Лекція 1.

Введення у дослідження нелінійної динаміки.

ХАРАКТЕРНІ ЧАСОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕСІВ, ЩО НАС ОТОЧУЮТЬ. ЗАКОНИ «ЗРОСТАННЯ» ПРОЦЕСІВ У ЧАСІ

1. *Стаціонарний процес*: $\dot{x}=0 \Rightarrow x=x_0=const$
2. *Рівномірний рух*: $\dot{x}=v \Rightarrow x=vt+x_0$
3. *Узагальнення*: Степеневе зростання

$$\dot{x}=at \Rightarrow x=\frac{at^2}{2}+x_0; \qquad \dot{x}=b\cdot t^n \Rightarrow x=\frac{b}{n+1}t^{n+1}+x_0;$$

Узагальнення: $x=x_0+\sum_{n=1}^{N}c_n\cdot t^n$; $x=x_0+ct$; $c>0,\ c<0$.

4. *Експонентне зростання*: $\dot{x}=\gamma\cdot x \Rightarrow x=x_0\cdot e^{\gamma t}$ $\qquad \gamma>0 \quad \gamma<0$

Узагальнення: $x=\Sigma c_n\cdot e^{\alpha_n t}$; $x=x_0e^{\gamma t}$; $x=x_0e^{-\gamma t}$.

5. *Вибухове (гіперболічне) зростання*: $\dot{x}=\alpha\cdot x^2$; $\int\frac{dx}{x^2}=\int\alpha\cdot dt$;

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}=\alpha(t-t_0); \qquad x_0=x(t_0); \qquad \frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}-\alpha(t-t_0);$$

$$x=\frac{1}{\left[\frac{1}{x_0}-\alpha(t-t_0)\right]}; \quad x=\frac{x_0}{\left[1-\alpha x_0(t-t_0)\right]}; \quad \alpha x_0(t-t_0)\to 1;\ x\to\infty.$$

Приклад 1

Прикладом вибухового зростання може служити приріст населення Землі, що фіксується за багато поколінь:

$$N = C/(T_1\text{-}T) = 186 / (2025\text{-}T) \text{ млрд},$$

де N – кількість людей на Землі в момент часу T; T_1 – критична дата ; C – постійна з розмірністю.

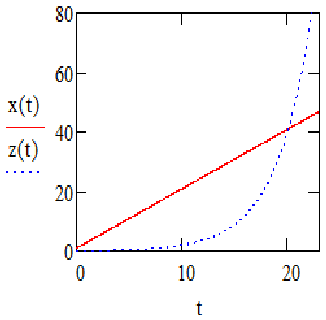
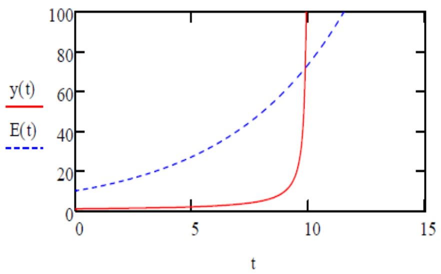
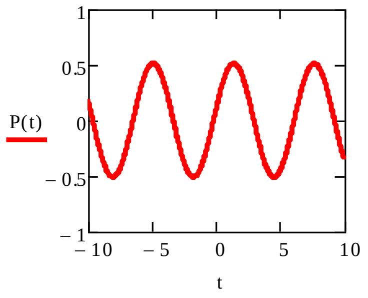
Приклад 2

Вибухова нестійкість хвиль – мимовільне наростання хвиль ("вибух"), при якому їх амплітуди прагнуть звернутися в нескінченність за кінцевий час. Поняття вибуховий нестійкості хвиль виникло в зв'язку з аналізом нелінійних хвильових процесів в нерівноважних середовищах, в яких хвилі можуть наростати за рахунок енергії, що надходить ззовні.

6. *Коливальні процеси*:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases} \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x(t) = A\cdot\cos(\omega t) + B\cdot\sin(\omega t)$$

		
$x(t) = 1 + 2t$; $z(t) = 0.1\cdot\exp(0.3\cdot t)$	$y(t) = \dfrac{1}{1-0.1t}$ $E(t) = 10\cdot\exp(0.2\cdot t)$	$P(t) = 0.1\cos(t) + 0.5\sin(t)$

БАЛАНСНІ РІВНЯННЯ. СПОСІБ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ІСНУЮЧИХ ПРОЦЕСІВ (В ФІЗИЦІ, В БІОЛОГІЇ, В МЕДИЦИНІ, В СОЦІОЛОГІЇ ТОЩО)

Саме, ми розглянемо два широко відомих прикладу побудови математичних моделей важливих екологічних і соціальних процесів. Цими прикладами є модель Лотки-Вольтерри і модель Форрестера "Світ-1". На цих прикладах будуть сформульовані алгоритми побудови математичних моделей.

Модель Лоткі-Вольтерри "хижак-жертва".

 **Альфред Джеймс Лотка** (англ. Alfred James Lotka; 1880 – 1949 рр.)	 **Віто Вольтерра** (італ. Vito Volterra; 1860 – 1940 рр.)

В моделі Лотткі-Вольтерри розглядається закритий ареал, в якому мешкають два види – травоїдні («жертви») і хижаки. Передбачається, що тварини іммігрують (в'їзд) і не емігрують (виїзд), і що їжі для травоїдних тварин є з надлишком. Тоді рівняння зміни кількості жертв (без урахування хижаків) набирає виду:

$$\Delta N_k = \varepsilon_1 N_k \cdot \Delta t\,;\ \dot{N}_k = \varepsilon_1 N_k\,;\ N_k = N_0 \cdot \exp\left[\varepsilon_1 t\right];\ N_0 = N_k(0),$$

де N_k – величина популяції жертв, $\dot{N}_k$ – швидкість приросту популяції жертв, ε_1 – коефіцієнт народжуваності жертв. Бачимо, що кількість жертв зростає.

Поки хижаки не полюють, вони вимирають, отже, рівняння для чисельності хижаків (без урахування чисельності жертв) набирає виду:

$$\dot{N}_x = -\varepsilon_2 \cdot N_x \Rightarrow N_x \approx N_{x0} \cdot \exp\left[-\varepsilon_2 t\right]$$

де ε_2 – коефіцієнт втрат хижаків, N_x – величина популяції хижаків, $\dot{N}_x$ – швидкість приросту популяції хижаків.

При зустрічах хижаків і жертв (частота яких прямо пропорційна величині $N_x N_k$)відбувається вбивство жертв з коефіцієнтом, ситі хижаки здатні до відтворення з коефіцієнтом γ_2. З урахуванням цього, система рівнянь моделі така:

$$\dot{N}_k = N_k\left[\varepsilon_1 - \gamma_1 \cdot N_x\right]; \quad \dot{N}_x = -N_x\left[\varepsilon_2 - \gamma_2 \cdot N_k\right], \tag{1}$$

де γ_1 – декремент убутку жертв, γ_2 – інкремент приросту хижаків.

Розв'язок задачі

находження стаціонарної позиції системи. Для стаціонарної позиції зміна чисельності популяції дорівнює нулю. Отже:

$$\dot{N}_x = 0;\ N_x = N_{x0} \;\Rightarrow\; (\ \varepsilon_1 - \gamma_1 \cdot N_{x0} = 0\ ); \quad \dot{N}_k = 0;\ N_k = N_{k0} \;\Rightarrow\; (\varepsilon_2 - \gamma_2 \cdot N_{k0} = 0).$$

З чого випливає, що стаціонарна точка системи, навколо якої відбуваються коливання, визначається наступним чином:

$$N_{x0} = \left(\varepsilon_1 / \gamma_1\right); \quad N_{k0} = \left(\varepsilon_2 / \gamma_2\right). \tag{2}$$

При внесенні в систему відхилень $n_k << N_{k0}$ і $n_x << N_{x0}$ через малу їх величини їх квадратами, кубами і подальшими ступенями $(n^m, m > 1)$можна знехтувати. Таким чином, популяції N_k і N_x з малими відхиленнями описуються наступними виразами:

$$N_x = N_{x0} + n_x,\ N_k = N_{k0} + n_k;$$

Підставляючи ці вирази в систему рівнянь (1), отримаємо наступну систему рівнянь для малих збурень чисельності хижаків і їх жертв (з урахуванням (2)):

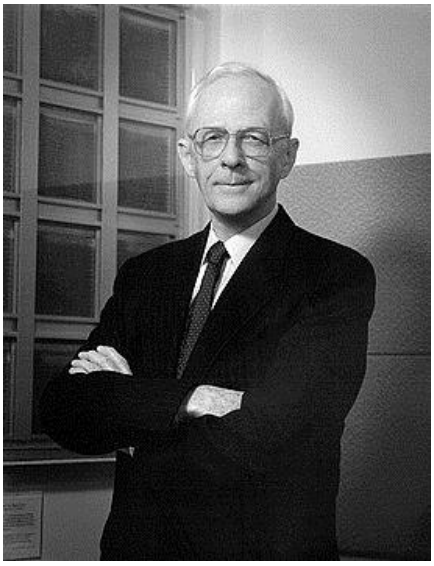
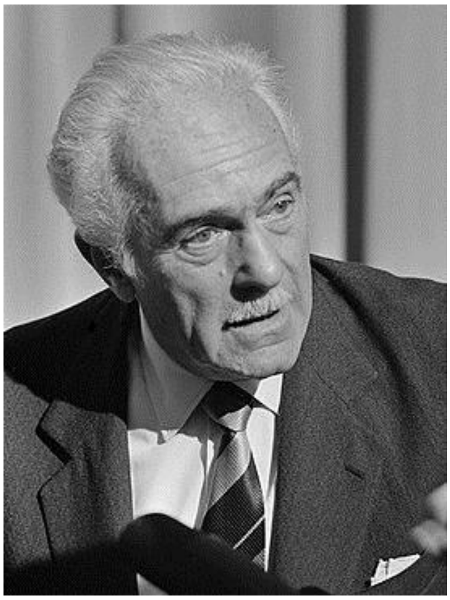
$$\dot{n}_x = \frac{\varepsilon_1 \gamma_2}{\gamma_1} n_k; \quad \dot{n}_k = -\frac{\varepsilon_2 \gamma_1}{\gamma_2} n_x .$$

Диференціювання одного з цих рівнянь і підстановка в інше дає наступний результат:

$$\ddot{n}_x + (\varepsilon_1 \varepsilon_2) n_x = 0 .$$

Отриманий вираз є рівнянням гармонічного осцилятора з періодом $T = 2\pi / \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$. Лінеаризоване рівняння дозволяє зробити якісний висновок про періодичне характер зміни кількості хижаків (і, відповідно, жертв) в часі з деякою характерною частотою $\omega = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$.

Світова динаміка. Модель Дж. Форрестера.

 Джей Райт Форрестер (англ. Jay Wright Forrester; 1918 – 2016 рр.)	 Аурéліо Печчéї (італ. Aurelio Peccei; 1908 – 1984 рр.)

Метою цього клубу був аналіз глобальних, світових проблем. Аналізуючи методи, які необхідні для переконливого аналізу оточуючих нас процесів, члени Римського клубу прийшли до висновку, що тільки методи математики, методи математичного аналізу дозволяють сформулювати основні проблеми, з якими стикається людство, а також вказати на ті інструменти, які дозволять запобігти можливим глобальні катастрофи. Тому в червні 1970 року Римський клуб запропонував Джею Форрестеру розробити модель глобального світового розвитку. Досить швидко (всього лише після чотирьох тижнів) Форрестер представив модель, яка відома під власним ім'ям "Світ-1". Після цієї моделі були "Світ-2" і багато інших моделей. У 1971 році вийшла книга Форрестера "Світова динаміка". Потрібно відзначити, що моделі, побудовані Форрестером зі своєю командою, досить прості. Зокрема, "Світ-1" містить всього лише п'ять звичайних диференціальних рівнянь. Надалі було створено велику кількість значно складніших моделей. Деякі з них містили близько ста диференціальних рівнянь. Проте всі основні висновки, які слідували з моделі " Світ-1" якісно не змінилися. Потрібно сказати, що модель " Світ-1" призвела до глибоких змін в мисленні і в практичній діяльності переважної більшості світової політичної і економічної еліти. Ми не будемо зупинятися на політичних і соціальних наслідки цієї моделі. Наша мета зрозуміти, як створюються такі математичні моделі з тим, щоб при необхідності ми могли побудувати аналогічні моделі для аналізу різноманітних процесів, які нас можуть зацікавити.

Модель "Світ-1" і всі наступні за нею моделі побудовані на принципах системної динаміки. Системна динаміка займається вивченням складних систем, досліджує їх поведінку в часі і в залежності від структури елементів системи та взаємодії між ними.

Це наступні принципи:

1. По-перше, визначаються, так звані, фазові змінні. Це ті змінні, динаміка яких нас буде цікавити. Для моделі "Світ-1" цими фазовими змінними є: чисельність населення (число жителів планети); промислові фонди; виробництво їжі; накопичення відходів і не поновлювані ресурси (вугілля, нафта і т.д.).
2. По-друге, для кожної фазової змінної пишуться диференціальні рівняння. Кожне з цих диференціальних рівнянь має наступну структуру:

$$\frac{df_i}{dt} = f_i^+ - f_i^- . \tag{3}$$

Тут функції f_i описують відповідні фазові змінні. Перший член в правій частині описує ту функцію, яка збільшує швидкість зміни заданої фазової змінної. Другий член описує протилежний процес, тобто зменшення швидкості зміни фазового змінної.

У свою чергу, ці функції f_i^+ і f_i^- виражаються через добуток функцій, що залежать тільки від так званих "чинників" – допоміжних змінних, які є комбінаціями основних змінних. Іншими словами, функції f_i^+ і f_i^- є складними комбінаціями основних змінних системи.

Для цих змінних ми будемо користуватися позначеннями, які використовував Форрестор. Наприклад, для опису динаміки народонаселення можна написати наступне рівняння:

$$\frac{dP}{dt} = P(B - D) \text{ (населення).} \tag{4}$$

Тут літерою P (population) позначено кількість людей на даний момент часу. Коефіцієнт B характеризує швидкість зростання населення (народжуваність). Коефіцієнт D характеризує смертність, відповідно, характеризує зменшення швидкості росту. Вже дивлячись на рівняння (4), видно, що коефіцієнти, що характеризують народжуваність і смертність населення, самі істотно залежать від багатьох інших величин, зокрема, можуть залежати від інших фазових змінних. Щоб визначити ці коефіцієнти, потрібна досить трудомістка робота багатьох фахівців. Основна проблема у Форрестера як раз і визначалася тим, що потрібно було досить аргументовано визначити ці коефіцієнти.

Аналогічним чином були побудовані ще чотири рівняння моделі "Світ-1". Наведемо їх:

$$\frac{dZ}{dt} = Z_+ - \frac{Z}{T_z} \text{ (забруднення).} \tag{5}$$

Тут літерою Z (pollution) позначений рівень забруднення. Перший член правої частини рівняння (6) описує швидкість накопичення забруднень. Знову ця характеристика повинна визначатися експертами. T_z – характеризує час утилізації відходів (витрачання).

Рівняння для динаміки основних промислових фондів і основних фондів в сільському господарстві (харчування) можна записано в аналогічному виді:

$$\frac{dK}{dt} = K_+ - \frac{K}{T_k} \text{ (промислові фонди).} \tag{7}$$

$$\frac{dX}{dt} = X_+ - \frac{X}{T_x} \text{ (фонди сільського господарства).} \tag{8}$$

Кожен член цих рівнянь побудований в повній аналогії з рівняннями (4) і (5). Особливу увагу слід звернути на п'яте рівняння, яке описує динаміку невідновлюваних ресурсів (R – змінна кількості невідновлюваних ресурсів):

$$\frac{dR}{dt} = -R_- \text{ (невідновлювані ресурси).} \tag{9}$$

де R_- - декремент убутку невідновлюваних ресурсів.

Важливість цього рівняння полягає в тому, що в правій частині міститься тільки одна функція, яка характеризує зменшення швидкості появи невідновлюваних ресурсів. Наприклад, зменшення видобутку нафти. Можна, правда, припустити, що на деякому інтервалі часу будуть розвідані нові родовища і в праву частину цього рівняння можна буде додати позитивний член. Проте всім ясно, що такий доданок може змінити динаміку тільки на обмеженому інтервалі часу. Саме з цим рівнянням і пов'язано радикальна зміна глобальної політики - йде боротьба за ресурси.

Система рівнянь (4)-(9) і є математична модель "Світ-1". Які основні висновки були отримані при аналізі цієї системи рівнянь.

1. Перший висновок досить очевидний і полягає в тому, що в цій моделі відсутній стаціонарний стан. Цей висновок випливає з останнього рівняння (9), для якого не можна відшукати умов стаціонарного розв'язку. Нагадаємо, що під стаціонарним розв'язком ми розуміємо розв'язк, у якого все похідні (ліві частини системи рівняння (4)-(9) перетворюються в нуль. Для рівняння, яке описує непоправні ресурси, такі умови відсутні.

2. Були виявлені серйозні світові кризи. У моделі "Світ-1" ці кризи виникали в період 2020-2030 років. У ці періоди різко зросте чисельність населення, різко впаде його добробут. Виникнуть все пов'язані з цим неприємні наслідки для населення. (На 2018 рік - 7.6 мільярда чоловік)

3. Модель дозволяла змінювати деякі параметри системи. Крім того, були побудовані численні більш ускладнені моделі. Однак основний висновок - висновок про наявність криз - не змінювався.

Повернемося до моделі "хижак-жертва".

Звернемо увагу, що в цій моделі є чотири параметри ($\varepsilon_1;\varepsilon_2;\gamma_1;\gamma_2$). Тому детальне вивчення динаміки популяції "хижаків і жертв" як функція цих параметрів досить скрутна задача. Це проблема, яка досить широко зустрічається. Іноді заміною змінних (залежних і незалежних змінних) вдається істотно зменшити кількість параметрів, від яких залежить динаміка даної системи. В даному випадку це якраз така ситуація. Ми можемо істотно зменшити кількість параметрів введенням наступних залежних і незалежних змінних:

$$\begin{cases} \dot{N}_k = N_k\left[\varepsilon_1 - \gamma_1 \cdot N_x\right] \\ N_x = -N_x\left[\varepsilon_2 - \gamma_2 \cdot N_k\right] \end{cases}$$

$$x_0 = N_k\left(\varepsilon_2 / \gamma_2\right);\ x_1 = N_x\left(\gamma_1 / \varepsilon_1\right);\ \tau = \varepsilon_1 t\,.$$

Введемо також наступний новий параметр:

$$\gamma = \gamma_2 / \varepsilon_2 \,.$$

Тоді система рівнянь моделі "хижак-жертва" придбає значно простіший вид:

$$\dot{x}_0 = x_0 \left(1 - x_1\right).$$

$$\dot{x}_1 = -\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) x_1 \left(1 - \gamma^2 x_0\right).$$

Видно, що в цій модифікованої системі є всього лише два параметри:

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \gamma\right).$$