Лекція 4.
Параметричний резонанс

Розглянемо *коливальний контур, ємність якого змінюється з часом* (рис. 1,а). Миттєве значення заряду на конденсаторі $Q(t)$ пов'язано з напругою на ньому $V_c(t)$ співвідношенням, $Q(t)=C(t)V_c(t)$, а рівняння Кірхгофа для контуру має вид

$$L\frac{dI(t)}{dt}+V_c(t)=0, \tag{1}$$

де L – коефіцієнт самоіндукції котушки; $I(t)=dQ(t)/dt$ – сила струму в контурі;

$C(t)$ – змінна ємність конденсатора; $V_c(t)$ – напруга на конденсаторі;

$Q(t)=C(t)V_c(t)$ – миттєве значення заряду на конденсаторі.

Запишемо рівняння (1) відносно заряду $Q(t)$:

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+\frac{1}{LC(t)}Q(t)=0. \tag{2}$$

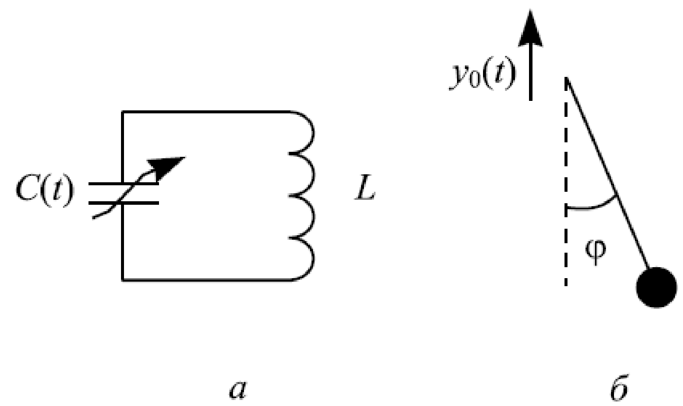

Рис. 1. Приклади осциляторів зі змінними параметрами: коливальний контур з змінною ємністю (а) і маятник, точка підвісу якого рухається з прискоренням в вертикальному напрямку (б).

Це рівняння має вигляд рівняння гармонічного осцилятора, частота коливань якого змінюється в часі. З математичної точки зору, ми маємо справу з лінійним диференціальним рівнянням зі змінними коефіцієнтами.

Інший приклад осцилятора зі змінними параметрами дає *маятник, точка підвісу якого здійснює рух з прискоренням в вертикальному напрямку* по заданому закону $y = y_0(t)$ (рис. 7.1,*б*). Перехід у неінерціальну систему відліку, в якій точка підвісу перебуває у спокою, дозволяє записати рівняння маятника:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi - m\ddot{y}_0(t)l\varphi, \tag{3}$$

де m – маса вантажу; l – довжина нитки; g – прискорення вільного падіння; φ – кут відхилення маятника від положення рівноваги, який вважається малим. $F_{ін} = -m\ddot{y}_0(t)$ – сила інерції, яка діє у вертикальному напрямку в неінерційної системі відліку. Це рівняння можна переписати у виді

$$\ddot{\varphi} + \left(\omega_0^2 + \frac{\ddot{y}_0(t)}{l}\right)\varphi = 0, \tag{4}$$

де $\omega_0^2 = g/l$. Видно, що (4) з точністю до позначень збігається з рівнянням (2).

<u>*Третій приклад - гойдалки*</u>.

У цих прикладах зміні піддається частота коливальної системи. Можна розглянути систему, в якій змінюється в часі також і величина втрат, наприклад коливальний контур зі змінними опором і ємністю. У цьому випадку рівняння осцилятора має вид

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma(t)\dot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0. \tag{5}$$

Заміною змінних

$$x(t) = \exp\left[-\int \gamma(t')\,dt'\right]y(t) \tag{6}$$

таке рівняння перетворюється в рівняння

$$\ddot{y}(t) + \left[\omega^2(t) - \gamma^2(t) - \dot{\gamma}(t)\right]y(t) = 0, \tag{7}$$

в якому доданок з першою похідною від $y(t)$ за часом відсутній. Таким чином, в найбільш загальному випадку лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами можна привести до канонічної формі:

$$\ddot{x}(t)+\omega^2(t)x(t)=0. \qquad (8)$$

Це рівняння буде основним об'єктом дослідження у лекції.

Якщо $\omega(t)$ – функція, що близька до константи, тоді в нульовому наближенні можна вважати, що в системі існують коливання з періодом $2\pi/\omega(t)$. Властивості системи суттєво залежать від співвідношення двох характерних часових масштабів: *періоду коливань і характерного часу зміни функції* $\omega(t)$ – τ.

<u>Виділимо три випадки:</u>

1) Обидва часові масштаби мають один порядок, тобто

$$\tau \sim 2\pi/\omega(t). \qquad (9)$$

   При цьому говорять про параметричні коливання. Якщо $\omega(t)$ – періодична з періодом T, тоді можливе виникнення так званої ***параметричної нестійкості***, коли мале відхилення системи від положення рівноваги буде призводити до наростання коливань. Саме це відбувається при розгойдуванні гойдалок.
2) Функція $\omega(t)$ мало змінюється за час одного коливання, тобто $\tau >> 2\pi/\omega(t)$. Це відповідає адіабатично повільній зміні параметрів системи.
3) Параметри системи змінюються значно швидше, ніж характерний період коливань осцилятора (приклад - маятник Капіци).

<u>Розглянемо власне параметричну нестійкість.</u>

Нехай квадрат частоти осцилятора в рівнянні

$$\ddot{x}(t)+\omega^2(t)x(t)=0. \quad (10)$$

можна представити у виді

$$\omega^2(t)=\omega_0^2 f(t), \quad (11)$$

де

$$f(t+T)=f(t), \quad (12)$$

$f(t)$ – безрозмірна періодична функція, що приблизно дорівнює одиниці; T – її період; ω_0 – величина з розмірністю частоти. Якщо $\omega(t)$ близька до константи ω_0, то ми очікуємо, що розв'язки близькі до гармонійних коливань з періодом $T_0=2\pi/\omega_0$. *Параметри T і T_0 незалежні.*

<u>Приклад коливального контуру зі змінною ємністю</u>.

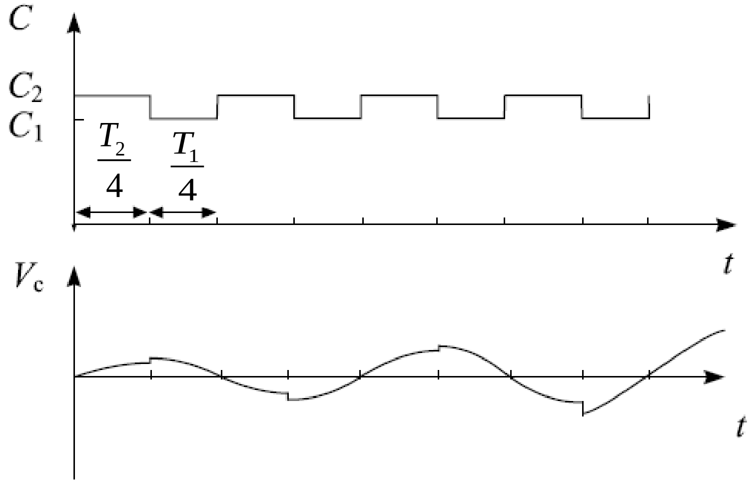

Рис. 2. Зміна ємності в коливальному контурі і напруги в ньому в залежності від часу.

$C=\varepsilon\varepsilon_0 S/d$; $T_1/4=\pi\sqrt{LC_1}/2$; $T_2/4=\pi\sqrt{LC_2}/2$.

Зростання амплітуди коливань при періодичному зміні параметрів гармонічного осцилятора називається параметричним резонансом.

Кількісні оцінки. Втрати відсутні.

Перед розсуненням пластин: $V = V_C$, а енергія в системі $W = C_2 V_C^2 / 2$ (вся енергія зосереджена в цей момент в конденсаторі). При різкому розсуненні пластин: $V = V_C'$, яке знаходиться з закону збереження заряду

$$C_2 V_C = C_1 V_C'. \tag{13}$$

Енергія на конденсаторі: $W' = C_1 V_C'^2 / 2$. Зміна енергії конденсатора:

$$\Delta W = W' - W = W\left(\frac{C_2}{C_1} - 1\right) \approx W\frac{\Delta C}{C}, \tag{14}$$

де $\Delta C = C_2 - C_1$; $C = C_1 + C_2 / 2$ (вважаємо, що $\Delta C / C << 1$). Оскільки за один цикл пластини розсуваються двічі, для енергії, що закачується до системи за час одного «періоду» коливань осцилятора, що дорівнює

$$\pi\left(\sqrt{LC_1} + \sqrt{LC_2}\right) \approx 2\pi\sqrt{LC}, \tag{15}$$

можна записати

$$\frac{\Delta W}{W} \approx \frac{2\Delta C}{C}. \tag{16}$$

Для періоду зміни параметра T виконується співвідношення

$$T = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{LC_1} + \sqrt{LC_2}\right) \approx \frac{T_0}{2}. \tag{17}$$

Це означає, що найбільш ефективно енергія закачується в систему, коли період зміни параметра (T)приблизно дорівнює половині власного періоду коливань осцилятора (T_0).

Якщо період розсування пластин в два рази перевищує час, за який модуль заряду на конденсаторі досягає максимального значення, то умова резонансу має вид

$$T \approx T_0. \tag{18}$$

Якщо пластини розсуваються в кожен *n*-й сприятливий момент, то умова параметричного резонансу має вид

$$T \approx \frac{nT_0}{2},\ n = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Для $n = 1$ кажуть про основний резонанс, для довільного n – о резонансі *n*-го порядку.

Облік втрат.

У результаті загасання втрати енергії за період дорівнюють:

$$\Delta W \approx -2\gamma T_0 W\ , \tag{20}$$

де γ – коефіцієнт загасання. Втрата енергії за період:

$$\Delta W = W\left(\frac{2\Delta C}{C} - 2\gamma T_0\right). \tag{21}$$

Якщо $\Delta C/C > \gamma T_0 = \chi = \pi/Q$ (χ – логарифмічний декремент, Q – добротність осцилятора), то в цілому коливання зростають.

Таким чином, при скінченних втратах енергії в системі параметрична нестійкість виникає тільки при досить великій глибині модуляції параметра (тобто величини співвідношення $\Delta C/C$***). Відзначимо, що для розвитку нестійкості потрібно, щоб спочатку коливання в системі вже існували. Якщо осцилятор перебуває у спокою, то зміна його параметрів не призводить до появи коливань.***

Випадок, коли параметри системи (ємність в контурі) змінюються безперервно по закону:

$$C(t) = C_0 + \Delta C \cos(2\omega_0 t), \tag{22}$$

де $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\Delta C/C_0 << 1$.

$$V_C(t) = V_{aC}\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{23}$$

де φ – зсув фази між ємністю і напругою. При зміні ємності конденсатора на малу величину dC здійснюється робота

$$dA = -W_C dC/C\,, \tag{24}$$

де $W_C = CV_C^2/2$ – енергія, що запасена у конденсаторі. За один період коливань здійснюється робота

$$A = -\frac{1}{2}\int\limits_t^{t+2\pi/\omega_0} V_C^2(t')\frac{dC(t')}{dt'}dt'\,. \tag{25}$$

Підставляючи вираз для $C(t)$ і $V_C(t)$, отримуємо

$$A = \Delta C\omega_0 V_{aC}^2 \int\limits_t^{t+2\pi/\omega_0} \sin(2\omega_0 t')\cos^2(\omega_0 t' + \varphi)\,dt' = -\frac{\pi\Delta C}{C_0} W\sin(2\varphi)\,. \tag{26}$$

Максимальним приріст енергії буде, якщо

$$\varphi = -\pi/4 \text{ або } \varphi = 3\pi/4\,, \tag{27}$$

$$\Delta W/W = \pi\,\Delta C/C\,. \tag{28}$$

Якщо в системі є втрати, то глибина модуляції повинна бути досить великою для виникнення нестійкості

$$\frac{\Delta C}{C} > \frac{2}{Q}\,. \tag{29}$$

Приклад гойдалок.

Період малих коливань фізичного маятника:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}\,, \tag{30}$$

де I – момент інерції маятника щодо осі підвісу; a – відстань між центром мас і точкою підвісу. Приведена довжина фізичного маятника:

$$l = \frac{I}{ma}\,. \tag{31}$$

Розмах коливань наростає особливо сильно, якщо присідати в положеннях найбільшого відхилення і випрямлятися при проходженні гойдалок через нижню точку. При присіданні і випрямленні відбувається періодична зміна (модуляція) приведеної довжини фізичного маятника, яким є гойдалки з людиною.

Основні особливості параметричного резонансу:

1) *Параметричний резонанс може з'являтися в коливальній системі при періодичної зміні її параметрів, якщо виконуються певні співвідношення*

$$T \approx \frac{nT_0}{2}$$

між періодом зміни параметрів (T) і власним періодом коливань системи (T_0).

2) *Для розвитку нестійкості необхідно, щоб коливання в системі вже існували. Якщо осцилятор покоїться в положенні рівноваги, то зміна параметрів не веде до виникнення коливань.*
3) *При скінченних втратах в системі глибина модуляції параметрів повинна бути досить великою, щоб нестійкість з'явилася.*

<u>Теорема Флоке</u>

(*Акілла Марі Гастон Флоке (1847 – 1920 рр.), французький математик*)

<u>Рівняння Хілла</u>

(*Джордж Уільям Хілл (1838 – 1914 рр.), американський астроном і математик*)

$$\ddot{x}(t)+\omega^2(t)x(t)=0, \tag{32}$$

де $\omega^2(t)$ – періодична функція з періодом T. Для довільної функції $\omega^2(t)$ це рівняння *називається рівнянням Хілла*. У рівняння (32) існують два лінійно незалежних розв'язка $x_1(t)$ і $x_2(t)$, так, що будь-який розв'язок можна подати у вигляді їх лінійної комбінації. Роблячи в рівнянні (32) заміну $t \to t+T$, ми знову отримуємо те ж саме рівняння, отже, функції $x_1(t+T)$ і $x_2(t+T)$ також повинні бути розв'язками вихідного рівняння. Тому, використовуючи матричні перетворення, можна записати

$$\begin{bmatrix} x_1(t+T) \\ x_2(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \tag{33}$$

де коефіцієнти $a_{i,j}$ – постійні, причому в кожному рядку матриці $[\mathbf{A}]$ хоча б один з коефіцієнтів не дорівнює нулю. Матриця $[\mathbf{A}]$ називається ***матрицею відображення за період*** і $\det[\mathbf{A}]=1$. Власні числа матриці відображення за період називаються ***мультиплікаторами***, вони визначаються з рівняння

$$\det[\mathbf{A}-\mu\mathbf{I}] = \begin{vmatrix} a_{11}-\mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\mu \end{vmatrix} = 0, \tag{34}$$

або (з урахуванням $\det[\mathbf{A}]=1$)

$$\mu^2-(a_{11}+a_{22})\mu+1=0. \tag{35}$$

Коріння квадратного рівняння дорівнюють

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Sp}[\mathbf{A}] \pm \sqrt{\mathrm{Sp}[\mathbf{A}]^2 - 4}\right], \tag{36}$$

де $\mathrm{Sp}[\mathbf{A}] = a_{11} + a_{22}$ – слід матриці $[\mathbf{A}]$, тобто сума її діагональних елементів.

<u>Три можливих варіантів пар мультиплікаторів:</u>

1) Якщо $\left|\mathrm{Sp}[\mathbf{A}]\right| < 2$, то мультиплікатори - комплексно-спряжені величини, $\mu_1\mu_2 = 1$.

Можна показати, що два лінійно незалежних розв’язка рівняння (32) виду

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = [\mathbf{P}]^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \tag{37}$$

де $[\mathbf{P}]$ – ***перетворювальна матриця***, стовпцями якої є власні вектори матриці $[\mathbf{A}]$, мають наступну властивість:

$$u_{1,2}(t+T) = \mu_{1,2} u_{1,2}(t) \tag{38}$$

Розв’язки Флоке	
$u_{1,2}(t) = \exp(\lambda_{1,2})\Phi(t)$, $\lambda_{1,2} = \frac{1}{T}\ln(\mu_{1,2})$,	(39)
де $\Phi_{1,2}(t+T) = \Phi_{1,2}(t)$.	(40)

На великих часах ці розв’язки залишаються обмеженими:

$$\left|u_1(t+T)\right| = \left|\mu_1^n u_1(t)\right| = \left|\mu_1^n\right|\left|u_1(t)\right| = \left|u_1(t)\right|. \tag{41}$$

Те ж саме справедливо і для $\left|u_2(t)\right|$. Нестійкості в системі немає.

2) Якщо $\left|\mathrm{Sp}[\mathbf{A}]\right| > 2$, то з виразу

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Sp}[\mathbf{A}] \pm \sqrt{\mathrm{Sp}[\mathbf{A}]^2 - 4}\right] \tag{42}$$

виходять два дійсних мультиплікатора, один з яких по модулю обов'язково більше, а інший менше одиниці. Будуть виконуватися формули (39) і (40). Обмеженості розв’язку немає. Якщо, наприклад, $|\mu_1| > 1$, то маємо

$$|u_1(t+nT)| = |\mu_1^n| u_1(t). \tag{43}$$

Видно, що функція $u_1(t)$ по модулю необмежено зростає, а функція $u_2(t)$ прямує до нуля при $t \to \infty$. ***Виникає параметрична нестійкість.***

3) Якщо $\mathrm{Sp}[\mathbf{A}] = \pm 2$, то $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$. Лінійно незалежні розв’язки можна вибрати або у виді чисто періодичних функцій $u_{1,2}(t)$ з періодом T, якщо $\mu_{1,2} = 1$, або з періодом $2T$, якщо $\mu_{1,2} = -1$, або періодичною функцією буде тільки один з розв’язків, а другий має вид $u_2(t) = t\Phi(t)$, де $\Phi(t)$ – періодична функція. ***Має місце гранична ситуація між стійкою і нестійкою поведінкою системи.***

Теорема Флоке
Якщо власні числа матриці відображення за період системи лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами різні, то можна вибрати її лінійно незалежні розв’язки так, що буде виконуватися співвідношення: $u_{1,2}(t) = \exp(\lambda_{1,2})\Phi(t)$, $\lambda_{1,2} = \frac{1}{T}\ln(\mu_{1,2})$, де $\Phi_{1,2}(t+T) = \Phi_{1,2}(t)$.

Рівняння Матьє

Параметри системи змінюються за гармонійним законом.

Початкове рівняння

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0, \qquad \text{(рівняння Хілла) (32)}$$

можна переписати у вигляді

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2(1+\varepsilon\cos(\omega t))x(t) = 0. \qquad \text{(рівняння Матьє) (44)}$$

Це рівняння називається рівнянням Матьє. Будемо шукати наближений розв'язок цього рівняння, припустивши, що параметр ε малий ($\varepsilon << 1$).

Умова параметричного резонансу

$$T \approx \frac{nT_0}{2},\ n = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

то в задачі з'явиться ще один малий параметр

$$\delta = \left(\omega_0 - \frac{n\omega}{2}\right),\ |\delta| << \omega_0 . \tag{45}$$

Послідовне врахування малості величин ε і δ/ω_0 дозволяє отримати приблизний розв'язок рівняння Матьє. Покажемо як це зробити на прикладі основного резонансу ($n = 1$). Розв'язок будемо шукати у виді

$$x(t) = a(t)\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) + b(t)\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right). \tag{46}$$

Сенс запису (46): якщо $\varepsilon = 0$ і $\delta = 0$, то вираз (43) дає точний розв'язок, де $a(t)$ і $b(t)$ – постійні. Якщо $\varepsilon \neq 0$, $\delta \neq 0$ і $\varepsilon << 1$, $\delta << 1$, то $a(t)$ і $b(t)$ – повільно змінні (у порівнянні з періодом $4\pi/\omega$) функції часу. Формулу (46) можна переписати у виді

$$x(t) = A(t)\cos\left(\frac{\omega t}{2} + \varphi(t)\right), \tag{47}$$

тобто у вигляді коливання з повільно змінюється амплітудою і фазою. Додаткова умова на $a(t)$ і $b(t)$:

$$\dot{a}(t)\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \dot{b}(t)\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) = 0, \tag{48}$$

де крапки над $a(t)$ и $b(t)$ позначають похідну за часом. Обчислимо першу і другу похідні від $x(t)$, яка задана формулою (47).

$$\dot{x}(t) = -\frac{\omega}{2}[a(t)\sin\frac{\omega t}{2} - b(t)\cos\frac{\omega t}{2}]\,,$$
$$\ddot{x}(t) = -\frac{\omega}{2}[\dot{a}(t)\sin\frac{\omega t}{2} - \dot{b}(t)\cos\frac{\omega t}{2}] - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2[a(t)\cos\frac{\omega t}{2} + b(t)\sin\frac{\omega t}{2}]\,. \quad (49)$$

Підставляючи ці формули в вихідне рівняння (44) (рівняння Матьє), отримаємо:

$$-\frac{\omega}{2}\dot{a}(t)\sin\frac{\omega t}{2} + \frac{\omega}{2}\dot{b}(t)\cos\frac{\omega t}{2} = -[\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2][a(t)\cos\frac{\omega t}{2} + b(t)\sin\frac{\omega t}{2}] -$$
$$- \varepsilon\omega_0^2[a(t)\cos\omega t\,\cos\frac{\omega t}{2} + b(t)\cos\omega t\,\sin\frac{\omega t}{2}]\,. \quad (50)$$

Рівняння (48) і (50) дозволяють виразити величини $\dot{a}(t)$ й $\dot{b}(t)$ окремо:

$$\frac{\omega}{2}\dot{a}(t) = [\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2][a(t)\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2} + b(t)\sin^2\frac{\omega t}{2}] +$$
$$+ \varepsilon\omega_0^2[a(t)\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}\cos\omega t + b(t)\sin^2\frac{\omega t}{2}\cos\omega t]\,,$$
$$\frac{\omega}{2}\dot{b}(t) = -[\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2][a(t)\cos^2\frac{\omega t}{2} + b(t)\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}] -$$
$$- \varepsilon\omega_0^2[a(t)\cos^2\frac{\omega t}{2}\cos\omega t + b(t)\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}\cos\omega t]\,. \quad (51)$$

$$\frac{\omega}{2}\dot{a}(t) = [\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2][a(t)\sin\omega t - b(t)\cos\omega t + b(t)] +$$
$$+ \frac{\varepsilon\omega_0^2}{2}[a(t)\sin 2\omega t - b(t)\cos 2\omega t + 2b(t)\cos\omega t - b(t)]\,,$$
$$\frac{\omega}{2}\dot{b}(t) = -[\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2][a(t)\cos\omega t + b(t)\sin\omega t + a(t)] -$$
$$- \frac{\varepsilon\omega_0^2}{2}[a(t)\cos 2\omega t + b(t)\sin 2\omega t + 2a(t)\cos\omega t + a(t)]\,. \quad (52)$$

При виведенні виразів (52) не було зроблено ніяких наближень, тому вони еквівалентні одному рівнянню (44). Якщо ми запишемо

$$\omega_0^2 - \frac{\omega^2}{2} = \left(\omega_0 - \frac{\omega}{2}\right)\left(\omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) = \delta(\omega + \delta) \approx \delta\omega\,, \quad (53)$$

то праві частини формул (52) пропорційні малим множникам ε і δ/ω_0. Отже, похідні $\dot{a}(t)$ і $\dot{b}(t)$ малі, що можна використовувати для побудови наближеного розв’язка. Якщо обмежитися тільки першим наближенням по малим параметрам ε і δ/ω_0, то найпростіше використовувати метод Ван-дер-Поля (метод усереднення). Усереднити рівняння (52) по відрізку часу $T = 2\pi/\omega$. У правій частині при усередненні виразів подібних $a(t)\sin\omega t$, можна вважати $a(t)$ і $b(t)$ постійними, так як за такий час вони практично не змінюються, в результаті все такі складові дадуть при усередненні нуль. Ненульовий внесок залишиться тільки від величин $a(t)$ і $b(t)$, вони дадуть плавно змінні середні значення $\bar{a}(t)$ і $\bar{b}(t)$. Зліва також запишемо $\dot{\bar{a}}(t)$ і $\dot{\bar{b}}(t)$.

В результаті такої процедури рівняння (52) переходять в рівняння

$\begin{aligned} \omega\dot{\bar{a}}(t) &= \left\{\left[\omega_0^2 - \frac{\omega}{2}\right]^2 - \frac{\varepsilon\omega_0^2}{2}\right\}\bar{b}(t)\,, \\ \omega\dot{\bar{b}}(t) &= -\left\{\left[\omega_0^2 - \frac{\omega}{2}\right]^2 + \frac{\varepsilon\omega_0^2}{2}\right\}\bar{a}(t)\,. \end{aligned}$	(54)

вважаючи

$$\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \approx \delta\omega \text{ і } \frac{\omega_0}{\omega} \approx \frac{1}{2}, \tag{55}$$

остаточно отримаємо:

$\begin{aligned} \dot{\bar{a}}(t) &= \ \ (\delta - \frac{\varepsilon\omega_0}{4})\,\bar{b}(t)\,, \\ \dot{\bar{b}}(t) &= -(\delta + \frac{\varepsilon\omega_0}{4})\,\bar{a}(t)\,. \end{aligned}$	(56)

Шукаємо розв’язок підстановкою:

$$\bar{a}(t) = a_0 \exp(\lambda t),\ \bar{b}(t) = b_0 \exp(\lambda t). \tag{57}$$

Тоді з (56) отримуємо наступні розв’язки характеристичного рівняння:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega_0^2}{4}\right)^2 - \delta^2}\ . \tag{58}$$

В системі буде існувати нестійкість, якщо коріння (58) - дійсні, тоді одна з експонент $\exp(\lambda_{1,2} t)$ буде ростучою. Це реалізується при

$$-\frac{\varepsilon\omega_0}{4} < \delta < \frac{\varepsilon\omega_0}{4}. \tag{59}$$

Максимальний інкремент нестійкості досягається при $\delta = 0$ і дорівнює

$$\lambda_{\max} = \frac{\varepsilon\omega_0}{4}. \tag{60}$$

При $|\delta| > \frac{\varepsilon\omega_0}{4}$ значення λ виходять чисто комплексні, розв'язок при цьому залишається обмеженим.

Границя нестійкості визначається умовою

$$|\delta| = \frac{\varepsilon\omega_0}{4}, \tag{61}$$

яку, з урахуванням визначення параметра $\delta = \omega - \frac{\omega_0}{2}$ і умови $|\delta| << \omega_0$, можна представити у вигляді

$\varepsilon = \frac{4\omega}{\omega_0}\left|\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{1}{2}\right|$	(62)

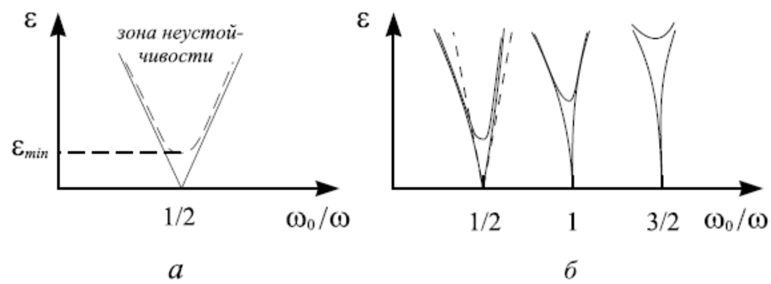

Рис. 3. Площина параметрів $(\omega_0/\omega, \varepsilon)$. **а)** Основна зона параметричної нестійкості для рівняння Матьє в області малих ε. Пунктиром показана межа зони з урахуванням малого загасання. **б)** Зони параметричної нестійкості для трьох перших резонансів. Межі зон викривляються з урахуванням вищих наближень теорії збурень. Пунктиром показано межа основної зони в першому порядку теорії збурень.

Рівняння Матьє з урахуванням втрат.

$$\ddot{x}(t)+2\gamma\dot{x}(t)+\omega_0^2\left(1+\varepsilon\cos(\omega t)\right)x(t)=0\,. \tag{63}$$

Заміною змінних

$$x(t)=\exp[-\gamma t]\,y(t) \tag{64}$$

таке рівняння перетворюється в рівняння

$$\ddot{y}(t)+\omega_0^2\left(1+\varepsilon\cos(\omega t)-\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)y(t)=0\,. \tag{65}$$

Коли коріння

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega_0^2}{4}\right)^2-\delta^2} \tag{58}$$

дійсні, то величину $y(t)$ можна представити у виді

$$y(t)\sim\exp\left(\left|\lambda_{1,2}\right|t\right). \tag{66}$$

Отже, нестійкість для $x(t)$ виникає за умови, що

$$\gamma<\left|\lambda_{1,2}\right| \text{ або } \gamma<\sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)^2-\delta^2}\,. \tag{67}$$

Границя резонансу визначається рівнянням

$\gamma=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)^2-\delta^2}$	(68)

яке задає гілку параболи, що показана на рис. 3а пунктиром.

Граничне значення параметра модуляції ε, менше якого нестійкість не може виникнути взагалі є:

$$\varepsilon_{\min} = \frac{4\gamma}{\omega_0}. \tag{69}$$

<u>Основні результати дослідження резонансів при</u> $n > 1$**.**

1) При великих номерах резонансу n область нестійкості підходить до осі ω_0/ω вузьким язиком, ширина якого різко зменшується з ростом номера n (пропорційно ε^n).
2) Сама нестійкість слабо виражена, так як при великих n власні числа матриці відображення за період по модулю близькі до одиниці.
3) Мале тертя призводить до того, що для виникнення параметричного резонансу n-го ***порядку є порогове значення*** $\varepsilon_{\min,n}$, яке швидко зростає з номером n. При менших значеннях ε коливання загасають.