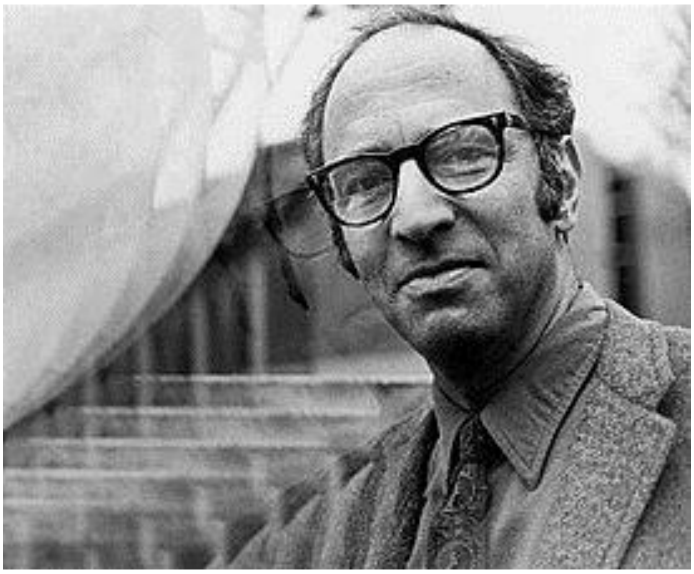
Лекція 9.

Критерії динамічного ха́оса.

Зміст:

1. Парадигми динамічного ха́оса.
2. Критерій Ляпунова. Виникнення режиму з динамічним ха́осом.
3. Критерій Чирикова. Виникнення режиму з динамічним ха́осом.

Нагадаємо, що означає слово парадигма. ***Парадигма*** (від грец. *paradeigma* – приклад, зразок) – сукупність теоретичних і методологічних передумов, що визначають конкретне наукове дослідження, яке втілюється в науковій практиці на даному етапі. Парадигма є моделлю, зразком для вирішення дослідницьких завдань. Це поняття було введено професором фізики Каліфорнійського університету в Берклі *Томасом Семюелом Куном*.



Томас Семюел Кун

(Thomas Samuel Kuhn)

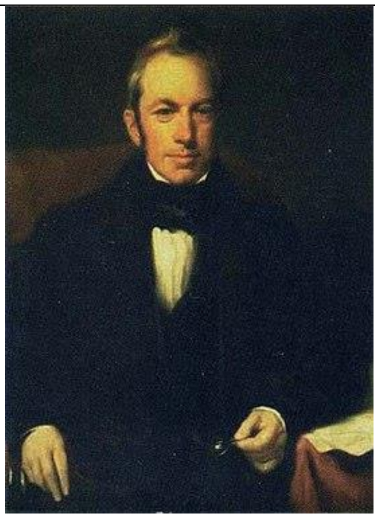
Американський фізик.

Досліджував проблеми історії науки

(1922 – 1996 рр.)

Нагадаємо, що означає слово ха́ос. **Ха́ос** (грец. chaos), в грецькій міфології безмежна первісна маса, з якої утворилося згодом все існуюче.

Для того, щоб зрозуміти фізичну суть поняття хаос, уявімо собі рух броунівський частинки в рідині. Вперше це явище виявив британський ботанік Роберт Броун в 1826 р., спостерігаючи в мікроскоп квітковий пилок, зважений у воді.



Роберт Броун (Robert Brown)
Британський ботанік
(1773—1858)

Під дією випадкових поштовхів з боку оточуючих молекул ця частка буде здійснювати нерегулярні блукання, які характеризуються заплутаною траєкторією. Повторимо експеримент кілька разів поспіль, здійснюючи в межах можливостей відтворення початкових умов досвіду. Які будуть результати? Їх, головним чином, два. *Перший* – кожен раз траєкторія руху частинки буде складною, неперіодичною. *Другий* – будь-яка спроба однозначного повторення досвіду призведе до негативного результату. Кожен раз при повторенні досліду з однаковими (в межах наших можливостей) початковими умовами ми будемо отримувати різні траєкторії руху частинки, які навіть близько не нагадують один одного! Класичне явище руху броунівський частинки дає нам чітке фізичне уявлення про хаос як про непередбачуваний, випадковий процес.

Таким чином, якщо ми говоримо про хаос, ми маємо на увазі, що зміна в часі стану системи є випадковою (його не можна однозначно передбачити) і невідтворюваною (процес не можна повторити).

З'ясуємо, що означає поняття «детермінованість».

У всіх випадках, коли говорять про детермінованості, мають на увазі однозначний взаємозв'язок причини і наслідку. У застосуванні до еволюційних законів це означає, що якщо задано деякий початковий стан системи при $t = t_0$, то він однозначно визначає стан системи в будь-який момент часу $t > t_0$. Наприклад, якщо тіло рухається рівноприскорено, то його швидкість визначається детермінованим законом:

$$v(t) = v_0 + at.$$

При завданні початкової швидкості $v(t_0)$ ми однозначно визначаємо значення швидкості $v(t)$ в будь-який момент часу $t > t_0$. У загальному випадку залежність майбутнього стану $x(t)$ від початкового $x(t_0)$ можна записати у виді:

$$x(t) = F\left[x(t_0)\right],$$

де F – детермінований закон (або оператор), який здійснює строго однозначне перетворення початкового стану $x(t_0)$ в майбутній стан $x(t)$ для будь-якого $t > t_0$. Цей закон може являти собою функцію, диференціальне або інтегральне рівняння, просто деякий правило, яке задано таблицею або графіком і так далі. Важливо головне: закон F однозначно трансформує початковий стан (причину) в майбутній стан (наслідок).

Для того, щоб усвідомити поняття *динамічного (або детермінованого) хаосу*, проведемо наступний уявний експеримент.

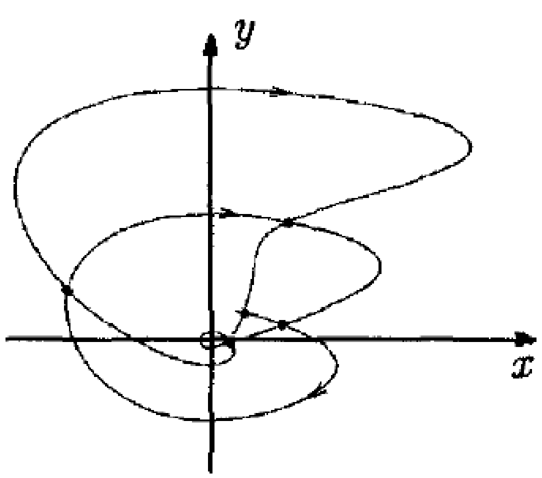


Рис. 1. До визначення динамічного хаосу.

Розглянемо динамічну систему, стан якої характеризується трьома незалежними змінними (фазовими координатами). Це може бути розглянута раніше в Лекції 7 система Лоренца. Отже, розглянемо тривимірне фазовий простір (див. рис.1). Траєкторія розкручується в тривимірному просторі, віддаляючись від початкової точки по спіралі. Досягнувши деяких значень і відчуваючи дію механізму нелінійного обмеження, траєкторія знову повернеться в окіл вихідного стану. Далі, з огляду на нестійкість, процес буде повторюватися.

Можливі два варіанти.

Перший варіант полягає в наступному: траєкторія, зробивши кілька оборотів в тривимірному просторі, через деякий час замкнеться. Це буде означати наявність в системі складного, але періодичного процесу коливань.

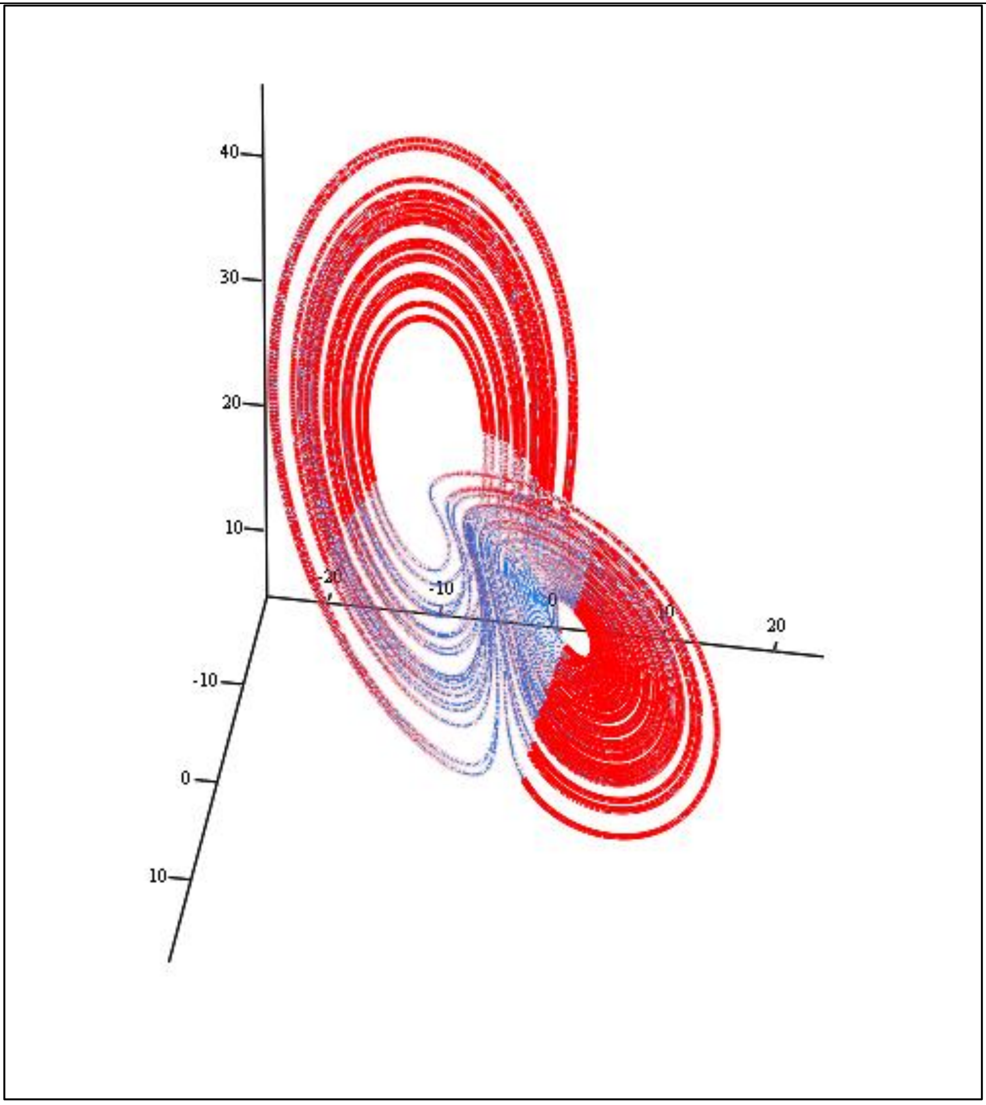
Другий варіант: траєкторія, хоча і буде повертатися в околицю нуля координат, але не буде замикатися, демонструючи якийсь аперіодичний процес, що триває нескінченно.

Другий випадок і відповідає режиму детермінованого хаосу.

Дійсно, працює *основний принцип детермінізму*: майбутнє однозначно визначено початковим станом. Однак процес еволюції системи складний, неперіодична. Чисто зовні він нічим не відрізняється від випадкового.

При більш детальному аналізі розкривається одна важлива відмінність цього процесу від випадкового: *цей процес відтворювальний*. Дійсно, повторивши ще раз початковий стан, в силу детермінованості ми знову однозначно відтворимо ту ж саму траєкторію незалежно від ступеня її складності. Значить, цей неперіодичний процес не є хаотичним в сенсі визначення хаосу, даного нами вище? Так, це складний, схожий на випадковий, але, тим не менш, детермінований процес.

Візьмемо для прикладу дивовижний аттрактор.



$\left(Z^{\langle 2\rangle}, Z^{\langle 3\rangle}, Z^{\langle 4\rangle}\right)$

Рис. 2. Дивовижний аттрактор

На дивовижному аттракторі траєкторії, розбігаючись, змушені з плином часу займати все більший обсяг, який, тим не менш, повинен залишатися кінцевим. Дане протиріччя вирішується завдяки тому, що в області дивовижного аттрактора здійснюється процедура розтягування з утворенням складок фазового простору. Експоненціальна розбіжність – локальне явище: оскільки аттрактор має кінцеві розміри, дві орбіти на хаотичному аттракторі не можуть експоненціально розходитися назавжди. Це означає, що такий аттрактор повинен утворювати складки всередині самого себе. Траєкторії розходяться і йдуть зовсім різними шляхами, але за рахунок безлічі складок вони можуть пройти поблизу раніших своїх частин, не тільки не перетинаючись, але і знаходячись від них на експоненціально далекому (сумарному по складкам) відстані. Випадковість хаотичних орбіт є результат процесу перемішування. Витягування і утворення складок відбувається знову і знову, створюючи складки всередині складок, і так до нескінченності. Якщо фазовий простір системи є кінцевим, то фазові траєкторії не можуть розійтися через нестійкість більш ніж на характерний розмір області руху, і починається їх заплутування. Передбачити поведінку такої системи не можна.

1. Парадигми динамічного хаосу.

Прийнято вважати, що для реалізації хаотичних режимів в розглянутій динамічній системі необхідно виконання наступних умов:

1. ***Система повинна мати 1.5 (*** $n \geq 1.5$ ***) або більш ступенів свободи.***

   Нагадаємо, що число ступенів свободи в два рази менше порядку системи диференціальних рівнянь, що описують її рух.

2. ***Система повинна бути нелінійною.***
3. ***У фазовому просторі повинна розвиватися локальна нестійкість.***

Ці три умови можна назвати парадигмами динамічного хаосу. В тій чи іншій формі вони сформульовані у всіх книгах і оглядах, присвячених динамічному хаосу.

Коротко обговоримо ці умови. Кілька слів про суть цих умов. Вони, безумовно, все необхідні для певного кола динамічних систем. Необхідність в фазовому просторі, розмірність якого дорівнює трьом або більше, випливає з вимог теореми єдиності. Дійсно, в двомірному фазовому просторі ***неможна без перетинів реалізувати перемішування інтегральних кривих***. ***Звідси випливає необхідність, як мінімум, в тривимірному фазовому просторі***. Далі, щоб відбувалося перемішування фазових траєкторій в обмеженому фазовому просторі, необхідно, щоб ці *траєкторії розбігалися*, тобто необхідна *локальна нестійкість*. І нарешті, так як реальна система описується в кінцевому фазовому просторі, ***необхідна нелінійність для повернень в обмежений фазовий об'єм***.

4. *Критерій Ляпунова виникнення локальної нестійкості*

Олександр Михайлович Ляпунов
Російський математик і механік
(1857 – 1918 рр.)

Перш за все, коротко сформулюємо, на що вказує ***критерій Ляпунова***. ***Він визначає поведінку двох близько розташованих точок фазового простору***. ***Якщо ці точки експоненціально розбігаються, то досліджувана система в даній області фазового простору є локально нестійкою***. ***Якщо ж відстань між точками зменшується, то така область є локально стійкою областю***. ***Можливий також варіант, коли відстань між близькими точками фазового простору не змінюється. Найчастіше це відноситься до гамільтонових систем***. Так ось, критерій Ляпунова визначає динаміку близько розташованих точок на фазовому просторі.

Вище ми бачили, що для виникнення режимів з динамічним хаосом необхідно задовольнити трьом умовам. Основним з цих умов є умова виникнення локальної нестійкості. ***Під локальної нестійкістю розуміється та особливість динаміки досліджуваної системи, при якій близько розташовані траєкторії системи, що вивчається, в фазовому просторі, експоненціально розбігаються***.

Така особливість динаміки може бути виявлена за допомогою ***методу ляпуновських показників***. У загальному випадку, при строгому виконанні завдання це зробити досить важко. Потрібне використання комп'ютерних технологій. Однак в деяких випадках, а також для оцінки можливості виникнення локальної нестійкості таку оцінку легко отримати, використовуючи досить прості аналітичні методи. Нижче ми вкажемо на алгоритм отримання таких оцінок.

Нехай у нас є система звичайних диференціальних рівнянь, яка описує динаміку досліджуваної динамічної системи:

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}), \text{ де } i = \{0,1,2,3,.....N\} . \tag{1}$$

Виберемо довільну точку у фазовому об’ємі, який на інтересує, а також візьмемо маленьке відхилення від цієї точки

$$x_i = \vec{x} + \tilde{\vec{\xi}}(t) . \tag{2}$$

Тут ξ – мале відхилення від обраної точки. Підставами вираз (2) у формулу (1). Скористаємося також формулою Тейлора для розкладання функцій, які знаходяться в правій частині рівняння (1). Крім того, залишимо тільки перші члени цього розкладання. В результаті отримаємо наступну систему рівнянь для визначення динаміки малого відхилення.

$$\dot{\xi}_i = \mathbf{M}\vec{\xi} . \tag{3}$$

Тут – матриця $\mathbf{M} = \{a_{ik}\}$, яка містить елементи a_{ik}, які представляють собою перші частинні похідні від функцій в правій частині системи рівнянь (1):

$$a_{ik} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|_{\vec{x}(t)} . \tag{4}$$

У загальному випадку, елементи матриці $\mathbf{M} = \{a_{ik}\}$ залежать від часу. У цьому випадку рішення системи рівнянь (3) можна отримати тільки чисельними методами. Аналітичними методами вдається отримати результат тільки в двох випадках, коли обрана нами точка у фазовому просторі є особливою ***стаціонарної точкою*** або точкою, яка розташована ***на граничному циклі***. Однак для оцінок можливості виникнення локальної нестійкості нам досить вважати, що всі елементи матриці $\mathbf{M}$ є постійними величинами. В цьому випадку розв’язками системи рівнянь (3) буде функція:

$$\vec{\xi} = \Sigma C_j \vec{e}_j \exp\left[\lambda_j t\right]. \tag{5}$$

У формулі (5) основну, визначальну для динаміки роль, грає експонентний множник $\exp\left[\lambda_j t\right]$. Для визначення показника експоненти розв'язок (5) підставимо в вихідні рівняння (3). При такій підстановці, як відомо, ми отримаємо характеристичне рівняння для визначення ***ляпуновского показника*** λ. Як відомо, це характеристичне рівняння можна сформулювати у вигляді завдання про власні значення матриці $\mathbf{M}$, тобто записати у виді:

$$\det\left(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}\right) = 0, \tag{6}$$

де $\mathbf{I}$ – одинична матриця. У розгорнутому вигляді співвідношення (6) можна представити в такий спосіб:

$$\begin{pmatrix} (a_{11} - \lambda)\ a_{12}............a_{1n} \\ a_{21}\ (a_{22} - \lambda)\ \ a_{23}......a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}\ \ a_{n2}\,..........\ (a_{nn} - \lambda) \end{pmatrix} = 0. \tag{7}$$

Розкриваючи детермінант (7), отримаємо алгебраїчне рівняння ступеня N для визначення показників Ляпунова:

$$\lambda^n + A_{n-1}\lambda^{n-1} + A_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + A_0 = \prod_{i=0}^{N}\left(\lambda - \lambda_i\right) = 0. \tag{8}$$

Коефіцієнти полінома (8) A_n визначаються елементами матриці $\mathbf{M}$. Значення показників Ляпунова λ_i в правій частині (8) визначаються коріннями рівняння (8) (є коріннями полінома (8)). Відзначимо корисне співвідношення, яке пов'язує всі показники Ляпунова:

$$\mathrm{Sp}\left[\mathbf{M}\right] = \sum_i \lambda_i .$$

У переважній більшості випадків визначення коренів полінома (8) є досить просте завдання. В крайньому випадку, в будь-якому математичному пакеті є програми для знаходження таких коренів.

А тепер найголовніше. ***Якщо реальна частина всіх показників Ляпунова буде негативною, то розглянута нами система буде стійкою системою в обраній області фазового простору. Якщо ж хоча б один з показників Ляпунова буде позитивним, то система виявляється нестійкою.*** Слід зауважити, що для повного аналізу динаміки необхідно досліджувати не одну обрану точку, а деяку кількість таких точок. В ідеалі потрібно переглянути всі точки фазового простору. Природно, що це нереально. Визначення кількості точок, в загальному, є мистецтвом тих, хто вирішує цю задачу. ***У деяких випадках виявляється достатнім розглянути лише стаціонарні точки системи, що вивчається.*** Наприклад, при вивченні системи Лоренца нам досить розглянути тільки три стаціонарні точки. система Лоренца:

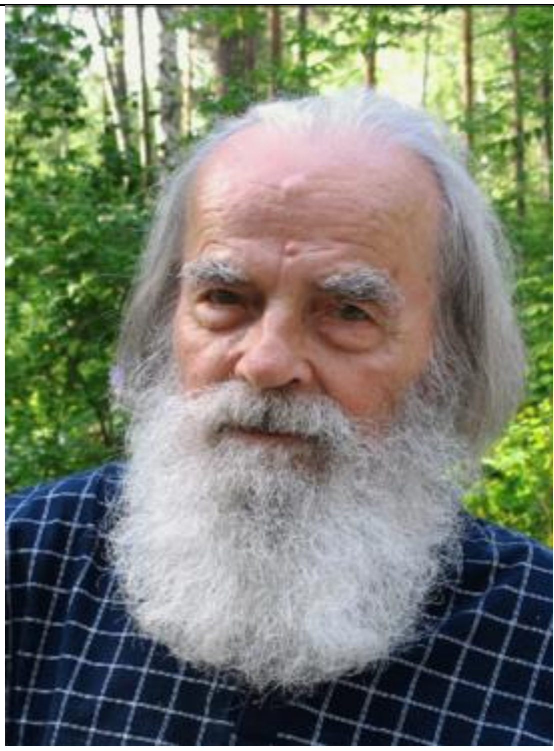
$$\dot{x} = \sigma(y - x)\ ;\ \dot{y} = x(r - z) - y\ ;\ \dot{z} = xy - bz$$

де b, σ, r – параметри моделі Лоренца. Стаціонарні точки:

$$\begin{cases} x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ \text{при}\ r < 1 \\ x = \sqrt{r-1},\ y = \sqrt{r-1},\ z = r-1, \\ x = -\sqrt{r-1},\ y = -\sqrt{r-1},\ z = r-1. \end{cases}$$

Відзначимо, що в літературі часто під ляпуновськими показниками розуміють тільки реальну частину параметра λ.

5. Критерій Чирикова



Академік Борис Валеріанович Чириков

(Новосибірськ, Інститут ядерної фізики СВ РАН)

(1928 – 2008 рр.)

Ще більш часто використовуваним в додатках є критерій Чирикова, запропонований в 70-х роках XX століття. Його популярність обумовлена тим, що його можна використовувати для величезної кількості різноманітних фізичних задач. Він є найпростішим і наочним критерієм перекриття резонансів. Однак слід зазначити, що цей критерій є ***феноменологічним критерієм*** (тобто є апроксимацією експериментальних даних). Тому деякі риси динаміки систем можуть вислизати при його використанні. Це стосується, перш за все, динаміки в околі таких траєкторій, як сепаратриси. Нижче ми проілюструємо сам критерій на простому прикладі. Цим прикладом буде динаміка зарядженої частинки в полі двох поздовжніх електромагнітних хвиль.

Нехай, наприклад, заряджена частинка рухається в зовнішньому магнітному полі великий напруженості. Це зовнішнє магнітне поле направлено вздовж осі x. Якщо магнітне поле сильне, то частка може рухатися тільки уздовж силових ліній цього поля. Це означає, що її рух є одновимірним, тобто тільки уздовж осі $\vec{x} \parallel \vec{H}_0 \to \infty$.

Нехай крім зовнішнього магнітного поля є поздовжня електромагнітна хвиля, яка також поширюється уздовж осі x. Поле цієї хвилі можна представити у виді:

$$E\sin\left(kx-\omega t\right)=E\sin\varphi, \tag{9}$$

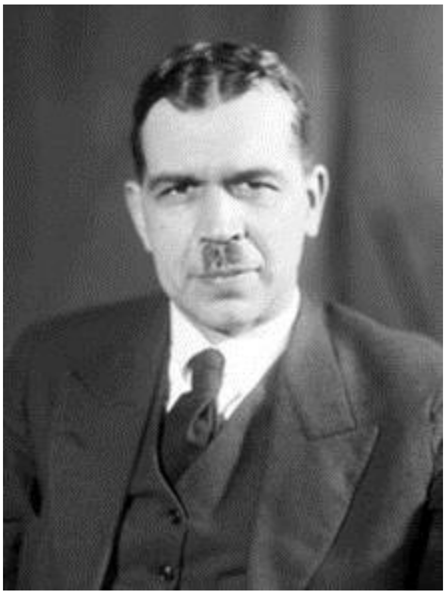
де E – напруженість електричного поля хвилі; ω – частота хвилі; k – хвильової вектор хвилі; φ – фаза хвилі. В поле такої хвилі динаміка руху частинки описується рівнянням руху:

$$F=m\frac{d^{z}x}{dt^{2}}=eE\sin\left(kx-\omega t\right)=eE\sin\varphi\ . \tag{10}$$

У рівнянні (10) права частина являє собою силу, яка діє на частку; e – заряд частинки.

Якщо фаза електромагнітної хвилі не змінюється $\omega=kv\Rightarrow\varphi=const$; $\dot{\varphi}=(kv-\omega)=0$, то права частина рівняння (10) є постійною величиною. У цьому випадку частка найбільш ефективно взаємодіє з хвилею. Ця умова називається умовою ***резонансу Вавилова-Черенкова*** між хвилею і зарядженою часткою. Якщо ж фаза буде функцією часу, то, як видно з рівняння (10), обмін енергії між часткою і хвилею буде обмеженим.

У 1934 році експериментально було виявлено специфічне блакитне світіння прозорих рідин при опроміненні швидкими зарядженими частинками.

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Академік Сергій Іванович Вавилов
(Москва, Фізичний інститут
ім. П. М. Лебедєва АН СССР)
(1891 – 1951 рр.)</td><td>Академік Павло Олексійович Черенков
(Москва, Фізичний інститут
ім. П. М. Лебедєва АН СССР)
Нобелівська премія 1958 р.
(1904 – 1990 рр.)</td></tr>
</table>

Покажемо, що рівняння (10) являє собою рівняння математичного маятника. Дійсно, помножимо ліву і праву частини рівняння (10) на хвильовий вектор k і поділимо на масу частинки. В результаті отримаємо:

$$\frac{d^2(kx)}{dt^2} = \left(\frac{eE\cdot k}{m}\right)\sin\left(kx-\omega t\right). \qquad (11)$$

Врахуємо такі співвідношення:

$$\dot{\varphi} = k\frac{dx}{dt} - \omega = kv - \omega\,;\ \ddot{\varphi} = k\frac{d^2x}{dt^2}\,.$$

З урахуванням цих співвідношень рівняння (11) можна переписати у вигляді

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2\sin\varphi = 0\,;\ \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \Omega^2\sin\varphi = 0\,, \qquad (12)$$

де

$$\tau = \omega t\,;\; e = -|e|\,;\; \frac{|e|E\cdot k}{m} = \omega_B^2\,;\; \frac{|e|E\cdot k}{m\omega^2} \equiv \left(\frac{\omega_B}{\omega}\right)^2 \equiv \Omega^2\,.$$

Рівняння (12) є добре відомим нам рівнянням математичного маятника. На рис. 3 представлений потенціал і фазовий портрет цього маятника. Відзначимо, що частота ω_B визначає частоту коливань частки в околі дна потенційної ями маятника (в околі особливої точки типу «центр»).

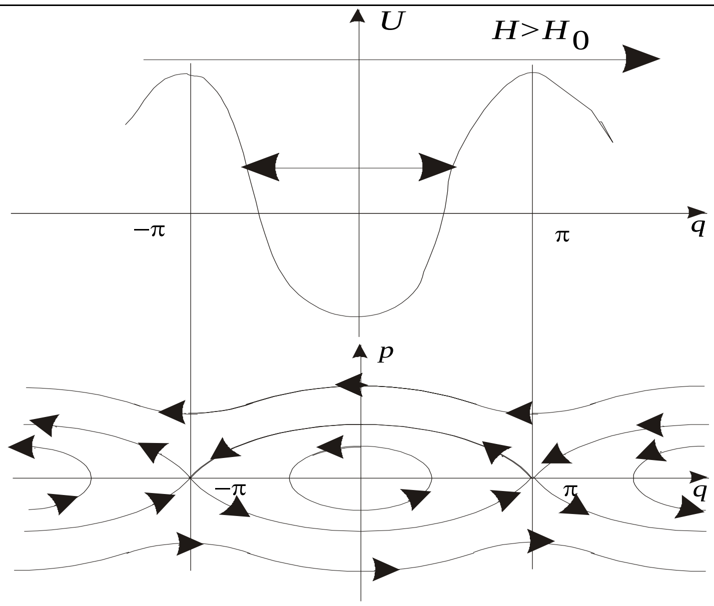


Рис.3. Потенціал і фазовий портрет математичного маятника

Півширина нелінійного резонансу математичного маятника визначається, як ми знаємо, величиною (саме, півширина нелінійного резонансу в точності дорівнює величині 2Ω):

$$\dot{\varphi}_{\max} = 2\Omega\,. \tag{13}$$

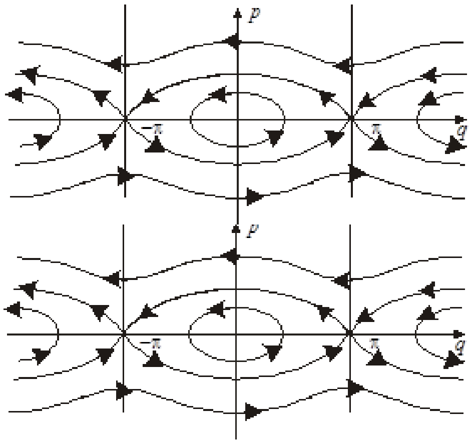


Рис. 4. Фазовий портрет частки, яка рухається в поле двох поздовжніх електромагнітних хвиль

Розглянемо тепер динаміку тієї ж частинки в тому випадку, коли є не одна хвиля, а дві поздовжні хвилі з різними фазовими швидкостями:

$$v_{ph1} = \frac{\omega_1}{k_1} \; ; \; v_{ph2} = \frac{\omega_2}{k_2}$$

У цьому випадку рівняння руху зарядженої частинки в полі цих двох хвиль запишеться у виді

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = e\mathrm{E}_1 \sin\left(k_1 x - \omega_1 t\right) + e\mathrm{E}_2 \sin\left(k_2 x - \omega_2 t\right). \tag{14}$$

В результаті взаємодії частинки з першою хвилею її швидкість змінилася (внаслідок нелінійності). Результатом є ***порушення умов черенковского резонансу частки з першою хвилею.*** Однак при зміні швидкості частинки при наявності другої ***хвилі частка може потрапити в черенковський резонанс з другою хвилею.*** При цьому, ***якщо забути про існування першої хвилі***, то динаміка взаємодії частинки з другою хвилею буде точно такий же, як при взаємодії з першою хвилею. Якісно ця картина відображається на рис. 4. На цьому рисунку представлені фазові портрети динаміки частки з першою хвилею і з другою хвилею. ***Причому, відзначимо, що ми при описі динаміки однієї з хвиль зовсім не враховуємо впливу іншої хвилі***. Це, звичайно, не завжди правильно. Більш того, можна вказати умови, коли такий розгляд є несправедливим. Однак, як показує величезна кількість розглянутих задач з використанням такої моделі, вона, на подив, дає правильні не тільки якісні ***умови, а й кількісні умови для виникнення режимів з динамічним хаосом. Цими умовами є умови, при яких сепаратріси цих двох математичних маятників стикаються (або***

перетинаються). Ці умови можна отримати аналітично і вони добре визначають параметри хвиль і частинок, при яких виникає режим динамічного хаосу. Випишемо ці умови.

Півширина нелінійного резонансу, як ми знаємо, визначається умовою (13). Залишається визначити тільки ***відстань між двома нелінійними резонансами***. Це відстань ми визначимо, як ***відстань між черенковський резонансами***:

$$\left|v_{ph2} - v_{ph1}\right| = \delta v \,. \tag{15}$$

Відстань між резонансами ми визначили, як якусь величину з розмірністю швидкості. Півширини нелінійних резонансів також слід визначити в тій же розмірності:

$$\Delta v_i = \frac{\Delta \dot{\varphi}_i}{k_i} = \frac{2\Omega_i}{k_i}\omega_i \,, \tag{16}$$

де $\Delta\dot{\varphi}_i = k_i \Delta v_i$; Δv_i – розкид фазової швидкості i-ї хвилі, яка попадає до інтервалу частот $2\Omega_i\omega_i$ (де $\Omega_i = \omega_{Bi}/\omega_i$); $2\Omega_i\omega_i$ – півширина нелінійного резонансі $i-$го мат. маятника, що зв'язаний з $i-$ю хвилею. Умова дотику сепаратрис набуває виду:

$$\left|v_{ph2} - v_{ph1}\right| = \delta v = \Delta v_2 + \Delta v_1 \quad . \tag{17}$$

Тоді умова Чирикова виникнення режимів з динамічним хаосом набуває виду:

$$\left|\omega_2 / k_2 - \omega_1 / k_1\right| < 2\left(\omega_2\Omega_2 / k_2 + \omega_1\Omega_1 / k_1\right) . \tag{18}$$

Формулу (18) зручно представити в іншому виді:

$$2\left(\omega_{B1} + \omega_{B2}\right) \ge \left|\omega_2 - \omega_1\right| . \tag{19}$$

або

$$K = \frac{2\left(\omega_{B1} + \omega_{B2}\right)}{\left|\omega_2 - \omega_1\right|} \ge 1 . \tag{20}$$

Сформулювати критерій Чирикова можна так: вважаючи резонанси незалежними один від одного, за момент перекриття можна прийняти дотик їх незбурених сепаратріси.

Умова (19) можна вважати рівнянням на критичну величину збурення (амплітуд полів хвилі), при якій резонанси перекриваються. Необхідно зауважити, що реально перекриття резонансів відбувається при менших значеннях амплітуди обурення, ніж випливає з умови

(19). Критерій Чирикова дозволяє лише оцінити його по порядку величини. Сильною стороною критерію є його наочність і простота.

Перекриття резонансів відбувається раніше, оскільки з ростом амплітуди обурення резонанси починають «відчувати один одного», взаємодіяти. Їх розгляд як незалежних стає некоректним. Як наслідок взаємодії сепаратріси руйнуються, і на їх місці утворюються ***тонкі стохастичні шари – малі області з хаотичною динамікою.*** При подальшому збільшенні амплітуди стохастичні шари розширюються, починають проявлятися резонанси більш високих порядків і вторинні резонанси. Структура фазового простору стає значно складніше.

На рис. 5 показані фазові портрети осцилятора з кубічною нелінійністю, поміщеного в слабке зовнішнє поле з двома гармонійними складовими (*ця модель була запропонована Б.В.Чириковим*):

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^4}{4} - f_0 x\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right). \tag{21}$$

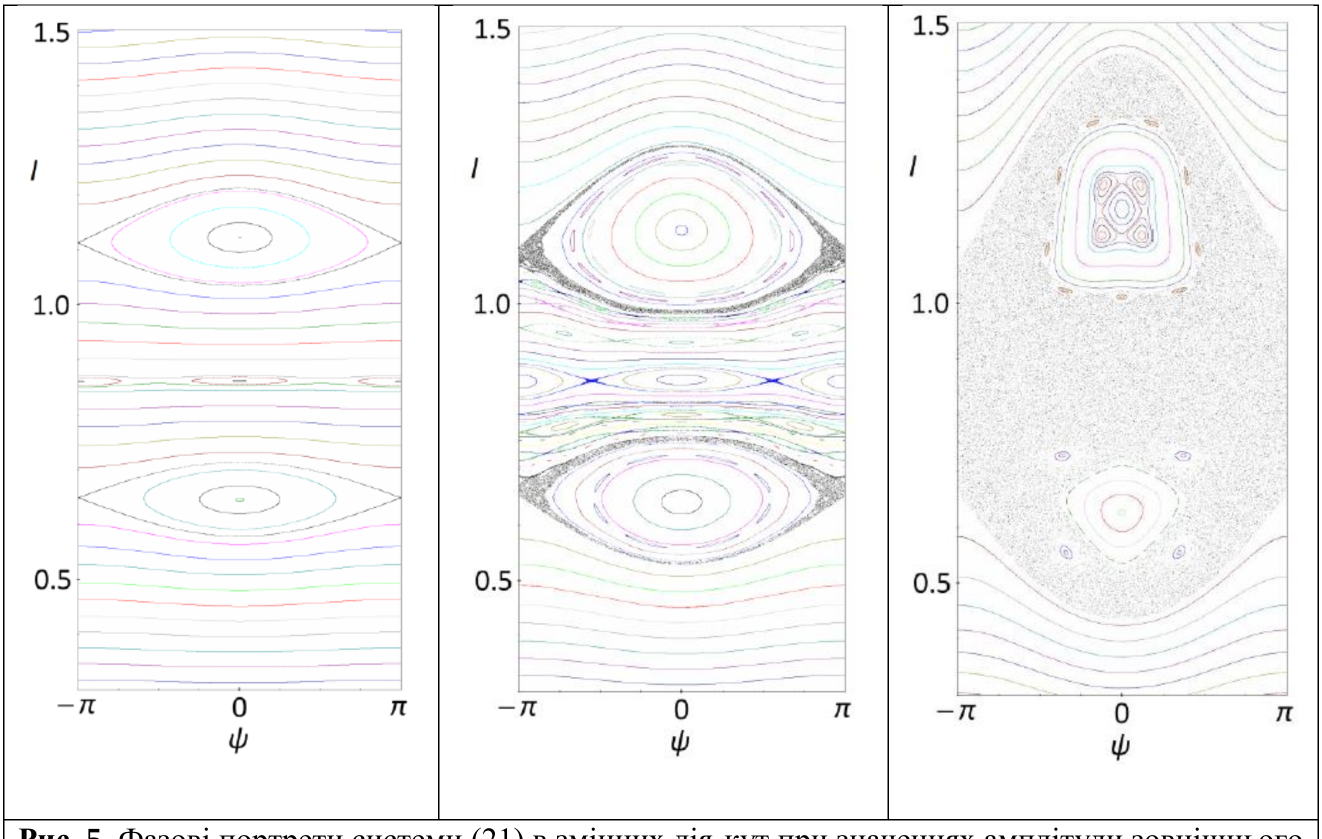


Рис. 5. Фазові портрети системи (21) в змінних дія-кут при значеннях амплітуди зовнішнього поля f_0 (зліва направо): 0.001, 0.003, 0.01. Різним початковим умовам відповідають точки різного кольору. Тут $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.2$.

Особливості структури фазового простору (зліва направо):

1) Амплітуда ще досить мала, через що резонанси один одного «не відчувають». Хоча сепаратріси вже зруйновані, вони все ще виглядають тонкими лініями. Як результат бігармонічності збурення проявляє себе резонанс на напівсумі двох частот.
2) Активна фаза взаємодії резонансів. Вони оточені стохастичними шарами, утвореними на місці зруйнованих сепаратріси. В області між двома резонансами проявилося безліч резонансів більш високих порядків. Серед замкнутих, подібних еліпсам траєкторій усередині кожного з основних резонансів можна бачити «ланцюжка» резонансів вторинних.
3) Резонанси перекриті, утворився загальний стохастичний шар. Залишки вторинних резонансів, а також малі області поблизу центрів основних резонансів служать «острівцями стабільності в стохастичному море».

При відносно сильному збуренні настає глобальний хаос, який містить лише рідкісні острівці з регулярним рухом. Причина виникнення стохастичного шару при слабкому зовнішньому збуренні $f_0 \to 0$ завжди поблизу сепаратріси полягає в тому, що саме за умови $f_0 \to 0$ введена вище півширина нелінійного резонансу 2Ω стає зникаюче малою величиною, що в загальному випадку сприяє виникненню хаосу.

Нерелятивістська динаміка частинок в полях хвильових пакетів.

Всі хвильові процеси, з якими доводиться мати справу на практиці, ніколи не бувають строго гармонійними плоскими хвилями. Однак будь-яку реальну хвилю можна представити як суперпозицію плоских монохроматичних хвиль, частоти і хвильові числа яких заповнюють інтервал шириною $\Delta\omega$ і Δk відповідно. Ці інтервали можуть бути і нескінченними. Якщо частоти (і хвильові числа) компонент мало відрізняються один від одного і згруповані поблизу деякої центральної частоти ω_0 і хвильового числа k_0 ($|\Delta\omega| << \omega_0$, $|\Delta k| << k_0$), то таку суперпозицію називають групою хвиль, або хвильовим пакетом. Хвильовий пакет – це хвиля, яка відмінна від нуля лише в деякому інтервалі, а в усіх інших точках простору дорівнює нулю.

Відомо, що плазма, особливо плазма в магнітному полі, має багатий спектр власних коливань і хвиль. Покажемо, що частинки плазми в цих, навіть регулярних полях, рухаються хаотично. Для доказу розглянемо рух заряджених частинок в поле хвильового пакету:

$$\ddot{z} = \frac{e}{m}\sum E_i \sin(k_i z - \omega_i t) \ . \tag{22}$$

Розглянемо спочатку динаміку в поле однієї хвилі (тому $v_{ph} = const$), частота і хвильовий вектор якої відповідає центру хвильового пакету (ω_0, k_0). Резонансна взаємодія між хвилею і часткою виявляється можливою, якщо виконується умова резонансу Вавилова-Черенкова

$$\frac{\omega_0}{k_0} = v \ , \tag{23}$$

де v – швидкість частинки. Діючи так само, як і в попередньому випадку, для такої динаміки з рівняння (22) можна отримати відомий інтеграл:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \Omega^2 \cos\varphi = H = const \ , \tag{24}$$

де $\varphi = k_0 z - \omega_0 t$, $\Omega^2 = |e| E k_0 / m\omega_0^2$, $\dot{\varphi} = d\varphi / d\tau$, $\tau = \omega_0 t$. Використовуючи інтеграл (24), знаходимо ширину нелінійного резонансу:

$$\dot{\varphi}_{\max} = +2\Omega \ , \ \dot{\varphi}_{\min} = -2\Omega \ . \tag{25}$$

Розглянемо хвильової пакет. Для визначення відстані між резонансами звернемо увагу, що ефективна взаємодія частинок з хвилями пакета відбувається в умовах черенковского резонансу. Для величини розкиду фаз хвиль в пакеті використовуємо вираз:

$$\Delta\varphi = \left|\frac{d\varphi}{dk}\right|\Delta k = \left|\frac{d}{dk}\left(kz - \omega t\right)\right|\Delta k = \left|z - \frac{d\omega}{dk}t\right|\Delta k = \left|z - v_{gr}t\right|\Delta k \ , \tag{26}$$

де $v_{gr} = d\omega/dk$ – групова швидкість хвильового пакета, відповідна швидкості руху максимуму обвідної пакета. Знаходимо похідну за часом t від $\Delta\varphi$, яка характеризує відстань між резонансами:

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\Delta\varphi = \frac{d}{dt}\left|z - v_{gr}t\right|\Delta k = \left|v_{ph} - v_{gr}\right|\Delta k = \left|v - v_{gr}\right|\Delta k\text{, при } v = v_{ph}\,. \tag{27}$$

де $v_{ph} = \omega/k$ – фазова швидкість хвилі. При отриманні (27) враховано, що $v = v_{ph}$. Використовуючи вирази (25) і (26), знаходимо умови виникнення локальної нестійкості:

$$K = \frac{4\Omega\omega}{\Delta\dot{\varphi}} = N\frac{4\Omega}{\left(1 - v_g / v_{ph}\right)},\ K > 1, \tag{28}$$

де $N = k_0 / \Delta k$ – кількість хвиль в пакеті.

Аналізуючи формули (27) і (28), можна зробити кілька важливих висновків. Перше, з формули (27) видно, що якщо групова швидкість прямує до фазової швидкості хвилі, то відстань між резонансами прямує до нуля. Це означає, що всі хвилі пакета розташовані на прямолінійній ділянці дисперсії. У фазовому просторі резонанси таких хвиль всі збігаються. Для частинок такі резонанси практично неможливо розрізнити. Динаміка повинна бути регулярною. Друге, якщо групова швидкість хвиль прямує до нуля (наприклад, ленгмюровські хвилі в плазмі), то, як видно з формули (28):

$$1 < K << N\text{, при } \Omega << 1. \tag{29}$$

Тут необхідно зазначити, що динаміка частинок в плазмі практично завжди відповідає випадку $\Omega << 1$. За умови (29) динаміка частинок повинна бути хаотичною. Якщо ж $K > N$, то динаміка повинна бути регулярною. Ми звикли до того, що як тільки виконується нерівність K>1, то динаміка частинок стає хаотичною. Видно, що цей простий, зручний і дуже поширений критерій вимагає обережного використання, коли мова йде про динаміку частинок в хвильових пакетах.