

文章编号: 1673-1522 (2009) 05-0499-04

四旋翼飞行器建模、控制与仿真

杨庆华¹, 宋召青², 时磊³

(1. 海装驻西安地区军事代表局, 西安 710054; 2. 海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001;
3. 防空兵指挥学院作战指挥系, 郑州 450052)

摘要: 四旋翼飞行器在平面结构上具有4个平均分布且呈十字对称的推进器。建立了机体坐标系和惯性坐标系, 根据飞行器的动力学特性建立该飞行器的数学模型; 利用滑模控制的方法对所建立的模型进行研究; 在满足李雅普诺夫稳定条件下, 利用反演控制方法推导出控制滑模面, 并建立滑模控制律; 最后, 在给定参数值的情况下, 通过所建立的控制律对该飞行器的滑模控制进行了仿真。

关键词: 四旋翼飞行器; 动力学模型; 反演; 滑模控制; 仿真

中图分类号: V249.122

文献标志码: A

四旋翼飞行器是在平面上具有4个平均分布且呈十字对称推进器的无人驾驶飞行器, 其结构模型图如图1所示。它除了具有一般无人机隐蔽性好、生命力强、造价低廉、不惧伤亡、起降简单、操作灵活的优点之外, 其特殊的结构使其还有以下优点。

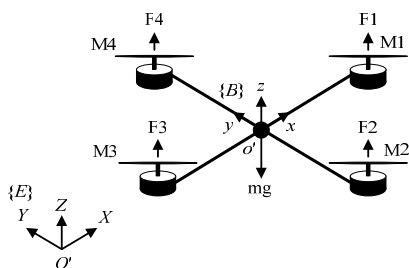


图1 四旋翼飞行器结构模型图

1) 飞行器体积小, 所占空间小, 适合多平台、多空间的应用。可以在地面、军舰上灵活垂直起降, 无须弹射器、发射架进行发射。

2) 具有很强的机动性, 能快速、灵活地在各个方向进行机动, 进而大大缩小回旋半径, 节省时间, 提高效率。

3) 结构简单, 易于控制, 且能执行各种特殊、危险任务。

从该飞行器结构模型可以看出, 推进器(1、3)、(2、4)为互相对称的两部分。通过改变推进器转子的旋转速度, 会使飞行器产生升力, 引起运动。

因此, 通过改变4个推进器的转动速度, 我们可以控制飞行器的垂直起降运动。如果相反地控制(2、4)推进器的旋转速度, 会引起滚转运动; 如果相反地控制(1、3)推进器的旋转速度, 会引起俯仰运动; 要使飞行器产生偏航运动, 则需要通过共同控制(1、2)和(3、4)推进器的旋转速度。

1 四旋翼飞行器的数学模型

首先, 建立惯性坐标系 $E(OXYZ)$ 和机体坐标系 $B(o'xyz)$ 如图1所示。

对该飞行器做如下假设:

- 1) 飞行器视为刚体, 而且完全均匀对称;
- 2) 原点 o' 与飞行器的质心在同一点;
- 3) 飞行器的螺旋桨是固定不可变形的;
- 4) 飞行器在各方向的运动速率、滚转快慢与4个推进器的速度是呈比例的。

在这些假设条件下, 可以把飞行器的动力学模型描述成一个固定飞行器在空气中由转子的转动而引起的空气动力特性。

利用牛顿第二定律, 该飞行器的动力学方程:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v \\ m\ddot{\xi} = F_f + F_g \\ \dot{R} = RS(\Omega) \\ J\dot{\Omega} = -\Omega \times J\Omega + F_f \end{cases}, \quad (1)$$

收稿日期: 2008-12-01

作者简介: 杨庆华 (1969-), 男, 工程师, 硕士。

式中: ξ 表示飞行器的质心到惯性坐标系原点的距离; m 表示飞行器的总质量; $\mathbf{J} \in R^{3 \times 3}$ 表示为坐标系 B 中机体的转动惯量, 具体表达式如下:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

式中: I_x 、 I_y 、 I_z 为机体分别绕三坐标轴的转动惯量。

$\boldsymbol{\Omega}$ 表示为飞行器相对于坐标系 B 中的旋转角速度:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

在小角度情况下, $\boldsymbol{\Omega}$ 可以近似为 $[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$, 即:

$$\boldsymbol{\Omega} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T, \quad (4)$$

式中: ϕ 表示为机体坐标系的轴与包含飞行器纵轴 $o'z$ 的铅垂平面的夹角, 称之为滚转角, 由飞行器尾部顺纵轴前视, 若 $o'z$ 轴位于铅垂面的右侧 (即飞行器向右倾斜), 则 ϕ 为正, 反之为负; θ 表示为飞行器的纵轴 ($o'z$) 与水平面 (OXY) 间的夹角, 称之为俯仰角, 飞行器纵轴指向水平面上方, θ 角为正, 反之为负; ψ 为飞行器纵轴在水平面内投影与地面系 OX 轴之间的夹角, 称之为偏航角, 迎 ψ 角平面观察, 若由 OX 转至投影线是逆时针旋转, 则 ψ 角为正, 反之为负。

\mathbf{R} 表示为一个 3×3 阶的方向余弦矩阵^[1], 即表示从惯性坐标系到机体坐标系的转换矩阵^[2]。

$\mathbf{R} =$

$$\begin{bmatrix} C\theta C\psi & C\phi S\psi + S\phi S\theta C\psi & S\phi S\psi + C\phi S\theta C\psi \\ C\theta S\psi & C\phi C\psi + S\phi S\theta S\psi & S\phi C\psi + C\phi S\theta S\psi \\ S\theta & S\phi C\theta & C\phi C\theta \end{bmatrix}. \quad (5)$$

这里用 C 和 S 分别代表三角函数 \cos 和 \sin , 对于给定列向量 $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3]^T$, 定义 $S(\boldsymbol{\Omega})$ 为:

$$S(\boldsymbol{\Omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

\mathbf{F}_f 为 4 个螺旋桨的合力, 其具体表达式如下:

$$\mathbf{F}_f = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \sum_{i=1}^4 F_i, \quad (7)$$

$$F_i = K_p \omega_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

式中: K_p 为升力系数; ω_i 为旋转角速度。

综上所述, 由式(1)~(7)可得该飞行器的动力模型为:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{1}{I_x} \{ \dot{\theta} \dot{\psi} (I_y - I_z) + d U_2 \} \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{I_y} \{ \dot{\phi} \dot{\psi} (I_z - I_x) + d U_3 \} \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{I_z} \{ \dot{\phi} \dot{\theta} (I_x - I_y) + U_4 \} \\ \ddot{x} = \frac{1}{m} \{ (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) U_1 \} \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} \{ (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) U_1 \} \\ \ddot{z} = \frac{1}{m} (\cos \phi \cos \theta) U_1 - g \end{cases}, \quad (9)$$

式中: d 为螺旋桨中心至机体坐标系原点的距离; U_1 、 U_2 、 U_3 、 U_4 是由 4 个转子的角速度决定的系统的控制输入量, 具体如下:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & K_p & K_p & K_p \\ -K_p & 0 & K_p & 0 \\ 0 & -K_p & 0 & K_p \\ K_d & -K_d & K_d & -K_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

式中: K_d 为拖拉系数。

该飞行器的数学模型中存在一个非完整约束, 由式(9)可得:

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{-\left(\ddot{x} - \frac{\dot{x}}{m}\right) \cos \psi + \left(\ddot{y} - \frac{\dot{y}}{m}\right) \sin \psi}{\ddot{z} + g - \frac{\dot{z}}{m}} \\ \sin \phi = \frac{-\left(\ddot{x} - \frac{\dot{x}}{m}\right) \sin \psi + \left(\ddot{y} - \frac{\dot{y}}{m}\right) \cos \psi}{\sqrt{\left(\ddot{x} - \frac{\dot{x}}{m}\right)^2 + \left(\ddot{y} - \frac{\dot{y}}{m}\right)^2 + \left(\ddot{z} + g - \frac{\dot{z}}{m}\right)^2}} \end{cases}. \quad (11)$$

螺旋桨是 $D.C$ 发动机经由一个减速器驱动螺旋桨构成的单元。螺旋桨的模型可由如下状态方程描述:

$$\begin{cases} V = ri + L \frac{di}{dt} + k_e \omega \\ k_m i = J_r \frac{d\omega}{dt} + C_s + k_r \omega^2 \end{cases}, \quad (12)$$

式中: V 为发动机输入电压; i 为发动机输入电流; k_e 、 k_m 、 k_r 分别为电气、机械、负载扭矩常量; r 为发动机本身阻抗; J_r 为转动惯量; C_s 为固体摩擦。则螺旋桨模型为:

$$\dot{\omega}_i = b V_i - \beta_0 - \beta_1 \omega_i - \beta_2 \omega_i^2, \quad i \in [1, 4], \quad (13)$$

式中:

$$\beta_0 = \frac{C_s}{J_r}, \quad \beta_1 = \frac{k_e k_m}{r J_r}, \quad \beta_2 = \frac{k_r}{J_r}, \quad b = \frac{k_m}{r J_r}. \quad (14)$$

2 飞行器的滑模控制

根据四旋翼飞行器的特点和动力学特性,我们选择滑模控制^[3-4]方法,此控制方法具有独特的优点,它确保了李雅普诺夫稳定性,确保了所有要求的动力学特性,确保了对系统所有非线性因素的处理。

将所建立的数学模型(9)表示成状态空间形式:

$$\dot{X} = f(X) + g(X, U) + \delta, X = [x_1 \cdots x_{12}]^T, \quad (15)$$

式中: $X = [x_1 \cdots x_{12}]^T$ 表示状态向量,具体如下:

$$X = [\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}]^T. \quad (16)$$

结合式(9)、(16),可得到如下空间表达式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = a_1 x_4 x_6 + b_1 U_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = a_3 x_2 x_6 + b_2 U_3 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = a_5 x_2 x_4 + b_3 U_4 \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = U_x \frac{U_1}{m} \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = U_y \frac{U_1}{m} \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \frac{\cos x_1 \cos x_3}{m} U_1 - g \end{cases}, \quad (17)$$

式中:

$$\begin{cases} a_1 = (I_y - I_z)/I_x \\ a_3 = (I_z - I_x)/I_y \\ a_5 = (I_x - I_y)/I_z \\ b_1 = \frac{d}{I_x}, b_2 = \frac{d}{I_y}, b_3 = \frac{K_d}{I_z} \end{cases}, \quad (18)$$

$$\begin{cases} U_x = \cos x_1 \sin x_3 \cos x_5 + \sin x_1 \sin x_5 \\ U_y = \cos x_1 \sin x_3 \cos x_5 - \sin x_1 \cos x_5 \end{cases}. \quad (19)$$

利用反演递推算法^[5-6],可以简化所有有关跟踪误差的计算步骤,可以用李雅普诺夫函数表示如下:

$$z_i = \begin{cases} x_{id} - x_i & i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \\ x_i - \dot{x}_{(i-1)d} - \alpha Z_{(i-1)} & \end{cases}, \quad (20)$$

式中: $\alpha > 0$ 。

$$V_i = \begin{cases} \frac{1}{2} z_i^2 & i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \\ \frac{1}{2} (2V_{i-1} + z_i^2) & i \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \end{cases}. \quad (21)$$

这里所选择的滑模面是建立在轨迹误差之上的,由式(20)可知定义:

$$\begin{cases} S_\phi = z_2 = x_2 - \dot{x}_{1d} - \alpha z_1 \\ S_\theta = z_4 = x_4 - \dot{x}_{3d} - \alpha z_3 \\ S_\psi = z_6 = x_6 - \dot{x}_{5d} - \alpha z_5 \\ S_x = z_8 = x_8 - \dot{x}_{7d} - \alpha z_7 \\ S_y = z_{10} = x_{10} - \dot{x}_{9d} - \alpha z_9 \\ S_z = z_{12} = x_{12} - \dot{x}_{11d} - \alpha z_{11} \end{cases}, \quad (22)$$

式中: S_ϕ 、 S_θ 、 S_ψ 、 S_x 、 S_y 和 S_z 为动态滑模面。可得稳定控制律如下:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos \phi \cos \theta} \{-q \text{sign}(S_z) - k S_z + \ddot{z}_d + \alpha(\dot{z}_d - x_{12}) + g\} \\ U_2 = \frac{1}{b_1} \{-q \text{sign}(S_\phi) - k S_\phi - a_1 x_4 x_6 + \ddot{\phi}_d + \alpha(\dot{\phi}_d - x_2)\} \\ U_3 = \frac{1}{b_2} \{-q \text{sign}(S_\theta) - k S_\theta - a_3 x_2 x_6 + \ddot{\theta}_d + \alpha(\dot{\theta}_d - x_4)\} \\ U_4 = \frac{1}{b_3} \{-q \text{sign}(S_\psi) - k S_\psi - a_5 x_2 x_4 + \ddot{\psi}_d + \alpha(\dot{\psi}_d - x_6)\} \end{cases}. \quad (23)$$

证明:结合式(20)、(21)可知:

$$\begin{cases} V_{12} = \frac{1}{2} z_{11}^2 + \frac{1}{2} z_{12}^2 \\ z_{12} = x_{12} - \dot{x}_{11d} - \alpha z_{11} \end{cases}. \quad (24)$$

由式(22)可知:

$$S_z = z_{12} = x_{12} - \dot{x}_{11d} - \alpha z_{11}, \quad (25)$$

所以有:

$$V_{12} = \frac{1}{2} z_{11}^2 + \frac{1}{2} S_z^2, \quad (26)$$

即:

$$\begin{cases} \dot{V}_{12} = z_{11} \dot{z}_{11} + S_z \dot{S}_z \\ \dot{V}_{12} = z_{11} \dot{z}_{11} + S_z \left\{ \frac{\cos x_1 \cos x_3}{m} U_1 - g - \ddot{z}_d - \alpha(\dot{z}_d - x_{12}) \right\} \end{cases}. \quad (27)$$

\dot{S}_z 是控制率中的滑模面 S_z 的时间导数 ($S_z \dot{S}_z < 0$):

$$\begin{aligned} \dot{S}_z &= -q \text{sign}(S_z) - k S_z = \dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha \dot{z}_{11} = \\ &= \frac{\cos x_1 \cos x_3}{m} U_1 - g - \ddot{z}_d - \alpha(\dot{z}_d - x_{12}). \end{aligned} \quad (28)$$

对于反演控制方法,控制量 U_1 表示

$$U_1 = \frac{m}{\cos \phi \cos \theta} \{-q \text{sign}(S_z) - k S_z + \ddot{z}_d + \alpha(\dot{z}_d - x_{12}) + g\}. \quad (29)$$

U_2 、 U_3 、 U_4 的证明过程可以用同样的方法来推出。

3 仿真

1) 当 $k=5$ 、 $q=1$ 、 $\alpha=3$ 时,仿真结果如下:

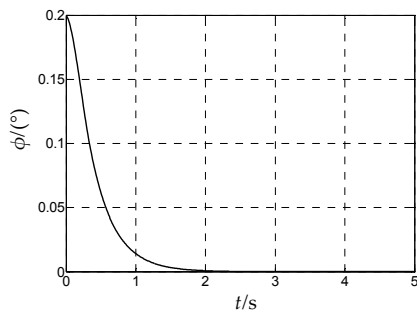


图2 X轴方向滚转角的变化

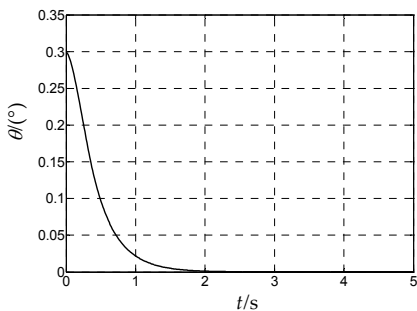


图3 Y轴方向俯仰角的变化

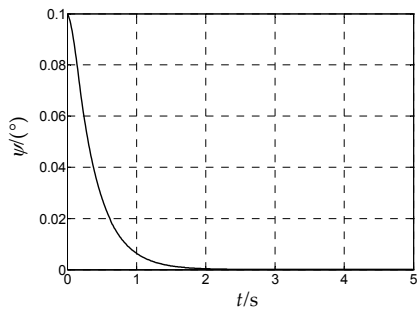


图4 Z轴方向偏航角的变化

4 结束语

本文以四旋翼飞行器为研究对象,建立了四旋翼飞行器的数学模型,以滑模控制和李雅普诺夫稳

定性理论为基础,利用反演控制设计方法,设计了四旋翼飞行器的自适应反演滑模控制律并进行了仿真。从仿真结果看,系统呈稳定状态,沿着三轴方向的滚转角、俯仰角、偏航角都能快速趋于稳定,取得了良好的控制精度。仿真结果验证了所设计的控制律的有效性。

参考文献:

- [1] 张天光,王秀萍,王丽霞,等.捷联惯性导航技术[M].北京:国防工业出版社,2007:33.
- [2] 钱杏芳,林瑞雄,赵亚男.导弹飞行力学[M].北京:北京理工大学出版社,2006:29-36.
- [3] BOUABDELLAH S, SIEGWART R. Backstepping and sliding mode techniques applied to an indoor micro quadrotor[C]//Proceeding of the 2005 IEEE, ICRA, Barcelona, Spain, April, 2005:432-437.
- [4] MOKHTARI A, BENALLEGUE A, BELAIDI A. Polynomial linear quadratic Gaussian and sliding mode observer for a quadrotor unmanned aerial vehicle[J]. Journal of Robotics and Mechatronics, 2005,17(4): 43-47.
- [5] BOUADI H, BOUCHOUCHA M, TADJINE M. Sliding Mode Control based on Backstepping[J]. International Journal of Applied Mathematics and computer Sciences, 2008,4(1):12-17.
- [6] BENCHAI B, BOUDJEMA F, RACHID A. Sliding mode flux observer based on backstepping approach for induction motor[C]//World Automation Congress WAC'98, Alaska, USA, 1998:1024-1029.

Modeling, Control and Simulation of a Quadrotor Aircraft

YANG Qing-hua¹, SONG Zhao-qing², SHI Lei³

(1. Military Representatives Office of NED in Xi'an, Xi'an 710054, China;

2. Department of Control Engineering, NAAU, Yantai Shandong 264001, China;

3. Department of Campaign Command, Air Defense Forces Command Academy, Zhengzhou 450052, China)

Abstract: The quadrotor has four propellers which equally distribute on the flat surface structure, and symmetry in the cross. The inertial frame and body frame were set up, and the mathematics model of that aircraft was built up according to the dynamics characteristic of the quadrotor. The sliding mode control method was selected to carry on a research based on the mathematics model. Based on the backstepping approach and in order to ensure the Lyapunov stability, the sliding mode law was set up. Finally, simulation of the sliding mode control law for the aircraft was taken under the given parameter.

Key words: quadrotor aircraft; dynamic modeling; backstepping; sliding mode; simulation