdot y'''=1$.

$$y'+ty''+y\cdot y'''=1$$

Приводим ур-е к каноническому виду:

$$yy'''=1-y'-ty''$$

$$y'''=\frac{1-y'-ty''}{y}$$

Делаем замену

$y_1=y$

$y_2=y'$

$y_3=y''$

Тогда нормальная система: $\begin{cases} y''=y_3 \\ y_2'=\dfrac{1-y_2-ty_3}{y_1} \end{cases}$