Л4 Довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу

Нехай $\xi \in F_\theta$, $\theta \in R$ — невідомий параметр.
Раніше ми здійснювали пошук оцінок параметра θ, що називалося точковим оцінюванням. Замість невідомої точки на прямій пропонувалося застосування іншої випадкової точки θ^*. Далі будемо намагатися зазначити інтервал, який містить точку θ з високою ймовірністю.

<u>Визначення.</u> Довірчим інтервалом рівня $1-\varepsilon$ для невідомого параметра θ називається інтервал

$$\left(A(\xi_1,\dots,\xi_n),\, B(\xi_1,\dots,\xi_n)\right)$$

такий, що

$$P\left(A(\xi_1,\dots,\xi_n) < \theta < B(\xi_1,\dots,\xi_n)\right) \geq 1-\varepsilon.$$

Як правило за ε вибирають досить мале число.
Довірчий інтервал називається <u>асимптотичним</u>, якщо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(A(\xi_1,\dots,\xi_n) < \theta < B(\xi_1,\dots,\xi_n)\right) \geq 1-\varepsilon.$$

Асимптотичний довірчий інтервал застосовується за умови великого об'єму вибірки.
Довірчий інтервал це інтервал з випадковими кінцями через те що він визначається за вибіркою. Вужчий інтервал — кращий, точніший.
Далі будемо здійснювати побудову довірчих інтервалів для невідомих параметрів у випадку вибірки із нормального розподілу.
Нехай $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \Phi_{a,\sigma^2}$.

1. Довірчий інтервал для α за умови, коли σ^2 відома.

Раніше було встановлено, що $\frac{\bar{\xi}-\alpha}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \in \Phi_{0,1}$ – стандартному нормальному розподілу (СНР).

За допомогою таблиць СНР можливо знайти число $q>0$ таке, що $\Phi_{0,1}(-q)=\frac{\varepsilon}{2}$.

Це означає, що

$$P\left(-q<\frac{\bar{\xi}-\alpha}{\sigma}\sqrt{n}<q\right)=\Phi_{0,1}(q)-\Phi_{0,1}(-q)=1-\varepsilon$$

або після перетворень

$$P\left(\bar{\xi}-\frac{q\sigma}{\sqrt{n}}<\alpha<\bar{\xi}+\frac{q\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\varepsilon.$$

Отже побудовано довірчий інтервал $\left(\bar{\xi}-\frac{q\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{\xi}+\frac{q\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Його довжина становить $\frac{2q\sigma}{\sqrt{n}}$

Це означає, що за умови великих значень n можливо досить точно локалізувати значення невідомого параметра α.

2. Довірчий інтервал для α за умови, коли σ^2 невідома.

Попередня конструкція не підходить через те, що в ній приймає участь невідомий параметр σ.

У цьому випадку застосуємо наслідок теореми про властивості вибірок із нормального розподілу. У відповідності наслідку випадкова величина

$$\frac{\bar{\xi}-\alpha}{S}\sqrt{n-1},$$

яка не залежить від σ розподілена за законом Стьюдента з $n-1$ ступенями свободи.

У цьому випадку застосуємо таблиці розподілу T_{n-1} і знайдемо число q таке, що

$$T_{n-1}(-q) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді маємо

$$P\left(-q < \frac{\bar{\xi} - \alpha}{S}\sqrt{n-1} < q\right) = T_{n-1}(q) - T_{n-1}(-q) = 1-\varepsilon,$$

і після перетворень отримуємо довірчий інтервал

$$P\left(\bar{\xi} - \frac{qS}{\sqrt{n-1}} < \alpha < \bar{\xi} + \frac{qS}{\sqrt{n-1}}\right) = 1-\varepsilon.$$

3. Довірчий інтервал для σ^2 за умови, що α відомий.

Випадкові величини $\frac{\xi_i - \alpha}{\sigma}$, $i = 1, \dots, n$, незалежні і мають стандартний нормальний розподіл, тому

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\xi_i - \alpha}{\sigma}\right)^2 \in \chi^2_n.$$

Із таблиць розподілу χ^2_n знайдемо числа q_1 і q_2 такі, що $\chi^2_n(q_1) = \frac{\varepsilon}{2}$, $\chi^2_n(q_2) = \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді

$$P\left(q_1 < \sum_{i=1}^{n} \frac{(\xi_i - \alpha)^2}{\sigma^2} < q_2\right) = \chi^2_n(q_2) - \chi^2_n(q_1) = 1-\varepsilon.$$

Попереднє співвідношення еквівалентне, тому, що

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \alpha)^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \alpha)^2}{q_1}\right) = 1-\varepsilon.$$

4. Довірчий інтервал для σ^2 за умови, що α невідомий параметр.

Скористаємося тим, що $\frac{nS^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}$.

Із таблиць розподілу χ^2_{n-1} знаходимо числа q_1 і q_2 такі, що $\chi^2_{n-1}(q_1) = \frac{\varepsilon}{2}$, $\chi^2_{n-1}(q_2) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Тоді

$$P\left(q_1 < \frac{nS^2}{\sigma^2} < q_2\right) = \chi^2_{n-1}(q_2) - \chi^2_{n-1}(q_1) = 1-\varepsilon$$

після перетворень отримуємо довірчий інтервал

$$P\left(\frac{nS^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{q_1}\right) = 1-\varepsilon.$$

Побудова довірчих інтервалів за допомогою нормального наближення

Раніше вдалося побудувати точні довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу, користуватися якими можливо за будь-яких значень n.
Нажаль, у загальному випадку для параметрів інших розподілів таких хороших конструкцій не існує.
Але для параметрів багатьох розподілів вдається побудувати асимптотичні довірчі інтервали.
Нижче наводиться короткий опис такої конструкції.
Нехай (як раніше) $\xi \in F_\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$ - невідомий параметр, для якого будуватиметься довірчий інтервал.
Нехай цей параметр можливо виразити через один із моментів розподілу: $\theta = g(a_k)$, $k \geq 1$. Також нехай функція g диференційовна і $g'(a_k) \neq 0$.
Розглянемо оцінку методом моментів $\theta^* = g(a_k^*)$.
Через близькість точок a_k^* і a_k за умови великих значень n можливо застосувати лінійне наближення у відповідності з формулою Тейлора:

$$\theta^* = g(a_k^*) \simeq g(a_k) + (a_k^* - a_k)g'(a_k)$$

або

$$\frac{\theta^* - \theta}{g'(a_k)} \simeq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^k - a_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^k - na_k}{n}$$

Допустимо додатково, що існує a_{2k}, і позначимо

$$\sigma^2 = D\xi_1^k = a_{2k} - a_k^2.$$

Домножимо обидві частини отриманого співвідношення на $\sqrt{n}$ і поділемо на σ. Тоді маємо

$$\frac{\theta^* - \theta}{\sigma g'(a_k)}\sqrt{n} \simeq \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^k - n a_k}{\sigma\sqrt{n}}.$$

За умови великих значень n розподіл правої частини близький до $\Phi_{0,1}$ у відповідності центральній граничній теоремі (ЦГТ).

Нехай число q таке, що $\Phi_{0,1}(-q) = \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді

$$P\left(\left|\frac{\theta^* - \theta}{\sigma g'(a_k)}\sqrt{n}\right| < q\right) \simeq \Phi_{0,1}(q) - \Phi_{0,1}(-q) = 1 - \varepsilon.$$

Як і раніше потрібно розв'язати цю нерівність відносно параметра θ. Але величина в знаменнику $\sigma|g'(a_k)|$ створює деяку проблему через те, що залежить від θ, тобто $\sigma|g'(a_k)| = h(\theta)$. Зауважимо додатково, що h – неперервна функція, тоді $h(\theta^*) \simeq h(\theta)$.

Отже за умови великих значень n

$$P\left(\frac{|\theta^* - \theta|}{h(\theta^*)}\sqrt{n} < q\right) \simeq 1 - \varepsilon.$$

Таким чином отримуємо асимптотичний довірчий інтервал

$$P\left(\theta^* - \frac{q h(\theta^*)}{\sqrt{n}} < \theta < \theta^* + \frac{q h(\theta^*)}{\sqrt{n}}\right) \simeq 1 - \varepsilon$$

<u>Приклад.</u> Нехай $\xi \in \Pi_\lambda$. Тут $\lambda = a_1$, тобто можливо взяти $k = 1$, $g(y) = y$. Тоді $h(\lambda) = \sigma g'(a_k) = \sqrt{\lambda}$ і ми отримуємо для параметра λ асимптотичний довірчий інтервал

$$\left(\bar{\xi}-\frac{q\sqrt{\bar{\xi}}}{\sqrt{n}},\ \bar{\xi}+\frac{q\sqrt{\bar{\xi}}}{\sqrt{n}}\right).$$

Перевірка гіпотез.

Постановка задачі, основні поняття.

Нехай $\xi \in F$ і розподіл F невідомий. У цьому випадку природньо висувати гіпотези відносно розподілу F. Гіпотези позначатимемо $H_1, H_2, \dots$

Гіпотеза називається простою, якщо вона однозначно визначає розподіл вибірки.

Всі інші гіпотези називаються складними

Наприклад, $H_1: \xi \in \Phi_{0,1}$ – проста гіпотеза,

$H_2: \xi \in \Phi_{a,\sigma^2}$ – складна гіпотеза, якщо значення a і σ^2 не конкретизовані.

Найчастіше висуваються дві гіпотези, які виключають одна одну H_1 і H_2. Одна з цих гіпотез (за нашим припущенням) вірна, але нам невідомо яка саме. Першу з цих гіпотез H_1 називають основною гіпотезою, а другу – конкуруючою гіпотезою або альтернативною. Ми маємо одну із гіпотез прийняти і тим самим відкинути іншу гіпотезу. У цьому полягає наше вирішення. В подальшому рішення будемо формулювати відносно основної гіпотези H_1, через те, що це однозначно визначає наші дії відносно альтернативи.

Отже необхідно мати правило у відповідності з яким за вибіркою водразу можливо було б визначити, приймається H_1 чи ні. Таке правило називається критерієм. Побудова критерію означає, що всі можливі значення вибірки розбиваються на дві категорії. Тобто вибірковий простір $\mathbb{R}^n$ необхідно розбити на дві частини:

$$\mathbb{R}^n = K \cup \bar{K}.$$

Якщо $\xi \in K$, то гіпотеза H_1 відкидається, якщо $\xi \in \overline{K}$, то приймається. Множина K називається критичною, її задання повністю визначає критерій. Ситуації, які можуть виникнути коли приймається рішення відображені в таблиці.

	Правильна H_1	Правильна H_2
Приймаємо H_1	~~Хорошо~~ Добре	Погано
Приймаємо H_2	Погано	Добре

Отже існують дві небажані ситуації: Якщо правильна одна гіпотеза, а ми приймаємо іншу у відповідності з обраним критерієм. Як правило уникнути подібних помилок не вдається. Вихід полягає в наступному: необхідно застосовувати такі критерії, для яких ймовірності прийняття помилкових рішень малі.

Надалі будемо застосовувати позначення $P_i(A)$, якщо обчислюється ймовірність за умови, що правильна гіпотеза H_i.

Нехай перевіряється проста гіпотеза $H_1: F = F_1$ проти простої альтернативи $H_2: F = F_2$. Тоді ймовірність відкинути правильну (основну) гіпотезу $\beta_1 = \beta_1(K) = P_1(\xi \in K)$ називається ймовірністю похибки першого роду. Аналогічно, ймовірність прийняти неправильну гіпотезу $\beta_2 = P_2(\xi \in \overline{K})$ називається ймовірністю похибки другого роду. Число $1 - \beta_2$ називається потужністю критерію.

Обчислення ймовірності помилкового рішення за умови справедливості складної гіпотези, як правило неможливе: ми не знаємо, який конкретно є розподіл вибірки.

Розглянемо далі критерії погодження. Вони розробляються для перевірки гіпотез типу

$$H_1: F = F_1 \text{ проти } H_2: F \neq F_1.$$

Тобто маємо перевірити чи погоджуються дані спостережень з передбаченням того, що $\xi \in F_1$. Вимагатимемо, щоб для розглянутих критеріїв ймовірність помилки першого роду була мала: $\beta_1 \le \varepsilon$ для наперед обраного малого числа ε.

В таких випадках кажуть, що критерій має рівень $1-\varepsilon$. Часто доводиться задовольнятися асимптотичним критерієм рівня $1-\varepsilon$, тобто коли

$$\lim_{n\to\infty} \beta_1 \le \varepsilon.$$

Критерій Колмогорова.

Критерій спирається на такій теоремі.

Теорема Колмогорова. Нехай $\xi \in F$ і F неперервна. Позначимо

$$D_n = \sup_y \left| F_n^*(y) - F(y) \right|.$$

Тоді для будь-якого $y > 0$ коли $n \to \infty$

$$P(\sqrt{n} D_n < y) \to K(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{-2m^2y^2}$$

Функція розподілу $K(y)$ називається функцією Колмогорова, вона абсолютно неперервна. Для знаходження значень функції Колмогорова є таблиці.

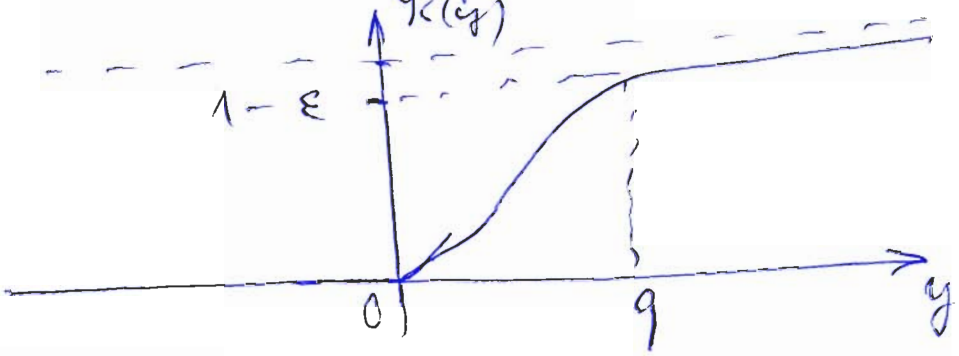
Перейдемо до побудови критерію.

Нехай $\xi \in F$ і перевіряється гіпотеза $H_1: F = F_1$ проти $H_2: F \neq F_1$, де F_1 неперервна функція. Наша задача — побудувати асимптотичний критерій рівня $1-\varepsilon$.

Спочатку знайдемо величину D_n в передбаченні, що правильна гіпотеза H_1, тобто $F=F_1$:

$$D_n = \sup_y \left| F_n^*(y) - F_1(y) \right|.$$

За теоремою Колмогорова, за умови великих значень n функція розподілу випадкової величини $\sqrt{n}\, D_n$ мало відрізняється від $K(y)$, тому попередньо за таблицями функції Колмогорова можливо знайти таке число $q>0$, що $K(q)=1-\varepsilon$.



Якщо правильна гіпотеза H_1 то $P_1(\sqrt{n}\, D_n < q) \simeq K(y) = 1-\varepsilon$. Тому будемо відкидати гіпотезу H_1, якщо виявиться, що $\sqrt{n}\, D_n \geq q$, тобто якщо розходження між емпіричною та гіпотетичною функціями розподілу досить велике.

При цьому

$$\beta_1 = P_1(\sqrt{n}\, D_n \geq q) = 1 - P_1(\sqrt{n}\, D_n < q) \simeq 1 - K(y) = \varepsilon$$

Критична множина для побудованого критерію така:

$$K = \{ (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n}\, D_n \geq q \}.$$