

## Лекция 14

### Фракталы. Часть 2. Примеры.

1. Размерность Хаусдорфа-Безиковича. Емкость множества.
2. Множество Кантора.
3. Снежинка Коха.
4. Салфетка Серпинского. Ковер Серпинского.
5. Губка Менгера.
6. Кривые Пеано.
7. Кривая Госпера.
8. Дракон Хартера-Хетуэя.

### Определение размерности фрактала. Размерность Хаусдорфа-Безиковича.

Основной чертой фракталов является изрезанность, извилистость их геометрических образов. Вспомните снежинку Коха, броуновское движение частицы. Возникает естественный вопрос: можно ли указать какую-либо характеристику степени сложности (изрезанности, извилистости) фрактального объекта. Очевидно, что при анализе топологической размерности объекта его фрактальные свойства теряются. Мандельброт предложил использовать в качестве такой характеристики определение размерности, введенное в 1919 г. Феликсом Хаусдорфом и развитое в дальнейшем Абрамом Безиковичем.

	
<p><b>Феликс Хаусдорф</b> Немецкий математик (1868 – 1942)</p>	<p><b>Абрам Самойлович Безикович</b> Российский математик (1891 – 1970)</p>

Прежде чем перейти к определению фрактальной размерности, осмыслим понятие *меры множества*. Мера в определенном смысле обобщает понятие числа, то есть это функция, которая ставит в соответствие множеству его размер. Таким образом, под мерой множества  $X$  будем понимать функцию  $\mu$ , которая приписывает каждому подмножеству  $A \subset X$  число  $\mu(A) \in [0, \infty)$  такое, что  $\mu(\emptyset) = 0$ , где  $\emptyset$  – пустое множество и  $\mu(A) \leq \mu(B)$ , если  $A \leq B$ .

Для того чтобы измерить "величину" множества точек  $X$  в евклидовом пространстве с размерностью  $D$ , покроем это множество некоторыми элементами. Форма элемента покрытия может быть произвольной, она определяется структурой самого множества  $X$  и как следствие удобством построения покрытия. Например, элементами покрытия могут быть отрезки, квадраты, кубики с линейным размером  $\delta$  или круги, шары с диаметром  $\delta$ . При построении покрытия каждая точка множества  $X$  должна попасть в тот или иной элемент покрытия. "Величина" всего множества  $X$ , которую мы назовем мерой множества, определяется суммой "величин" (мер) всех элементов покрытия. В общем виде меру отдельного элемента можно представить в виде функции

$$\mu(\delta) = \gamma(D) \delta^D. \quad (1)$$

Для целочисленных значений величины  $D$  функция  $\mu(\delta)$  имеет привычный смысл. Так при  $D=1$  мера элемента определяет его длину, при  $D=2$  – площадь, при  $D=3$  – объем. Константа  $\gamma(D)$  зависит от формы элемента: для отрезка, квадрата, куба –  $\gamma(D)=1$ , для площади круга –  $\gamma(D)=\pi/4$ , для объема сферы –  $\gamma(D)=\pi/6$ .

Подсчитав число элементов, необходимых для покрытия данного множества, составляем сумму мер элементов, которая аппроксимирует меру всего множества  $X$ :

$$M_D = \sum \mu(\delta) = \sum \gamma(D) \delta^D. \quad (2)$$

При  $\delta \rightarrow 0$  величина  $M_D$  определяет  $D$ -меру множества  $X$ . В общем случае, в качестве значений  $D$  можно выбирать не только целые числа. Это соображение позволяет обобщить понятие размерности, и дать следующее определение размерности, называемое размерностью Хаусдорфа-Безиковича:

$$M_D = \sum \gamma(D) \delta^D \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & \text{при } D > D_H \\ \infty, & \text{при } D < D_H \end{cases}. \quad (3)$$

Существенно, что при определении размерности Хаусдорфа-Безиковича необходимо покрывать множество элементами всевозможных размеров, не превышающих некоторое малое значение, и определить *infimum* (лат. наименьший, т.е. наибольшее среди всех чисел, ограничивающих снизу множество  $X$ ) выражения  $\sum \gamma(D)\delta^D$ . Очевидно, что процесс минимизации этой суммы по всем возможным разбиениям чрезвычайно трудоемок, и обычно приводят оценку размерности Хаусдорфа-Безиковича величиной емкости множества  $D_C$  (от англ. *capacity* – емкость).

Для определения емкости множества  $D_C$  рассмотрим случай покрытия множества точек в  $D$ -мерном евклидовом пространстве минимальным количеством  $D$ -мерных кубиков (или сфер) одинакового объема.

Пусть  $a$  – величина, характеризующая покрытие, и  $N(\delta) \approx a\delta^{-D}$  – минимальное количество  $D$ -мерных кубиков. Логарифмируя это выражение, получим:

$$\ln N(\delta) \approx \ln a - D \ln \delta, \quad (4)$$

откуда, приблизительно,

$$D = -\frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta} + \frac{\ln a}{\ln \delta}. \quad (5)$$

Так как  $\ln \delta \rightarrow -\infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ , то емкость множества есть предел

$$D_C = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}, \quad (6)$$

который обычно существует. Для величин  $D_H$  и  $D_C$  выполняется соотношение:

$$D_H \leq D_C. \quad (7)$$

Следует заметить, что в большинстве случаев размерность  $D_H$ , емкость  $D_C$  и другие параметры  $D$ , получаемые при различном выборе покрытий совпадают. Поэтому, часто для определения фрактальной размерности объекта используют формулу (6). Более того, для *регулярных* и самоподобных фракталов, например, для снежинки Коха, емкость и размерность Хаусдорфа-Безиковича совпадают. Заметим, что, если вместо детерминированного способа построения в алгоритм их создания включить некоторый элемент случайности, то возникнут так называемые *случайные фракталы*. Основное их

отличие от регулярных фракталов состоит в том, что свойство самоподобия справедливо только после соответствующего усреднения по всем статистически независимым реализациям объекта. При этом увеличенная часть фрактала не точно идентична исходному фрагменту, однако их статистические характеристики совпадают.

**Рассмотрим ряд примеров самоподобных множеств.**

### **Множество Кантора.**

*Классическое множество Кантора (классическая пыль Кантора)* названо по имени Георга Кантора, который описал его в 1883 г. Фрактальные свойства пыли Кантора имеют большое значение, учитывая тот факт, что многие известные фракталы обладают подобными свойствами.

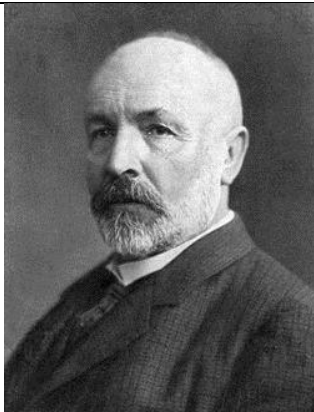
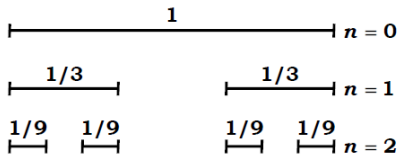
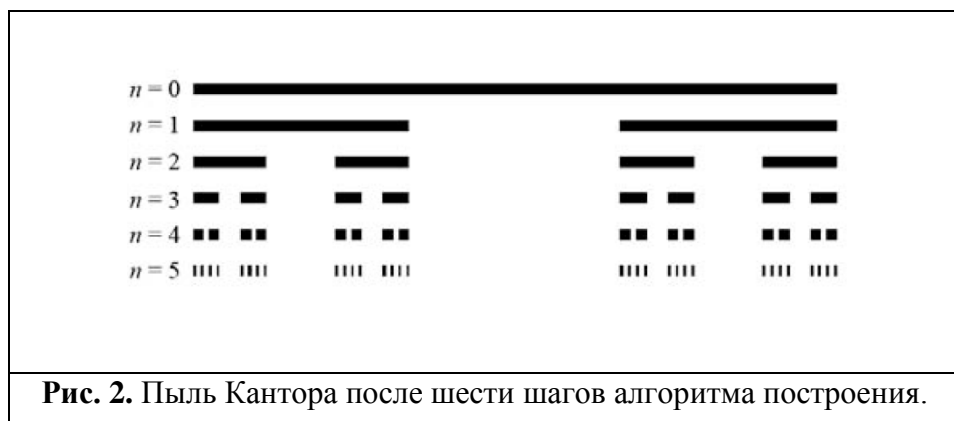
	
<p><b>Георг Кантор</b> Немецкий математик, ученик Карла Вейерштрасса (1845 – 1918)</p>	<p><b>Рис.1.</b> Построение множества Кантора.</p>

Схема его построения заключается в следующем (рис. 1). Выбирают отрезок единичной длины (ему приписывают номер  $n=0$ ). Затем его делят на три части и вынимают среднюю треть (исключая концы) единичного отрезка, т.е. удаляют интервал  $(1/3, 2/3)$ . На рис. 1 это соответствует  $n=1$ . На следующем ( $n=2$ ) и всех остальных этапах вынимают среднюю треть (исключая концы) всех отрезков текущего уровня. И так продолжается до

бесконечности. Полученное предельное множество и называется классической пылью Кантора. На рис. 2 показана пыль Кантора после шести шагов этого процесса.



Нетрудно видеть, что суммарная длина интервалов, удалённых при построении множества Кантора, точно равна 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \dots = \\ = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right] = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 2/3} = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Получается очень интересный результат: исходная длина отрезка равна единице и суммарная длина удаленных интервалов в процессе построения множества ( $n \rightarrow \infty$ ) тоже равна единице. На единичном отрезке мы выделили множество, содержащее столько же точек, сколько и отрезок, но которое на этом отрезке совсем не занимает места! Можно еще сказать, что полученный при сравнении множества Кантора с отрезком  $[0,1]$ , состоит в том, что мощности этих множеств равны.

Фрактальная размерность Канторова множества может быть вычислена по формуле (6):

$$D_C = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta} = -\frac{\ln 2}{\ln 1/3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63092. \quad (9)$$

Эта размерность оказалась не целым числом, причем большим топологической размерности  $D_T = 0$  элементов (точек) множества Кантора.

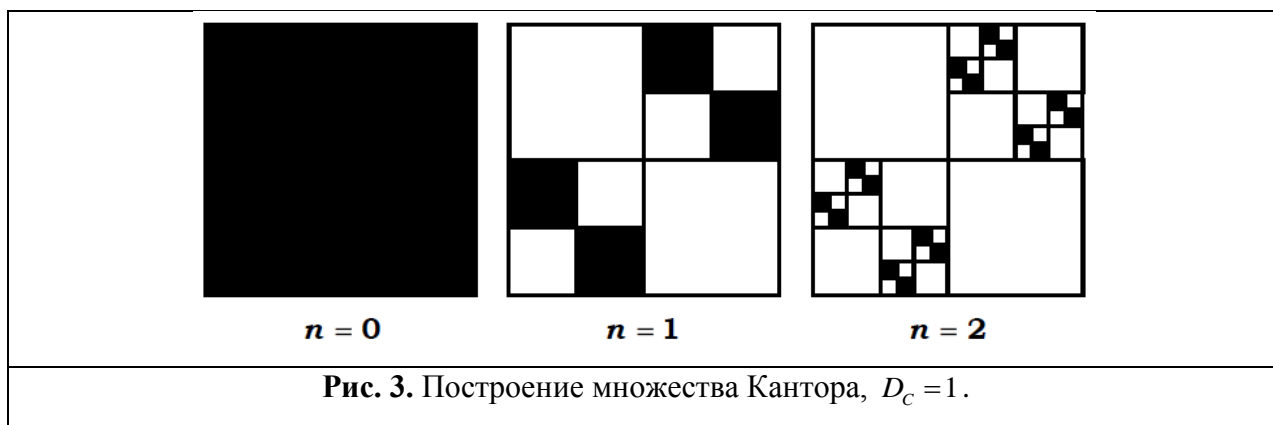
Например, можно построить *еще одну разновидность множества Кантора*. Пусть исходное множество есть квадрат со стороной, равной единице. На каждом шаге имеющиеся квадраты заменяются четырьмя меньшими, как показано на рис. 3.

Предельное множество этого построения является самоподобным фракталом. Рассуждая аналогично предыдущему примеру, получаем на  $n$ -м шаге количество квадратов

$$N(\delta) = 4^n, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

со стороной равной  $\delta = 1/4^n$ .

Образуем покрытие множества Кантора квадратиками со стороной, равной стороне квадратов на соответствующем поле, т.е.  $\delta = 1/4^n$ . Тогда согласно определению размерности (6) (т.е. емкости множества) при  $\delta \rightarrow 0$  (что эквивалентно  $n \rightarrow \infty$ ) получаем значение размерности исследуемого множества  $D_C = 1$ . Для фракталов характерным является наличие нецелой (дробной) размерности, однако, как видим, **возможна ситуация с целочисленной размерностью**.



**Вернемся к снежинке Коха.** В результате бесконечных итераций получаем самоподобное множество в виде бесконечно изломанной кривой. Интересно заметить, что она, будучи замкнутой, тем не менее, нигде себя не пересекает. Подсчитаем её фрактальную размерность. Пусть длина стороны исходного треугольника равна единице. В данной ситуации в качестве элементов покрытия удобно использовать отрезки прямой. Тогда на нулевом шаге ( $n=0$ ) количество покрывающих элементов равно  $N(\delta_0) = 3$  при длине элемента  $\delta_0 = 1$ . При переходе к следующему шагу имеем:  $N(\delta_1) = 12$  и  $\delta_1 = 1/3$ . Поэтому, в соответствии с формулой фрактальной размерности (6) имеем:

$$D_C = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta} = -\frac{\ln 4}{\ln 1/3} \approx 1.2618. \quad (10)$$

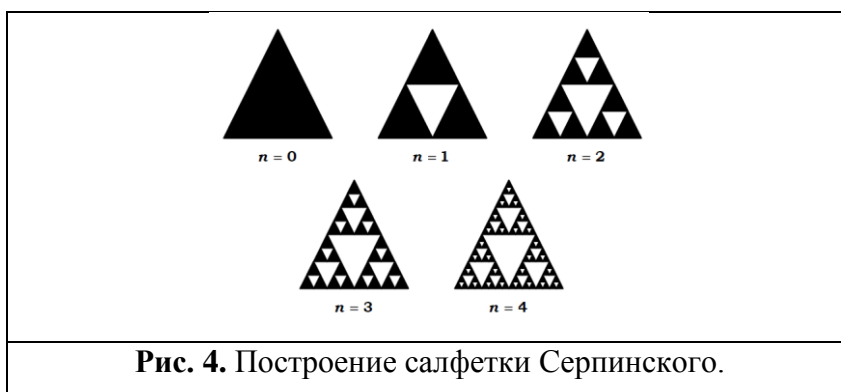
Это значение больше топологической размерности линии  $D_T = 1$ , но меньше топологической размерности плоскости  $D_T = 2$ , на которой расположена линия.

Подсчитаем длину линии, которая образует снежинку Коха. Не трудно понять, что на каждом шаге её длина увеличивается в  $4/3$  раза. Тогда на  $n$ -м шаге её длина равна  $L_n = 3(4/3)^n$ . Подобные кривые при любом конечном  $n$  Мандельброт назвал *предфракталами*. Если  $n$  стремится к бесконечности, то значение  $L$  тоже стремится к бесконечности:

$$L = 3(4/3)^n \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Таким образом, снежинка Коха представляет собой линию бесконечной длины, которая ограничивает конечную площадь. (Она не выходит за пределы окружности, описанной около исходного треугольника.)

	
<b>Вацлав Франциск Серпинский</b> Польский математик (1882 – 1969)	<b>Карл Менгер</b> Австрийский математик (1903 – 1985)



#### Рассмотрим фрактал, называемый салфеткой Серпинского.

Самоподобный фрактал, называемый *салфеткой Серпинского*, создан Вацлавом Серпинским в 1915 г. Пусть начальным множеством является равносторонний треугольник (рис. 4). Разобьем его на четыре области, соединив середины сторон

исходного треугольника отрезками. Удалим внутренность маленькой центральной треугольной области. Затем повторим процесс для каждого из трёх оставшихся маленьких треугольников и получим следующую итерацию. Продолжая этот процесс до бесконечности, образуем множество, которое и является салфеткой Серпинского (см. рис. 4). Из построения видно, что исходный треугольник заменяется тремя новыми, а длина стороны нового треугольника в два раза меньше стороны исходного. Поэтому, размерность салфетки Серпинского равна

$$D_c = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.5849. \quad (12)$$

Ткань, сотканной салфетки, получилась весьма дырявой; в ней нет ни одного целого куска, в каждом самом маленьком треугольнике выбрасывалась центральная часть. Подсчитаем суммарную площадь частей, исключенную при построении. На первом шаге мы выбросили  $1/4$  часть площади исходного треугольника, образовав фигуру из трех треугольников с площадью (каждого), равной  $1/4$  площади исходного. На втором шаге согласно рис. 4 у каждого из трёх треугольников удаляется  $1/4$  часть его площади. Такие рассуждения позволяют определить полную удаленную площадь:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + 3^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots = \\ & = \frac{1}{4} \left[ 1 + \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \dots \right] = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - 3/4} = 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, исключённая площадь точно равна площади исходного треугольника. Об этом же говорит и значение фрактальной размерности салфетки Серпинского:  $D_c \approx 1.5849 < 2$ , которая меньше топологической размерности плоскости, на которой находится этот объект. Отсюда следует, что площадь салфетки Серпинского равна нулю. Что это означает? Ответ таков. Когда мы говорим, что площадь салфетки Серпинского равна нулю, мы понимаем следующее: для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такую фигуру, что, с одной стороны, её площадь не превосходит  $\varepsilon$ , а с другой – эта фигура содержит салфетку.

Подсчитаем теперь периметр исключённых областей. Если сторона исходного треугольника была равна 1, то на первом шаге построения периметр центрального треугольника был равен  $3/2$ . На втором шаге к нему добавилось три новых треугольника с общим периметром, равным  $9/4 = (3/2)^2$ , и так далее. Очевидно, что на  $n$ -м шаге периметр  $P^{(n)}$  определяется суммой геометрической прогрессии:



$$P^{(n)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{3}{2} \frac{1 - (3/2)^n}{1 - 3/2} = 3 \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right] \approx 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n. \quad (14)$$

Таким образом, при переходе к фрактальному множеству ( $n \rightarrow \infty$ ), получаем, что полный периметр дыр в салфетке Серпинского становится бесконечным. Понятно, что формула (14) должна быть согласована с определенным степенным законом, устанавливающим увеличение длины фрактальной кривой по мере проведения итерационной процедуры построения салфетки Серпинского. Итак, длина элемента покрытия салфетки Серпинского на  $n$ -ом шаге равна  $\delta = 1/2^n$ , отсюда число шагов построения  $n = -\ln \delta / \ln 2$ . Тогда периметр  $P$  запишется в виде

$$\begin{aligned} P(\delta) &= 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n = 3 \exp \left( n \ln \left(\frac{3}{2}\right) \right) = \\ &= 3 \exp \left[ \left( 1 - \frac{\ln 3}{\ln 2} \right) \ln \delta \right] = 3 \exp \left( \ln \delta^{1 - \ln 3 / \ln 2} \right) = 3 \delta^{1 - \ln 3 / \ln 2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Сопоставляя формулу Ричардсона  $L(\delta) = a\delta^{1-D}$  и (15), получим следующее соотношение, в которое входит фрактальная размерность салфетки Серпинского:

$$P(\delta) = 3\delta^{1 - \ln 3 / \ln 2} = a\delta^{1-D}. \quad (16)$$

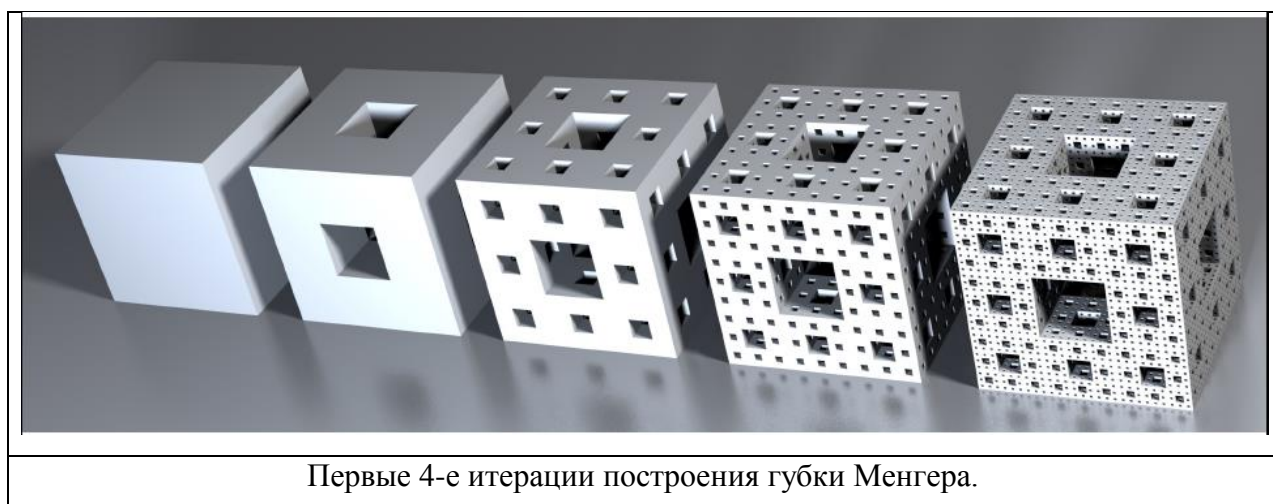
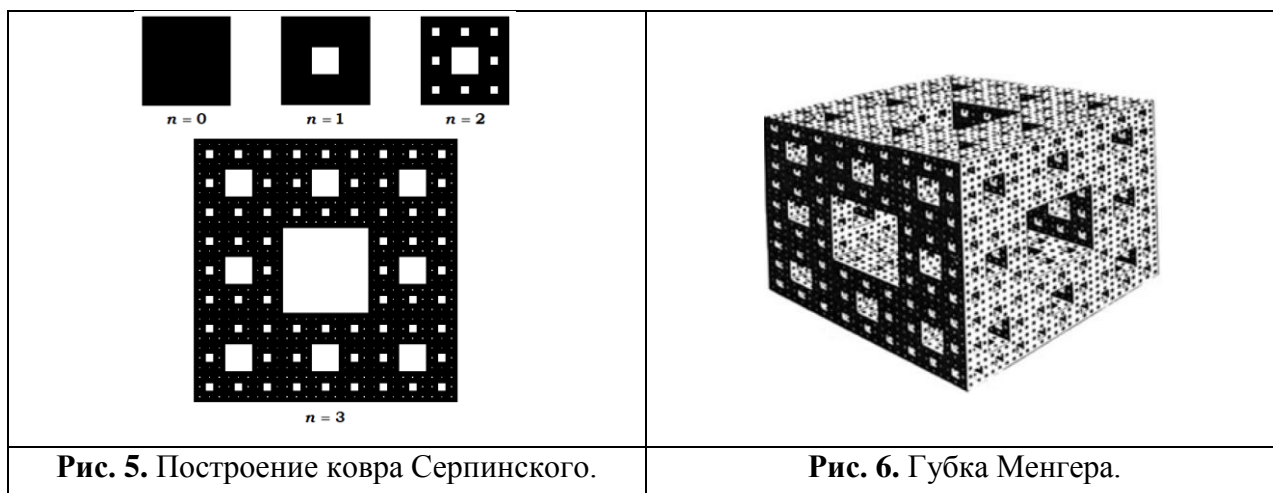
Таким образом, мы еще убеждаемся в том, что фрактальная размерность салфетки Серпинского равна  $D_c \approx 1.5849$ . Интересно отметить, что фрактальная размерность салфетки Серпинского обратно пропорциональна фрактальной размерности канторовой пыли:  $D_c \approx 1/0.63092 \approx 1.5849$ . Как мы уже отмечали, площадь салфетки Серпинского, как и длина канторовой пыли равна нулю, так как в результате построения изымается вся площадь исходного равностороннего треугольника.

Интересно отметить, что фрактальный характер структуры реальных объектов отражается и на их физических свойствах! Так, в 1986 г. было проведено исследование зависимости критической температуры от напряжённости магнитного поля фазового перехода сверхпроводящей жидкости в нормальную на образце алюминиевой фольги, которая имела вид “салфетки” Серпинского после 10 итераций. Эта зависимость имела вид самоподобной фрактальной кривой, которая достаточно хорошо согласовывалась с теоретической линией.

## Ковер Серпинского и губка Менгера.

Аналогично салфетке Серпинского можно построить квадратный ковер Серпинского, который является двумерным аналогом множества Кантора, полученного путем исключения средних третей (рис. 5). План его создания состоит в следующем. Вначале берётся квадрат с длиной стороны, равной единице. Затем каждая из сторон квадрата делится на три равные части, а весь квадрат, соответственно, на девять одинаковых квадратиков со стороной, равной  $1/3$ . Из полученной фигуры вырезается центральный квадрат. Затем такой же процедуре подвергается каждый из восьми оставшихся квадратов и так далее (рис. 5). В результате получается дырявый квадратный ковер Серпинского со значением фрактальной размерности

$$D_c = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.8928. \quad (17)$$



План создания пространственного аналога квадратного ковра Серпинского был предложен австрийским математиком Менгером. Каждая грань куба, имеющая единичную

длину, делится на девять равных квадратов так же, как и при построении квадратного ковра Серпинского. В результате исходный куб разбивается на 27 одинаковых кубиков с длиной ребра, равной  $1/3$ . Затем, удаляя семь кубиков (один центральный и шесть из центра каждой грани), получаем, что противоположные грани исходного куба соединяются сквозным центральным отверстием квадратной формы. В результате из 27 остаётся 20 маленьких кубиков.

Такая итерационная процедура с вырезанием сквозных отверстий и последующего превращения каждого оставшегося кубика в 20 более мелких кубиков размером, в три раза меньшим исходного, продолжается до бесконечности. В результате таких операций образуется идеально самоподобный объект, называемый *губкой Менгера*. Каждая грань исходного куба выглядит при этом так же, как квадратный ковёр Серпинского (рис. 5).

Фрактальная размерность губки Менгера:

$$D_c = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2.7268. \quad (18)$$

Поскольку  $2 < D_c < 3$ , то это говорит о том, что *губка имеет нулевой объём, но, как фрактальный объект, обладает бесконечной площадью поверхности своих пор.*

Дадим более строгое определение фрактала. **По определению Б. Мандельброта фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича  $D_H$  для которого строго больше его топологической размерности  $D_T$ :**

$$D_H > D_T. \quad (19)$$

Все рассмотренные выше множества, в соответствии с этим определением, являются фракталами. Так, для снежинки Коха согласно имеем значение  $D_H = 1.2618$ , которое больше топологической размерности линии  $D_T = 1$ , для множеств Кантора  $D_H > D_T = 0$  для множества точек. Неравенству  $D_H > D_T$  можно придать определённый физический смысл. Оно характеризует усложнение множества. Если это линия ( $D_T = 1$ ), то её можно усложнить, сделав более изрезанной путём бесконечного числа изгибов. При этом, как мы уже убедились, длина фрактальной линии не является характерной величиной, и именно значение фрактальной размерности отражает степень изрезанности фрактальной кривой.

Заметим, что для всех рассмотренных выше регулярных фракталов фрактальная размерность оказалась меньше, чем топологическая размерность того пространства, в котором находится данный фрактальный объект. Так, для снежинки Коха, которая

располагается на плоскости, имеем неравенство  $1 < D_c < 2$ . Возникает вопрос, существует ли кривая размерности  $D_c = 2$ ? Ответ на него положительный и был дан итальянским математиком Джузеппе Пеано ещё в 1890 г.

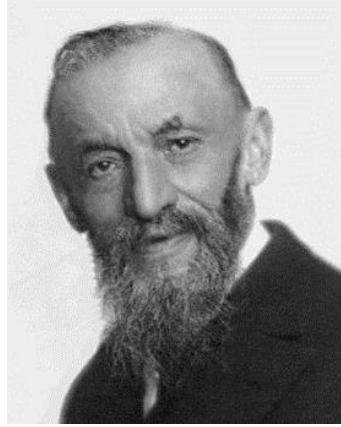
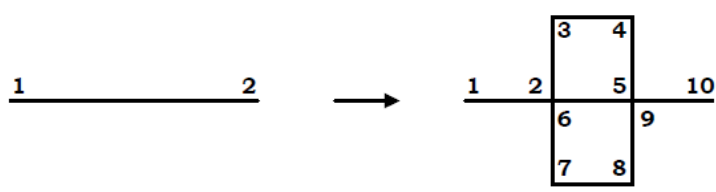
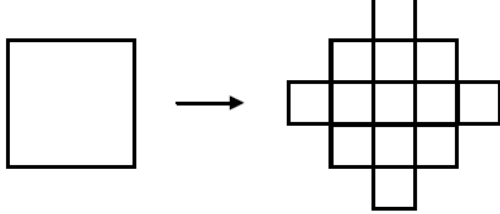
### Кривые Пеано.

Итак, действительно, существуют фракталы, которые плотно заполняют пространство, в котором они находятся, так, что их фрактальная размерность  $D_c$  равна топологической размерности пространства  $D_T$ . Одним из таких примеров являются *кривые Пеано*.

Рассмотрим одну из кривых Пеано. Пусть начальным элементом будет единичный квадрат, каждая из сторон которого на следующем шаге заменяется образующим элементом, показанным на рис. 7. Он состоит из девяти отрезков длиной  $1/3$  каждый, соединённых друг с другом под прямым углом. Цифры показывают путь обхода данной кривой. При такой геометрии неизбежны две точки самоконтакта 2–6 и 5–9. В результате исходный квадрат преобразуется так, как показано на рис. 8. Затем каждый из отрезков образовавшейся фигуры длиной  $1/3$  преобразуется подобным образом, и так до бесконечности. Таким образом, возникает самоподобная непрерывная кривая, плотно заполняющая квадратную область с площадью, равной 2. Её фрактальная размерность имеет вид

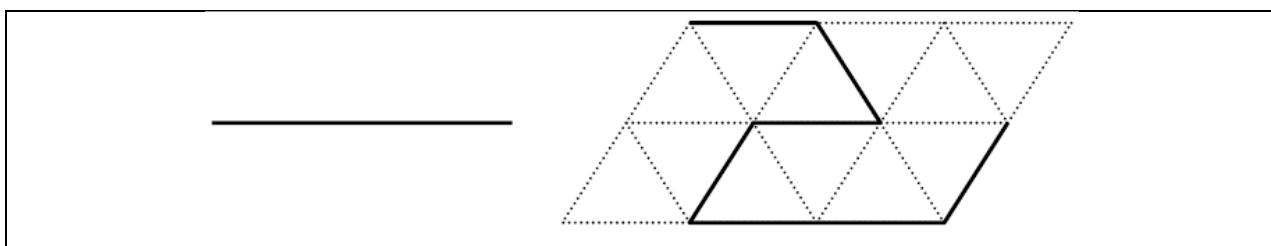
$$D_c = -\frac{\ln 9}{\ln(1/3)} = 2. \quad (20)$$

Существуют кривые Пеано, в которых, в отличие от предыдущего случая, отсутствуют точки самоконтакта. Одним из таких примеров является *кривая Госпера*. Начальный элемент для неё – это отрезок единичной длины, *образующий элемент* (или иначе говорят – *генератор*) показан рис. 9 (справа).

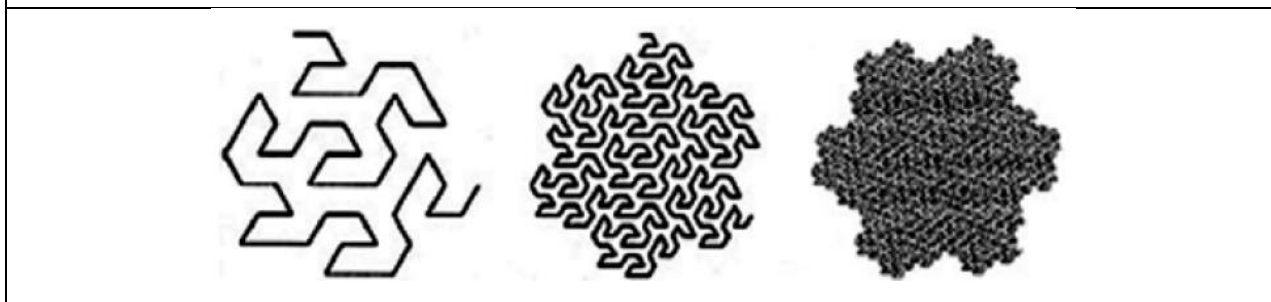
	 <p><b>Рис. 7.</b> Образующий элемент для кривой Пеано.</p>
<p><b>Джузеппе Пеано</b> Итальянский математик (1858 – 1932)</p>	 <p><b>Рис. 8.</b> Построение кривой Пеано.</p>

Он состоит из семи отрезков длиной  $1/\sqrt{7}$  каждый. Совершенно понятно, что фрактальная размерность этой кривой тоже равна двум. На рис. 9 пунктиром показана треугольная решётка, с помощью которой строится образующий элемент кривой Госпера. На рис. 10 представлены три следующих шага построения кривой Госпера.


<p><b>Ральф Вильям Госпер</b> Американский математик и программист (г.р. 1943)</p>



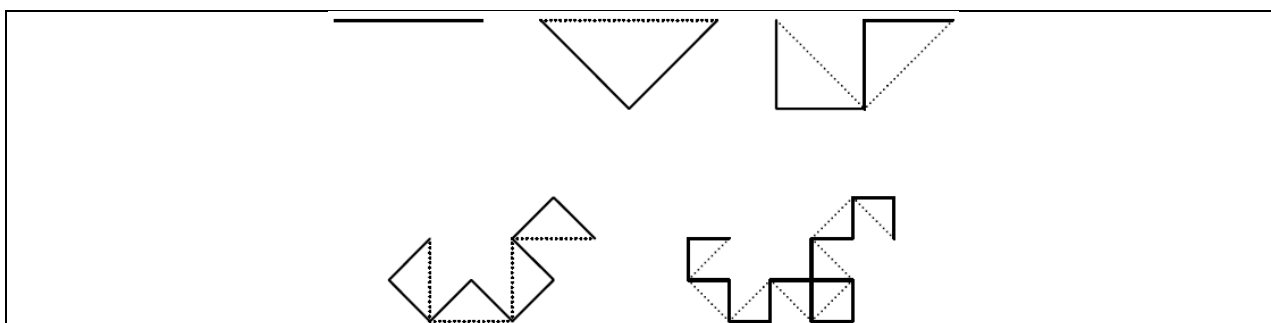
**Рис. 9 .** Начальный и образующий элемента кривой Госпера.



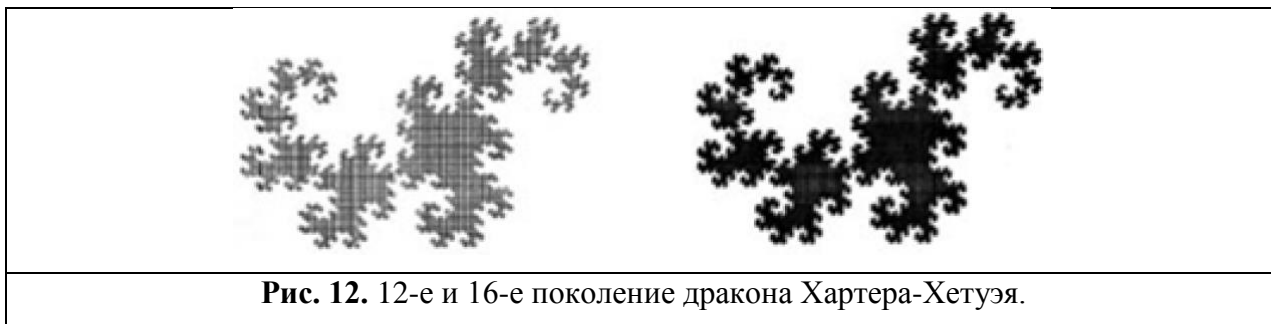
**Рис. 10.** Три шага построения кривой Госпера.

Интересная особенность кривой Госпера состоит в том, что граница области, называемой островом Госпера, которую кривая Госпера заполняет в пределе бесконечного числа шагов, сама является фрактальной. Эти острова можно использовать для непрерывного покрытия плоскости, так как можно показать, что они идеально стыкуются друг с другом. Семь таких островов, состыкованных вместе (один в центре и шесть вокруг него), образуют опять остров Госпера в три раза большего размера.

Приведём еще один пример кривой Пеано, для которой область, которую она заполняет на плоскости, имеет весьма причудливую форму. Это так называемый *дракон Хартера-Хейтуэя* (Джон Хейтуэй, Вильям Хартер – американские физики). Первые четыре шага его построения приведены на рис. 11.



**Рис. 11.** Алгоритм построения дракона Хартера-Хейтуэя.



Как следует из рисунка, каждый из отрезков прямой на следующем шаге заменяют двумя отрезками, образующими боковые стороны равнобедренного прямоугольного треугольника, для которого исходный отрезок является гипотенузой. В результате отрезок как бы прогибается под прямым углом. Направление перегиба чередуется. Первый отрезок прогибается вправо (слева направо), второй – влево, третий – опять вправо и так далее. Для удобства восприятия на каждом рисунке пунктиром показана конфигурация предыдущего шага. Таким образом, после каждого шага число имеющихся отрезков удваивается, а длина каждого соответственно уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз. Поэтому фрактальная размерность образующейся в результате (после бесконечного числа шагов) кривой равна 2, т.е. кривая закрывает за собой конечную площадь. О форме образующейся необычной фигуры можно получить представление, рассматривая рис. 12, где изображены 12-е и 16-е "поколения" дракона. Дракон представляет собой своеобразную гирлянду, состоящую из спиралевидных звеньев, непрерывно уменьшающихся в размерах от центра к периферии.

Итак, на этой лекции мы получили представление о фрактальных объектах, познакомились с размерностью Хаусдорфа-Безиковича, построили и исследовали ряд фракталов. Размерность Хаусдорфа-Безиковича, по сути, является необходимым расширением понятия размерности на фрактальные объекты, моделирующие, хотя и приближённо, огромное количество явлений в реальном мире: вокруг нас и внутри нас.