

# 基于卡尔曼滤波的无人机组导航系统设计

王 浩, 黄长强, 吴文超

(空军工程大学工程学院, 陕西 西安 710038)

**摘要:** 针对卡尔曼滤波在实际应用中遇到的系统通常不是严格线性的问题, 改进了在组合导航系统中常用的卡尔曼滤波方法, 用扩展卡尔曼滤波对 NS 和外部测量源的信息进行融合, 推导了无人机 GPS 辅助惯性导航系统的导航方程。通过分析 GPS 和 NS 的定位原理, 建立了 GPS 和 NS 的误差模型。完成了以 NS 为主导航系统, GPS 作为辅助系统的组合导航系统的扩展卡尔曼滤波设计。最后, 将线性卡尔曼滤波和扩展卡尔曼滤波的结果进行了仿真对比分析, 结果表明: 扩展卡尔曼滤波更适合系统为非线性的情况。

**关键词:** 扩展卡尔曼滤波; 组合导航; 误差模型

**中图分类号:** V271.4 **文献标识码:** B

## Design of a GPS-aided NS Based on Kalman Filter

WANG Hao, HUANG Chang-qiang, WU Wen-chao

(Engineering Institute Airforce Engineering University Xi'an Shanxi 710038 China)

**ABSTRACT:** The common Kalman filtering method used for integrated navigation was updated in order to solve the nonlinear problem of the system function. Extended Kalman filtering was used to fuse information from NS and other aided source and navigation function of UAV. The principles of GPS and NS navigation were analyzed. Error models of GPS and NS were constructed then. An extended Kalman filter for the GPS-aided NS was designed. The performance of extended Kalman filter was compared with linear Kalman filters finally. The result shows that the extended Kalman filter is more fit for nonlinear systems.

**KEYWORDS:** Extended Kalman filter; Integrated navigation; Error model

## 1 引言

惯性导航系统由于其快速性、独立性和不易受干扰的优点而在现代商业和军事领域获得了广泛应用。但另一方面, 惯导系统会产生随时间无界增加的位置误差。解决这个问题的一种有效办法是利用外部信息对惯导系统进行周期性的更新, 重设惯导的误差, 使误差值回到初始值<sup>[1]</sup>。

本文改进了在组合导航系统中常用的卡尔曼滤波方法, 用扩展卡尔曼滤波对 NS 和外部测量源的信息进行融合, 推导了无人机 GPS 辅助惯性导航系统的导航方程。

## 2 线性和扩展卡尔曼滤波

卡尔曼滤波的应用有一个前提条件, 即认为系统是线性的。然而实际应用中遇到的系统通常不是严格线性的, 但可

以认为是近似线性的。在用卡尔曼滤波解决非线性问题时, 一个常用的方法是将非线性方程进行线性化, 得到线性关系。这个过程将产生线性的干扰方程和误差方程。

非线性方程线性化的方法有两种<sup>[3]</sup>。第一种方法是在已知轨迹上进行线性化。这种方法不依靠测量数据, 采用这种方法的卡尔曼滤波称为线性卡尔曼滤波。第二种方法是在由测量值实时更新的轨迹上对方程进行线性化。这种方法得到的估计轨迹和真实轨迹之间的偏差很小, 采用这种方法的卡尔曼滤波称为扩展卡尔曼滤波。

## 3 GPS 卫星定位方法

本文采用四星伪距定位法, 用  $(x_i, y_i, z_i)$  表示第  $i$  颗卫星的位置,  $(x_u, y_u, z_u)$  和  $(x_s, y_s, z_s)$  分别表示用户的真实位置和测量位置。由此可得伪距公式<sup>[2]</sup>:

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2} + c t_u$$

$$= \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

测量伪距公式:

基金项目: 军队重点科研项目基金 (KJ6703), 空军工程大学工程学院优秀博士学位论文创新基金资助 (BC06003)

收稿日期: 2008-02-28 修回日期: 2008-03-06

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2} + c t_u \quad (2)$$

定义用户位置误差和接收机的时钟偏差:

$$\begin{cases} x_u = x_u + \Delta x_u \\ y_u = y_u + \Delta y_u \\ z_u = z_u + \Delta z_u \\ t_u = t_u + \Delta t_u \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x_u, y_u, z_u, t_u) = f(x_u + \Delta x_u, y_u + \Delta y_u, z_u + \Delta z_u, t_u + \Delta t_u) \quad (4)$$

将上式按泰勒级数展开并截取至一阶, 可得如下公式:

$$\begin{aligned} f(x_u + \Delta x_u, y_u + \Delta y_u, z_u + \Delta z_u, t_u + \Delta t_u) &= f(x_u, y_u, z_u, t_u) + \\ &\frac{\partial f(x_u, y_u, z_u, t_u)}{\partial x_u} \Delta x_u + \frac{\partial f(x_u, y_u, z_u, t_u)}{\partial y_u} \Delta y_u + \\ &\frac{\partial f(x_u, y_u, z_u, t_u)}{\partial z_u} \Delta z_u + \frac{\partial f(x_u, y_u, z_u, t_u)}{\partial t_u} \Delta t_u \end{aligned} \quad (5)$$

式中的偏微分可以通过下式计算:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x_u, y_u, z_u, t_u)}{\partial x_u} \Delta x_u = -\frac{x_i - x_u}{r_i} \\ \frac{\partial f(x_u, y_u, z_u, t_u)}{\partial y_u} \Delta y_u = -\frac{y_i - y_u}{r_i} \\ \frac{\partial f(x_u, y_u, z_u, t_u)}{\partial z_u} \Delta z_u = -\frac{z_i - z_u}{r_i} \\ \frac{\partial f(x_u, y_u, z_u, t_u)}{\partial t_u} \Delta t_u = c \end{cases} \quad (6)$$

其中,

$$r_i = \sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2} \quad (7)$$

由公式 (1) (2) (7) 可得

$$\rho_i - \rho_u = -\frac{x_i - x_u}{r_i} \Delta x_u - \frac{y_i - y_u}{r_i} \Delta y_u - \frac{z_i - z_u}{r_i} \Delta z_u + c \Delta t_u \quad (8)$$

上式可写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \Delta \rho_1 \\ \Delta \rho_2 \\ \Delta \rho_3 \\ \Delta \rho_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ \Delta t_u \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中,

$$\begin{cases} a x_i = -\frac{x_i - x_u}{r_i} \\ a y_i = -\frac{y_i - y_u}{r_i} \\ a z_i = -\frac{z_i - z_u}{r_i} \end{cases} \quad (10)$$

## 4 GPS辅助惯性导航系统

目前被广泛用来与 NS 进行组合的是 GPS, 其组合方式有多种, 本文所采用的组合结构如图 1 所示的间接半反馈结构。由 NS 测量设备提供卡尔曼滤波传递和观察矩阵计算

所需的导航变量 [4] [5]。

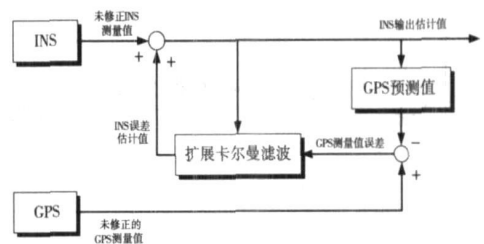


图 1 GPS辅助惯性导航系统结构图

对 8 维卡尔曼滤波器, NS 系统的模型可以用图 2 表示, 其中  $\Delta x \Delta y \Delta z$  分别表示东、北、垂直方向上的位置误差,  $\Delta \dot{x} \Delta \dot{y} \Delta \dot{z}$  是相应方向上的速度误差,  $\Delta a_x \Delta a_y \Delta a_z$  表示加速度的误差白噪声。



图 2 位置误差模型

由图 2 可以得到:

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \Delta \dot{x}, \quad \frac{d\Delta y}{dt} = \Delta \dot{y}, \quad \frac{d\Delta z}{dt} = \Delta \dot{z}$$

如果令  $x_1, x_2, x_3$  表示东、西和垂直方向上的位置误差,  $x_4, x_5, x_6$  表示相应方向上的速度误差, 可得如下形式的 NS 状态空间表达式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_x \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = a_y \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = a_z \end{cases} \quad (11)$$

GPS 的时钟模型如图 3 所示, 该时钟数学模型如下:

$$\frac{dB}{dt} = D + u_b, \quad \frac{dB}{dt} = u_b \quad (12)$$

令  $x_7$  = 时钟偏差,  $x_8$  = 时钟漂移, 得到状态空间形式如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_7 = x_8 + u_b \\ \dot{x}_8 = u_b \end{cases} \quad (13)$$

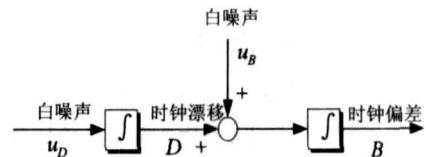


图 3 GPS时钟偏差模型

由式 (11)、(13) 可得:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w_2 \\ 0 \\ w_4 \\ 0 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} \quad (14)$$

(14)式可以简写成

$$\dot{X}(t) = F(t) X(t) + W(t) \quad (15)$$

式(15)即为 GPS辅助惯性导航系统的状态方程,  $W(t)$ 是协方差为  $Q$  的白噪声。

由于该式是时间连续的, 为了便于在数字计算机上运行, 必须转化成离散时间形式。离散化后的方程如下:

$$X_{k+1} = e^{FT} X_k + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{F(kT-\tau)} W(\tau) d\tau \quad (16)$$

定义

$$\Phi_k = e^{FT} \quad (17)$$

$$W_k = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{F(kT-\tau)} W(\tau) d\tau \quad (18)$$

得到状态方程的离散形式:

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + W_k \quad (19)$$

$W_k$ 的离散形式协方差  $Q_d$ 由下式求出

$$Q_d = \int_0^T e^{F\tau} Q e^{F^T\tau} d\tau \quad (20)$$

卡尔曼滤波器的观测值是 GPS测量的伪距和预测伪距的差值, 由式(9)推导得到。

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_1 & 0 & a_1 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & a_2 & 0 & a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & a_3 & 0 & a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & a_4 & 0 & a_4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

(21)式最后一项是测量噪声, 均值为零, 协方差为  $R$ 。测量方程已是离散形式, 可直接由离散卡尔曼滤波实现。将上式写成矩阵形式, 可得:

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (22)$$

由此, GPS辅助惯性导航系统的状态空间方程如下:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \Phi_k x_k + w_k \\ z_k = H_k x_k + v_k \end{cases} \quad (23)$$

式中的矩阵  $\Phi_k$ 称为状态转移矩阵, 表征状态从  $t_k$ 到  $t_{k+1}$ 时

刻的转移。如果矩阵  $F$ 是常值矩阵, 采样周期为  $T$ 可用下式计算状态转移矩阵:

$$\Phi_k = e^{FT} = I + FT + \frac{(FT)^2}{2!} + \dots \quad (24)$$

截取到一阶, 得状态转移矩阵。

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

相应的过程误差矩阵如下:

$$W_k = \begin{bmatrix} Tw_1 + \frac{1}{2} T^2 w_2 \\ Tw_2 \\ Tw_3 + \frac{1}{2} T^2 w_4 \\ Tw_4 \\ Tw_5 + \frac{1}{2} T^2 w_6 \\ Tw_6 \\ Tw_7 + \frac{1}{2} T^2 w_8 \\ Tw_8 \end{bmatrix} \quad (26)$$

过程噪声的协方差矩阵表示模型相对真实系统的不确定度, 设计不准确会导致卡尔曼滤波的不稳定。本文通过下式计算协方差矩阵:

$$Q_d = \begin{bmatrix} \frac{S_p T^3}{3} & \frac{S_p T^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{S_p T^2}{2} & S_p T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S_p T^3}{3} & \frac{S_p T^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S_p T^2}{2} & S_p T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{S_v T^3}{3} & \frac{S_v T^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{S_v T^2}{2} & S_v T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_f T + \frac{S_g T^3}{3} & \frac{S_g T^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{S_g T^2}{2} & S_g T \end{bmatrix} \quad (27)$$

其中,

$S_p$ 水平方向上噪声的协方差

(下转第 124页)

- [5] Doucet RAO—Blackwellised Particle filtering for dynamic Bayesian networks [J]. Proc UA 2000 Cambridge U K Cambridge Univ Press 2000. 253—259.
- [6] R Chen Mixture Kalman filters [J]. J Roy Statist Soc (B), 2000 62 493—508
- [7] ADoucet On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering [J]. Statist Comput 2000 10 197—208.
- [8] R Van DerMeerwe The Unscented Particle Filter Adv Neural Inform Process Syst [M]. Massachusetts MIT Press— 2000. 353—359
- [9] EWan The unscented Kalman filter [M]. Haykin S Kalman Filtering and Neural Networks [C]. New York Wiley 2001. 146—153

- [10] J Spall Estimation via Markov Chain Monte Carlo [J]. IEEE Control Systems Magazine April 2003. 34—45

#### [作者简介]



相威(1983.6—),男(汉族)山东乳山人,杭州电子科技大学研究生,研究方向:目标检测与跟踪,数据融合。

汪立新(1966.10—),男(汉族)浙江萧山人,硕士生导师,教授,研究方向:信号与信息处理,软件无线电。

林孝焰(1983.9—),男(汉族)浙江温州人,硕士学位,研究方向:目标检测与跟踪。

(上接第33页)

$S_{\text{垂直}}$  垂直方向上噪声的协方差

$S_{\text{接收}}$  接收机时钟模型的噪声协方差

## 5 仿真分析及结论

设  $S_p=100$   $S_v=25$   $S_t=S_k=0.01$ , 采样时间 1 分钟, 采样间隔 0.4 秒。分别采用线性卡尔曼滤波和扩展卡尔曼滤波对系统进行估计, 得到的结果如图 4 所示(为东向位置误差的估计值, 虚线表示线性卡尔曼得到的结果, 实线表示扩展卡尔曼滤波得到的结果)。

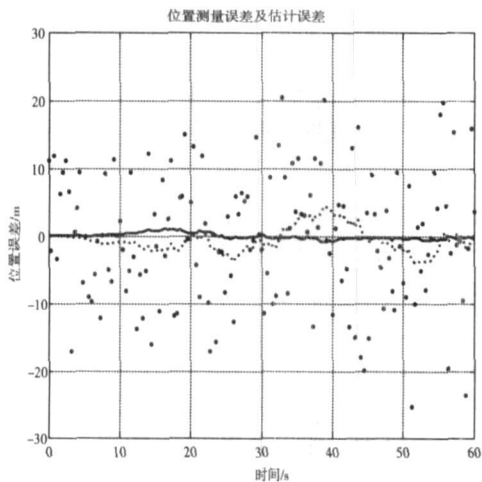


图 4 仿真结果

从图中可以看出, 卡尔曼滤波能有效降低系统的噪声水

平。相对线性卡尔曼滤波, 扩展卡尔曼滤波更适合系统为非线性的情况。由于无人机在飞行过程中会受到许多非线性因素的影响, 为了得到更加准确的系统描述, 应采用扩展卡尔曼滤波方法。

#### 参考文献:

- [1] 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998
- [2] 张宗麟. 惯性导航与组合导航 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.
- [3] JouniHartikainen and Sino Saikk. Optimal Filtering with Kalman Filters and Smoothers— a Manual for Matlab Toolbox EKF/UKF [J]. Journal of the American Statistical Association 2007
- [4] S Peter Maybeck. Stochastic models estimation and control [M]. Academic Press New York, 1979
- [5] Greg Welch and Gary Bishop. An Introduction to the Kalman Filter [J]. Journal of Basic Engineering 2001.

#### [作者简介]



王浩(1980.5—),男(汉族)安徽凤阳人,博士研究生,研究方向:无人机导航与控制,常规弹药制导化。

黄长强(1962.2—),男(汉族)江苏如东人,博士,教授,研究方向:无人机及精确制导武器总体设计。

吴文超(1980.10—),男(汉族)山东胶南人,硕士研究生,研究方向:机载精确制导武器总体技术。