

Лекція 7

Осцилятор Ван-дер-Поля

1. Автоколивальні системи.
2. Аналіз динаміки осцилятора Ван-дер-Поля.
3. Зміна фазового об'єму.
4. Теорема Бендіксона.
5. Теорема Пуанкаре про повернення.

Перш за все, нагадаємо, як веде себе звичайний лінійний осцилятор при наявності позитивного або негативного тертя. Рівняння такого осцилятора має вид:

$$\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + x = 0 . \quad (1)$$

Тут ν – величина тертя. Якщо тертя позитивне ($\nu > 0$), то амплітуда зміщення осцилятора експоненціально зменшується. Якщо ж тертя негативне ($\nu < 0$), то амплітуда зміщення осцилятора експоненціально наростає.

Введемо поняття автоколивань і автоколивальних систем. Якщо в системі встановлюються і підтримуються незгасаючі коливання за рахунок сил, що залежать від стану руху самої системи, причому «амплітуда» цих коливань визначається властивостями системи, а не початковими умовами, то такі коливання називаються автоколиваннями, а системи, в яких можливі автоколивання – автоколивальними системами.

Як приклад розглянемо схему лампового автогенератора, наведену на рис. 1.

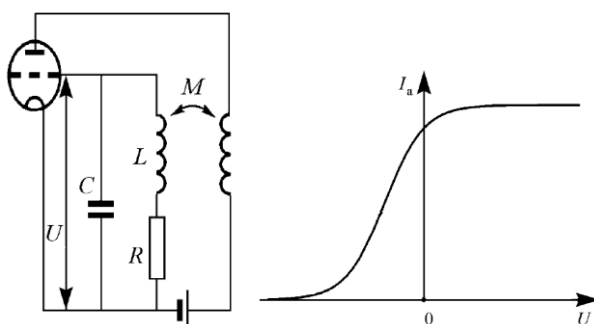


Рис. 1а. Схема лампового автогенератора з контуром в ланцюзі сітки. L, C, R – відповідно індуктивність, ємність і послідовно опір в ланцюзі коливального контуру; M – взаємодія між анодною ланцюгом і коливальним контуром в ланцюзі сітки. **Рис. 1б.** Вольтамперная характеристика лампи, аппроксимированная кубичным поліномом.

Згідно з другим законом Кірхгофа, отримуємо

$$L\ddot{q} + r\dot{q} + \frac{1}{C}q = -M \frac{di_a}{dt}, \quad (2)$$

де q – заряд на конденсаторі, i_a – мале збільшення анодного струму лампи (або на пластинах конденсатора). Замінюючи q на CU (де U – напруга на конденсаторі), маємо

$$LC\ddot{U} + RC\dot{U} + U = -M \frac{di_a}{dt}. \quad (3)$$

Мале збільшення анодного струму i_a і напруга на сітці x пов'язані співвідношенням

$$i_a = \varphi(U), \quad (4)$$

яке являє собою рівняння сіткової характеристики лампи. Будемо для простоти припускати, що лампа має настільки великим внутрішнім опором, що можна знехтувати реакцією анодному ланцюзі на величину анодного струму.

Позначаючи

$$S(U) = \frac{d\varphi(U)}{dU} \quad (5)$$

і підставляючи $di_a/dt = S(U)\dot{U}$ в рівняння (2), приходимо до рівняння, яке описує коливальні процеси в системі

$$LC\ddot{U} + [RC - |M|S(U)]\dot{U} + U = 0, \quad (6)$$

де $|M| = -M$. Апроксимуємо сітковий характеристику лампи $\varphi(x)$ поліномом

$$i_a = S_0U + S_2U^3, \quad (7)$$

перепишемо рівняння (6) у виді

$$LC\ddot{U} + [RC - |M|S_0 - 3|M|S_2U^2]\dot{U} + U = 0. \quad (8)$$

Вводячи позначення

$$\tau = \omega_0 t, \quad \lambda = \frac{|M|S_0 - RC}{\sqrt{LC}}, \quad p = \sqrt{\frac{3|M|S_2}{RC - |M|S_0}} U, \quad (9)$$

можемо переписати рівняння (6) у виді

$$\frac{d^2 p}{d\tau^2} - \lambda(1 - p^2)\dot{p} + p = 0. \quad (10)$$

Це рівняння називають рівнянням Ван-дер-Поля. У нормировці $x = \sqrt{\lambda} p$ це рівняння можна записати у виді

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (11)$$



Балтазар ван дер Поль
(*Balthasar van der Pol*, 1889-1959).
Нідерландський фізик.

Рівняння (11) відрізняється від вивченого нами рівняння (1) тим, що тертя стало нелінійною функцією, яка може змінювати свій знак. Ця особливість активного елементу (тертя) радикально змінює властивості динаміки осцилятора. Найбільш важливим є поява нового об'єкта, який лежить в основі роботи практично всіх джерел випромінювання від звичайних ВЧ-генераторів до лазерів. Цим об'єктом є граничний цикл. Головною метою цієї лекції є з'ясування умов виникнення граничного циклу і його характеристики.

Якісне розгляд динаміки осцилятора.

Перш за все, пояснимо «на пальцях», як виникає граничний цикл. У рівнянні (11) спеціально перед членом, який описує загасання, поставлений знак мінус. Це означає, що малі амплітуди ($x^2 < \lambda$) будуть експоненціально наростати з інкрементом пропорційним $(\lambda - x^2)$. Амплітуда буде експоненціально наростати до тих пір, поки другий доданок в круглих дужках рівняння (11) не стане більшим, ніж λ , тобто $(\lambda - x^2) < 0$. Після цього знак тертя, тобто знак другого доданка в рівняння (11), зміниться на протилежний знак. Це означає, що тертя стало позитивним. Будь-яке перевищення амплітуди зміщення осцилятора над величиною $\sqrt{\lambda}$ приведе до загасання амплітуди коливань. І навпаки - будь-яке зменшення амплітуди по відношенню до величини $\sqrt{\lambda}$ призведе до виникнення негативного тертя і до експоненціального зростання амплітуди осцилятора. Якщо ж амплітуда осцилятора буде рівною $\sqrt{\lambda}$, то тертя зникає. Таким чином, можна очікувати, що осцилятор, який описується рівнянням (11), буде стійко коливатися з амплітудою рівній $\sqrt{\lambda}$. Як ми побачимо нижче, строгий аналіз рівняння (11) дійсно призводить до цього результату.

Аналітичний розгляд.

Проведемо строгий аналіз рівняння (11). Будемо шукати рішення рівняння (11) у виді:

$$x = A(\tau)e^{i\tau} + A^*(\tau)e^{-i\tau}. \quad (12)$$

Звернемо увагу на те, що формула (12) замість однієї дійсної змінної, вводить дві змінні. Цими змінними є дійсна і уявна частини амплітуди A . Так як ми замість однієї невідомої функції ввели дві функції, то ми можемо накласти на ці функції деяку зручну для нас умову. Такою додатковою умовою зручно вибрати умову:

$$\dot{A}e^{i\tau} + \dot{A}^*e^{-i\tau} = 0. \quad (13)$$

Використовуючи вираз (12), знайдемо першу і другу похідні цієї функції:

$$\dot{x} = i[Ae^{i\tau} - A^*e^{-i\tau}], \quad (14)$$

$$\ddot{x} = -x + i \left[\dot{A} e^{i\tau} - \dot{A}^* e^{-i\tau} \right] = -x + 2i\dot{A} e^{i\tau} . \quad (15)$$

1. Підставимо ці вирази в рівняння (11):

$$\left[-x + 2i\dot{A} e^{i\tau} \right] - \left[\lambda - \left(A^2 e^{2i\tau} + (A^*)^2 e^{-2i\tau} + 2|A|^2 \right) \right] \cdot i \left(A e^{i\tau} - A^* e^{-i\tau} \right) + x = 0$$

або

$$2i\dot{A} = i \left[\lambda - \left(A^2 e^{2i\tau} + (A^*)^2 e^{-2i\tau} + 2|A|^2 \right) \right] \left(A - A^* e^{-2i\tau} \right) . \quad (16)$$

2. Після усереднення рівняння (16) по періоду $T = 2\pi$ отримаємо:

$$\dot{A} = \frac{1}{2} \left[\lambda - |A|^2 \right] A . \quad (17)$$

Рівняння (17) записано для комплексної функції $A(\tau)$. Для його вирішення зручно зробити наступну підстановку:

$$A = a \cdot e^{i\phi}; \dot{A} = (\dot{a} + i\dot{\phi}) e^{i\phi}; |A|^2 = a^2 . \quad (18)$$

Функції $a(\tau)$ і $\phi(\tau)$ вже дійсні функції. Тоді рівняння (17) набуде виду:

$$\dot{a} + i\dot{\phi} = \frac{1}{2} (\lambda - a^2) a . \quad (19)$$

Рівняння (19) містить як дійсну частину, так і уявну частину. Ці частини повинні бути рівні:

$$\dot{a} = \frac{1}{2} (\lambda - a^2) a; \dot{\phi} = 0 . \quad (20)$$

Із системи рівнянь (20) видно, що фаза осцилятора не змінюється ($\phi = const$). Це означає, що частота комплексної амплітуди не змінилася, тобто, немає ніякої поправки до частоти коливань. З урахуванням цього факту систему рівнянь (20) зручно переписати (для подальшого аналізу):

$$\dot{\rho} = (\lambda - \rho) \rho , \quad (21)$$

де $\rho = a^2$.

3. Проведемо аналіз рівняння (21). Перш за все, знайдемо стаціонарні точки (особливі точки):

$$\rho_1 = 0; \rho_2 = \lambda. \quad (22)$$

З'ясуємо характер особливих точок. Для цього введемо маленькі відхилення від цих особливих точок. Для першої особливої точки матимемо: $\rho = \rho_1 + \delta = 0 + \delta$. Підставляючи цей вираз в рівняння (21), знайдемо рівняння, яке описує динаміку малих відхилень:

$$\dot{\delta} = \lambda \delta. \quad (23)$$

Враховуючи, що параметр λ позитивний, ми бачимо, що **ця стаціонарна точка є нестійкою**. Аналогічним чином отримаємо рівняння для опису динаміки в околі другий стаціонарної точки:

$$\dot{\delta} = -\delta \lambda. \quad (24)$$

Рівняння (24) показує, що **ця стаціонарна точка є стійкою**. Таким чином, ми аналітично отримали результат, який повністю збігається з нашим простим аналізом «на пальцях». Дійсно, видно, що друга стаціонарна точка ($\rho_2 = \lambda$) є стійкою точкою. Враховуючи, що $\rho = a^2$, ми бачимо повний збіг з простою оцінкою амплітуди коливань осцилятора Ван-дер-Поля.

4. Проведений вище розгляд рівняння (11) або (21) є якісним розглядом. У загальному випадку рівняння (21) досить легко вирішується точно. Нижче ми наведемо це рішення. Будемо виходити з рівняння

$$\dot{\rho} = (\lambda - \rho) \rho. \quad (25)$$

Це рівняння можна переписати:

$$\frac{d\rho}{\rho(\lambda - \rho)} = dt. \quad (26)$$

Функцію, яка знаходиться в лівій частині співвідношення (26), зручно переписати:

$$\frac{1}{\rho(\lambda - \rho)} = \left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\lambda - \rho} \right] \frac{1}{\lambda}. \quad (27)$$

З огляду на це розкладання, рівняння (26) можна представити у виді інтегралів:

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{\lambda} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\lambda - \rho} = (t - t_0). \quad (28)$$

Інтеграли в (28) легко беруться:

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) - \ln\left(\frac{\rho - \lambda}{\rho_0 - \lambda}\right) = t\lambda. \quad (29)$$

Тут $t_0 = 0$. Вираз (29) зручно перетворити:

$$\ln\left[\frac{\rho(\rho_0 - \lambda)}{\rho_0(\rho - \lambda)}\right] = \lambda t; \quad \frac{\rho(\rho_0 - \lambda)}{\rho_0(\rho - \lambda)} = \exp(\lambda t)$$

$$\rho(\rho_0 - \lambda) = \rho_0(\rho - \lambda)e^{\lambda t}$$

$$\rho[(\rho_0 - \lambda) - \rho_0 e^{\lambda t}] = -\lambda \rho_0 e^{\lambda t}$$

$$\rho[\rho_0(1 - e^{\lambda t}) - \lambda] = -\lambda \rho_0 e^{\lambda t}.$$

Після цих перетворень остаточно отримаємо такий вираз для квадрата амплітуди осцилятора:

$$\rho = \frac{-\lambda \rho_0}{[(\rho_0 - \lambda)e^{-\lambda t} - \rho_0]} = \frac{\lambda}{\left[1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\rho_0}\right)e^{-\lambda t}\right]}. \quad (30)$$

Якщо початкове збурення мало $\rho_0 \ll \lambda$, то на початковій стадії ($\lambda t \ll 1$) амплітуда коливань нарастає експоненціально: $\rho \approx \rho_0 \exp(\lambda t)$. На великих часах ($t \rightarrow \infty$) маємо $\rho \rightarrow \lambda$, тобто встановлюються автоколивання з постійною амплітудою $a \rightarrow \sqrt{\lambda}$. Видно, що асимптотично при ($\lambda t \gg 1$) вираз (30) збігається з виразом для другої (стійкою) стаціонарної точки (22). Процес встановлення коливань показаний на рис. 2.

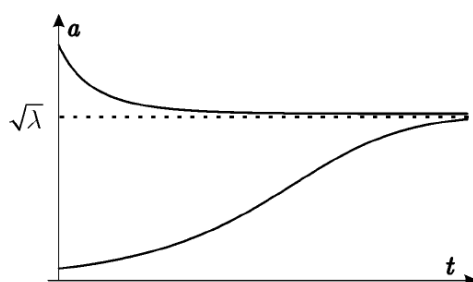


Рис. 2. Динаміка амплітуди автоколивань в процесі встановлення стаціонарного режиму.

Остаточно, для вихідної змінної $x(\tau)$ в режимі квазігармонічних коливань матимемо

$$x(\tau) = 2\sqrt{\lambda} \cos(t + \varphi_0) + \dots, \quad (31)$$

де φ_0 – довільна початкова фаза, а трьома крапками позначені вищі гармонійні складові, амплітуди яких малі. Параметр λ є біфуркаційним. Таким чином, коли біфуркаційний параметр λ проходить критичне значення $\lambda_c = 0$, фазовий портрет системи трансформується наступним чином.

При $\lambda < \lambda_c$ на фазовій площині є єдине стан рівноваги типу стійкий фокус (рис. 3а). При $\lambda > \lambda_c$ воно стає нестійким і в його околиці виникає стійкий граничний цикл (рис. 3б). Характерний розмір граничного циклу (тобто амплітуда стаціонарних автоколивань) збільшується пропорційно $\sqrt{\lambda}$ (рис. 3в). Така біфуркація називається **нормальної біфуркацією Андронова - Хопфа**. Оскільки амплітуда коливань з ростом λ плавно збільшується від нуля, кажуть, що самозбудження відбувається **м'яко**. Важливо відзначити, що для всіх систем з м'яким самозбудженням закон $a_{st} \sim \sqrt{\lambda - \lambda_c}$ є універсальним. Зрозуміло, мова йде лише про слабку надкритичність, коли коливання є гармонічними.

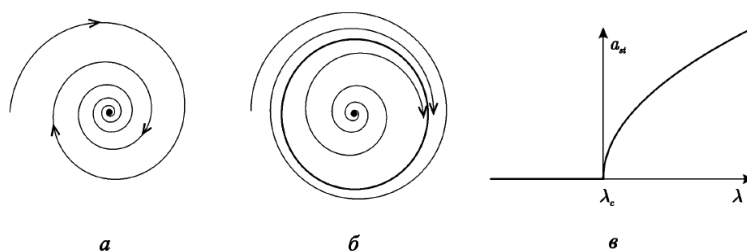


Рис. 3. Трансформація фазових портретів при біфуркації Андронова - Хопфа: а) $\lambda < \lambda_c$; б) $\lambda > \lambda_c$; в) залежність характерного розміру граничного циклу від біфуркаційного параметра.

Автоколивальна система з жорстким збудженням.

Розглянемо генератор на активному елементі (який перетворює енергію джерела живлення в енергію коливань, що генеруються) з негативною диференціальною провідністю, вольтамперна характеристика якого можна апроксимувати таким чином (рис. 4):

$$I(U) = -g_0 U - g_2 U^3 + g_4 U^5 + \dots \quad (32)$$

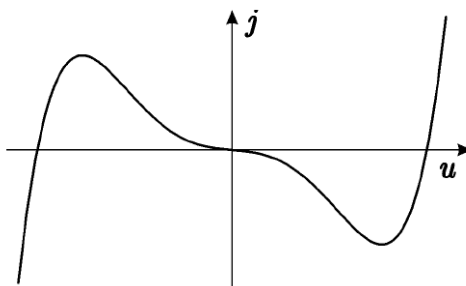


Рис. 4. Вольтамперна характеристика активного елементу з негативною диференційною провідністю, при якій можливе жорстке порушення коливань.

Коефіцієнти g_n вважаються позитивними. Доданок з нелінійністю п'ятого порядку необхідно врахувати, щоб описати ефекти нелінійного обмеження амплітуди коливань. У безрозмірних змінних відповідне диференціальне рівняння, що описує коливання генератора має вид

$$\ddot{x} - (\lambda + \mu x^2 - x^4) \dot{x} + x = 0. \quad (33)$$

Умова стійкості особливої точки системи (на площині (x, y) це точка $(0, 0)$) має вид $\lambda < 0$. Однак, навіть якщо воно виконано, автоколивання все ж можуть виникнути, якщо початкове збурення досить велике. Дійсно, з рівняння (33) видно, що член, пропорційний μx^2 , представляє свого роду негативне загасання (якщо $\mu > 0$), причому нелінійне. Коли амплітуда початкового обурення перевершує деяке критичне значення, нелінійне посилення перевершує лінійне загасання і коливання починають наростати. У такому випадку говорять про *жорстке збудження*. На рис. 5 зображений фазовий портрет системи з жорстким збудженням. На фазовій площині є *два аттрактора*: стан рівноваги типу *стійкий фокус* і *стійкий граничний цикл*. Кожен аттрактор має свій *басейн тяжіння*, які розмежовані нестійким граничним циклом.

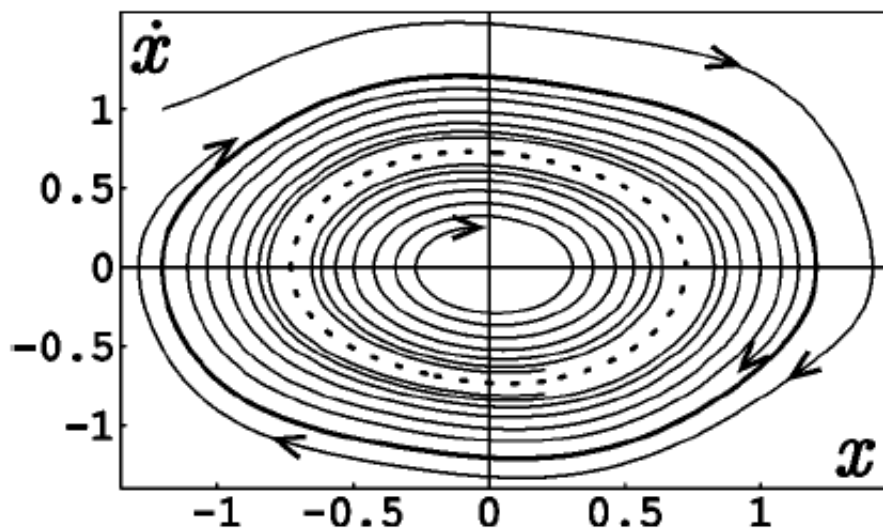


Рис. 5. Фазовий портрет автоколивальної системи з жорстким збудженням при $\lambda = -0.1$, $\mu = 1$. Жирної суцільною лінією показаний стійкий граничний цикл, пунктирною - нестійкий.

Аналіз процесу жорсткого збудження автоколивальної системи проводиться так само, як і в попередньому випадку. Можна показати, що для такої системи біфуркаційним буде значення параметра $\lambda_c = -\mu^2/8$.

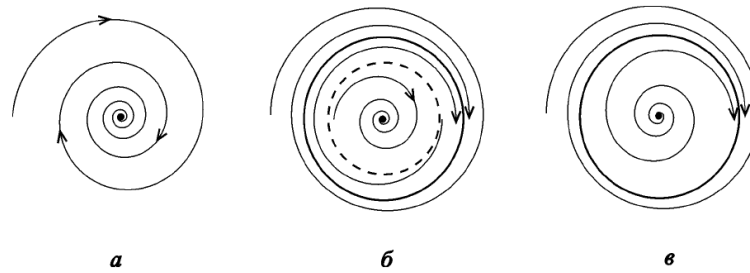


Рис. 6. Трансформація фазових портретів при зворотному біфуркації Андронова-Хопфа: а) $\lambda < \lambda_c$; б) $\lambda_c < \lambda < 0$; в) $\lambda > 0$. Нестійкий граничний цикл показаний штриховою лінією.

Отже, при збільшенні параметра λ фазовий портрет трансформується наступним чином (рис. 6). При $\lambda < \lambda_c$ на фазовій площині є єдине стан рівноваги типу стійкий фокус (рис. 6а). При відбувається народження пари граничних циклів (стійкого і нестійкого) з згущення фазових траєкторій (рис. 6б). З ростом λ стійкий цикл збільшується в розмірах, нестійкий – зменшується, відповідно до формули. При $\lambda = 0$ нестійкий граничний цикл зникає, а стан рівноваги втрачає стійкість. Після цього фазовий портрет не має якісних відмінностей від системи з м'яким збудженням: є нестійкий стан рівноваги і стійкий граничний цикл (рис. 6в). Така біфуркація називається **зворотної (субкритичної) біфуркацією Андронова - Хопфа**. Термін «субкритичного» пов'язаний з тим, що граничний цикл з'являється до того, як стан рівноваги втратить стійкість.

Важливо відзначити, що в області $\lambda_c < \lambda < 0$ має місце бистабільність, тобто співіснування двох стійких станів; в даному випадку це нерухома точка і граничний цикл. Тому жорстке порушення характеризується гістерезисом (нагадаємо, що бистабільність і гістерезис відносяться до числа фундаментальних нелінійних ефектів).

Відомий кожному приклад автоколивальної системи з жорстким порушенням - це маятниковий годинник-ходики. Дійсно, після того, як годинник заведені, тобто гиря піднята на необхідну висоту, необхідно повідомити маятнику початковий поштовх, щоб він почав коливатися.

Стиснення фазового об'єму

Важливою характеристикою будь-якої динамічної системи є величина його фазового об'єму. Як ми побачимо нижче, ця величина може, як збільшуватися, так і зменшуватися. Для деяких систем, особливо гамільтонових систем, ця величина залишається постій-

ною. Отже, розглянемо динамічну систему, яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з $(N/2)$ ступенями свободи:

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}); \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (34)$$

Виберемо довільну точку фазового простору. Ця точка задовольняє рівнянню (34):

$$\dot{x}_i^* = f_i(\vec{x}^*).$$

Виберемо малі відхилення по всіх координатах фазового простору:

$x_i = x_i^* + a_i$. Тоді для нових точок фазового простору рівняння (34) буде виглядати так:

$$\dot{x}_i^* + \dot{a}_i = f_i(\vec{x}_i^* + a_i). \quad (35)$$

Так як відхилення малі ($|a_i| \ll 1$), то праву частину рівняння (35) розкладемо в ряд Тейлора:

$$f_i(\vec{x}^* + a_i) \approx f_i(\vec{x}^*) + a_i \cdot \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right)_{x^*} + \dots. \quad (36)$$

Залишимо в розкладанні (36) тільки перші неznикаючі складові. Тоді для відшукування малих відхилень від обраної точки фазового простору (x_i^*), отримаємо наступне рівняння:

$$\dot{a}_i = a_i \cdot \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right)_{x^*}. \quad (37)$$

Нас цікавить не динаміка окремих зсувів, а динаміка фазового обсягу. Фазовий об'єм, що

нас цікавить, ми визначимо формулою: $V = \prod_{n=0}^N a_n$. Рівняння для цього обсягу буде мати

вид:

$$\dot{V} = \sum_{m=0}^N \dot{a}_m \prod_{n \neq m}^N a_n = \sum_{m=0}^N \frac{\partial f_m}{\partial x_m} a_m \prod_{n \neq m}^N a_n. \quad (38)$$

Легко бачити, що останні два множники в рівнянні (38) визначають об'єм, що нас цікавить. Остаточне рівняння для відшукування фазового обсягу набуває вигляду:

$$\dot{V} = \sum_{m=0}^N \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \cdot V = V \cdot (\text{div} \vec{f}). \quad (39)$$

Таким чином, якщо $\text{div} \vec{f} < 0$, то фазовий об'єм зменшується. Якщо ж $\text{div} \vec{f} > 0$, то фазовий об'єм зростає.

Розглянемо приклади

1. Перш за все, розглянемо найбільш важливий і поширений приклад. Це приклад про фазовий об'єм гамільтонових систем. Нехай у нас є Гамільтона система, тобто нам дана $H(\vec{p}, \vec{q})$ – функція Гамільтона з N ступенями свободи, коли індекс i пробігає значення від 1 до N . Розмірність фазового простору (\vec{p}, \vec{q}) , де $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ і $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ дорівнює $2N$. Маємо рівняння Гамільтона:

$$\left(\begin{array}{l} \dot{q}_1 = \frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q})}{\partial p_1} \equiv f_1(\vec{p}, \vec{q}), \\ \dot{q}_2 = \frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q})}{\partial p_2} \equiv f_2(\vec{p}, \vec{q}), \\ \dots \\ \dot{q}_N = \frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q})}{\partial p_N} \equiv f_N(\vec{p}, \vec{q}), \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q})}{\partial q_1} \equiv f_{N+1}(\vec{p}, \vec{q}), \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q})}{\partial q_2} \equiv f_{N+2}(\vec{p}, \vec{q}), \\ \dots \\ \dot{p}_N = -\frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q})}{\partial q_N} \equiv f_{2N}(\vec{p}, \vec{q}). \end{array} \right. \quad (40)$$

Тут ми розглядаємо $2N$ – мірний вектор $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{2N})$ правих частин рівнянь Гамільтона.

Дивергенція векторного поля (правих частин системи (40)) визначається виразом:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{f} &= \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial f_N}{\partial q_N} + \frac{\partial f_{N+1}}{\partial p_1} + \frac{\partial f_{N+2}}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial f_{2N}}{\partial p_N} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} + \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Отриманий результат відповідає змісту теореми Ліувілля, згідно з якою фазовий об'єм системи, підпорядкованих рівнянням механіки в формі Гамільтона, залишається постійним при русі системи. Встановлено французьким математиком Жозефом Ліувіллем (Joseph Liouville) в 1838 р.



Joseph Liouville
(1809-1882)

2. Осцилятор Ван-дер-Поля

Для дослідження динаміки фазового обсягу осцилятора Ван-дер-Поля зручно відповідну систему рівнянь переписати у виді:

$$\dot{x}_0 = x_1 \equiv f_0; \quad \dot{x}_1 = -x_0 + (\lambda - x_0^2)x_1 \equiv f_1. \quad (42)$$

Використовуючи (41), легко знаходимо дивергенцію правих частин цього рівняння.

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_0}{\partial x_0} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = (\lambda - x_0^2). \quad (43)$$

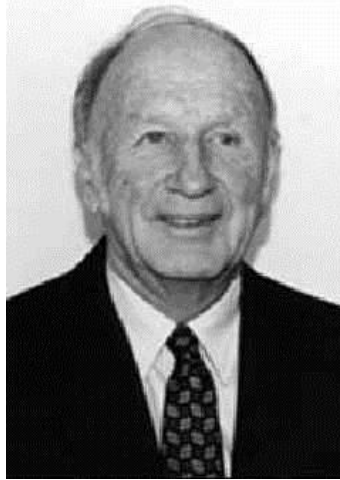
Формула (43) показує, що є область фазового простору, в якій фазовий об'єм стискається, і область фазового простору, в якій фазовий об'єм зростає.

3. Система Лоренца

Як третій приклад розглянемо відому систему - систему Лоренца (*Lorenz E.N. (1963). Deterministic non-periodic flow. J.Atmos. Sci: 20, 131-141*). Ця система описується наступними трьома звичайними диференціальними рівняннями першого порядку:

$$\dot{x} = \sigma(y - x); \quad \dot{y} = x(r - z) - y; \quad \dot{z} = xy - bz. \quad (44)$$

Тут b , σ , r - параметри моделі Лоренца.



Едвард Нортон Лоренц

(*Edward Norton Lorenz*).

Американський математик і
метеоролог.

(23.05.1917–16.04.2008)

До системи рівнянь Лоренца призводить задача про конвекцію шару рідини глибиною h що знаходиться в полі сили тяжіння, коли на верхній межі підтримується постійна температура T_0 , а на нижній межі - температура $T_0 + \Delta T$ (див. рис. 1). Конвекційне протягом виникає при досить великій різниці температур через те, що нагріта рідина легше холодної. Завдання вважається двовимірної. Передбачається, що в напрямку z система нескінченно протяжна. Змінна x характеризує швидкість обертання конвекційних валів, величини y і z відповідають за розподіл температури по горизонталі і вертикалі, відповідно.

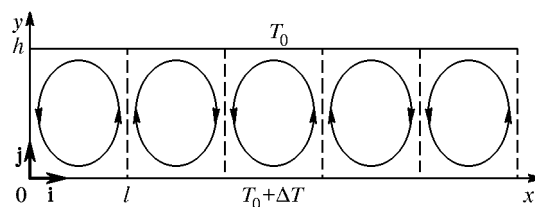


Рис. 1. Конфігурація течії, що виникає при конвекції підігрівається знизу шарі рідини.

До системи Лоренца призводить завдання про конвекції в замкнутій кільцевій трубці. Трубка підігрівається знизу і охолоджується зверху, і при досить великій інтенсивності підігріву можливо виникнення конвекційної течії. Змінна x – характеризує швидкість

течії, y – відхилення температури від середнього значення в точці, віддаленій від нижньої точки петлі на 90° ; z – то ж, але в нижній точці.

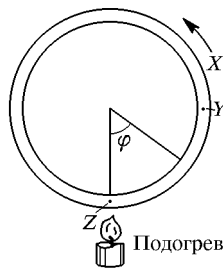


Рис. 2. Завдання про конвекції в замкнутій кільцевій трубці.

До рівнянь Лоренца також призводить задача про водяне колесо. Водяне колесо – механічна модель система Лоренца. При малому потоці води зверху колесо залишається в спокої (а), при більшому обертається з постійною швидкістю (б), при дуже великому потоці води зверху – обертається хаотично, змінюючи час від часу напрямок обертання на протилежне (в). (рис. 2).

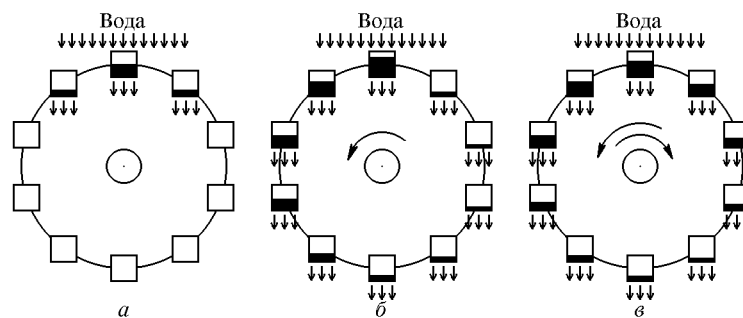


Рис. 3. Водяне колесо – механічна модель система Лоренца. При малому потоці води зверху колесо залишається в спокої (а), при більшому обертається з постійною швидкістю (б), при дуже великому потоці води зверху – обертається хаотично, змінюючи час від часу напрямок обертання на протилежне (в).

Тут x – швидкість обертання колеса, y і z – щільність розподілу маси води по обіду; y – відхилення від середнього значення в точці, віддаленій від нижньої точки обода на 90° ; z – то ж, але в нижній точці.

Уявімо собі колесо, встановлене на горизонтальній осі, і по його ободу підвішені кошики. Зверху ллється вода, потрапляючи в кошики, затримується в них, але випливає, оскільки кошики мають дірки в днищі. При малої інтенсивності потоку води зверху коле-

со буде нерухомим. Якщо потік збільшити, колесо почне обертатися з постійною швидкістю. При ще більшій величині потоку рух стане хаотичним і, більш того, напрямок обертання буде час від часу змінюватися.

До системи Лоренца також приводь задачу про випромінювання одномодового лазера.

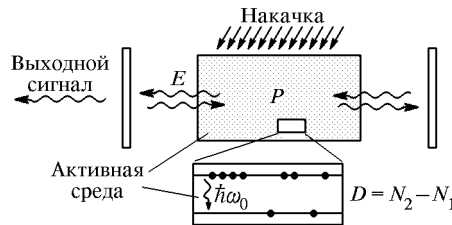


Рис. 4. Схема одномодового лазера. E - електричне поле резонатора, P - поляризація активного середовища, D - інверсія заселеності рівнів.

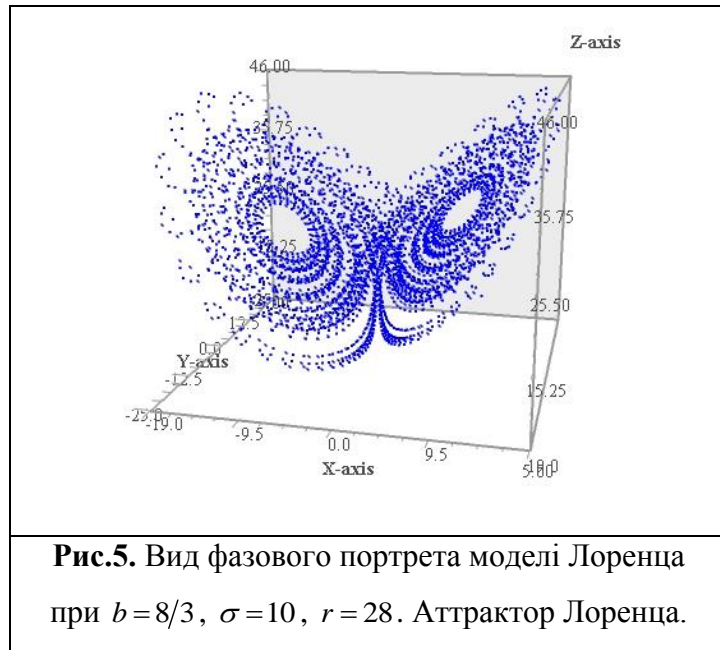
Припустимо, що ієється резонатор, в якому можна порушувати одна мода - коливання електромагнітного поля на певній частоті ω_0 з фіксованою просторовою структурою. Амплітуда може змінюватися в часі завдяки прістутствію втрат і взаємодії поля з активним середовищем, що заповнює резонатор. Активне середовище складається з атомів з двома енергетичними рівнями, різниця енергій між якими дорівнює $\Delta W = \hbar\omega_0$. Частота переходу точно збігається з частотою власної моди резонатора. Далі передбачається, що присутствует механізм накачування, благодаря якому атоми переходять з ніжнерго рівня на верхній і в середовищі створюється інверсна заселеність. В системі Лоренца x - амплітуда хвиль в резонаторі лазера, y - поляризація середовища, z - інверсія заселенгштей енергетичних рівнів, b і σ - відносини коефіцієнтів релаксації інверсії і поля до коефіцієнта релаксації поляризації, r - інтенсивність накачування.

Якщо параметри системи Лоренца набувають значення: $b=8/3$, $\sigma=10$, $r=28$, то динаміка моделі Лоренца стає хаотичною. **Динамічний хаос (детермінований хаос) - нерегулярне, апериодическое зміна стану (рух) динамічної системи, що володіє основними властивостями випадкового процесу.**

Використовуючи рівняння (41), легко знаходиться дивергенція поля швидкостей (правій частині цих рівнянь):

$$\text{div} \vec{f} = (-\sigma - 1 - b) < 0. \quad (45)$$

якщо параметри σ, b позитивні, то **фазовий об'єм стискається і, тому, система Лоренца є дисипативної.**



Аттрактор Лоренца нагадує крила метелика і став символом перших дослідників хаосу. Кожна точка фазового простору відповідає певному стану системи. У міру зміни стану системи переміщення точки описує безперервну лінію. **Оскільки стан системи ніколи точно не повторюється, траєкторія не перетинає сама себе, утворюючи лише нові і нові петлі.** Рух в аттракторі абстрактний, проте, він опише особливості руху реальних систем. Наприклад, перехід від одного з «крил» аттрактора до іншого відповідає початку зворотного ходу водяного колеса або зміни напрямку обертання рідини при конвекції.

Критерієм відсутності замкнутих контурів, цілком складених з фазових траєкторій, є **критерій Бендіксона (або теорема Бендіксона).**



Теорему Бендіксона можна формулювати так. Припустимо, що розглядається система, що описується рівняннями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (46)$$

де функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – аналітичні на всій фазовій площині. Якщо в деякій однозв'язній області на фазовій площині вираз $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ має постійний знак, то в цій області не існує замкнутих контурів, цілком складених з фазових траєкторій динамічної системи.

Теорема Пуанкаре про повернення.



Жюль Анрі Пуанкаре

(Jules Henri Poincaré; 1854 –1912).

Французький математик,
механік, фізик, астроном і філософ.

Число фазових точок, які покидають при своєму русі заданий фазовий об'єм $g \in G$ (де G – загальний фазовий об'єм) і не повертаються в нього, з плином часу буде менше будь-який більш-менш помітної частки повного числа фазових точок.

Доведемо це положення.

Розглянемо систему, що має кінцевий загальний фазовий об'єм G . Виділимо всередині цього обсягу деяку фіксовану поверхню σ , обмежує малий об'єм g . Розглянемо фазові точки, що впливають через поверхню σ з об'єму g . Швидкість переміщення фазової точки по фазовій траєкторії залежить тільки від фазових координат, тому число точок, що впливають в одиницю часу через фіксовану поверхню σ , не залежить від часу. Позначимо через g' об'єм, який обіймають фазові точки, які витікають в одиницю часу з фазового об'єму g , не повертаючись у нього знову. За час T з об'єму g втікає $g'T$ об'ємів фазової рідини. Оскільки об'єм $g'T$, що витік за припущенням, не повертається більш в об'єм g , оскільки він повинен заповнювати решту повного фазового об'єму G . Фазова рідина нестислива, тому об'єм $g'T$, що витік з g , не повинен перевищувати об'єм, в який він витече, тобто

$$g'T < G - g < G. \quad (47)$$

Об'єм G кінцевий, тому при кінцевому g' ця нерівність може бути задоволена лише для кінцевого часу T . Якщо ж $T \rightarrow \infty$, то нерівність (47) задовольняється лише при $g' \rightarrow 0$, що і потрібно було довести.

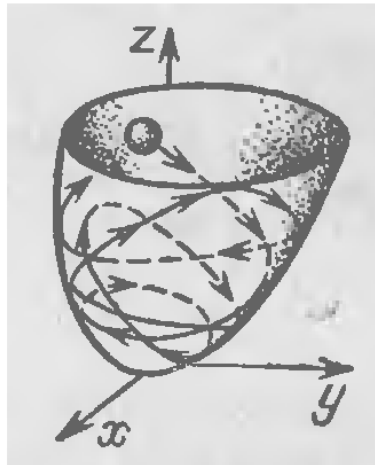


Рис. 6. Теорема Пуанкаре передбачає також повернення в окіл вихідного положення кульки, що рухається без тертя в несиметричній чашці.