МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

А. Ю. Коврижных
О. О. Коврижных

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по программе бакалавриата по направлению подготовки
080100 "Экономика"

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 517.9 (075.8)
К568

Рецензенты:
отдел динамических систем Института математики
и механики им. академика Н. Н. Красовского УрО РАН
(заведующий сектором отдела доктор
физико-математических наук Н. Ю. Лукоянов);
А. М. Соломатин, кандидат физико-математических наук,
доцент (Институт урбанистики Уральской государственной
архитектурно-художественной академии)

Коврижных, А.Ю.
К568 Дифференциальные и разностные уравнения : [учеб. пособие] / А. Ю. Коврижных, О. О. Коврижных. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 148 с.
ISBN 978-5-7996-1341-9

В учебном пособии рассматриваются разделы теории дифференциальных и разностных уравнений. Приводятся примеры применения методов непрерывного и дискретного моделирования в экономике. Даются задачи для практических занятий и самостоятельной работы.

Для студентов нематематических направлений.

УДК 517.9 (075.8)

ISBN 978-5-7996-1341-9

ственных и комплексных чисел используются символы $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Конец доказательств и примеров обозначается символом $\square$.

Авторы выражают глубокую признательность доктору физико-математических наук, профессору А. Р. Данилину за внимание к работе и ценные замечания, что позволило существенно улучшить изложение материала.

Введение

Дифференциальные и разностные уравнения являются эффективным инструментом математического моделирования. Слово "модель" обозначает такой материальный или знаковый объект, который в процессе познания реальности заменяет объект-оригинал. При описании многих физических и экономических объектов и процессов применяют знаковые модели. Предполагается, что изучение модели дает новые знания о моделируемом объекте.

Необходимость применения моделей обусловлена тем, что некоторые объекты непосредственно исследовать невозможно, например, экономическую эффективность строящихся предприятий. Часто эксперименты с реальными объектами требуют много времени и средств, а применение моделирования решает эти задачи. Различают прикладные и теоретические модели. Например, результатом прикладного моделирования в экономике являются модели, дающие числовые значения экономических показателей. При изучении качественной характеристики объекта исследования используют теоретические модели. К ним относятся модели рыночного равновесия, модели оптимизации прибыли и др.

При построении модели надо учитывать, что она не является точной копией объекта. Модель должна адекватно отражать только такие характеристики и свойства объекта моделирования, которые необходимо изучить.

Назовем основные этапы математического моделирования. На первом этапе рассматривается задача из реальной жизни, собирается информация для построения модели. Затем на основе собранной информации строится математическая модель объекта-оригинала (уравнение, формула, система и т. п.). С этой моделью производятся математические операции, направленные на решение полученных уравнений и систем. Далее от полученных математических результатов мы вновь возвращаемся к реальному миру и смотрим, что же эти результаты

Оглавление

Предисловие

Цель данного пособия — оказать помощь студентам в освоении разделов образовательной программы по математике, посвященных дифференциальным и разностным уравнениям. Пособие содержит примеры, иллюстрирующие применение методов непрерывного и дискретного моделирования в физике, экономике, биологии и других сферах.

Изучение дифференциальных и разностных уравнений базируется на понятиях дифференциального и интегрального исчисления, для чего необходимо вспомнить понятия числовой последовательности, предела функции. Потребуются также знания и навыки из курсов математического анализа и линейной алгебры: дифференцирование и интегрирование функций одной переменной, свойства определенных интегралов, вычисление и свойства частных производных и дифференциалов функций многих переменных, алгебраические операции над матрицами, вычисление собственных чисел и собственных векторов квадратных матриц.

Настоящее пособие не является учебником и не может претендовать на полноту изложения. Для более глубокого и основательного изучения дисциплины полезно обращаться к литературе из списка библиографичеких ссылок [1–5, 8–11].

Пособие состоит из двух глав, разделенных на параграфы. В последней части даются вопросы для подготовки к экзамену и зачету, задания для практических занятий и ответы к ним. Некоторые из приведенных задач и примеров заимствованы из работ А. Р. Данилина, С. Г. Лобанова, В. К. Романко, П. М. Симонова, А. Ф. Филиппова. Отметим также, что изложение материала в значительной степени соответствует содержанию курса “Дифференциальные и разностные уравнения”, который читается авторами студентам Высшей школы экономики и менеджмента Уральского федерального университета.

В пособии для обозначения множеств натуральных, вещенам говорят о той реальной задаче, которая была поставлена.

Физические, экономические и социальные процессы развиваются во времени и являются динамическими процессами, характеризующимися скоростью протекания. Поэтому многие из них описываются дифференциальными уравнениями. Разностные уравнения возникают, например, в моделях экономической динамики с дискретным временем.

Глава 1
Обыкновенные дифференциальные уравнения

1.1. Основные определения и примеры

Дифференциальным называют уравнение, связывающее независимые переменные, искомые функции и производные от искомых функций. *Порядком* дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) называется такое уравнение, в котором искомые функции зависят лишь от одной независимой переменной и все они и их производные входят в уравнение в виде своих значений в одной и той же переменной точке. Например, уравнение

$$y'(x) = y^2(x)$$

является ОДУ первого порядка. Часто в записи ОДУ аргументы у неизвестной функции и ее производных опускают, поскольку они одинаковы. Приведем примеры уравнений, не являющихся обыкновенными дифференциальными. Уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

является уравнением *в частных производных*. Оно содержит частные производные неизвестной функции z, зависящей от двух переменных x и y. Уравнение

$$x'(t) = x(t-1)$$

есть уравнение *с запаздыванием*, в нем значения неизвестной функции и ее производной вычислены в разных точках.

Мы будем изучать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Общий вид *обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с одной искомой функцией*:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.1.1}$$

где y — искомая функция аргумента x; $F = F(x, y, y_1, ..., y_n)$ — известная функция от $(n+2)$-х аргументов.

Решением уравнения (1.1.1) в интервале (α, β) называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество в интервале (α, β), т. е. если для любого $x \in (\alpha, \beta)$ выполняется равенство

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) = 0.$$

Замечание 1.1.1. Определение решения включает в себя требование возможности его подстановки в уравнение (1.1.1), в частности, у функции $y = \varphi(x)$ должны существовать все производные до порядка n включительно на интервале (α, β).

Задание. Выписать из следующих функций:

$$\begin{array}{llll} y = e^{3x} - 1, & y = 2e^{-2x}, & y = e^{-x} + 4, & y = e^{-2x} + 1, \\ y = 2e^{-x}, & y = e^{3x} - 2, & y = e^{-3x}, & y = 3e^{x} - 6 \end{array}$$

решения уравнения

$$y' = 3y + 6$$

на $\mathbb{R}$, а для остальных функций доказать, что они не являются решениями.

Пример 1.1.1. Задачу отыскания всех первообразных данной функции f можно записать в виде уравнения

$$y' = f(x), \tag{1.1.2}$$

где f — заданная функция; $y = y(x)$ — неизвестная функция, $y' = \frac{dy}{dx}$. Это уравнение представляет собой простейший пример ОДУ. Как доказывается в интегральном исчислении, если f непрерывна на некотором промежутке, то уравнение (1.1.2) имеет на нем бесконечное семейство решений, которое задается формулой

$$y = F(x) + C,$$

где F — какая-нибудь фиксированная первообразная функции f, а параметр C пробегает все вещественные значения.

Пример 1.1.2. Свойством функции $y = e^x$ является то, что она совпадает со своей производной. Это свойство записывается в виде ОДУ

$$y' = y, \tag{1.1.3}$$

решениями которого, наряду с e^x, будут все функции семейства

$$y = C\,e^x,$$

где C пробегает все вещественные значения.

Пример 1.1.3. На тело (материальную точку) массы m, падающее по вертикальной прямой, принятой за ось Oy, действует сила тяжести $F = mg$. Если $y = y(t)$ есть координата точки в момент времени t, то по закону Ньютона ($m\overline{w} = \overline{F}$, где $\overline{w}$ — ускорение, $\overline{F}$ — сила) $my'' = mg$, или

$$y'' = g, \tag{1.1.4}$$

где y'' — ускорение движущейся точки. Уравнение (1.1.4) является ОДУ второго порядка с искомой функцией $y(t)$, разрешенное относительно старшей производной. Легко проверить подстановкой в уравнение (1.1.4), что его решением является всякая функция $y = \frac{1}{2}g\,t^2 + C_1 t + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные числа.

Пример 1.1.4 (модель роста населения (демографический процесс)). Из статистических данных известно, что для некоторого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности k_p и k_c соответственно. Это предположение приближенно выполняется, пока ресурсов достаточно много, и условия для жизни благоприятны. Найдем закон изменения численности населения с течением времени.

Отвлекаясь от того, что численность населения может измеряться только целыми числами, обозначим $y = y(t)$ число жителей региона в момент времени t. Прирост населения за время Δt равен разности между числом родившихся и умерших за это время, т. е.

$$\Delta y = k_p y(t)\Delta t - k_c y(t)\Delta t.$$

Разделим обе части равенства на Δt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky,$$

где $k = k_p - k_c$ — коэффициент естественного прироста населения. Перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$y' = ky. \tag{1.1.5}$$

Это уравнение было получено *Мальтусом* и называется *уравнением мальтузианского роста*. Его решение (как можно убедиться с помощью непосредственной подстановки в уравнение (1.1.5)) дается множеством функций

$$y = C\,e^{kt},$$

где C – произвольное действительное число. Если известно, что в начальный момент времени $t = 0$ численность населения составляла величину y_0, то зависимость численности населения от времени определяется формулой

$$y(t) = y_0\, e^{kt}.$$

Анализируя эту зависимость, можно прогнозировать рост численности населения в зависимости от коэффициента естественного прироста и времени. В частности, для удвоения количества населения требуется всегда одно и то же время $T = k^{-1}\ln 2$, независимо от его количества. Однако данная простая модель корректно описывает только начальный этап роста населения на относительно небольшом промежутке времени. Точность экспоненциальной модели снижается по мере роста населения вследствие конкуренции за ресурсы. Коэффициент естественного прироста можно считать постоянным лишь на относительно небольшом отрезке времени.

Пример 1.1.5 (эффективность рекламы). Средства массовой информации объявили о поступлении в магазины города нового товара. В начальный момент времени $t = 0$ это известие дошло до N_1 человек из числа N потенциальных покупателей товара. Нужно найти функцию $x = x(t)$, которая определяла бы число $x(t)$ покупателей, узнавших о поступлении товара в момент времени t. Экономисты считают правдоподобной гипотезу, согласно которой скорость $\frac{dx}{dt}$ распространения рекламы (хотя бы "из уст в уста") пропорциональна как $x(t)$, так и числу людей $N - x(t)$, еще не знающих о поступлении товара. Коэффициент пропорциональности обозначим буквой k. Получается дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x). \tag{1.1.6}$$

К этому уравнению мы вернемся позже. □

Мы видим, что, как правило, ОДУ имеет бесконечно много решений. Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* ОДУ (так как в большинстве случаев нахождение решений ОДУ связано с вычислением интегралов).

1.2. Уравнения первого порядка

Изучение теории ОДУ начнем с ОДУ первого порядка, разрешенных относительно производной, т. е. с уравнений вида

$$y' = f(x, y). \tag{1.2.1}$$

Для ОДУ (1.2.1) условие вида $y(x_0) = y_0$ называется *начальным условием*, а задача нахождения решения, удовлетворяющего начальному условию

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

называется *задачей Коши* (или начальной задачей).

Геометрическая интерпретация уравнения, разрешенного относительно производной

График решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1.2.1) называется его *интегральной кривой*. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области Г. Производная функции y' представляет собой угловой коэффициент касательной к кривой $y(x)$ в точке с абсциссой x. В геометрических терминах уравнение (1.2.1) выражает следующий факт: кривая на плоскости (x, y) является его интегральной кривой тогда и только тогда, когда в любой точке (x_0, y_0) этой кривой она имеет касательную с угловым коэффициентом $k = f(x_0, y_0)$. Таким образом, зная правую часть уравнения (1.2.1), мы можем заранее построить касательные ко всем интегральным кривым во всех точках. Для этого каждой точке (x_0, y_0) области Г нужно сопоставить проходящую через нее прямую с угловым коэффициентом $k = f(x_0, y_0)$. Полученное соответствие между точками плоскости и проходящими через нее прямыми называется *полем направлений* уравнения (1.2.1).

Решение задачи Коши (1.2.2) с геометрической точки зрения заключается в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку (x_0, y_0).

Теорема 1.2.1 (о существовании и единственности решения задачи Коши). *Если функция $f(x, y)$, стоящая в правой части уравнения* (1.2.1), *непрерывна в некоторой области* Γ *вместе со своей частной производной* $f'_y(x, y)$, *то для любой точки* $(x_0, y_0) \in \Gamma$ *существует единственная интегральная кривая, проходящая через* (x_0, y_0) *и достигающая границы области* Γ. □

Замечание 1.2.1. По теореме 1.2.1 решения с одинаковыми начальными значениями, определенные на различных интервалах вещественной оси I_1 и I_2, совпадают в общей части этих интервалов $I_1 \cap I_2$. Тем самым можно рассмотреть *продолжение решения* на больший интервал $I_1 \cup I_2$. Утверждение теоремы, в частности, означает, что каждое решение уравнения (1.2.1) единственным образом продолжаемо до тех пор, пока соответствующая ему интегральная кривая не достигает границы области Γ, в которой правая часть уравнения (1.2.1) удовлетворяет указанным выше условиям. Точные определения решения, *неограниченно продолжаемого вперед (назад)* и решения, *продолжаемого вперед (назад) до границы* Γ, содержатся, например, в [8].

Замечание 1.2.2. Возможен случай, при котором решение определено только на ограниченном интервале вещественной оси и не продолжается за пределы этого интервала. Например, функция $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, — единственное в силу теоремы 1.2.1 решение уравнения $y' = y^2 + 1$, правая часть которого удовлетворяет условиям теоремы 1.2.1 во всей плоскости xOy, с начальным условием $y(0) = 0$. Соответствующая интегральная кривая имеет вертикальные асимптоты $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ и достигает границ области Г за счет стремления к бесконечно удаленной точке.

Пусть область Г на плоскости xOy будет той областью, в каждой точке которой выполнены условия теоремы существования и единственности. Семейство функций

$$y = \varphi(x, C), \tag{1.2.3}$$

зависящее от параметра C, называется *общим решением* уравнения (1.2.1) в области Г, если выполняются два условия:

1) для любой точки $(x_0, y_0) \in \Gamma$ существует такое значение параметра C_0, что $\varphi(x_0, C_0) = y_0$;

2) для любого значения параметра C_0 из п. 1 функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением ОДУ (1.2.1).

Решение, получающееся из формулы общего решения (1.2.3) при конкретном значении произвольной постоянной C, называется *частным* решением уравнения (1.2.1).

Знание общего решения (1.2.3) дает возможность решить задачу Коши с любыми начальными данными (x_0, y_0) из области Г за счет выбора соответствующего значения произвольной постоянной C.

Замечание 1.2.3. Уравнение (1.2.1) можно записать в виде

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0. \tag{1.2.4}$$

Вид (1.2.4) может быть получен из (1.2.1) следующим образом. Запишем исходное уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, с производной $\frac{dy}{dx}$ будем обращаться как с дробью, а не как с единым символом, и, домножив обе части уравнения на dx, получим $dy - f(x, y)dx = 0$. И наоборот, там, где $N(x, y) \neq 0$, уравнение (1.2.4) преобразуется в уравнение вида (1.2.1).

Замечание 1.2.4. Вообще говоря, в (1.2.4) переменные x и y являются равноправными, поэтому рассматривают зависимости как y от x, так и x от y. Содержательный смысл уравнения (1.2.4) может состоять в отыскании пары функций $x = p(t)$, $y = q(t)$, удовлетворяющих при всех t из некоторого промежутка (r_1, r_2) равенству

$$M(p(t), q(t))\, p'(t) + N(p(t), q(t))\, q'(t) = 0.$$

Тем самым мы найдем решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.2.4) в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (r_1, r_2)$.

Лишь немногие обыкновенные дифференциальные уравнения допускают интегрирование в квадратурах, т. е. выражение общего решения через элементарные функции и интегралы от них.

Уравнение (1.2.1) в общем случае не интегрируется, т. е. нет способа нахождения решения при произвольной функции $f(x, y)$. Поэтому приходится рассматривать такие частные виды этой функции, при которых можно указать способ решения. Такие уравнения относят к интегрируемым типам.

Среди интегрируемых типов обыкновенных дифференциальных уравнений важную роль играют *уравнения с разделяющимися переменными*, которые мы далее рассмотрим подробнее.

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$y' = f(x)g(y), \tag{1.2.5}$$

где функция, стоящая в правой части, есть произведение функции, зависящей только от x, на функцию, зависящую только от y, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Предположим, что $f(x)$ непрерывна на (a, b) и $g(y)$, $g'(y)$ непрерывны на (c, d). Тогда в области $\Gamma = (a, b) \times (c, d)$ выполняются условия теоремы Коши.

Предположим, что $g(y) \neq 0$ для любого $y \in (c, d)$. Пусть $y = \varphi(x)$ – решение исходного уравнения (1.2.5) на некотором промежутке $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ и для всех $x \in (\alpha, \beta)$ выполняется $c < \varphi(x) < d$, тогда на (α, β) справедливо тождество

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x).$$

Поэтому

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{g(\varphi(x))} = \int f(x)dx.$$

Далее при замене переменной в неопределенном интеграле по формуле $y = \varphi(x)$ получим

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx. \tag{1.2.6}$$

Пусть функции $1/g(y)$ и $f(x)$ на своих областях определения имеют первообразные $G(y)$ и $F(x)$ соответственно, тогда соотношение (1.2.6) означает, что при некотором C функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$G(y) = F(x) + C. \tag{1.2.7}$$

Уравнение $G(y) = F(x) + C$ (1.2.7) имеет вид

$$H(x, y, C) = 0.$$

Оно не содержит ни производных, ни дифференциалов и определяет y при фиксированном C как неявную функцию x, причем эта функция является решением уравнения (1.2.5).

Уравнение $H(x, y, C) = 0$, задающее общее решение в неявной форме, называют *общим интегралом*. При конкретном значении C соотношение $H(x, y, C) = 0$ называется *частным интегралом*.

Пусть теперь $g(\overline{y}) = 0$. Тогда функция $y \equiv \overline{y}$ также является решением уравнения (1.2.5), в чем легко убедиться с помощью непосредственной подстановки.

Вопросы:

1. Пусть $(x_0, y_0) \in \Gamma$ и $g(y_0) \neq 0$. Определим постоянную $\overline{C} = G(y_0) - F(x_0)$, где функции $G(y)$ и $F(x)$ имеют тот же смысл, что и в (1.2.7). Почему соотношение $G(y) = F(x) + \overline{C}$ определяет явно функцию $y(x)$ в окрестности точки (x_0, y_0)?

2. Почему эта функция $y(x)$ является решением уравнения $y' = f(x)g(y)$?

Замечание 1.2.5. Правило решения уравнения с разделяющимися переменными состоит в том, чтобы записать производную как отношение дифференциалов

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

и разделить переменные $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ при условии $g(y) \neq 0$. Далее приравнивание интегралов $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$ дает искомое соотношение между x и y — общий интеграл. Если $g(\overline{y}) = 0$, находим еще решения $y \equiv \overline{y}$.

Рассмотрим некоторые (простейшие) задачи макроэкономической динамики [3].

Пример 1.2.1. Пусть $y(t)$ — объем продукции некоторой отрасли, реализованной к моменту времени t. Будем предполагать, что вся производимая отраслью продукция реализуется по некоторой фиксированной цене p, т. е. выполнено условие *ненасыщаемости* рынка. Тогда доход к моменту времени t составит $Y(t) = p\,y(t)$.

Обозначим через $I(t)$ величину инвестиций, направляемых на расширение производства. Модель *естественного роста* объема продукции предполагает, что скорость выпуска продукции (*акселерация*) пропорциональна величине инвестиций, т. е.

$$y' = l \cdot I(t). \tag{1.2.8}$$

Здесь мы пренебрегаем временем между окончанием производства продукции и ее реализацией.

Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получим

$$I(t) = mY(t) = m\,p\,y(t), \tag{1.2.9}$$

где коэффициент пропорциональности m (так называемая *норма инвестиций*) — постоянная величина $0 < m < 1$.

Подставляя последнее выражение (1.2.8) в (1.2.9), приходим к уравнению

$$y' = ky, \tag{1.2.10}$$

где $k = m\,p\,l > 0$. Полученное дифференциальное уравнение — с разделяющимися переменными. Запишем производную как $y' = \frac{dy}{dt}$ и разделим переменные

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

в предположении, что $y \neq 0$. Интегрируя, получим

$$\ln|y| = kt + C_1, \tag{1.2.11}$$

где C_1 может принимать все действительные значения, и тогда представим $C_1 = \ln C_2$, где $C_2 > 0$. Из уравнения (1.2.11) получаем $|y| = C_2\,e^{kt}$. Поскольку $C_2 > 0$, величина в правой части этой формулы положительна, поэтому непрерывная функция y принимает либо только положительные значения, либо только отрицательные. Таким образом, при $y > 0$ имеем $y = C_2\,e^{kt}$, а при $y < 0$ имеем $y = C_3\,e^{kt}$, $C_3 < 0$. Поскольку $y \equiv 0$ также является решением уравнения (1.2.10), то формула

$$y = C\,e^{kt}, \tag{1.2.12}$$

где C — любое действительное число, дает все решения уравнения (1.2.10). Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ объем продукции $y(0) = y_0$. Решим задачу Коши. Находим $C = y_0$. Частное решение имеет вид $y(t) = y_0e^{kt}$.

Замечание 1.2.6. В дальнейшем подобную процедуру перехода от соотношения (1.2.11) к формуле общего решения (1.2.12) будем делать без дополнительных пояснений.

Замечание 1.2.7. Уравнение (1.2.10) описывает также рост народонаселения (демографический процесс, см. пример 1.1.4), динамику роста цен при постоянной инфляции и др.

На практике условие ненасыщаемости рынка может быть принято лишь на небольшом промежутке времени. В общем случае *кривая спроса*, т. е. зависимость цены p реализованной продукции от ее объема y, является убывающей функцией $p = p(y)$ (с увеличением объема произведенной продукции ее цена падает в результате насыщения рынка). Поэтому модель роста в *условиях конкурентного рынка* примет вид

$$y' = m\,l\,p(y)\,y, \tag{1.2.13}$$

оставаясь по-прежнему уравнением с разделяющимися переменными. После разделения переменных получаем

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{p(y)\,y} = m\,l\,(t - t_0). \tag{1.2.14}$$

Аналитически вычислить интеграл в (1.2.14) не всегда представляется возможным (все зависит от вида функции $p(y)$). Это означает, что при решении уравнения (1.2.13) в общем случае необходимо применять численные методы интегрирования. Проанализируем поведение решения уравнения (1.2.13). Так как все множители в правой части (1.2.13) положительны, то $y' > 0$ и это уравнение описывает возрастающую функцию. При исследовании функции $y(t)$ на выпуклость используется понятие *эластичности* функции. Действительно, из (1.2.13) следует, что

$$y'' = m\,l\,y'\left(\frac{dp}{dy}y + p\right).$$

Напомним, что эластичность спроса относительно цены определяется формулой

$$E_p(y) = \lim_{\Delta p \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta p}{p} \right) = \frac{p}{y} \cdot \frac{dy}{dp}.$$

Тогда выражение для y'' можно записать в виде

$$y'' = m\, l\, y' p \left(\frac{1}{E_p(y)} + 1 \right)$$

и условие $y'' = 0$ равносильно равенству $E_p(y) = -1$.

Пример 1.2.2. Найдем выражение для объема реализованной продукции $y = y(t)$, если известно, что кривая спроса $p(y)$ задается уравнением $p(y) = 2 - y$, норма акселерации $\frac{1}{l} = \frac{1}{2}$, норма инвестиций $m = \frac{1}{2}$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

Решение. Уравнение (1.2.13) в этом случае принимает вид

$$y' = (2 - y)y, \qquad \frac{dy}{(2 - y)y} = dt,$$

$$\ln \left| \frac{y - 2}{y} \right| = -2t + \ln C_1, \quad C_1 > 0, \quad \frac{y - 2}{y} = Ce^{-2t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Учитывая, что $y(0) = \frac{1}{2}$, получаем $C = -3$. Окончательно

$$y = \frac{2}{1 + 3e^{-2t}}.$$

В данном примере $E_p(y) = \frac{y-2}{y}$, тогда условие $E_p(y) = -1$, определяющее положение точки перегиба на кривой, дает $y = 1$. Подобные кривые называются *логистическими* и описывают, в частности, процесс распространения рекламы (информации), динамику эпидемий, процесс размножения бактерий в ограниченной среде.

Замечание 1.2.8. В силу замечания 1.2.3 уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными, если его коэффициенты M и N представимы в виде

$$M(x,y) = M_1(x) \cdot M_2(y); \quad N(x,y) = N_1(x) \cdot N_2(y).$$

Рассмотрим способ решения уравнения

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0. \tag{1.2.15}$$

Сначала предположим, что $M_2(y) \neq 0$ и $N_1(x) \neq 0$. Поделим обе части (1.2.15) на произведение $M_2(y)N_1(x)$:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy.$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = -\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy + C.$$

Пусть теперь $M_2(\overline{y}) = 0$. Функция $y \equiv \overline{y}$ является решением уравнения (1.2.15). В этом легко убедиться, подставив ее в уравнение с учетом того, что дифференциал функции $y \equiv \overline{y}$ равен 0. Аналогично, когда искомой является функция x, $x \equiv \overline{x}$ будет решением уравнения (1.2.15), если $N_1(\overline{x}) = 0$.

Пример 1.2.3. Решим уравнение $(y^2 - 1)dx + 2xydy = 0$.

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными. Считая $x \neq 0$ и $y^2 \neq 1$, разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2ydy}{y^2-1} = 0; \quad \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2ydy}{y^2-1} + C_1.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$\ln|x| + \ln|y^2 - 1| = \ln C_2, \qquad x(y^2-1) = C, \quad C \neq 0.$$

Кроме этого, в случае $y = y(x)$ есть решения $y = 1, y = -1$, (если $x = x(y)$, то $x = 0$ – решение).

Однородные уравнения

Многие типы уравнений сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными. К ним относятся *однородные уравнения*. Сначала дадим определение: функция $f(x,y)$ есть*однородная функция* m*-го измерения*, если для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется тождество $f(tx,ty) = t^m f(x,y)$.

Однородным называют уравнение $y' = f(x,y)$, в котором функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию $f(tx,ty) = f(x,y)$, т. е. является однородной функцией нулевого измерения. Заменяя в последнем равенстве t на $\frac{1}{x}$, получим $f(x,y) = f(1,\frac{y}{x}) = \Phi(\frac{y}{x})$. Следовательно, уравнение $y' = f(x,y)$ называется однородным, если его можно привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.2.16}$$

Введем новую искомую функцию $u(x)$ вместо $y(x)$ по формуле $y = ux$. Получим уравнение $\frac{du}{dx}x + u = \Phi(u)$, или

$$x\frac{du}{dx} = \Phi(u) - u. \tag{1.2.17}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 1.2.4. Решим уравнение $y' = \frac{(x^2+y^2)}{xy}$.

Решение. В правой части стоит однородная функция нулевого измерения. В результате замены $y = ux$ получаем $x\frac{du}{dx} + u = \frac{1}{u} + u$, или $udu = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C_1$, или $u^2 = 2\ln|x| + \ln C$, или $y^2 = x^2\ln(Cx^2)$. Последнее соотношение — это общий интеграл уравнения.

Замечание 1.2.9. В силу замечания 1.2.3 ОДУ вида

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

является однородным, если M и N – однородные функции одного и того же измерения m. Для его интегрирования нет необходимости приводить его к виду (1.2.16), можно применить подстановку $y = ux$ и получить уравнение с разделяющимися переменными.

Линейные уравнения

Здесь рассматриваются дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно неизвестной функции и ее производной.

Общий вид линейного уравнения первого порядка следующий:

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{1.2.18}$$

Функции $a(x)$ и $b(x)$ считаются непрерывными в промежутке (α, β). Легко заметить, что это требование обеспечивает выполнение условий теоремы Коши в полосе, задаваемой неравенствами $\alpha < x < \beta$, $-\infty < y < +\infty$.

Если $b(x) \equiv 0$, уравнение (1.2.18) называют линейным однородным, в противном случае – неоднородным.

Уравнение

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0 \tag{1.2.19}$$

называют линейным однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (1.2.18).

Замечание 1.2.10. Обратите внимание: линейное однородное ОДУ не является однородным ОДУ.

Сначала проинтегрируем линейное однородное уравнение (1.2.19). Полагая $y \neq 0$, разделим переменные:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx, \quad \ln|y| = -\int a(x)dx + \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

или

$$y = Ce^{-\int a(x)dx}. \tag{1.2.20}$$

Кроме этого, имеется решение $y \equiv 0$, называемое тривиальным. Чтобы объединить оба решения одной формулой, разрешается произвольной постоянной C в формуле (1.2.20) принимать значение нуль.

Для решения неоднородного уравнения применим метод вариации произвольной постоянной, предложенный Лагранжем. В методе Лагранжа общее решение неоднородного уравнения ищется в таком же виде, что и общее решение соответствующего линейного однородного уравнения (1.2.20), но только постоянная C заменяется функцией аргумента x, т. е. превращается в переменную величину, варьируется. Для нахождения новой неизвестной функции $C(x)$ выражение

$$y = C(x)e^{-\int a(x)dx} \qquad (1.2.21)$$

подставляем в неоднородное уравнение. При этом производную y' вычисляем как производную произведения двух функций:

$$\frac{dC}{dx} \cdot e^{-\int a(x)dx} - C(x)a(x)e^{-\int a(x)dx} + a(x)C(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x).$$

Отсюда

$$\frac{dC}{dx} e^{-\int a(x)dx} = b(x),$$

$$\frac{dC}{dx} = b(x)e^{\int a(x)dx}$$

и

$$C(x) = \int \left(b(x)e^{\int a(x)dx}\right) dx + D,$$

где D — произвольная постоянная.

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в формулу (1.2.21), получаем общее решение неоднородного уравнения:

$$y = De^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx} \int \left(b(x)e^{\int a(x)dx}\right) dx. \qquad (1.2.22)$$

Запоминать следует не формулу (1.2.22), а метод Лагранжа.

Замечание 1.2.11. Каждое решение линейного уравнения определено на всем промежутке (α, β).

Замечание 1.2.12. Формула (1.2.22) показывает, что общее решение линейного неоднородного ОДУ есть сумма общего решения линейного однородного ОДУ, соответствующего данному неоднородному ОДУ, и какого-нибудь частного решения исходного неоднородного ОДУ.

Пример 1.2.5. Решим уравнение $y' - \frac{2}{x}y = x^3$.

Решение. Вначале решим соответствующее линейное однородное уравнение $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Разделим переменные $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$; $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C$; $y = Cx^2$ (при $C = 0$ получается тривиальное решение $y \equiv 0$). Далее для решения исходного линейного неоднородного уравнения применим метод Лагранжа. Считая C функцией x, подставим полученное выражение в исходное уравнение:

$$\frac{dC}{dx}x^2 + C \cdot 2x - \frac{2}{x} \cdot Cx^2 = x^3, \text{ или } \frac{dC}{dx}x^2 = x^3.$$

В заданном уравнении x находится в знаменателе, следовательно, предполагается, что $x \neq 0$, поэтому можно сделать сокращение на x^2. Получаем $\frac{dC}{dx} = x$; $C = \frac{1}{2}x^2 + D$.

Ответ: $y = Dx^2 + \frac{1}{2}x^4$, $x \neq 0$.

Пример 1.2.6 (см. [3]). Доход $Y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью, расходуется на инвестиции $I(t)$ и потребление $C(t)$, т. е.

$$Y(t) = I(t) + C(t). \tag{1.2.23}$$

Как и ранее в модели естественного роста, будем предполагать, что скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций, т. е.

$$bY'(t) = I(t), \tag{1.2.24}$$

где b – коэффициент капиталоемкости прироста дохода.

Поведение функции дохода $Y(t)$ рассматривают в зависимости от функции $C(t)$. В ряде случаев вид функции потребления бывает известен.

Пусть $C(t)$ представляет собой фиксированную часть получаемого дохода: $C(t) = (1-m)Y(t)$, где m – норма инвестиций. Тогда из (1.2.23) и (1.2.24) получаем

$$Y' = \frac{m}{b}Y,$$

уравнение естественного роста, аналогичное уравнениям (1.1.5), (1.2.10).

Рассматривают также $C(t) \equiv const$, $C(t) = t^r$ или $C(t) = C(0)e^{rt}$. В этих случаях уравнение является линейным неоднородным:

$$Y(t) = bY'(t) + C(t). \qquad (1.2.25)$$

Надо найти функцию дохода $Y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C(t) = 2t$, коэффициент капиталоемкости прироста дохода $b = 1/2$, $Y(0) = 2$.

Решение. Из соотношений (1.2.23), (1.2.24) получаем уравнение

$$Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t,$$

т. е. функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка

$$Y'(t) - 2Y(t) = -4t,$$

Общее решение соответствующего линейного однородного уравнения: $Y(t) = Ce^{2t}$. Общее решение исходного неоднородного уравнения будем искать в том же виде, $Y(t) = C(t)e^{2t}$, считая C новой неизвестной функцией от t:

$$\frac{dC}{dt}e^{2t} + C \cdot 2e^{2t} - 2 \cdot Ce^{2t} = -4t,$$

$$\frac{dC}{dt} = -4te^{-2t}.$$

Из последнего соотношения методом интегрирования по частям находим $C = (1+2t)e^{-2t}+D$. Тем самым получаем формулу общего решения исходного уравнения: $Y(t) = 1 + 2t + De^{2t}$. Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $Y(0) = 2$. Имеем $2 = 1 + D$, отсюда $D = 1$. Ответ: $Y(t) = 1 + 2t + e^{2t}$.

Уравнение Бернулли

Общий вид этого уравнения:

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\gamma}, \tag{1.2.26}$$

где γ может быть любым вещественным числом. Функции $a(x)$ и $b(x)$ предполагаются непрерывными в промежутке (α, β). Исключим случаи $\gamma = 1$ и $\gamma = 0$, так как при этих значениях γ уравнение (1.2.26) превращается в однородное и неоднородное линейные уравнения соответственно.

Разделим обе части уравнения (1.2.26) на y^{γ}, полагая $y \neq 0$: $\frac{y'}{y^{\gamma}} + \frac{a(t)}{y^{\gamma-1}} = b(t)$. Вводя новую искомую функцию $z = y^{1-\gamma}$, получим линейное уравнение $\frac{z'}{1-\gamma} + a(x)z = b(x)$. Тем самым уравнение Бернулли приводится к линейному неоднородному ОДУ.

Пример 1.2.7. Решим уравнение $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$.

Решение. Это уравнение Бернулли с $\gamma = \frac{1}{2}$. Делим обе части уравнения на $\sqrt{y}$ в предположении, что $y > 0$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Вводим новую переменную $z = \sqrt{y}$, тогда $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx}$. Приходим к уравнению

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}.$$

Это линейное неоднородное уравнение относительно функции z. Решим соответствующее линейное однородное уравнение

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} z, \qquad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x}, \qquad \ln|z| = 2\ln|x| + \ln C, \qquad z = Cx^2.$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения относительно z ищем в виде $z = C(x)x^2$:

$$\frac{dC}{dx}x^2 + 2xC - \frac{2}{x}Cx^2 = \frac{x}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2x}, \quad C = \frac{1}{2}\ln|x| + D.$$

Следовательно, формула

$$z = x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + D\right)$$

задает общее решение при $x > 0$ и при $x < 0$. Кроме этого, $\frac{1}{2}\ln|x| + D \neq 0$, поскольку уравнение для z было получено в предположении, что $z \neq 0$. Возвращаясь к переменной y, получаем $y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + D\right)^2$. Кроме того, есть еще решение $y = 0$.

Пример 1.2.8. Заметим, что рассмотренная ранее в примере 1.1.5 модель эффективности рекламы описывается уравнением Бернулли

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x), \qquad \text{или} \qquad \frac{dx}{dt} - kN\,x = -k\,x^2.$$

Если в начальный момент времени о новом товаре знало N_1 человек, т. е. $x(0) = N_1 < N$, то решение имеет вид

$$x = \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{N_1} - 1\right)e^{-kNt}}. \tag{1.2.27}$$

Второе слагаемое знаменателя стремится к нулю при $t \to \infty$, поэтому $x \to N$. График функции (1.2.27) — логистическая кривая.

Пример 1.2.9 (модель Р. Солоу и Р. Свена с производственной функцией Кобба — Дугласа). Обозначим X — ВВП (валовый внутренний продукт), C — конечное потребление, I — инвестиции. Справедливо равенство

$$X = I + C. \qquad (1.2.28)$$

Разделим равенство (1.2.28) на X:

$$1 = \frac{I}{X} + \frac{C}{X}. \qquad (1.2.29)$$

В равенстве (1.2.29) величина $\frac{I}{X}$ — доля производственного накопления, $\frac{C}{X}$ — доля непроизводственного потребления.

Обозначим $u = \frac{C}{X}$. Считаем далее, что u — постоянная величина (модель экономического роста Р. Солоу и Р. Свена, см. [4]).

Обозначим $s = \frac{I}{X}$, тогда равенство (1.2.29) перепишется в виде

$$1 = s + u. \qquad (1.2.30)$$

Обозначим $K = K(t)$ — объем основных производственных фондов (ОПФ). Запишем уравнение динамики для $K(t)$ [4]:

$$K' = I - \mu \cdot K, \qquad (1.2.31)$$

где коэффициент μ — норма амортизации капитала, $0 < \mu < 1$, т. е. доля капитала, требующая замены.

Обозначим $L = L(t)$ — объем трудовых ресурсов (еще один фактор производства, действующий вместе с $K(t)$). Введем величину

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}, \qquad (1.2.32)$$

которая называется *фондовооруженностью (капиталовооруженностью)* труда. Наша цель — получить и решить уравнение для этой величины.

Имеем
$$K(t) = k(t)L(t). \tag{1.2.33}$$
Дифференцируя уравнение (1.2.33), получим
$$K' = (k(t)L(t))' = k'(t)L(t) + k(t)L'(t). \tag{1.2.34}$$
Подставим выражение для $K'(t)$ в уравнение динамики ОПФ (1.2.31):
$$k'L + kL' = I - \mu \cdot K. \tag{1.2.35}$$
Разделим обе части уравнения на $L(t)$ и, учитывая, что $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$, получим
$$k' + k\frac{L'}{L} = \frac{I}{L} - \mu \cdot k.$$

Предположим, что численность населения растет нормально с коэффициентом естественного роста $\rho > 0$:
$$L' = \rho L$$
(см. модель Мальтуса естественного роста населения, рассмотренную ранее в примере 1.1.4). Тогда
$$\frac{L'}{L} = \rho,$$
и уравнение (1.2.35) принимает вид
$$k' + k \cdot \rho = \frac{I}{L} - \mu \cdot k, \qquad \text{или} \qquad k' = \frac{I}{L} - (\mu + \rho)k. \tag{1.2.36}$$
Вспомним, что $I = s \cdot X$ и обозначим
$$x(t) = \frac{X(t)}{L(t)},$$
здесь $x(t)$ — средняя производительность труда. Тогда уравнение (1.2.36) примет вид
$$k' = sx(t) - (\mu + \rho)k.$$

Экономический смысл полученного уравнения заключается в следующем. Прирост фондовооруженности одного работника определяется соотношением двух величин в расчете на одного работника — инвестиций $sx(t)$, фактически сделанных в экономике, и инвестиций, необходимых для сохранения достигнутого уровня k в условиях роста населения с коэффициентом роста ρ и выбытия капитала с нормой μ. Предположим теперь, что

$$X = F(K, L) -$$

производственная функция Кобба–Дугласа. В этом случае $F(K, L)$ имеет вид

$$F(K, L) = aK^{\alpha}L^{\beta},$$

где $a > 0, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha, \beta > 0.$ Тогда, учитывая равенство (1.2.32), получим

$$x(t) = \frac{aK^{\alpha}L^{\beta}}{L} = aK^{\alpha}L^{\beta-1} = ak^{\alpha}L^{\alpha}L^{\beta-1} = ak^{\alpha}.$$

Окончательно модель в относительных показателях имеет вид

$$k' + (\mu + \rho)k = as \cdot k^{\alpha}.$$

Это уравнение Бернулли с $\gamma = \alpha$. Разделим обе части уравнения на k^{α} в предположении, что $k \neq 0$:

$$\frac{k'}{k^{\alpha}} + (\mu + \rho)k^{1-\alpha} = as,$$

введем новую неизвестную функцию по формуле $z = k^{1-\alpha} = k^{\beta}$, тогда $z' = \beta\frac{k'}{k^{\alpha}}$. Запишем уравнение для функции z:

$$z' + \beta(\mu + \rho)z = as\beta.$$

Это линейное неоднородное уравнение. Общее решение соответствующего линейного однородного уравнения

$$z' = -(1 - \alpha)(\mu + \rho)z$$

имеет вид

$$z = De^{-\beta(\mu+\rho)t}.$$

Решим линейное неоднородное уравнение методом вариации произвольной постоянной (см. с. 25), считая $D = D(t)$:

$$D'e^{-\beta(\mu+\rho)t} - \beta(\mu+\rho)De^{-\beta(\mu+\rho)t} + \beta(\mu+\rho)De^{-\beta(\mu+\rho)t} = as\beta,$$

$$D'e^{-\beta(\mu+\rho)t} = as\beta, \qquad D' = as\beta e^{\beta(\mu+\rho)t},$$

$$D = \frac{as}{(\mu+\rho)}e^{\beta(\mu+\rho)t} + H.$$

Общее решение рассматриваемого линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$z = He^{-\beta(\mu+\rho)t} + \frac{as}{(\mu+\rho)}.$$

Тогда

$$k = \left(He^{-\beta(\mu+\rho)t} + \frac{as}{(\mu+\rho)}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \qquad k = 0.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $k(0) = k_0 > 0$:

$$k_0 = \left(H + \frac{as}{(\mu+\rho)}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \qquad H = k_0^{\beta} - \frac{as}{(\mu+\rho)},$$

тогда

$$k(t) = \left(k_0^{\beta}e^{-\beta(\mu+\rho)t} + \frac{as}{(\mu+\rho)}\left(1 - e^{-\beta(\mu+\rho)t}\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Отметим, что

$$\lim_{t\to+\infty} k(t) = \left(\frac{as}{\mu+\rho}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

1.3. Уравнения высших порядков

Уравнения n-го порядка при $n \geqslant 2$ называются *уравнениями высших порядков*. Многие экономико-математические модели описываются дифференциальными уравнениями n-го порядка.

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим два типа уравнений второго порядка, допускающих сведение к задачам интегрирования уравнений первого порядка.

I. Уравнение не зависит явным образом от искомой функции

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{1.3.1}$$

Понизить порядок этого уравнения удается введением новой неизвестной функции

$$z(x) = y'(x).$$

Тогда $y''(x) = z'(x)$, уравнение для $z(x)$ принимает вид

$$F(x, z, z') = 0 \tag{1.3.2}$$

и является уравнением первого порядка.

Замечание 1.3.1. Отметим, что для получения решения уравнения (1.3.1) надо последовательно решить два уравнения: (1.3.2) и $y' = z(x, C)$, правая часть последнего уравнения зависит от постоянной C.

Пример 1.3.1 (см. [7]). Решить уравнение $y'' + x(y')^2 = 0$.

Решение. После замены $z(x) = y'(x)$ приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$z' + xz^2 = 0.$$

Решая его, получим $z = 0$, или $z = \frac{2}{x^2+C_1}$. Далее если $y' = 0$, тогда $y = C$. Рассмотрим уравнение $y' = \frac{2}{x^2+C_1}$, в зависимости от условий на C_1 получим семейства решений исходного уравнения:

1. $C_1 = 0$, тогда $y = -\frac{2}{x} + C_2$.

2. $C_1 > 0$, $C_1 = a^2$, тогда

$$y = 2\int \frac{dx}{x^2 + a^2} + C_2 = \frac{2}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C_2 = \frac{2}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2.$$

3. $C_1 < 0$, $C_1 = -a^2$, тогда

$$y = 2\int \frac{dx}{x^2 - a^2} + C_2 = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-C_1}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{-C_1}}{x+\sqrt{-C_1}}\right| + C_2.$$

Заметим, что данное ОДУ имеет четыре семейства решений – два однопараметричеких и два двупараметричеких.

II. Уравнение не зависит явным образом от независимой переменной

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Оказывается, в этом случае существует функциональная зависимость значений $y'(x)$ от $y(x)$:

$$y'(x) = p(y(x)), \tag{1.3.3}$$

где $p = p(y)$ — искомая функция независимой переменной y. Получим выражение для второй производной

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}p(y(x)) = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p,$$

т. е. выражение для y'' содержит первую производную функции $p(y)$. Подставляя эти формулы в исходное уравнение, приходим к ОДУ первого порядка относительно новой неизвестной функции p аргумента y

$$F(y, p, p' \cdot p) = 0.$$

Определив из этого уравнения функцию $p = p(y, C)$, найдем искомое решение $y = y(x)$ из уравнения (1.3.3), которое является уравнением с разделяющимися переменными (см. с. 16).

Замечание 1.3.2. Как в случае I, так и в случае II вместо одного уравнения второго порядка приходится решать два уравнения первого порядка, одно из которых зависит от параметра.

Пример 1.3.2 (см. [7]). Решим уравнение $y'' = 2yy'$.

Решение. После замены $y' = p(y)$ получим уравнение

$$p'p = 2yp,$$

откуда

$$p(y) = 0, \quad \text{тогда} \quad y'(x) = 0, \quad y(x) = C_2 \quad \text{либо} \quad p'(y) = 2y.$$

Во втором случае $p = y^2 + C_1$. Теперь для $y(x)$ получим ОДУ $y' = y^2 + C_1$ с разделяющимися переменными (зависящее от параметра), общий интеграл которого есть

$$\int \frac{dy}{y^2 + C_1} = x + C_2.$$

Окончательно получим четыре семейства общих интегралов, как и в предыдущем примере:

1. $C_1 = 0, \quad -\frac{1}{y} = x + C_2.$

2. $C_1 > 0, \quad \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2.$

3. $C_1 < 0$, $\quad \frac{1}{2\sqrt{-C_1}} \ln\left|\frac{y-\sqrt{-C_1}}{y+\sqrt{-C_1}}\right| = x + C_2.$

4. $y = C_2$.

Задача Коши для ОДУ n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной

Дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной, называется уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1.3.4}$$

где x – независимая переменная; y – искомая функция; $y, y', \ldots, y^{(n)}$ – соответствующие производные функции y по x.

Пусть функция $f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$ определена в некоторой области Γ $(n+1)$-мерного пространства. Задана произвольно точка $(x^0, y^0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0)$, принадлежащая области Γ. Задача о нахождении решения $y = y(x)$ уравнения (1.3.4), удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x^0) = y^0, \quad y'(x^0) = y_1^0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0, \tag{1.3.5}$$

называется *задачей Коши*, а ее решение — *частным решением*. В частности, задача Коши для ОДУ второго порядка, разрешенного относительно старшей производной, имеет вид

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x^0) = y^0, \quad y'(x^0) = y_1^0. \end{cases} \tag{1.3.6}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3.1 (о существовании и единственности решения задачи Коши). *Пусть функция f и ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}$ определены и непрерывны в некоторой области Γ $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}$. Тогда для любой точки $(x^0, y^0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0) \in \Gamma$ существует решение задачи Коши (1.3.4)–(1.3.5), и оно единственно.*

Упрощенная формулировка определения *общего решения* уравнения n-го порядка звучит так: произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно подобрать так, чтобы решение $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ удовлетворяло любым начальным условиям (1.3.5), если $(x^0, y^0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0) \in \Gamma$.

Начальные сведения из теории комплексных чисел, необходимые для изучения дифференциальных уравнений

Напомним, что одной из причин расширения множества целых чисел до множества рациональных являлось требование, чтобы всякое линейное уравнение $kx = b$, где $k \neq 0$, было разрешимо. Далее одна из причин расширения множества рациональных чисел до множества действительных чисел была связана с разрешимостью квадратных уравнений, таких как $x^2 = 2$. Это уравнение неразрешимо в множестве рациональных чисел, а в множестве действительных чисел имеет два иррациональных решения: $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$. Однако не все квадратные уравнения разрешимы в множестве действительных чисел, например, уравнение $x^2 = -1$ не имеет действительных корней. Это соображение приводит к необходимости вводить новые числа и расширять множество действительных чисел до множества комплексных чисел, в котором было бы разрешимо любое квадратное уравнение. Кроме этого, операции над комплексными числами должны иметь прежний смысл для действительных чисел, подчиняться, в частности, коммутативному, ассоциативному и дистрибутивному законам.

Комплексным числом z называется упорядоченная пара (a, b) вещественных чисел a и b. При этом a называется *вещественной частью* $a = \operatorname{Re} z$, b — *мнимой частью* $b = \operatorname{Im} z$ комплексного числа. В декартовой системе координат на плоскости xOy комплексному числу соответствует точка с координатами (a, b), или вектор, соединяющий начало координат с этой точкой.

Комплексные числа z_1 и z_2 называются *равными*, если равны их вещественные и мнимые части:

$$\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

Сумма и *произведение* комплексных чисел $z_1 = (a_1,\, b_1)$ и $z_2 = (a_2,\, b_2)$ определяются равенствами

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\, b_1 + b_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

В частности,

$$(a_1,\, 0) + (a_2,\, 0) = (a_1 + a_2,\, 0),$$
$$(a_1,\, 0) \cdot (a_2,\, 0) = (a_1 a_2,\, 0).$$

Следовательно, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ содержится в множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$ и можно отождествить $(a,\, 0) = a$. Действительные числа изображаются точками числовой оси Ox. Ось Ox называется *действительной осью.* Число вида $(0,\, b)$ называется *чисто мнимым* и изображается точкой оси Oy с ординатой b. Ось Oy называют *мнимой осью.* Плоскость xOy называется *комплексной.*

Введем обозначение

$$i = (0,\, 1)$$

и назовем это комплексное число *мнимой единицей.* Тогда по правилам умножения

$$i^2 = (0,\, 1)(0,\, 1) = (-1,\, 0) = -1.$$

Теперь любое комплексное число можно записать в форме

$$z = (a,\, b) = (a,\, 0) + (0,\, b) = a + ib,$$

называемой *алгебраической формой записи* комплексного числа. Операции сложения и умножения с комплексными числами в алгебраической форме могут быть записаны следующим образом:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Здесь используется правило: с комплексными числами оперируют как с двучленами и заменяют i^2 на -1.

Сопряженным комплексному числу

$$z = a + i\,b$$

называется комплексное число

$$\overline{z} = a - i\,b.$$

В частности, сопряженным числу i является число $-i$. Если z — корень алгебраического уравнения с действительными коэффициентами, то $\overline{z}$ — также корень этого уравнения. Так, у уравнения $x^2 = -1$ два корня, i и $-i$.

Комплексное число можно записать в полярных координатах. *Модулем* комплексного числа $z = a + i\,b$ называется вещественное число

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad (\rho \geqslant 0).$$

Аргумент ненулевого комплексного числа — угол

$$\varphi = arg(z) \in [0, 2\pi),$$

отсчитываемый от положительного направления оси Ox до вектора z. Условие $\varphi = arg(z) \in [0, 2\pi)$ позволяет всякому ненулевому комплексному числу сопоставить однозначно определенный угол. Здесь

$$a = \rho \cos\varphi, \qquad b = \rho \sin\varphi,$$

причем эти формулы верны, в какой бы четверти ни находилась точка $z = (a, b)$. Получаем

$$z = a + i\,b = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Правая часть равенства называется *тригонометрической* формой комплексного числа, ρ и φ — полярные координаты точки, соответствующие комплексному числу.

Определены операции вычитания и деления комплексных чисел как операции, обратные сложению и умножению (кроме деления на нуль). Относительно всех этих операций справедливы свойства, аналогичные свойствам сложения, вычитания, умножения и деления вещественных чисел. *Разностью* $z_1 - z_2$ комплексных чисел $z_1 = a_1 + i\,b_1$ и $z_2 = a_2 + i\,b_2$ называется комплексное число

$$(a_1 - a_2) + i\,(b_1 - b_2).$$

Частным $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i\,b_1}{a_2 + i\,b_2}$ комплексных чисел z_1 и z_2 $(z_2 \neq 0)$ называется комплексное число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Как известно (см., например, [13]), ряды Маклорена для функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$ имеют вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\ ,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\ , \qquad (1.3.7)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\ . \qquad (1.3.8)$$

Ряды сходятся при любом значении x. Определим комплексные экспоненту и тригонометрические функции как суммы комплексных степенных рядов с теми же коэффициентами, что и для вещественных аналогов этих функций:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots , \tag{1.3.9}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots , \tag{1.3.10}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots . \tag{1.3.11}$$

Теорема 1.3.2 (о свойствах e^z, $\sin z$, $\cos z$).

1. Ряды (1.3.9), (1.3.10) *и* (1.3.11) *сходятся при любом значении z.*

2. Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливы равенства

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2},$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

Теорема 1.3.3 (формулы Эйлера). *Для любого вещественного x справедливы формулы*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \tag{1.3.12}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \tag{1.3.13}$$

Доказательство. Разложим в ряд функцию e^{ix}, принимая во внимание равенства $i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$,

$$e^{ix} = 1 + i\,x - \frac{1}{2!}\,x^2 - i\,\frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{4!}\,x^4 +$$
$$+ i\,\frac{1}{5!}\,x^5 - \frac{1}{6!}\,x^6 - i\,\frac{1}{7!}\,x^7 + \cdots .$$

Сгруппируем члены, не содержащие i и содержащие i:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots\right) +$$

$$+i\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots\right).$$

С учетом разложений (1.3.7) и (1.3.8) последнее равенство запишем в виде (1.3.12):

$$e^{ix}=\cos x+i\ \sin x.$$

Далее, заменяя в (1.3.12) i на $-i$, получим

$$e^{-ix}=\cos x-i\ \sin x.$$

Формулы (1.3.12) и (1.3.13) называют *формулами Эйлера*. □

Опираясь на теоремы 1.3.2, 1.3.3, получим, что для любых вещественных α, β выполняется равенство

$$e^{\alpha+i\beta}=e^{\alpha}e^{i\beta}=e^{\alpha}(\cos\beta+i\ \sin\beta). \tag{1.3.14}$$

Будем называть *производной* комплекснозначной функции $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — дифференцируемые вещественные функции, функцию $f'(x)=f_1'(x)+if_2'(x)$. Проверьте самостоятельно справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1.3.1. *Пусть* $\lambda=a+i\,b$, $a,b\in\mathbb{R}$, *тогда*

$$\frac{de^{\lambda x}}{dx}=\lambda e^{\lambda x}.$$ □

Еще одна форма комплексного числа — *показательная*:

$$z=a+i\,b=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho e^{i\varphi},$$

где $\rho=|z|$, $\varphi=arg(z)$.

Теорема 1.3.4 (формулы Муавра). *Имеет место формула возведения в степень комплексного числа* $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$:

$$z^n=\rho^n(\cos(n\varphi)+i\ \sin(n\varphi))=\rho^n e^{in\varphi}.$$

Все корни n-й степени из ненулевого комплексного числа z находятся по формулам

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) = \qquad (1.3.15)$$
$$= \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},$$
$$k = 0, \ldots, n-1.$$

Замечание 1.3.3. В силу этой теоремы для любого $k = 0, \ldots, n-1$ выполняется равенство $\omega_k^n = z$.

Замечание 1.3.4. (геометрическая интерпретация корней n-й степени). Как видно из формул (1.3.15), корней n-й степени из ненулевого комплексного числа ровно n. Поскольку $|\omega_k| = \sqrt[n]{\rho}$ для всех $k = 0, \ldots, n-1$, то все корни лежат на одной окружности радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке $O(0,0)$. В силу того, что $arg(\omega_k) = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}$, радиус-векторы соседних векторов образуют угол $\frac{2\pi}{n}$. Таким образом, все корни располагаются в вершинах правильного n-угольника.

Замечание 1.3.5. При решении квадратного уравнения в случае отрицательного дискриминанта получается пара комплексно сопряженных корней, вычисляемых по тем же формулам, что и в случае положительного дискриминанта.

Пример 1.3.3. Решим уравнение $x^2-2x+10=0$. Поскольку $D=-36<0$, получим $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm 3i$.

Пример 1.3.4. Представим комплексное число $z = 2-2i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Для числа $z = 2-2i$ имеем $a=2$, $b=-2$ (число расположено в IV четверти), тогда

$$\rho = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \tfrac{b}{a} = -1, \qquad \varphi \in (\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi).$$

Поэтому

$$\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi,$$

$$2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{7}{4}\pi}.$$

Задание. Представить комплексное число $z = \sqrt{3} + i$ в тригонометрической и показательной формах.

Пример 1.3.5. Найдем все корни уравнения $z^3 - i = 0$, т. е. вычислить кубические корни из i. Тригонометрическая форма числа i имеет вид $i = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$. По формуле Муавра (1.3.15) получаем

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}, \quad \omega_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\sin\frac{5\pi}{6},$$

$$\omega_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\pi}{2}.$$

Корни располагаются в вершинах правильного треугольника.

1.4. Линейные дифференциальные уравнения

Линейное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x). \qquad (1.4.1)$$

Будем считать функции $a_i(x)$ и $f(x)$ непрерывными в промежутке (r_1, r_2). Тогда в области Γ: $r_1 < x < r_2$; $-\infty < y < \infty$; $-\infty < y_1 < \infty$; $\ldots$; $-\infty < y_{n-1} < \infty$ будут выполняться условия теоремы Коши, т. е. начальная задача Коши с любой точкой

$$(x^0, y(x^0), y'(x^0), \ldots, y^{(n-1)}(x^0)) \in \Gamma \quad \big(x_0 \in (r_1, r_2)\big)$$

однозначно разрешима.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1.4.1) называют линейным *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Для неоднородного уравнения (1.4.1) уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \qquad (1.4.2)$$

с теми же коэффициентами $a_i(x)$, $(i = \overline{1,n})$ называется однородным уравнением, *соответствующим данному неоднородному*. Однородное уравнение имеет решение $y \equiv 0$, называемое *тривиальным*.

Утверждение 1.4.1. *Все решения уравнения* (1.4.1) *определены на всем интервале* (r_1, r_2).

Линейные однородные уравнения

Рассмотрим линейное однородное уравнение (1.4.2). Пусть $y(x)$ — n раз непрерывно дифференцируемая функция в интервале (r_1, r_2), а

$$L(y(x)) := y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y, \qquad (1.4.3)$$

таким образом, $L(y)$ есть результат выполнения над функцией y операций, указанных в левой части уравнения (1.4.2), а именно: вычисление производных от функции y до порядка n включительно, умножение на заданные функции $a_n(x)$, $a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x)$, 1 и сложение полученных произведений. Тогда уравнение (1.4.2) можно записать в виде $L(y) = 0$.

Теорема 1.4.1 (о структуре множества решений линейного однородного уравнения n-го порядка). *Множество решений линейного однородного уравнения n-го порядка $L(y) = 0$ является линейным n-мерным пространством, т. е.*

1) если $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения уравнения (1.4.2), *то для любых $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ функция $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ тоже решение;*

2) существуют такие системы из n решений $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$, каждая из которых называется фундаментальной системой решений (ФСР), что любое решение $\varphi(x)$ может быть единственным образом представлено в виде их линейной комбинации

$$\varphi(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

с некоторыми коэффициентами $C_1, C_2, \dots, C_n$, определяемыми из начальных условий.

Всякая система решений $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$ с независимыми начальными значениями является фундаментальной.

Доказательство. Простым вычислением убеждаемся, что если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ n раз непрерывно дифференцируемы, а C_1 и C_2 – константы, то

$$L(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) = C_1 L(y_1(x)) + C_2 L(y_2(x)).$$

Поэтому если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (1.4.2), то

$$L(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) = C_1 L(y_1(x)) + C_2 L(y_2(x)) =$$

$$= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0,$$

т. е. $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – тоже решение этого уравнения.

Проверим n-мерность пространства решений. Пусть Δ — ненулевой определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

его столбцы составляют один из базисов пространства $\mathbb{R}^n$. Задачи Коши с условиями

$$\begin{array}{lcl} y_1(x_0) & = & a_{11}; \\ y_1'(x_0) & = & a_{21}; \\ & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & = & a_{n1}; \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} y_n(x_0) & = & a_{1n}; \\ y_n'(x_0) & = & a_{2n}; \\ & & \\ y_n^{(n-1)}(x_0) & = & a_{nn}, \end{array}$$

где $x_0 \in (r_1, r_2)$, однозначно разрешимы и определены на всем промежутке (r_1, r_2). Так мы получаем n частных решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (1.4.1). Пусть $\varphi(x)$ — произвольное решение, вектор $(\varphi(x_0), \varphi'(x_0), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0))^T$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\begin{pmatrix} \varphi(x_0) \\ \varphi'(x_0) \\ \ldots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + C_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда решения, $\varphi(x)$ и $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$, удовлетворяют при $x = x_0$ одинаковым начальным условиям, значит, по теореме 1.3.1 эти решения совпадают, т. е. при всех x выполняется равенство $\varphi(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$.

Тем самым доказано, что пространство решений n-мерно и что всякая система решений с независимыми начальными значениями образует фундаментальную систему решений.

Отметим, что фундаментальных систем бесконечное множество, так как матриц с ненулевым определителем Δ бесконечно много. $\square$

Пример 1.4.1. Рассмотрим уравнение

$$L(y) \equiv y'' - y = 0.$$

Можно проверить подстановкой, что это линейное однородное уравнение второго порядка имеет два частных решения, $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$, определенных на всей числовой оси. Поскольку векторы начальных значений при $x = 0$ линейно независимы:

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

то y_1, y_2 — один из базисов в пространстве решений — фундаментальная система решений. Для любого решения $\varphi(x)$ этого уравнения при некоторых $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ имеем $\varphi(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. □

Введем понятия линейной зависимости и линейной независимости системы функций. Функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_m(x)$ называются *линейно зависимыми* в интервале (r_1, r_2), если существуют такие числа C_1, $C_2, \ldots, C_m$, не все равные нулю $(C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_m^2 \neq 0)$, что в интервале (r_1, r_2) выполняется тождество

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_m y_m(x) \equiv 0. \tag{1.4.4}$$

Если же тождество (1.4.4) имеет место лишь при нулевых значениях постоянных: $C_1 = C_2 = \ldots = C_m = 0$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_m(x)$ называются *линейно независимыми* в интервале (r_1, r_2).

Дадим признак фундаментальности системы из n частных решений линейного однородного уравнения n-го порядка. С этой целью введем определитель, составленный из данных частных решений и их производных до порядка $n - 1$

включительно:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & & y_n'(x) \\ & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называется *определителем Вронского*[1] решений $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$.

Теорема 1.4.2 (критерий фундаментальности системы решений).

1. Если определитель Вронского равен нулю при некотором $x = x_0$, то он равен нулю при всех $x \in (r_1, r_2)$. В этом случае решения $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы.

2. Если определитель Вронского отличен от нуля при $x = x_0$, то он отличен от нуля при всех $x \in (r_1, r_2)$. В этом случае система $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ является фундаментальной системой решений.

Доказательство. Пусть определитель Вронского равен нулю при $x = x_0$. Это выполняется тогда и только тогда, когда столбцы матрицы линейно зависимы в $\mathbb{R}^n$, т. е. существуют такие числа C_1, $C_2, \ldots, C_n$, не все равные нулю, что

$$C_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \ldots + C_n \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \ldots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\varphi(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ — это решение, удовлетворяющее нулевым начальным данным. Такие же начальные значения имеет нулевое решение $\psi \equiv 0$. По теореме

[1] Г. Вронский (1775–1853) — польский математик.

1.3.1 существует единственное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Следовательно, $\varphi \equiv 0$, т.е. $C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) = 0$ при всех x, что означает линейную зависимость решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. Продифференцировав тождество $n-1$ раз, получим определитель Вронского, равный нулю при всех значениях x.

Справедливость второго утверждения теоремы следует из вышедоказанного. □

Линейные неоднородные уравнения

Рассмотрим несколько свойств линейного неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$ (1.4.1):

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x).$$

Теорема 1.4.3 (принцип суперпозиции). *Если в уравнении* (1.4.1) *правая часть* $f(x)$ *имеет вид*

$$f(t) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x),$$

где α_1 *и* α_2 *— постоянные числа, и известно, что* $y_1(x)$ *есть частное решение уравнения*

$$L(y) = f_1(x),$$

а $y_2(x)$ *— частное решение уравнения*

$$L(y) = f_2(x),$$

то $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ *является частным решением уравнения* (1.4.1).

Доказательство. По условию мы имеем

$$L(y_1) \equiv f_1(x), \qquad L(y_2) \equiv f_2(x).$$

Подставив $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ в уравнение (1.4.1), получим

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2) \equiv \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = f(x),$$

т. е. $L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \equiv f(x)$, а это и означает, что $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ является частным решением уравнения (1.4.1). □

Пример 1.4.2. Рассмотрим уравнение

$$y'' + y = 2e^x + 1. \tag{1.4.5}$$

Можно проверить подстановкой, что для уравнения $y'' + y = 2e^x$ частным решением будет $y_1 = e^x$, а $y_2 = 1$ — частное решение уравнения $y'' + y = 1$. Поэтому $e^x + 1$ есть частное решение уравнения (1.4.5).

Следствие. *Разность двух решений линейного неоднородного уравнения является решением соответствующего однородного уравнения.* (Идея доказательства: нужно положить $f_1 = f_2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$).

Теорема 1.4.4 (о структуре множества решений линейного неоднородного уравнения). *Пусть $y_{ч.р}(x)$ — некоторое частное решение линейного неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$ (1.4.1), $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного уравнения $L(y) = 0$. Тогда любое решение уравнения* (1.4.1) *может быть представлено в виде*

$$y(t) = y_{ч.р}(x) + C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где постоянные $C_1, \ldots, C_n$ однозначно определяются из начальных условий. И наоборот, всякая функция такого вида является решением данного уравнения.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — произвольное решение неоднородного уравнения. Тогда разность

$y(x) - y_{\text{ч.р}}(x)$ по следствию из теоремы 1.4.3 является решением соответствующего однородного уравнения. Поскольку по теореме 1.4.1 фундаментальная система есть один из базисов пространства решений однородного уравнения, то для некоторых постоянных $C_1, \ldots, C_n$, определяемых единственным образом, справедливо представление в виде $y(x) - y_{\text{ч.р}}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$. Следовательно, $y(x) = y_{\text{ч.р}}(x) + C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$.

То, что всякая функция такого вида является решением данного неоднородного уравнения, легко проверяется подстановкой. □

Пример 1.4.3. Рассмотрим уравнение

$$y'' - y = -x.$$

Проверьте самостоятельно, что функция

$$\varphi(x) = x$$

является решением этого уравнения. Проверьте также с помощью теоремы 1.4.2, что одну из фундаментальных систем решений соответствующего однородного уравнения

$$y'' - y = 0$$

составляют функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$. Следовательно, в силу теоремы 1.4.4 общим решением исходного уравнения будет

$$y = x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного уравнения второго порядка

Суть метода Лагранжа проще сначала пояснить для уравнения второго порядка. Рассмотрим уравнение

$$L(y) \equiv y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \qquad (1.4.6)$$

где функции $a_1(x)$, $a_2(x)$ и $f(x)$ непрерывны в интервале (r_1, r_2). Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — ФСР соответствующего однородного уравнения. Будем искать решение линейного неоднородного уравнения (1.4.6) в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ — новые неизвестные дифференцируемые на (r_1, r_2) функции. Тогда

$$y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

При следующем дополнительном условии на $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0,$$

получаем

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x),$$

$$y''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Подставляя $y(x)$, $y('x)$, $y''(x)$ в уравнение (1.4.6), получим

$$f(x) = C_1(x) \cdot L(y_1(x)) + C_2(x) \cdot L(y_2(x)) +$$

$$+ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) =$$

$$= C_1(x) \cdot 0 + C_2(x) \cdot 0 + C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) =$$

$$= C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x).$$

Таким образом, для $C_1(x)$ и $C_2(x)$ получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} C_1' y_1(x) & + & C_2' y_2(x) & = & 0 \\ C_1' y_1'(x) & + & C_2' y_2'(x) & = & f(x), \end{cases}$$

которая при каждом x есть система двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ с определителем, отличным от нуля (определитель этой системы есть определитель Вронского для ФСР $y_1(x)$, $y_2(x)$), и, значит, имеет при каждом x единственное решение. Решая эту систему, найдем $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, причем в силу формул Крамера эти функции непрерывны на интервале (r_1, r_2), и тем самым у них есть первообразные на этом промежутке, т. е. задача нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ разрешима.

Метод вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного уравнения n-го порядка

Рассмотрим снова линейное неоднородное уравнение n-го порядка

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x).$$

Аналогично случаю уравнения второго порядка, подробно рассмотренному ранее, для отыскания его общего решения можно применить метод Лагранжа, если известна фундаментальная система соответствующего однородного уравнения $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Решение линейного неоднородного уравнения ищем в виде

$$y(t) = C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x).$$

Функции $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ определяются решением системы

$$\begin{cases} C_1' y_1(x) & + \ldots + & C_n' y_n(x) & = & 0, \\ C_1' y_1'(x) & + \ldots + & C_n' y_n'(x) & = & 0, \\ \ldots & & & & \\ C_1' y_1^{(n-1)}(x) & + \ldots + & C_n' y_n^{(n-1)}(x) & = & f(x) \end{cases}$$

и последующим интегрированием функций $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$.

Замечание. Структура решений линейного однородного уравнения проста (линейная комбинация решений фундаментальной системы), однако фундаментальные системы решений эффективно находятся лишь для уравнений с постоянными коэффициентами. Такие уравнения, с одной стороны, часто непосредственно описывают экономические процессы, а с другой стороны, являются инструментом исследования при линеаризации нелинейных уравнений.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Начнем изучение с наиболее простого случая — интегрирования уравнения

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{1.4.7}$$

где a и b – некоторые действительные числа.

Областью Γ, в которой выполняются условия теоремы Коши, является все пространство $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < y' < \infty$.

Все решения уравнения (1.4.7) определены при всех $x \in \mathbb{R}$.

Поскольку линейные уравнения с постоянными коэффициентами — частный случай линейных уравнений с переменными коэффициентами, то все утверждения и теоремы, сформулированные и доказанные нами ранее для линейных уравнений, справедливы и для рассматриваемого типа уравнений.

Следуя *Эйлеру*, будем искать решение уравнения (1.4.7) в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ – вещественное или комплексное число. В силу утверждения 1.3.1 выполняется $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ и $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$, следовательно, $L(y(x)) = L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b)$. Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то $L(e^{\lambda x}) = 0$, т.е. $e^{\lambda x}$ является решением (1.4.7) тогда и только тогда, когда λ является корнем уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{1.4.8}$$

Уравнение (1.4.8) называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (1.4.7), а многочлен

$$s(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

называется *характеристическим многочленом* уравнения (1.4.7).

Поскольку a и b вещественны, характеристическое уравнение (1.4.8) может иметь два действительных различных корня, один корень кратности 2 или два комплексно сопряженных корня. Рассмотрим эти случаи отдельно.

А. Случай простых действительных корней

Если характеристическое уравнение (1.4.8) имеет два действительных различных корня λ_1, λ_2, то общее решение в этом случае задается формулой

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Действительно, каждая из функций

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = e^{\lambda_1 x} \tag{1.4.9}$$

является решением уравнения (1.4.7), поэтому остается доказать, что система (1.4.9) является фундаментальной. Для этого достаточно установить, что определитель Вронского $W(x)$ системы (1.4.9)

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля при некотором x. Рассматривая его значение при $x = 0$, получаем

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0,$$

поскольку λ_1 и λ_2 различны.

Б. Случай кратных корней

Если характеристическое уравнение (1.4.8) имеет один действительный корень λ_0 кратности 2, то фундаментальную систему решений составляют функции

$$y_1 = e^{\lambda_0 x}, \quad y_2 = xe^{\lambda_0 x}. \tag{1.4.10}$$

Задание. Самостоятельно проверьте, что каждая из этих функций удовлетворяет уравнению (1.4.7).

Установим фундаментальность системы решений. Имеем

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & xe^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 x} & e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 xe^{\lambda_0 x} \end{vmatrix}.$$

При $x = 0$ выполняется

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Тогда общее решение запишется в виде

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_0 x}. \tag{1.4.11}$$

В. Случай комплексных корней

Пусть характеристическое уравнение (1.4.8) имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. ФСР составляют функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_1 x}$.

Уравнение (1.4.7) имеет действительные коэффициенты. Хотелось бы иметь действительнозначное решение. По формуле Эйлера

$$e^{(\alpha \pm \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x \pm ie^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Вместо комплекснозначных функций $e^{(\alpha+\beta i)x}$ и $e^{(\alpha-\beta i)x}$ в фундаментальную систему решений включают действительнозначные функции $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Задание. Самостоятельно проверьте, что $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ образуют фундаментальную систему решений.

Общее решение в этом случае имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x =$$
$$= e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \qquad (1.4.12)$$

Пример 1.4.4. Решим уравнение $y'' + y' - 2y = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Общее решение тогда запишется в виде

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}.$$

Пример 1.4.5. Решим уравнение $y'' - 2y' = 0$. Характеристическое уравненис $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Общее решение принимает вид

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Пример 1.4.6. Решим уравнение $y'' - 2y' + y = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет один кратный корень $\lambda_0 = 1$. Общее решение:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{x}.$$

Пример 1.4.7. Решим уравнение $y'' + 4y' + 13y = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ обладает комплексно сопряженными корнями $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$. Общее решение в этом случае имеет вид

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Пример 1.4.8. Уравнение гармонических колебаний [1,8]

$$\ddot{y} + k^2 y = 0, \qquad k > 0.$$

Здесь точки обозначают производные по времени t. Этим уравнением описываются свободные (без сопротивления среды) колебания груза, подвешенного на пружине, автомобиля на рессорах и др.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm ik$. Общее решение: $y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$. Считая $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ (т. е. постоянные одновременно в нуль не обращаются, чем исключается тривиальное решение), запишем:

$$y = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos kt + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin kt\right).$$

Каждая из дробей в скобках не больше единицы по абсолютной величине, а сумма их квадратов равна единице. Поэтому найдется такой угол δ, что

$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = \sin\delta, \quad \text{а} \ \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = \cos\delta.$$

Примем $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Тогда получим следующий вид общего решения:

$$y = A\sin(kt + \delta). \qquad (1.4.13)$$

Произвольными постоянными здесь являются A и δ, они определяются начальными условиями — начальными отклонением и скоростью $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$. Такая форма записи общего решения более удобна для интерпретации. Формула (1.4.13) описывает движение, которое согласуется с нашим обыденным представлением о колебании груза, подвешенного на пружине. Число A — амплитуда колебаний; δ — начальная фаза колебаний; k – частота колебаний (частота колебаний одинакова для всех начальных условий, определяется лишь свойствами системы – массой тела и жесткостью пружины); $T = \frac{2\pi}{k}$ — период колебаний.

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Метод построения ФСР и общего решения для линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами распространяется на уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{1.4.14}$$

Здесь $a_1, \ldots, a_n$ – некоторые числа.

Ищем решение уравнения (1.4.14) в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ – вещественное или комплексное число. Снова получим, что $e^{\lambda x}$ является решением (1.4.14) тогда и только тогда, когда λ является корнем уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{1.4.15}$$

Уравнение (1.4.15) называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (1.4.14) и составляется по тому же правилу, что и для уравнения второго порядка: в уравнении производные от искомой функции заменяются соответствующими степенями λ, а y меняем на 1.

Характеристический многочлен, стоящий в левой части уравнения (1.4.15), является многочленом n-й степени с действительными коэффициентами. Из курса алгебры известно, что у такого многочлена имеется ровно n корней с учетом их кратностей.

ФСР линейного дифференциального уравнения n-го порядка состоит из n линейно независимых решений. Структура ФСР зависит от свойств корней характеристического уравнения.

Пусть λ_j – корень характеристического уравнения. Возможны случаи:

А. λ_j – простой действительный корень, тогда в ФСР ему соответствует решение $y_j = e^{\lambda_j x}$ уравнения (1.4.14).

Б. λ_j – действительный корень кратности k, тогда ему соответствует k решений:

$$y_{j_1} = e^{\lambda_j x},\ y_{j_2} = x e^{\lambda_j x},\ \ldots,\ y_{j_k} = x^{k-1} e^{\lambda_j x}.$$

В. λ_j – простой комплексный корень, $\lambda_j = a + bi$. Тогда у характеристического уравнения есть еще сопряженный корень $\overline{\lambda_j} = a - bi$. Паре комплексно сопряженных корней $a \pm bi$ соответствуют два действительных решения вида

$$y_{j_1} = e^{\alpha x} \cos \beta x, \qquad y_{j_2} = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Г. λ_j – комплексный корень кратности k, $\lambda_j = a + bi$, тогда и у сопряженного корня $\overline{\lambda_j} = a - bi$ кратность k в характеристическом уравнении. Паре комплексно сопряженных корней $a \pm bi$ кратности k соответствуют $2k$ действительных решений вида

$$y_{j_1} = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ y_{j_2} = x e^{\alpha x} \cos \beta x,\ \ldots,\ y_{j_k} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$
$$y_{j_{k+1}} = e^{\alpha x} \sin \beta x,\ y_{j_{k+2}} = x e^{\alpha x} \sin \beta x,\ \ldots,\ y_{j_{2k}} = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Замечание 1.4.1. При $n > 2$ успех в построении фундаментальной системы решений уравнения (1.4.14) зависит от возможности решения характеристического уравнения, поскольку в общем случае либо нет формул для нахождения корней многочлена n-й степени через его коэффициенты ($n \geqslant 5$), либо они громоздки ($n = 3, 4$).

Пример 1.4.9. Решим уравнение

$$y''' + 4y'' + 6y' + 4y = 0.$$

Решение. Это линейное однородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1+i$, $\lambda_3 = -1-i$. Действительному корню в ФСР соответствует решение

$$y_1 = e^{-2x},$$

паре комплексно сопряженных корней $-1 \pm i$ соответствуют два линейно независимых решения:

$$y_2 = e^{-x} \cos x, \qquad y_3 = e^{-x} \sin x.$$

Решения y_1, y_2, y_3 составляют ФСР. Общее решение будет иметь вид $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} \cos x + C_3 e^{-x} \sin x$. □

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами имеют вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{1.4.16}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ – некоторые числа, функция $f(x)$ непрерывна на интервале (r_1, r_2).

В силу теоремы 1.4.4 общее решение уравнения (1.4.16) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) + y_{\text{ч.р}}(x).$$

Алгоритм построения общего решения $C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ однородного уравнения уже изложен. Частное решение неоднородного уравнения (1.4.16) можно получить методом Лагранжа вариации произвольных постоянных. Метод вариации позволяет находить частное решение для произвольной непрерывной функции, стоящей в правой части уравнения (1.4.16). Как показано выше, для этого надо, во-первых, решить систему линейных алгебраических уравнений, во-вторых, найти первообразные некоторых функций. Последняя задача является сложной и не всегда разрешима в классе элементарных функций. Однако если правая часть неоднородного уравнения (1.4.16) имеет специальный вид, то задача нахождения частного решения существенно упрощается.

Функцию вида

$$f(x) = e^{\alpha x}(P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x), \tag{1.4.17}$$

где α и β – действительные числа, а $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, называют *действительным квазимногочленом.* Во многих прикладных задачах возникают уравнения, правые части которых являются функциями такого класса или их суммами.

Теорема 1.4.5 (о построении частного решения неоднородного уравнения). *Уравнение*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$$

в случае, если $\beta \neq 0$, *имеет частное решение вида*

$$y_{ч.р} = x^s e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x], \qquad (1.4.18)$$

где $R_m(x)$ *и* $T_m(x)$ *- некоторые многочлены степени не выше* m *— наибольшей из степеней многочленов* $P(x)$ *и* $Q(x)$*. Число* s *равно кратности корня* $\alpha + \beta i$ *в характеристическом уравнении* (1.4.15), *при этом* $s = 0$, *если* $\gamma = \alpha + \beta i$ *не является корнем.*

Если $\beta = 0$, *то уравнение*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = e^{\alpha x} P_m(x)$$

имеет частное решение вида

$$y_{ч.р} = x^s e^{\alpha x} R_m(x), \qquad (1.4.19)$$

где $R_m(x)$ *— некоторый многочлен степени* m, s *равно кратности корня* $\gamma = \alpha$ *в характеристическом уравнении* (1.4.15), *и* $s = 0$, *если* α *не является его корнем.*

Замечание 1.4.2. Поскольку $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, на решение (1.4.19) при $\beta = 0$ можно смотреть как на частный случай решения (1.4.18), считая, что в (1.4.18) $Q(x) \equiv 0$.

Замечание 1.4.3 (метод неопределенных коэффициентов). Теорема 1.4.5 позволяет реализовать следующий алгоритм для построения частного решения уравнения (1.4.16) с правой частью (1.4.17):

1. Составить для квазимногочлена (1.4.17) число $\gamma = \alpha + \beta i$ и определить величину s, проверив, корнем какой кратности в характеристическом многочлене (1.4.15) является γ.

2. Записать $y_{\text{ч.р}}$ в виде (1.4.18) или (1.4.19), где

$$R_m(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$
$$T_m(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m.$$

Коэффициенты этих многочленов подлежат определению. Заметим, что, если в $f(x)$ входит только $\cos\beta x$ (или только $\sin\beta x$), искать $y_{\text{ч.н}}$ надо все равно в полном виде, содержащем слагаемые как с $\cos\beta x$, так и с $\sin\beta x$. Игнорирование этого правила является весьма распространенной ошибкой студентов.

3. Подставить $y_{\text{ч.р}}$ в уравнение (1.4.16).

4. Приравнять коэффициенты при подобных слагаемых в левой и правой частях полученного равенства вида

$$x^j e^{\alpha x} \cos\beta x, \quad x^j e^{\alpha x} \sin\beta x, \quad x^j e^{\alpha x}.$$

5. Решить систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов

$$A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_m,\ B_0,\ B_1,\ \ldots,\ B_m.$$

Если правая часть уравнения (1.4.16) равна сумме нескольких действительных квазимногочленов, то частное решение отыскивается по принципу суперпозиции 1.4.3. Так, если в уравнении (1.4.16) правая часть $f(x)$ представляет собой сумму

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то находят частное решение $y_1(x)$ уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_1(x)$$

и $y_2(x)$ — частное решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_2(x).$$

Тогда $y_{\text{ч.н}} = y_1(x) + y_2(x)$ является частным решением уравнения (1.4.16) с правой частью $f(t) = f_1(x) + f_2(x)$.

Пример 1.4.10. Решим уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + e^{-x}\cos 2x. \qquad (1.4.20)$$

Решение. Сначала решим однородное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ имеет корень $\lambda = 3$ двойной кратности. Общим решением является функция $y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$.

Правая часть уравнения (1.4.20) состоит из двух слагаемых, представляющих собой действительные квазимногочлены. Для первого вида xe^{3x} число $\gamma = \alpha + \beta i = 3$, а для второго вида $e^{3x}\cos 2x$ число $\gamma = \alpha + \beta i = 3 + 2i$. Так как эти числа различны, надо искать отдельно частные решения уравнений

$$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x},$$

$$y'' - 6y' + 9y = e^{-x}\cos 2x.$$

Число $\gamma = 3$ является корнем характеристического уравнения кратности $s = 2$; $P(x) = x$; поскольку $\beta = 0$, считаем, что $Q(x) \equiv 0$. Наибольшая из степеней этих многочленов равна 1. Частное решение ищем в виде $y_1 = x^2(Ax+ +B)e^{3x}$. Чтобы подставить $y_1(x)$ в уравнение $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}$, вычислим сначала первую производную: $y_2' = (3Ax^3 + 3Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx)e^{3x}$. Вторую производную сразу впишем в уравнение

$$(9Ax^3 + 9Bx^2 + 9Ax^2 + 6Bx + 9Ax^2 + 6Bx + 6Ax + 2B)e^{3x} -$$

$$-6(3Ax^3 + 3Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx)e^{3x} + 9(Ax^3 + Bx^2)e^{3x} = xe^{3x}.$$

Сокращаем на e^{3x} и приводим подобные. Получаем $6Ax + 2B = x$ и $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$. Итак, $y_1 = \frac{1}{6}x^3e^{3x}$.

Число $\gamma = -1+2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $s = 0$. Далее $P(x) \equiv 1$; $Q(x) \equiv 0$. Наибольшая из степеней этих многочленов равна 0. Частное решение ищем в виде $y_2 = e^{-x}(C\cos 2x + D\sin 2x)$. Обратите внимание, что, хотя в правой части уравнения нет $\sin 2x$, в общей формуле для частного решения присутствует как косинус, так и синус. Вычислим

$$y_2' = (-C\cos 2x - D\sin 2x - 2C\sin 2x + 2D\cos 2x)e^{-x},$$

$$y_2'' = (2C\sin 2x - 2D\cos 2x - 4C\cos 2x - 4D\sin 2x +$$
$$+ C\cos 2x + D\sin 2x + 2C\sin 2x - 2D\cos 2x)e^{-x} =$$
$$= (4C\sin 2x - 4D\cos 2x - 3C\cos 2x - 3D\sin 2x)e^{-x}.$$

Подставим $y_2(x)$ в уравнение $y'' - 6y' + 9y = e^{-x}\cos 2x$:

$$(4C\sin 2x - 4D\cos 2x - 3C\cos 2x - 3D\sin 2x)e^{-x} -$$
$$-6(-C\cos 2x - D\sin 2x - 2C\sin 2x + 2D\cos 2x)e^{-x} +$$
$$+9(C\cos 2x + D\sin 2x)e^{-x} = e^{-x}\cos 2x.$$

Сокращаем на e^{-x} и приводим подобные. Получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C и D:

$$\begin{cases} -\quad 4D - 3C + 6C - 12D + 9C = 1, \\ \quad 4C - 3D + 6D + 12C + 9D = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\quad 16D + 12C = 1, \\ \quad 12D + 16C = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16D + 12C = 1, \\ D = -\frac{4C}{3}. \end{cases}$$

Отсюда $C = 0,03$; $B = -0,04$. Итак, $y_2 = \frac{1}{100}\, e^{-x}(3\cos 2x - -4\sin 2x)$.

Общим является решение

$$y = y_0 + y_1 + y_2 = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{1}{6}\, x^3 e^{3x} +$$

$$+ \frac{1}{100}\, e^{-x}(3\cos 2x - 4\sin 2x).$$

Пример 1.4.11. Уравнение гармонических колебаний с вынуждающей периодической силой [1,8] имеет вид

$$\ddot{y} + k^2 y = H \sin \omega t.$$

Здесь точки обозначают производные по времени t. Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с квазимногочленом в правой части.

Напомним, что соответствующее однородное уравнение описывает свободные (без сопротивления среды) колебания груза, подвешенного на пружине. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm ik$. В соответствии с (1.4.12) общее решение однородного уравнения записывается в виде

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt = A \sin(kt + \delta),$$

где A и δ — новые произвольные постоянные.

Найдем частное решение неоднородного уравнения. В нашем случае $\gamma = \omega i$. Чтобы определить вид частного решения, надо знать, является ли γ корнем характеристического уравнения. Рассмотрим случаи:

1) $\omega \neq k$, тогда γ не является корнем характеристического уравнения и частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y_{\text{ч.р}}(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t.$$

Вычисляем $\dot{y}_{\text{ч.р}}(t) = -\omega\, a \sin\omega t + \omega\, b \cos\omega t$, $\ddot{y}_{\text{ч.р}}(t) = -\omega^2 a \cos\omega t - \omega^2 b \sin\omega t$. Подставляя $\ddot{y}_{\text{ч.р}}(t)$ и $y_{\text{ч.р}}(t)$ в исходное уравнение, приходим к соотношению

$$a(k^2-\omega^2)\cos\omega t + b(k^2-\omega^2)\sin\omega t = H\sin\omega t.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных слагаемых, получаем

$$\begin{cases} a(k^2-\omega^2) = 0, \\ b(k^2-\omega^2) = H. \end{cases}$$

Отсюда $a = 0$, $b = \frac{H}{k^2-\omega^2}$, $y_{\text{ч.р}}(t) = \frac{H}{k^2-\omega^2}\sin\omega t$. Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = A\sin(kt+\delta) + \frac{H}{k^2-\omega^2}\sin\omega t. \tag{1.4.21}$$

Вывод: в случае, когда собственная частота k и вынуждающая частота ω различны, имеем наложение двух колебаний с постоянными амплитудами. Хотя при ω близких к k амплитуда второго колебания велика, решение (1.4.21) ограничено на $[0,+\infty)$.

2) $\omega = k$, тогда γ — однократный корень характеристического уравнения и частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y_{\text{ч.р.}}(t) = t(a\cos\omega t + b\sin\omega t).$$

Тогда $\dot{y}_{\text{ч.р}}(t) = t(-\omega\, a\sin\omega t + \omega\, b\cos\omega t) + a\cos\omega t + b\sin\omega t$, $\ddot{y}_{\text{ч.р}}(t) = t(-\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t) - 2(-\omega\, a\sin\omega t + \omega\, b\cos\omega t)$. Подставляя $\ddot{y}_{\text{ч.р}}(t)$ и $y_{\text{ч.р}}(t)$ в исходное уравнение и учитывая, что $\omega = k$, приходим к соотношению

$$2(-\omega\, a\sin\omega t + \omega\, b\cos\omega t) = H\sin\omega t.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных слагаемых, получаем

$$\begin{cases} b = 0, \\ a = -\frac{H}{2\omega}. \end{cases}$$

Тогда $y_{\text{ч.р}}(t) = -t\frac{H}{2\omega}\cos\omega t$. Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = A\sin(kt+\delta) - t\frac{H}{2\omega}\cos kt.$$

Вывод: в случае, когда собственная частота k и вынуждающая частота ω совпадают, амплитуда второго колебания неограниченно растет с ростом t даже при малом H. Такое явление возрастания амплитуды колебаний под действием внешних ограниченных возмущающих сил называется *резонансом*.

В механических системах резонанс может вызвать разрушение. В других случаях эффект усиления амплитуды колебаний может быть полезен. Так, процесс настройки радиоприемника на волну определенной радиостанции заключается в сближении собственной частоты колебательного контура приемника с частотой радиостанции.

Пример 1.4.12. Линейная модель динамики валового внутреннего продукта (ВВП) описывается уравнением

$$T\frac{d^2X}{dt^2} + (T\nu+1)\frac{dX}{dt} + (\nu - a\mu)X = \mu A(t),$$

где $X(t)$ — валовый внутренний продукт; T — лаг (запаздывание) фондообразования; $A(t)$ — внешние инвестиции; μ — средняя капиталоотдача; ν — средняя норма амортизации основных производственных фондов.

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$T\lambda^2 + (T\nu+1)\lambda + \nu - a\mu = 0.$$

Его корни:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{T\nu+1}{2T} \pm \frac{1}{2T}\sqrt{(T\nu+1)^2 - 4T(\nu - a\mu)} =$$

$$= -\frac{T\nu+1}{2T} \pm \frac{1}{2T}\sqrt{T^2\nu^2 + 2T\nu + 1 - 4T\nu + 4Ta\mu} =$$
$$= -\frac{T\nu+1}{2T} \pm \frac{1}{2T}\sqrt{(T\nu-1)^2 + 4Ta\mu}.$$

Отсюда получаем, что подкоренное выражение положительное и корни действительные различные. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$X_{\text{о.о}}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Дальнейший анализ качественного поведения решения зависит от начальных условий $X_{\text{о.о}}(0)$, $X'_{\text{о.о}}(0)$ и от знака величины $\nu - a\mu$. При этом C_1 и C_2 определяются из системы

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = X_{\text{о.о}}(0), \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = X'_{\text{о.о}}(0). \end{cases}$$

Предположим, что начальные условия таковы, что $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$. Условие $\nu > a\mu$ означает, что $\lambda_{1,2} < 0$. Без ограничения общности считаем, что $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, тогда в ситуации отсутствия внешних инвестиций ($A(t) \equiv 0$, однородное уравнение) и при $t \to +\infty$ ВВП $X_{\text{о.о}}(t) \to 0$.

Условие $\nu < a\mu$ означает, что $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_2 < 0$. Значит, при отсутствии внешних инвестиций и при $t \to +\infty$ ВВП $X_{\text{о.о}}(t) \to +\infty$.

Наконец, при $\nu = a\mu$ находим $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\left(\nu + \frac{1}{T}\right)$. В этом случае в ситуации отсутствия внешних инвестиций при $t \to +\infty$ ВВП стабилизируется.

Задание. Проанализируйте поведение ВВП (величины $X(t)$), если функция внешних инвестиций $A(t)$ имеет вид квазимногочлена. Рассмотрите случаи $A(t) \equiv d$, $A(t) = ct + d$. $\square$

Если же неоднородность не является квазимногочленом (или суммой квазимногочленов), то можно попытаться применить метод вариации постоянных.

Пример 1.4.13. Решим уравнение

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение $y'' - y = 0$ имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ (его корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$) и общее решение

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Правая часть уравнения не является квазимногочленом, поэтому применим метод вариации произвольных постоянных. Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}.$$

Выпишем систему для нахождения производных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0, \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x + 1}. \end{cases}$$

Решая ее, находим

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{1}{2(e^x + 1)}, \\ C_2' = -\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}. \end{cases}$$

Далее интегрируем:

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(e^x + 1) + D_1, \\ C_2 = -\dfrac{e^x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(e^x + 1) + D_2. \end{cases}$$

Подставляя найденные C_1 и C_2 в формулу для общего решения, получаем общее решение исходного уравнения в виде

$$y = D_1 e^x + D_2 e^{-x} + \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(e^x + 1)\right)e^x +$$

$$+\left(-\frac{e^x}{2}+\frac{1}{2}\ln(e^x+1)\right)e^{-x}.$$

1.5. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Другим не менее распространенным объектом в математических моделях являются *системы дифференциальных уравнений*. В так называемой *нормальной форме* система n-го порядка имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \tag{1.5.1}$$

Здесь t – независимая переменная; $x_1, x_2, \dots, x_n$ – искомые функции от t; $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$, $\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}, \dots$, $\dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt}$. В системах, в отличие от уравнений, независимая переменная часто обозначается буквой t и имеет во многих моделях смысл времени. Системы в нормальной форме, таким образом, характеризуются тремя признаками:

1) число уравнений совпадает с числом искомых функций;

2) все уравнения – только первого порядка;

3) все уравнения разрешены относительно соответствующих производных.

Совокупность функций $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ называется *решением системы* (1.5.1) в интервале (r_1, r_2), если при подстановке этих функций в уравнения системы все уравнения превращаются в тождества в интервале (r_1, r_2).

Кривая, описываемая решением $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ в пространстве переменных $t, x_1, ..., x_n$, называется *интегральной*.

Задача Коши для системы (1.5.1) ставится следующим образом. Пусть Γ — это область в пространстве переменных $t, x_1, ..., x_n$, в которой определены правые части

$f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$ системы (1.5.1). По заранее заданной точке $(t_0, x_1^0, ..., x_n^0) \in \Gamma$ нужно найти решение системы $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), ..., x_n = \varphi_n(t)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi_1(t_0) = x_1^0, \quad \varphi_2(t_0) = x_2^0, ..., \varphi_n(t_0) = x_n^0. \tag{1.5.2}$$

На геометрическом языке это означает, что ищется интегральная кривая, проходящая через заданную точку области Γ.

Теорема 1.5.1 (о существовании и единственности решения задачи Коши). *Пусть задана система* (1.5.1) *и в некоторой области* Γ $(n+1)$*-мерного пространства* R^{n+1} *переменных* $t, x_1, ..., x_n$ *функции* $f_i(t, x_1, ..., x_n), i = \overline{1, n}$, *непрерывны вместе со своими частными производными* $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}, i, k = \overline{1, n}$.

Тогда через каждую точку $(t_0, x_1^0, ..., x_n^0) \in \Gamma$ *проходит, и притом единственная, интегральная кривая.* □

Удобна векторная запись системы (1.5.1). Введем обозначения:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix},$$

$$X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}.$$

Получаем следующую векторную запись системы (1.5.1) и начальных условий:

$$\dot{X} = F(t, X), \tag{1.5.3}$$

$$X(t_0) = X^0.$$

Иногда (1.5.3) называют уравнением, понимая под искомой величиной не скалярную, а векторную функцию $X = X(t)$.

Пример 1.5.1. *Модель "хищник — жертва".* Рассмотрим математическую модель совместного существования двух биологических видов (популяций) типа "хищник — жертва", называемую моделью Лотки–Вольтерра. Впервые она была получена американским ученым А. Лоткой (1925), который использовал ее для описания динамики взаимодействующих биологических популяций. Чуть позже и независимо от Лотки аналогичные (и более сложные) модели были разработаны итальянским математиком В. Вольтерра (1926), глубокие исследования которого в области экологических проблем заложили фундамент математической теории биологических сообществ, или так называемой математической экологии.

Пусть два биологических вида совместно обитают в изолированной среде. Среда стационарна и обеспечивает в неограниченном количестве всем необходимым для жизни один из видов, который будем называть жертвой. Другой вид, хищник, также находится в стационарных условиях, но питается лишь особями первого вида. Это могут быть караси и щуки, зайцы и волки, мыши и лисы, микробы и антитела и т. д. Будем для определенности говорить о карасях и щуках. Итак, караси и щуки живут в некотором изолированном пруду. Среда предоставляет карасям питание в неограниченном количестве, а щуки питаются лишь карасями. Обозначим y — число щук, x — число карасей.

Со временем число карасей и щук меняется, будем считать x и y непрерывными функциями времени t. Цель — построить модель, описывающую изменение состояния экосистемы.

Рассмотрим $\dfrac{dx}{dt}$ — скорость изменения численности карасей. Если щук нет, то число карасей увеличивается в соответствии с законом Мальтуса — тем быстрее, чем больше карасей:

$$\frac{dx}{dt} = ax, \qquad a > 0,$$

причем коэффициент a зависит только от условий жизни карасей, их естественной смертности и рождаемости.

Скорость изменения числа щук выражается производной $\dfrac{dy}{dt}$. Если карасей нет, то число щук уменьшается (у них нет пищи) и они вымирают. Будем считать, что

$$\frac{dy}{dt} = -by, \qquad b > 0.$$

Взаимодействие двух этих видов моделируется так. Жертвы вымирают со скоростью, равной числу встреч хищников и жертв, которое в данной модели предполагается пропорциональным численности обеих популяций, т. е. равным cxy $(c > 0)$. Поэтому

$$\frac{dx}{dt} = ax - cxy.$$

Хищники же размножаются со скоростью, пропорциональной числу съеденных жертв:

$$\frac{dy}{dt} = -by + dxy,$$

где $d > 0$. В итоге получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & ax - cxy, \\ \dfrac{dy}{dt} & = & -by + dxy, \end{cases} \tag{1.5.4}$$

называемую моделью Лотки–Вольтерра. Отметим, что в силу того, что в правых частях уравнений системы присутствуют произведения искомых функций, эта система нелинейная, решить аналитически мы ее не сможем. Можно показать, что при определенных начальных условиях эта модель описывает циклический процесс с повторением значений численности популяций через некоторое время.

Во многих случаях в экономике могут быть использованы подобные (более сложные) модели "хищник — жертва", в частности для моделирования конкурентной борьбы. В таких моделях величины имеют следующий смысл: для данной рыночной среды x — число фирм, находящихся на рынке, — "жертвы"; а y — число фирм, решающих задачу захвата рынка и вытеснения с него x фирм, — "хищники".

Сведение дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме

Уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

можно свести к системе в нормальной форме Коши с помощью введения искомых функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по формулам, связывающим эти функции с y:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{x}_1 = y', \ldots, x_n = \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)}. \tag{1.5.5}$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{1.5.6}$$

которая является частным случаем системы (1.5.1).

Пример 1.5.2. Уравнение математического маятника $\ddot{y} + y = 0$ заменой $x_1 = y, \quad x_2 = \dot{x_1} = \dot{y}$ сводится к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases} \qquad \square$$

Систему в нормальной форме можно свести к уравнению не всегда, однако в некоторых частных случаях такое сведение возможно методом исключения.

Пример 1.5.3. Дана система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + 2e^t \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + t^2. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы и продифференцируем его по t, что можно сделать, поскольку правая часть уравнения представляет собой сумму дифференцируемых функций, а значит, и левая также дифференцируема по t:

$$\begin{gathered} \ddot{x}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 + 2e^t = \\ = [\text{из второго уравнения } \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + t^2] = \\ = \dot{x}_1 - x_1 - 2x_2 - t^2 + 2e^t = \\ = [\text{из первого уравнения } x_2 = x_1 - \dot{x}_1 + 2e^t] = \\ = \dot{x}_1 - x_1 - 2x_1 + 2\dot{x}_1 - 4e^t - t^2 + 2e^t. \end{gathered}$$

После приведения подобных получим уравнение второго порядка относительно одной неизвестной функции:

$$\ddot{x}_1 - 3\dot{x}_1 + 3x_1 = -t^2 - 2e^t.$$

Системы линейных дифференциальных уравнений

Система линейных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t). \end{cases} \tag{1.5.7}$$

Или в векторной записи:

$$\dot{X} = A(t)X + B(t),$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Если элементы матрицы $A(t)$ – постоянные числа, то систему (1.5.7) называют *системой с постоянными коэффициентами.*

Функции $a_{ik}(t)$ и $b_i(t)$ предполагаются непрерывными в промежутке (r_1, r_2). Легко показать, что в области Г, задаваемой $r_1 < t < r_2$, $-\infty < x_1 < +\infty$, ..., $-\infty < x_n < +\infty$, выполняются условия теоремы Коши, т. е. обеспечены существование и единственность решения. Так же, как и для линейных уравнений, любое решение линейной системы определено во всем интервале (r_1, r_2).

Система (1.5.7) называется *однородной,* если $b_i(t) \equiv 0$ для любого $i = \overline{1, n}$, и *неоднородной* в противном случае.

Линейные однородные системы

Рассмотрим однородную систему

$$\dot{X} = A(t)X. \tag{1.5.8}$$

Всякая однородная система $\dot{X} = A(t)X$ обладает решением $X \equiv 0$, называемым *тривиальным.*

Теорема 1.5.2 (о структуре множества решений линейной однородной системы).

1. Множество решений системы (1.5.8) является линейным пространством размерности n.

2. Всякая система решений $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ с независимыми векторами начальных значений $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0$ является фундаментальной системой решений, т. е. базисом в пространстве решений. □

Пример 1.5.4. Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Решение. В двумерных примерах принято искомые функции обозначать x и y. Эта система может быть интегрирована последовательно, так как первое уравнение не содержит y:

$$x = C_1 e^t,$$

теперь для $y(t)$ получим

$$\frac{dy}{dt} = y + C_1 e^t, \qquad y = e^t (C_1 t + C_2).$$

Вектор-функции

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}, \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

составляют ФСР, поскольку удовлетворяют линейно независимым начальным значениям:

$$X_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, любое решение данной системы может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} =$$

$$= C_1e^t\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix} + C_2e^t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^t \\ e^t(C_1t + C_2) \end{pmatrix},$$

где числа C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ однозначно определяются для каждого решения из начальных условий. □

Пусть дано m вектор-функций

$$X_1(t), X_2(t), \ldots, X_m(t), \tag{1.5.9}$$

определенных в промежутке (r_1, r_2). Их называют *линейно зависимыми* в этом промежутке, если существуют такие числа $C_1, C_2, \ldots, C_m$, не все равные нулю (т. е. $C_1^2 + \ldots + C_m^2 \neq 0$), что в любой точке интервала (r_1, r_2) справедливо тождество

$$C_1X_1(t) + C_2X_2(t) + \cdots + C_mX_m(t) \equiv 0. \tag{1.5.10}$$

Если тождество (1.5.10) выполняется только в случае $C_1 = C_2 = \cdots = C_m = 0$, вектор-функции называются *линейно независимыми* в интервале (r_1, r_2).

Рассмотрим однородную систему (1.5.8) и n ее решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{1.5.11}$$

Из решений (1.5.11) образуем матрицу

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{1.5.12}$$

Определитель $W(t) = \mathrm{Det}Y(t)$ называется *определителем Вронского* системы решений $X_1(t), \ldots, X_n(t)$.

Теорема 1.5.3 (критерий фундаментальности системы решений). *Если определитель Вронского равен нулю при некотором $t = t_0$, то он равен нулю при всех $t \in (r_1, r_2)$ и система решений $X_1(t)$, $X_2(t) \ldots, X_n(t)$ линейно зависима. Если определитель Вронского отличен от нуля при $t = t_0$, то он отличен от нуля при всех $t \in (r_1, r_2)$. В этом случае $X_1(t)$, $X_2(t) \ldots, X_n(t)$ является фундаментальной системой решений.*

Линейные неоднородные системы

Теорема 1.5.4 (о структуре множества решений линейной неоднородной системы). *Пусть $X_{\text{ч.р}}(t)$ — некоторое частное решение линейной неоднородной системы*

$$\dot{X} = A(t)X + B(t), \tag{1.5.13}$$

$X_1(t)$, $X_2(t) \ldots, X_n(t)$ — фундаментальная система решений соответствующей линейной однородной системы $\dot{X} = A(t)X$. Тогда любое решение системы (1.5.13) *может быть представлено в виде*

$$X(t) = X_{\text{ч.р}}(t) + C_1 X_1(t) + \ldots + C_n X_n(t),$$

где постоянные $C_1, \ldots, C_n$ однозначно определяются из начальных условий. И наоборот, всякая функция $X(t)$ такого вида является решением данного уравнения. □

Тем самым общее решение системы (1.5.13) является суммой общего решения соответствующей однородной системы и какого-нибудь частного решения данной неоднородной системы.

Теорема 1.5.5 (принцип суперпозиции). *Пусть в системе* (1.5.7)

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)$$

вектор $B(t)$ *имеет вид*

$$B(t) = \alpha_1 B_1(t) + \alpha_2 B_2(t)$$

и известно, что $X = X_1(t)$ *является решением системы*

$$\dot{X} = A(t)X + B_1(t),$$

а $X = X_2(t)$ *является решением системы*

$$\dot{X} = A(t)X + B_2(t).$$

Тогда вектор-функция $X = \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t)$ *есть решение исходной системы.*

Для доказательства нужно воспользоваться определением производной вектор-функции

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

и свойством линейности

$$A(t)(\alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t)) = \alpha_1 A(t) X_1(t) + \alpha_2 A(t) X_2(t). \quad \square$$

Лемма 1.5.1. *Если каждая из вектор-функций* (1.5.11) $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ *является решением векторного уравнения* (1.5.8) $\dot{X} = A(t)X$, *то матрица* $Y(t)$, *составленная из столбцов* $X_1(t), \ldots, X_n(t)$, *удовлетворяет матричному уравнению*

$$\dot{Y} = A(t)Y. \tag{1.5.14}$$

Наоборот, если какая-либо матрица (1.5.12) *удовлетворяет матричному уравнению* (1.5.14), *то ее столбцы являются решениями уравнения* (1.5.8). $\square$

Матрица $Y(t)$, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений линейной однородной системы $\dot{X} = A(t)X$, называется *фундаментальной*.

Теорема 1.5.6 (метод Лагранжа вариации произвольных постоянных). *Если известно общее решение однородной системы, соответствующей неоднородной системе* (1.5.13), *то общее решение этой неоднородной системы находится с помощью квадратур*[2].

Доказательство. Применим метода Лагранжа вариации произвольных постоянных в векторной форме. В формуле общего решения

$$X = Y(t)C$$

будем считать произвольные постоянные функциями t:

$$X = Y(t) \cdot C(t). \tag{1.5.15}$$

По условию фундаментальная матрица $Y(t)$ известна. Подставим (1.5.15) в неоднородную систему (1.5.13):

$$\dot{Y}(t)C(t) + Y(t)\dot{C}(t) = A(t)Y(t)C(t) + B(t).$$

Столбцы фундаментальной матрицы удовлетворяют векторному уравнению $\dot{X} = A(t)X$, следовательно, в силу леммы 1.5.1 сама матрица удовлетворяет матричному уравнению $\dot{Y} = A(t)Y$. Поэтому первые слагаемые левой и правой частей взаимно уничтожаются. Умножив слева полученное равенство

$$Y(t)\dot{C}(t) = B(t) \tag{1.5.16}$$

на $Y^{-1}(t)$ (матрица $Y(t)$ невырожденная), получим

$$\dot{C}(t) = Y^{-1}(t)B(t),$$

[2]Т. е. решение выражается через элементарные функции и интегралы от них, см. также определение квадратуры на с. 16.

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau + D,$$

где $t_0 \in (r_1, r_2)$; D – столбец произвольных постоянных.

Подставляем это выражение в формулу (1.5.15):

$$X = Y(t)D + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau. \tag{1.5.17}$$

Итак, при любом D вектор-функция (1.5.17) является решением системы (1.5.13). Теперь покажем, что для любых начальных данных

$$X(t_0) = X_0 \tag{1.5.18}$$

найдется такое $\overline{D}$, что решение (1.5.17) при $D = \overline{D}$ будет удовлетворять этим начальным данным:

$$Y(t_0)\overline{D} = X_0, \qquad \text{отсюда} \quad \overline{D} = Y^{-1}(t_0)X_0.$$

Формула Коши

$$X = Y(t)Y^{-1}(t_0)X_0 + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$$

дает решение задачи Коши (1.5.13), (1.5.18). Отметим, что, задавая произвольный начальный вектор в точке t_0, мы просмотрим все решения уравнения, поскольку каждое из них определено на всем интервале (r_1, r_2). Формула (1.5.17) согласуется с теоремой о структуре множества решений неоднородной системы: роль частного решения неоднородной системы играет второе слагаемое. □

Пример 1.5.5. Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Решение. Соответствующей однородной будет система

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{1.5.19}$$

Аналогично примеру 1.5.3 эта система сводится к уравнению $\ddot{x} + x = 0$, которое уже было решено в примере 1.4.8: $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Далее из первого уравнения системы находим $y = \dot{x} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Применяя метод Лагранжа для решения исходной линейной неоднородной системы, в общем решении системы (1.5.19) $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$ произвольные постоянные C_1 и C_2 считаем функциями t и выписываем алгебраическую систему с неизвестными $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$:

$$\begin{cases} \dot{C}_1 \cos t + \dot{C}_2 \sin t = \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ -\dot{C}_1 \sin t + \dot{C}_2 \cos t = \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Основной определитель системы равен 1.
Воспользуемся формулами Крамера

$$\dot{C}_1 = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 & \sin t \\ \operatorname{tg} t & \cos t \end{vmatrix} = \frac{\sin^2 t}{\cos t} - \cos t - \frac{\sin^2 t}{\cos t} = -\cos t,$$

$$\dot{C}_2 = \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ -\sin t & \operatorname{tg} t \end{vmatrix} = \sin t + \operatorname{tg}^2 t \sin t - \sin t =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) \sin t$$

$$\left(\text{поскольку } \operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} - 1\right),$$

$$C_1 = -\int \cos t dt = -\sin t + \overline{C}_1,$$

$$C_2 = \int \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} - \sin t\right) dt = \frac{1}{\cos t} + \cos t + \overline{C}_2.$$

В общем решении заменяем C_1 и C_2 полученными функциями:

$$x = (-\sin t + \overline{C}_1)\cos t + \left(\frac{1}{\cos t} + \cos t + \overline{C}_2\right)\sin t,$$

$$y = -(-\sin t + \overline{C}_1)\sin t + \left(\frac{1}{\cos t} + \cos t + \overline{C}_2\right)\cos t.$$

После упрощения общее решение неоднородной системы принимает вид

$$x = \overline{C}_1 \cos t + \overline{C}_2 \sin t + \operatorname{tg} t,$$

$$y = -\overline{C}_1 \sin t + \overline{C}_2 \cos t + 2.$$

1.6. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Метод построения общего решения линейной системы по фундаментальной системе решений, описанный выше, требует знания фундаментальной системы решений. Для линейной системы с постоянными коэффициентами всегда существует ФСР, состоящая из элементарных функций, и известен эффективный способ построения ФСР. Эффективный с оговоркой, что удается найти корни многочлена n-й степени.

Рассмотрим систему

$$\dot{X} = AX + B(t) \tag{1.6.1}$$

с постоянной действительной матрицей A. Свойства линейной системы с переменной матрицей A, описанные выше, остаются справедливыми, однако появляется возможность решить произвольную однородную систему

$$\dot{X} = AX. \tag{1.6.2}$$

Будем по аналогии со случаем линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами искать решение системы (1.6.2) в виде $X = e^{\lambda t}\mathbf{h}$, где $\mathbf{h}$ — постоянный ненулевой вектор. Подставляя это выражение в систему (1.6.2), получим

$$\dot{X} = \lambda \mathbf{h} e^{\lambda t} = A\mathbf{h}e^{\lambda t} = AX,$$

или $A\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}$, последнее соотношение означает, что $\mathbf{h}$ — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ.

Характеристическое уравнение

Для решения однородной системы с постоянными действительными коэффициентами

$$\dot{X} = AX, \qquad \text{где} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

нужно найти *собственные значения матрицы* A — корни *характеристического уравнения*

$$\mathrm{Det}(A - \lambda E) = 0, \tag{1.6.3}$$

где E обозначает единичную матрицу той же размерности $n \times n$, что и матрица A, или в развернутом виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{1.6.4}$$

Пусть λ — собственное значение матрицы A. Возможны случаи.

I. Корень характеристического уравнения λ простой. Найдем *собственный вектор*

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

матрицы A, соответствующий собственному значению λ:

$$A\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}, \qquad \mathbf{h} \neq 0.$$

Собственный вектор находится с точностью до скалярного множителя.

Простому собственному значению λ матрицы A соответствует решение уравнения (1.6.2) вида

$$X = \mathbf{h}e^{\lambda t}.$$

Пример 1.6.1. Решим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Собственный вектор $\mathbf{h}_1 = \binom{h_1}{h_2}$, отвечающий собственному числу λ_1, находится из системы $(A - \lambda_1 E)\mathbf{h}_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2h_1 - 2h_2 &= 0 \\ 3h_1 + 3h_2 &= 0. \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы не рассматриваем, оно является следствием первого, так как ранг матрицы $A - \lambda_1 E$ равен 1. Получаем $h_1 = h_2$. Одно из чисел, h_1 или h_2, можно выбирать произвольно. Пусть $h_1 = 1$, тогда $h_2 = -1$, собственный вектор $\mathbf{h}_1 = \binom{1}{-1}$. Тогда корню λ_1 соответствует частное решение

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Аналогично находится частное решение, соответствующее собственному значению $\lambda_2 = 2$: если $\mathbf{h}_2 = \binom{h_1}{h_2}$, то

$$\begin{cases} -3h_1 - 2h_2 &= 0 \\ 3h_1 + 2h_2 &= 0. \end{cases}$$

Тогда $h_1 = -\frac{2}{3}h_2$. Возьмем $h_2 = -3$, получим $h_1 = 2$, $\mathbf{h}_2 = \binom{2}{-3}$,

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Общим решением системы будет двупараметрическое семейство вектор-функций

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} \\ -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

II. Корень характеристического уравнения λ кратности k. Предположим, что корень характеристического уравнения λ имеет кратность $k > 1$; ему соответствует один или несколько собственных векторов $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_i$, $i \le k$. Их можно выбрать так, чтобы каждый из них являлся *родоначальником серии из присоединенных векторов*. Например, $\mathbf{h}_1$ — собственный вектор — родоначальник *серии* из p векторов $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_1^1, \mathbf{h}_1^2, \dots, \mathbf{h}_1^p$, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned} &A\mathbf{h}_1^1 = \lambda \mathbf{h}_1^1, \qquad \mathbf{h}_1^1 \neq 0, \\ &A\mathbf{h}_1^2 = \lambda \mathbf{h}_1^2 + \mathbf{h}_1^1, \\ &\dots \\ &A\mathbf{h}_1^p = \lambda \mathbf{h}_1^p + \mathbf{h}_1^{p-1}. \end{aligned}$$

Общее число векторов, соответствующих всем собственным значениям матрицы A, включая собственные и присоединенные, совпадает с порядком системы n. В курсе линейной алгебры доказывается, что все эти векторы линейно независимы и образуют базис пространства $\mathbb{R}^n$.

Каждой серии, например $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_1^1, \mathbf{h}_1^2, \ldots, \mathbf{h}_1^p$, соответствует p линейно независимых решений $X_1, \ldots, X_p$ системы $\dot{X} = AX$:

$$
\begin{gathered}
X_1 = \mathbf{h}_1^1 e^{\lambda t}, \\
X_2 = (t\mathbf{h}_1^1 + \mathbf{h}_1^2)e^{\lambda t}, \\
X_3 = \left(\tfrac{t^2}{2!}\mathbf{h}_1^1 + t\mathbf{h}_1^2 + \mathbf{h}_1^3\right) e^{\lambda t}, \ldots, \qquad (1.6.5) \\
\\
X_p = \left(\tfrac{t^{p-1}}{(p-1)!}\mathbf{h}_1^1 + \tfrac{t^{p-2}}{(p-2)!}\mathbf{h}_1^p + \cdots + t\mathbf{h}_1^{p-1} + \mathbf{h}_1^p\right) e^{\lambda t}.
\end{gathered}
$$

Общее число всех таких решений равно порядку системы n. Проверим фундаментальность полученной системы решений. Определитель Вронского при $t = 0$ будет иметь в качестве столбцов координаты собственных и присоединенных векторов; столбцы линейно независимы, так как образуют базис в $\mathbb{R}^n$, поэтому $W(0) \neq 0$. Общее решение системы представляет собой линейную комбинацию вектор-функций вида (1.6.5), составленных для каждой серии и для каждого корня характеристического уравнения.

Пример 1.6.2. Решим систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}
$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$
\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,
$$

имеет корень $\lambda_{1,2} = \lambda_0 = 3$ кратности 2.

Ранг r матрицы

$$A - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

равен 1. Количество линейно независимых собственных векторов, отвечающих кратному собственному значению, вычисляется по формуле $d = n - r$. В данном случае это $2 - 1 = 1$.

Найдем собственный вектор $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$:

$$-h_1 + h_2 = 0, \qquad h_1 = h_2.$$

Положим $h_1 = 1$, тогда $h_2 = 1$, $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Частное решение имеет вид

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Найдем присоединенный вектор $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$:

$$(A - \lambda_0 E)\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad -h_1 + h_2 = 1.$$

Положим $h_1 = 0$, тогда $h_2 = 1$, $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Таким образом, частное решение, линейно независимое с первым, имеет вид

$$X_2(t) = \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{3t}.$$

Выпишем общее решение:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) =$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{3t}.$$

Или покоординатно:

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}, \qquad y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}.$$

III. Комплексный корень λ характеристического уравнения. Изложенные выше способы дают комплексные решения. В курсе линейной алгебры доказывается, что для любой матрицы A с вещественными коэффициентами существует базис пространства R^n, состоящий из серий, векторы которых можно выбрать так, чтобы серии с действительными собственными значениями были действительными, а серии с комплексными собственными значениями были комплексно сопряжены. Комплексные решения в ФСР заменяют их действительными и мнимыми частями.

Пример 1.6.3. Решим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравненис

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

имеет комплексно сопряженные корни

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Достаточно рассмотреть $\lambda_1 = 2 + i$.

Собственный вектор $\mathbf{h}_1 = \binom{h_1}{h_2}$, отвечающий собственному числу λ_1, находится из системы

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{h}_1 = 0, \qquad \text{при этом} \quad r(A - \lambda_1 E) = 1;$$

$$\begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0; \qquad -2h_1 + (1-i)h_2 = 0.$$

Получаем $h_2 = \frac{2}{1-i}h_1 = (1+i)h_1$.

Пусть $h_1 = 1$, тогда $h_2 = 1 + i$, собственный вектор $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$. Тогда корню λ_1 соответствует частное решение:

$$X_1 = e^{(2+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + i\, e^{2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Вместо комплексных решений $X_1(t)$ и $X_2(t)$ в ФСР включаем действительную и мнимую часть этих решений. Таким образом, общим решением системы будет

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\, e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2\, e^{2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

1.7. Динамическая интерпретация систем ОДУ. Устойчивость по Ляпунову

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n). \end{cases} \tag{1.7.1}$$

Здесь t — независимая переменная, *время*; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *фазовые* переменные, состояние объекта, точка $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Множество возможных состояний системы $D \subset \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ называется *фазовым пространством*. График решения системы (1.7.1) $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, $\ldots$, $x_n = \varphi_n(t)$ — интегральная кривая, ее проекция на фазовое пространство — *фазовая кривая (траектория)*.

Элементы теории устойчивости по Ляпунову

Рассмотрим уравнение

$$\dot{X} = F(t, X). \tag{1.7.2}$$

Пусть в области Г выполнены условия теоремы Коши. Точка $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется *точкой покоя (положением равновесия)* динамической системы (1.7.2), если $F(t, X^0) \equiv 0$. Если X^0 — точка покоя динамической системы (1.7.2), то $X(t) \equiv X^0$ — решение системы.

Пусть $X = \Psi(t)$ — некоторое решение системы (1.7.2) (невозмущенное движение), а $X = Y(t)$ — любое другое решение системы (возмущенное движение). Разность $Z(t) = Y(t) - \Psi(t)$ называется возмущением. Выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет возмущение.

Имеем

1) $Y(t) = Z(t) + \Psi(t)$;

2) $\dot{Y}(t) \equiv F(t, Y(t)), \qquad \dot{\Psi}(t) \equiv F(t, \Psi(t))$,

$$\dot{Z}(t) = \dot{Y}(t) - \dot{\Psi}(t) = F(t, Y(t)) - F(t, \Psi(t)) =$$

$$= F(t, Z(t) + \Psi(t))) - F(t, \Psi(t)) = G(t, Z(t)).$$

Таким образом, $\dot{Z} = G(t, Z)$ — *уравнение возмущенного движения*.

Невозмущенному движению $X = \Psi(t)$ соответствует тривиальное решение $Z \equiv 0$ системы возмущенного движения (положение равновесия).

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{X} = F(X). \tag{1.7.3}$$

Пусть $F(X)$ удовлетворяет условию $F(0) = 0$, тогда $X \equiv 0$ — положение равновесия системы (1.7.3). Ставится *задача устойчивости* тривиального решения *относительно начальных возмущений*. Введем обозначения: $X = \varphi(t; \xi)$

($\xi \in \mathbb{R}^n$) — это решение системы (1.7.3), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0;\xi) = \xi$. Считаем, что выполнено *условие продолжимости вправо*, т. е. найдется такая σ-окрестность начала координат в $\mathbb{R}^n$, что для любых начальных данных ξ из этой σ-окрестности решение $X = \varphi(t;\xi)$ определено для любого $t \geqslant 0$.

Тривиальное решение $X \equiv 0$ системы (1.7.3) называется *устойчивым по Ляпунову*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\delta \leqslant \varepsilon) \quad (\forall \xi : |\xi| < \delta \Rightarrow |\varphi(t;\xi)| < \varepsilon)$$

для всех $t \geqslant 0$. Это означает, что если в начальный момент времени точка находится достаточно близко к положению равновесия — тривиальному решению, то, двигаясь по траектории, и во все последующие моменты времени $t \geqslant 0$ точка будет оставаться вблизи этого положения равновесия.

В противном случае тривиальное решение *неустойчиво*.

Тривиальное решение $X \equiv 0$ системы (1.7.3) называется *асимптотически устойчивым*, если для него выполнены два условия:

1) если оно устойчиво по Ляпунову;

2) если $\exists \rho > 0$, $\forall \xi : |\xi| < \rho$ и имеет место

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t;\xi) = 0.$$

Замечание 1.7.1. Выполнение только второго условия не гарантирует устойчивость тривиального решения. Существуют примеры систем, тривиальное решение которых не является асимптотически устойчивым, поскольку не является устойчивым по Ляпунову, хотя второе условие в определении выполнено.

Простейшая модель рынка одного товара Вальраса — Эванса — Самуэльсона

Динамические модели экономики с учетом фактора непрерывного времени были предложены Л. Вальрасом (начало XX века), Г. Эвансом (1930) и П. Самуэльсоном (40-е годы XX века).

Предположение модели: рынок рассматривается автономно, без влияния внешних процессов. Основные категории рыночных отношений — спрос и предложение. Спрос и предложение зависят от многих факторов, главным из которых является *цена товара*. При моделировании предполагается, что *цена* P, *спрос* D, *предложение* S — непрерывные функции *времени* t и

$$D(P) = \alpha - aP, \qquad S(P) = -\beta + bP, \tag{1.7.4}$$

где α, a, β, b — постоянные коэффициенты, такие, что существует положительная *равновесная* цена P^*, при которой спрос равен предложению: $\alpha - aP^* = -\beta + bP^*$,

$$P^* = \frac{\alpha + \beta}{a + b}.$$

Скорость роста цены $\frac{dP}{dt}$ пропорциональна дефициту товара на рынке $D - S$ с коэффициентом пропорциональности $\lambda > 0$; λ — коэффициент скорости реакции покупателей на избыточный спрос или дефицит товара. С увеличением дефицита скорость роста цены увеличивается.

Получаем линейное ОДУ

$$\frac{dP}{dt} = \lambda(D - S). \tag{1.7.5}$$

Подставим выражения $D(P) = \alpha - aP$, $S(P) = -\beta + bP$ в уравнение (1.7.5) и получим

$$\frac{dP}{dt} = \lambda(\alpha + \beta) - \lambda(a + b)P. \tag{1.7.6}$$

Равновесная цена P^* находится из равенства

$$0 = \lambda(\alpha + \beta) - \lambda(a + b)P^*. \tag{1.7.7}$$

Вычтем из (1.7.6) уравнение (1.7.7):

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda(a + b)(P(t) - P^*). \tag{1.7.8}$$

Обозначим *отклонение цены от равновесного значения*:

$$R(t) = P(t) - P^*.$$

Тогда

$$\frac{dR}{dt} = -\lambda(a + b)R(t). \tag{1.7.9}$$

Уравнение имеет следующее решение:

$$R(t) = R_0 e^{-\lambda(a+b)t},$$

где R_0 – начальное отклонение цены от равновесной цены P^*.

Отклонение от равновесной цены изменяется по экспоненциальному закону. В зависимости от знака величины $-\lambda(a+b)$ функция $R(t)$ при $t \to +\infty$ либо приближается к нулю, либо стремится к бесконечности. Решения отражают динамику двух качественно разных рынков: при $\lambda(a + b) > 0$ — *асимптотически устойчивого рынка*, при $\lambda(a + b) < 0$ — *неустойчивого рынка*. Проверьте это самостоятельно, пользуясь соответствующими определениями. В этой модели не возникают колебания цены.

Исследование на устойчивость тривиального решения линейных систем ОДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему

$$\dot{X} = AX. \tag{1.7.10}$$

Теорема 1.7.1. *Для того чтобы тривиальное решение системы* (1.7.10) *было асимптотически устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$Re\,\lambda < 0$$

для всех корней λ характеристического уравнения матрицы A.

Теорема 1.7.2. *Для того чтобы тривиальное решение системы* (1.7.10) *было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы для всех корней λ характеристического уравнения матрицы A выполнялось неравенство*

$$Re\,\lambda \leqslant 0$$

и, кроме того, чтобы тем λ, для которых $Re\,\lambda = 0$, отвечали серии длины 1.

Пример 1.7.1. Исследуем на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

Решение. По теоремам 1.7.1, 1.7.2 достаточно изучить корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad (\lambda-2)^2+1=0.$$

В данном случае $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ — комплексно сопряженные корни с положительной вещественной частью: $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} = 2 > 0$. Следовательно, тривиальное решение системы неустойчиво.

Пример 1.7.2. Выясним, при каких a, b, c тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = -bx + cy \end{cases}$$

асимптотически устойчиво.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ -b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac + b^2 = 0,$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+c)^2}{4} - ac - b^2}.$$

Тогда $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} < 0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a + c < 0, \\ ac + b^2 > 0. \end{cases} \qquad \square$$

Глава 2
Разностные уравнения

Разностным (или рекуррентным) уравнением называют уравнение относительно неизвестной последовательности. Разностные уравнения часто используются в моделях динамики с дискретным временем и для приближенного решения дифференциальных уравнений.

В экономике к процессам с дискретным временем относятся ежедневные изменения курса валюты, стоимости некоторых ценных бумаг, величины банковских вкладов; ежемесячный расчет зарплаты и процентов по вкладам; ежеквартальные, ежегодные статистические данные о других микроэкономических и макроэкономических показателях.

2.1. Основные определения и примеры

Разностным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$x(t+n) = F(t,\, x(t),\, x(t+1),\, \ldots,\, x(t+n-1)), \qquad (2.1.1)$$

где $t \in \mathbb{N}$, $F : \mathbb{N} \times X^n \longrightarrow X$ — заданная функция, $X \subseteq \mathbb{R}$.

Решением разностного уравнения называется всякая функция $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$, для которой

$$\varphi(t+n) = F(t,\, \varphi(t),\, \varphi(t+1),\, \ldots,\, \varphi(t+n-1))$$

при всех $t \in \mathbb{N}$.

Замечательным свойством рекуррентного уравнения (2.1.1) является то, что оно само задает алгоритм построения решения. А именно, имея n начальных условий

$x(1), x(2), \ldots, x(n)$, по формуле (2.1.1) находим

$$x(n+1) = F(1,\, x(1),\, x(2),\, \ldots,\, x(n))$$

и далее по значениям $x(2)$, $x(3)$, ..., $x(n+1)$ определяем

$$x(n+2) = F(2,\, x(2),\, x(3),\, \ldots,\, x(n+1)).$$

На s-й итерации, зная предыдущие n значений $x(s-n+1), \ldots, x(s)$, вычисляем

$$x(s+1) = F(s-n+1,\, x(s-n+1),\, x(s-n+2),\, \ldots,\, x(s)).$$

Как видно, этот алгоритм будет работать и решение будет существовать, если область определения функции F согласована с ее областью значений $F: \mathbb{N}\times X^n \longrightarrow X$ и начальные значения $x(1), x(2), \ldots, x(n)$ принадлежат F, т. е. если на каждом шаге возможна описанная подстановка. Например, для уравнения $x(t+1) = -\sqrt{x(t)} - 1$ уже на первом шаге получим $x(2) < 0$, которое не входит в область определения функции, стоящей в правой части этого уравнения.

Замечание 2.1.1. Если в правую часть F уравнения (2.1.1) явно не входят аргументы $x(t)$, $x(t+1)$, ..., $x(t+p-1)$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, т. е. если уравнение имеет вид

$$x(t+n) = F(t,\, x(t+p),\, \ldots,\, x(t+n-1)), \qquad (2.1.2)$$

то заменой времени $\tau = t+p$ оно сводится к уравнению меньшего порядка

$$x(\tau+n-p) = F(t,\, x(\tau),\, \ldots,\, x(\tau+n-p-1)). \qquad (2.1.3)$$

При этом от p начальных значений $x(1)$, $x(2)$, ..., $x(p)$ для исходного уравнения (2.1.2) решение уравнения (2.1.3) зависеть не будет. Пусть $\varphi(\tau)$ ($\tau \in \mathbb{N}$) — решение уравнения (2.1.3) такое, что $\varphi(1) = x(p+1), \ldots, \varphi(n-p) = x(n)$, тогда не составляет труда выписать решение уравнения (2.1.2) в виде последовательности

$$x(1),\ x(2),\ \ldots,\ x(p),\ \varphi(1),\ \ldots, \varphi(n), \ldots \qquad (2.1.4)$$

В дальнейшем будем предполагать, что уравнение (2.1.1) уже приведено к виду (2.1.3). □

Как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, для разностных уравнений ставится *задача Коши.*

Теорема 2.1.1 (о существовании и единственности решения разностной задачи Коши). *Для любого набора начальных значений* $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in X^n$ *существует единственное решение уравнения* n*-го порядка* (2.1.1)*, удовлетворяющее начальным условиям* $\varphi(1) = u_1, \varphi(2) = u_2, \ldots, \varphi(n) = u_n$.

Приведем примеры разностных уравнений.

Пример 2.1.1. Арифметическая прогрессия задается разностным уравнением первого порядка. Действительно, пусть $x(t)$ — элемент арифметической прогрессии с номером t, а d — разность прогрессии. Тогда

$$x(t+1) = x(t) + d.$$

Пример 2.1.2. Геометрическая прогрессия со знаменателем q определяется уравнением

$$x(t+1) = q\,x(t).$$

Пример 2.1.3. Дана последовательность частичных сумм числового ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Обозначим частичную сумму ряда

$$x(t) = \sum_{i=1}^{t} a_i.$$

Тогда

$$x(t+1) = x(t) + a_{t+1}.$$

В частности, сумма

$$x(t) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + t^2$$

является решением разностного уравнения

$$x(t+1) = x(t) + (t+1)^2$$

с начальным условием $x(1) = 1^2 = 1$.

Пример 2.1.4. Рост процентного вклада задается разностным уравнением первого порядка. Пусть $x(t)$ — величина вклада после t месяцев; p — месячная процентная ставка, $0 < p < 1$. Тогда

$$x(t+1) = (1+p)\,x(t).$$

Пример 2.1.5. Рост процентного вклада с регулярными взносами определяется по формуле

$$x(t+1) = (1+p)\,x(t) + R,$$

где R — величина ежемесячного взноса.

Пример 2.1.6. Величина долга по займу с регулярными выплатами определяется по формуле

$$x(t+1) = (1+p)\,x(t) - R,$$

где R — размер выплат.

Пример 2.1.7. Последовательность Фибоначчи

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \ldots,$$

в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел, удовлетворяет разностному уравнению второго порядка

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t)$$

и начальным условиям $x(1) = 1$, $x(2) = 1$.

Пример 2.1.8. Разностные уравнения также возникают в процессе приближенного решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2.1.5}$$

аналитическое решение которого в общем случае неизвестно. По определению производной

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Следовательно, приближенно при малых h можно заменить производную отношением разности значений функции к разности значений аргумента:

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Поэтому исходное дифференциальное уравнение можно приблизить уравнением

$$x(t+h) = x(t) + h\,f(t, x(t))$$

с малым h. Затем на оси времени выделим последовательность точек, называемую *сеткой*: зададим t_0 — начальный момент времени и зафиксируем $h > 0$ — *шаг сетки*. Далее рассмотрим дискретные значения времени — *узлы сетки*

$$t_k = t_0 + k \cdot h, \qquad \text{где} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $y(k)$ ($k \in \mathbb{N}$) — искомая функция, определенная на множестве узлов сетки. Рассмотрим относительно $y(k)$ уравнение

$$y(k+1) = y(k) + h\,f(t_0 + k\,h,\, y(k)). \tag{2.1.6}$$

Это пример разностного уравнения *первого порядка*. Таким образом, замена производной в исходном уравнении отношением разности значений функции к разности значений аргумента приводит к разностному уравнению. Приближенный метод решения ОДУ при помощи разностного уравнения (2.1.6) называется *методом Эйлера*. Если задано начальное значение $x(t_0) = y(0)$, то из уравнения (2.1.6) последовательно определим значения $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$,..., соответственно приближенно равные значениям $x(t_0 + h)$, $x(t_0 + 2h)$, $x(t_0 + 3h)$, ... решения задачи Коши для уравнения (2.1.5) в узлах сетки.

Пример 2.1.9 (модель рыночного регулирования цены). Примем обозначения: $P(t)$ — цена товара; $D(t)$ — величина спроса на товар; $S(t)$ — величина предложения товара в период t.

Предположения:

1) Функция спроса линейно зависит от текущей цены товара:

$$D(t) = \alpha + A \cdot P(t),$$

где $A < 0$ (спрос уменьшается с ростом цены); α — постоянные параметры.

2) Функция предложения линейно зависит от цены товара за предыдущий период:

$$S(t) = \beta + B \cdot P(t-1),$$

где $B > 0$; β — постоянные параметры (предложение сегодня складывается на основе вчерашних цен).

3) Цена каждого периода устанавливается в условиях равенства спроса и предложения:

$$D(t) = S(t).$$

4) Известна начальная цена $P(0)$.

Отсюда

$$\alpha + A \cdot P(t) = \beta + B \cdot P(t-1),$$

или

$$P(t) = \frac{B}{A} P(t-1) + \frac{\beta - \alpha}{A}.$$

Это линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами.

Обратимся к графической интерпретации процесса рыночного регулирования цены. В системе координат (P, Q) строят прямые спроса $D = \alpha + A \cdot P$ и предложения $S = \beta + B \cdot P$. Точка пересечения этих прямых соответствует положению равновесия на рынке — равновесной цене P^*. Отметим на горизонтальной оси P точку $P(0)$, соответствующую начальной цене. Отвечая на данный уровень цены, поставщики предложат товар в количестве $S(P(0))$, это точка пересечения вертикальной прямой $P = P(0)$ с графиком функции $S(P)$. По условию величина спроса принимает то же значение за счет выбора подходящей цены $P(1)$, т. е. $D(P(1)) = S(P(0))$. Далее по найденному значению $P(1)$ находим $S(P(1))$, проводя прямую $P = P(1)$ до пересечения с графиком $S(P)$. Находим новую установившуюся цену $P(2)$ из равенства $D(P(2)) = S(P(1))$. Таким образом, получается числовая последовательность $P(t)$. В зависимости от значений A и B угловых коэффициентов прямых $D(P)$ и $S(P)$ возможны три случая. Если $\left|\frac{B}{A}\right| < 1$, то последовательность $P(t)$ сходится к точке равновесия, т. е.

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = P^*.$$

В случае $\left|\frac{B}{A}\right| > 1$ последовательность $P(t)$ расходится. Колебания цены увеличиваются с каждым новым периодом. Наконец, в случае $\left|\frac{B}{A}\right| = 1$ цена меняется циклически (повторяется через каждые два периода).

2.2. Линейные разностные уравнения

Линейным разностным уравнением n-го порядка с переменными коэффициентами называется уравнение

$$x(t+n) + a_1(t)\, x(t+n-1) + \ldots + a_n(t)\, x(t) = b(t), \qquad (2.2.1)$$

где $a_1(t), \ldots, a_n(t)$, $b(t)$ — некоторые функции от номера t, $t \in \mathbb{N}$. В соответствии с замечанием 2.1.1 полагаем $a_n(t) \neq 0$ для всех t. Если $b(t) \underset{t \in \mathbb{N}}{\equiv} 0$, то уравнение называется *линейным однородным.*

Рассмотрим сначала линейное разностное однородное уравнение первого порядка

$$x(t+1) + a_1(t)x(t) = 0. \qquad (2.2.2)$$

Примем теперь, что $t \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для решения уравнения (2.2.2) произведем последовательно подстановки, считая, что задан $x(0)$. Имеем

$$x(1) = -a_1(0)x(0),$$

$$x(2) = -a_1(1)x(1) = a_1(0)a_1(1)x(0),$$

наконец, получим

$$x(t) = (-1)^t a_1(0)a_1(1)a_1(2)\dots a_1(t-1)x(0).$$

Далее, полагая, что $x(0) = C$, и применяя обозначения

$$A(0) = 1, \quad A(t) = (-1)^t \prod_{j=0}^{t-1} a_1(j), \quad t \in \mathbb{N},$$

находим формулу, описывающую все решения уравнения (2.2.2):

$$x(t) = CA(t). \tag{2.2.3}$$

Это формула общего решения однородного уравнения. Заметим, что формула (2.2.3) в общем случае содержит произведения с увеличивающимся числом сомножителей. Линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка

$$x(t+1) + a_1(t)x(t) = b(t) \tag{2.2.4}$$

решим методом вариации произвольной постоянной. Будем искать его решение в том же виде (2.2.4), что и решение соответствующего линейного однородного уравнения (2.2.2), но будем считать C не произвольной постоянной, а некоторой неизвестной функцией $C(t)$, $t \in \mathbb{N}_0$. Итак, решение ищем в виде

$$x(t) = C(t)A(t),$$

где функцию $C(t)$ находим подстановкой в уравнение (2.2.4). Тогда

$$C(t+1)\,A(t+1) + a_1(t)C(t)A(t) = b(t).$$

Поскольку

$$A(t+1) = -a_1(t)\,A(t),$$

получаем

$$C(t+1)\,A(t+1) - C(t)\,A(t+1) = b(t),$$

$$C(t+1) = C(t) + \frac{b(t)}{A(t+1)}.$$

Напомним, что в силу определения уравнения (2.2.4) $A(t+1) \neq 0$.

Снова производя последовательные подстановки, получим

$$C(t) = C(0) + \sum_{j=0}^{t-1} \frac{b(j)}{A(j+1)}.$$

Полагая, что $C(0) = D$ (D – произвольная постоянная), и подставляя $C(t)$ в (2.2.4), находим общее решение исходного неоднородного уравнения

$$x(t) = \left[D + \sum_{j=0}^{t-1} \frac{b(j)}{A(j+1)}\right] A(t).$$

Заметим, что, как и в случае линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, общее решение линейного неоднородного разностного уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего линейного однородного уравнения (2.2.3) и частного решения данного неоднородного уравнения.

Пример 2.2.1 ([6]). Решим уравнение

$$x(t) - \left(\frac{t+2}{t+1}\right)^2 x(t) = \frac{2t+4}{t+3}.$$

Решение. Положим $A(0) = 1$, вычислим при $t \in \mathbb{N}$

$$A(t) = (-1)^t \prod_{j=0}^{t-1} \left(\frac{j+2}{j+1}\right)^2 = (t+1)^2,$$

$$\sum_{j=0}^{t-1} \frac{b(j)}{A(j+1)} = 2\sum_{j=0}^{t-1} \frac{j+2}{(j+3)(j+2)^2} =$$

$$= 2\sum_{j=0}^{t-1} \frac{1}{(j+3)(j+2)} = 2\sum_{j=0}^{t-1} \left(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{j+3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(t+2)}\right) = \frac{t}{t+2}.$$

Общее решение имеет вид

$$x(t) = \left(D + \frac{t}{t+2}\right)(t+1)^2, \qquad (2.2.5)$$

где D — произвольная постоянная. Отметим, что в рассмотренном примере удалось записать общее решение в простом виде: формула (2.2.5) не содержит произведения с увеличивающимся числом сомножителей. □

Обратимся к линейному уравнению n-го порядка. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.2.1 (принцип суперпозиции). *Если в уравнении* (2.2.1) *правая часть* $b(t)$ *имеет вид*

$$b(t) = \alpha_1 b_1(t) + \alpha_2 b_2(t),$$

где α_1 *и* α_2 *— постоянные числа, и известно, что* $\varphi_1(t)$ *есть частное решение уравнения* (2.2.1) *с правой частью* $b_1(t)$, *а* $\varphi_2(t)$ *— частное решение уравнения* (2.2.1) *с правой частью* $b_2(t)$, *то* $\varphi(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t)$ *является частным решением исходного уравнения* (2.2.1).

Теорема 2.2.2 (о структуре множества решений линейного однородного разностного уравнения).

1. Множество решений линейного однородного уравнения (2.2.1)

$$x(t+n) + a_1(t)\,x(t+n-1) + \ldots + a_n(t)\,x(t) = 0,$$

$a_n(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{N}$, *является линейным пространством размерности* n.

2. Всякая система решений $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ *уравнения* (2.2.1) *с линейно независимыми начальными значениями*

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(1) \\ \varphi_1(2) \\ \vdots \\ \varphi_1(n) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi_2(1) \\ \varphi_2(2) \\ \vdots \\ \varphi_2(n) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi_n(1) \\ \varphi_n(2) \\ \vdots \\ \varphi_n(n) \end{pmatrix}$$

образует фундаментальную систему решений — базис пространства решений.

Теорема 2.2.3 (о структуре множества решений линейного неоднородного разностного уравнения). *Пусть* $x = x_{част}(t)$ *— некоторое решение неоднородного уравнения (2.2.1), а* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ *— фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения. Тогда любое решение* $\varphi(t)$ *уравнения может быть единственным способом представлено в виде*

$$\varphi(t) = x_{част}(t) + \lambda_1\varphi_1(t) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(t),$$

где $C_1, \ldots, C_n$ *— постоянные, определяемые из начальных условий.* □

Если в уравнении (2.2.1) коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ не зависят от t, то такое уравнение называется линейным разностным *с постоянными коэффициентами.* Рассмотрим линейное однородное разностное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$x(t+n) + a_1\, x(t+n-1) + \ldots + a_n\, x(t) = 0, \quad a_n \neq 0, \tag{2.2.6}$$

и будем искать его ненулевое решение в виде $x(t) = \lambda^t$, $\lambda \neq 0$, подставляя в уравнение (2.2.6). Функция такого вида будет являться его решением тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad a_n \neq 0, \tag{2.2.7}$$

называемому *характеристическим* для уравнения (2.2.6).

Теорема 2.2.4 (о построении фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения по корням характеристического уравнения). *Если каждому вещественному корню λ характеристического уравнения* (2.2.7) *кратности k поставить в соответствие функции*

$$\lambda^t, \quad t\,\lambda^t, \qquad\qquad t^{k-1}\lambda^t,$$

а каждому комплексному корню $\lambda = r(\cos\omega + i\sin\omega)$ кратности k и сопряженному корню $\overline{\lambda} = r(\cos\omega - i\sin\omega)$ поставить в соответствие функции

$$\begin{array}{llll} r^t\cos\omega t, & t\,r^t\cos\omega t, & \ldots, & t^{k-1}r^t\cos\omega t, \\ r^t\sin\omega t, & t\,r^t\sin\omega t, & \ldots, & t^{k-1}r^t\sin\omega t, \end{array}$$

то объединение всех таких функций будет одной из фундаментальных систем решений уравнения (2.2.6).

Замечание 2.2.1. Теорема 2.2.4 позволяет записать общее решение уравнения (2.2.6) в виде, не содержащем увеличивающегося числа слагаемых или сомножителей, при условии, что удается найти все корни характеристического уравнения (2.2.7).

Пример 2.2.2. Решим уравнение

$$x(t+2) - 4x(t+1) + 3x(t) = 0.$$

Решение. Это линейное однородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ — различные вещественные числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 3$, фундаментальную систему решений составляют последовательности

$$\varphi_1(t) = 1^t \equiv 1, \qquad \varphi_2(t) = 3^t,$$

и общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1 + C_2\, 3^t.$$

Пример 2.2.3. Уравнение для геометрической прогрессии имеет вид

$$x(t+1) - q\, x(t) = 0.$$

У характеристического уравнения $\lambda - q = 0$ единственный корень $\lambda = q$. Фундаментальная система решений и общее решение соответственно имеют вид

$$\varphi_1(t) = q^t, \quad x(t) = C\, q^t.$$

При начальном условии $x(1) = a_1$ получим

$$a_1 = C\, q, \qquad C = \frac{a_1}{q}.$$

Формула общего члена геометрической прогрессии имеет вид $x(t) = a_1\, q^{t-1}$.

Пример 2.2.4. Решим уравнение

$$x(t+2) - 2x(t+1) + 2x(t) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ имеет комплексные корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, для одного из них $r = \sqrt{2}$, $\omega = \dfrac{\pi}{4}$.

Согласно теореме 2.2.4 находим фундаментальную систему решений

$$\varphi_1(t) = (\sqrt{2})^t \cos\frac{\pi}{4}\,t, \qquad \varphi_2(t) = (\sqrt{2})^t \sin\frac{\pi}{4}\,t$$

и общее решение

$$x(t) = C_1\,(\sqrt{2})^t \cos\frac{\pi}{4}\,t + C_2\,(\sqrt{2})^t \sin\frac{\pi}{4}\,t.$$

Пример 2.2.5. Решим уравнение

$$x(t+2) + 6x(t+1) + 9x(t) = 0.$$

Решение. Здесь характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ имеет корень $\lambda = -3$ кратности 2. Выпишем фундаментальную систему решений

$$\varphi_1(t) = (-3)^t, \qquad \varphi_2(t) = t\,(-3)^t$$

и общее решение

$$x(t) = C_1\,(-3)^t + C_2\,t\,(-3)^t.$$

Пример 2.2.6. Числа Фибоначчи определяются соотношениями

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \qquad x(1) = 1, \quad x(2) = 1.$$

По корням характеристического уравнения $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

находим общее решение:

$$x(t) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t. \qquad (2.2.8)$$

Чтобы выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(1) = 1$, $x(2) = 1$, определим подходящие значения постоянных C_1, C_2 из системы

$$\begin{cases} 1 = C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} & + \quad C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ 1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 & + \quad C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2. \end{cases}$$

Получаем

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \qquad (2.2.9)$$

Замечание 2.2.2. Преимущество явной формулы общего решения (2.2.8) по сравнению с самим рекуррентным уравнением, задающим последовательность, в том, что t-й член последовательности определяется сразу по этой формуле, если из начальных условий найдены постоянные C_1, C_2. Отметим замечательный факт относительно решения (2.2.8), (2.2.9): сложная конструкция с иррациональными числами задает натуральные числа.

Пример 2.2.7. Найдем решение уравнения $x(t+4) = x(t+2)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(1) = u_1, \quad x(2) = u_2, \quad x(3) = u_3, \quad x(4) = u_4.$$

Решение. Прежде всего отметим, что в данном уравнении коэффициенты при $x(t+1)$, $x(t)$ равны нулю: $a_3 = 0$

и $a_4 = 0$ соответственно (см. (2.2.1)). Согласно замечанию 2.1.1 заменой времени $\tau = t + 2$ придем к уравнению второго порядка $x(\tau + 2) = x(\tau)$ с характеристическим уравнением $\lambda^2 = 1$. Следовательно, его общее решение дается формулой $x(\tau) = C_1 \cdot 1^\tau + C_2 \cdot (-1)^\tau$. Определим постоянные C_1, C_2 из начальных условий $x(1) = u_3$, $x(2) = u_4$:

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = u_3, \\ C_1 + C_2 = u_4. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = \frac{u_3+u_4}{2}$, $C_2 = \frac{u_4-u_3}{2}$. Выпишем решение исходной задачи Коши в виде последовательности (2.1.4):

$$u_1,\, u_2,\, \left\{\frac{u_3 + u_4}{2} \cdot 1^t + \frac{u_4 - u_3}{2} \cdot (-1)^t\right\}_{t=3}^{\infty}.$$

Теорема 2.2.5 (о построении частного решения линейного неоднородного уравнения с правой частью специального вида). *Если правая часть линейного неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид*

$$b(t) = \rho^t \left(P(t)\cos\omega t + Q(t)\sin\omega t\right),$$

где $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены степени не больше m, то при $\omega \neq 0$ существует решение вида

$$x_{част}(t) = t^s \rho^t \left(R_m(t)\cos\omega t + T_m(t)\sin\omega t\right), \tag{2.2.10}$$

где $R_m(t)$ и $T_m(t)$ — многочлены степени не больше m, а s — кратность корня $\lambda = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$ в характеристическом уравнении (если такого корня нет, то $s = 0$).

При $\omega = 0$, т.е. при

$$b(t) = \rho^t P_m(t),$$

существует решение вида

$$x_{част}(t) = t^s \rho^t R_m(t), \tag{2.2.11}$$

где $R_m(t)$ — многочлен степени не больше m, а s — кратность корня (если такого корня нет, то $s = 0$).

Замечание 2.2.3. Аналогично обыкновенным дифференциальным уравнениям соответствующего типа коэффициенты многочленов $R_m(t)$ и $T_m(t)$ однозначно определяются путем подстановки решения в виде (2.2.10) или (2.2.11) в исходное уравнение.

Пример 2.2.8 (модель делового цикла Самуэльсона – Хикса). Модель базируется на следующих предположениях:

1) Величина потребления в любой период времени является линейной функцией национального дохода за предыдущий период:

$$C(t) = aY(t-1) + b, \qquad \text{где} \qquad 0 < a < 1, \quad b > 0$$

(число a — коэффициент склонности к потреблению).

2) Текущий объем инвестиций пропорционален с некоторым коэффициентом приращению национального дохода за предыдущий период:

$$I(t) = l(Y(t-1) - Y(t-2)),$$

где l коэффициент акселерации. Допускается $I(t) < 0$ (продумайте экономический смысл этого допущения).

3) Выполняется закон сохранения

$$Y(t) = C(t) + I(t).$$

В результате получается

$$Y(t) = aY(t-1) + b + l(Y(t-1) - Y(t-2)),$$

или

$$Y(t) = (a+l)\,Y(t-1) - lY(t-2) + b.$$

Заменяя нумерацию моментов времени $\tau = t - 2$, получаем линейное неоднородное разностное уравнение второго порядка с квазимногочленом $b(t) \equiv b$:

$$Y(\tau+2) = (a+l)\,Y(\tau+1) - lY(\tau) + b.$$

При выполнении условия $(a+l)^2 - 4l < 0$ соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - (a+l)\,\lambda + l = 0$ будет иметь пару комплексно сопряженных корней. Тем самым при определенных начальных условиях $Y(1)$, $Y(2)$ решение будет содержать слагаемые с периодическими функциями — синусами и (или) косинусами. Таким образом, эта модель описывает волнообразный характер развития экономики — чередование подъемов и спадов конъюнктуры.

2.3. Устойчивость положения равновесия разностного уравнения

Положением равновесия для разностного уравнения называется решение $\varphi(t) \underset{t\in\mathbb{N}}{\equiv} x_0$.

Решение $\varphi(t)$ разностного уравнения n-го порядка называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех решений $\psi(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned}
&|\psi(1) - \varphi(1)| < \delta,\\
&|\psi(2) - \varphi(2)| < \delta,\\
&\ldots\\
&|\psi(n) - \varphi(n)| < \delta,
\end{aligned}$$

выполняется неравенство

$$|\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

при всех $t \in \mathbb{N}$.

Решение называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и дополнительно

$$\lim_{t\to+\infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0.$$

Теорема 2.3.1 (критерий устойчивости решений линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами). *Все решения уравнения*

$$x(t+n) + a_1 x(t+n-1) + \ldots + a_n x(t) = b(t)$$

независимо от $b(t)$:

1) асимптотически устойчивы, если для всех корней λ характеристического уравнения выполняется неравенство

$$|\lambda| < 1;$$

2) устойчивы, но не асимптотически при выполнении неравенства

$$|\lambda| \leqslant 1$$

для всех корней, причем корни $|\lambda| = 1$ имеют кратность 1;

3) неустойчивы во всех остальных случаях.

Сформулируем достаточное условие существования устойчивого положения равновесия нелинейного уравнения

$$x(t+1) = F(x(t)).$$

Теорема 2.3.2. *Если функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема k раз для $k \geqslant 1$ и*

$$|F'(x)| \leqslant q < 1$$

при всех $x \in \mathbb{R}$, то уравнение $x(t+1) = F(x(t))$ имеет единственное положение равновесия

$$x^* = F(x^*),$$

причем

$$x^* = \lim_{t\to+\infty} x(t)$$

независимо от $x(0)$ *и*

$$|x(t) - x^*| < q^t |x(0) - x^*|.$$

Список библиографических ссылок

1. *Шолохович Ф. А.* Высшая математика в кратком изложении : учебник для вузов. Екатеринбург ; Москва, 2008.

2. *Лобанов С. Г.* Дифференциальные и разностные уравнения : конспект лекций. М., 2001.

3. Высшая математика для экономистов : учеб. пособие для вузов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М., 1997.

4. *Симонов П. М.* Экономико–математическое моделирование : учеб. пособие : в 2 ч. Пермь, 2009.

5. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 1992.

6. *Романко В. К.* Разностные уравнения : учеб. пособие. М., 2006.

7. *Данилин А. Р.* Степенные ряды и обыкновенные дифференциальные уравнения : метод. разработка. Екатеринбург, 1995.

8. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. 3-е изд., стер. СПб., 2003.

9. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие для вузов. М., 1984.

10. *Шолохович Ф. А.* Лекции по дифференциальным уравнениям : (университетский курс). Екатеринбург, 2005.

11. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М., 1950.

12. *Матвеев Н. М.* Дифференциальные уравнения. М., 1988.

13. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1962. Т.2.

Вопросы для подготовки к экзамену и зачету

1. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Основные понятия.

2. Задача и теорема Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

3. Уравнение с разделяющимися переменными.

4. Однородное уравнение.

5. Линейное уравнение первого порядка. Метод вариации постоянной.

6. Уравнение Бернулли.

7. Примеры дифференциальных уравнений, описывающих динамику некоторых экономических, социальных и биологических систем: модель роста населения, модель эффективности рекламы, модель естественного роста (при условии ненасыщаемости рынка), модель роста в условиях конкурентного рынка, нелинейная модель экономического роста для ВВП.

8. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

9. Дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

10. Теорема о структуре множества решений линейного однородного уравнения n-го порядка.

11. Линейное неоднородное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами. Принцип суперпозиции.

12. Теорема о структуре множества решений линейного неоднородного уравнения n-го порядка.

13. Метод вариации постоянных для линейного неоднородного уравнения второго порядка.

14. Комплексные числа. Определение. Вещественная и мнимая часть. Геометрическая интерпретация. Модуль и аргумент комплексного числа. Сложение, умножение, деление. Тригонометрическая и показательная формы записи. Формулы Эйлера.

15. Метод решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

16. Построение фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами по корням характеристического уравнения.

17. Построение частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами в случае, когда правая часть является действительным квазимногочленом.

18. Уравнение гармонических колебаний. Колебания с вынуждающей периодической силой.

19. Система дифференциальных уравнений в нормальной форме, ее решение. Векторная форма системы.

20. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы уравнений.

21. Модель Лотки – Вольтерра системы “хищник – жертва”.

22. Сведение дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме.

23. Линейные системы дифференциальных уравнений. Векторная форма записи. Принцип суперпозиции.

24. Теорема о структуре множества решений линейной однородной системы.

25. Теорема о структуре множества решений линейной неоднородной системы.

26. Построение фундаментальной системы решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами по корням характеристического уравнения (случаи простого корня характеристического уравнения, кратного корня характеристического уравнения, комплексно сопряженных корней — выделение действительнозначных решений).

27. Динамическая интерпретация системы. Фазовое пространство. Уравнение возмущенного движения.

28. Устойчивость по Ляпунову. Определения устойчивости и асимптотической устойчивости.

29. Теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости тривиального решения линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

30. Простейшая модель рынка одного товара Вальраса – Эванса – Самуэльсона.

31. Разностные (рекуррентные) уравнения. Примеры разностных уравнений.

32. Методы решения линейных разностных уравнений.

33. Критерий устойчивости решений линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Задания для практических занятий

Решить уравнения первого порядка. В задачах, где указаны начальные условия, найти также частное решенис, удовлетворяющее этим условиям.

1. $y' = -\dfrac{y+1}{x+2}$.

2. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$.

3. $\operatorname{tg} y\, dx - \operatorname{ctg} x\, dy = 0$.

4. $y' = e^{x-y}$.

5. $x^2 y' + y = 0$.

6. $y y' + x = 0$.

7. $(x^2-1)\, y' + 2xy^2 = 0, \qquad y(0) = 1$.

8. $2y'\sqrt{x} = y, \qquad y(4) = 1$.

9. $(1+e^x)y\, y' = e^x, \qquad y(0) = 1$.

10. $y' = (2y+1) \operatorname{ctg} x, \qquad y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

11. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2, \qquad y(\frac{\pi}{3}) = 0$.

12. $y' = 5\sqrt[5]{y^2}, \qquad y(2) = 0$.

13. $x\, y' + y = y^2, \qquad y(1) = \frac{1}{2}$.

14. $y' \sin x = y \ln y, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

15. $x^2 y' = xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}$.

16. $(x+2y)dx - xdy = 0$.

17. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

18. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0.$

19. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2).$

20. $x y' - y = x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}.$

21. $x y' = y \cos \ln \dfrac{y}{x}.$

22. $y' + 3y = e^{2x}.$

23. $y' = x + y.$

24. $y' + x^2y = x^2.$

25. $y' + \dfrac{2}{x} y = x^2.$

26. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$

27. $y' + y \cos x = \sin 2x.$

28. $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x.$

29. $y' - \dfrac{3}{x} y = x.$

30. $x^2y' + xy + 1 = 0.$

31. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}.$

32. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x.$

33. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1.$

34. $y' + y \sin x = -\sin x, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 0.$

35. $xy' - y = x^2 \cos x, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 0.$

36. $xy^2y' = x^2 + y^3.$

37. $y' - 2xy = 3x^3y^2.$

38. $xy' + y = -xy^2$.

39. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.

40. $y' = x^3 y^3 - xy$.

41. $xy' + y = y^2 \ln x$.

42. $y' + xy = xy^3$.

Решить уравнения, допускающие понижение порядка.

43. $x^2 y'' = y'^2$.

44. $y'^2 + 2y\,y'' = 0$.

45. $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

46. $y\,y'' = (y')^2$.

47. $y\,y'' = 2(y')^2$.

48. $y\,y'' = -(y')^2$.

49. $y\,y'' + (y')^2 = 1$.

50. $y'' = 2\,\dfrac{y'}{x}$.

51. $y'' = 2\,\dfrac{y'}{x} + x^2$.

52. $y'' = -\dfrac{y'}{x}$.

53. $y'' = -\dfrac{y'}{2x}$.

54. $y'' = \dfrac{y'}{x} - x$.

Составить дифференциальное уравнение по его характеристическому уравнению.

55. $\lambda^2 + 16 = 0$.

56. $\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$.

57. $\lambda^2 - 3\lambda = 0$.

Найти общее решение уравнений.

58. $y'' + y' - 2y = 0$.

59. $y'' + 4y' + 3y = 0$.

60. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

61. $y'' + 4y = 0$.

62. $y'' - 3y' = 0$.

63. $y'' - 2y' + y = 0$.

64. $y'' + 2y' + 10y = 0$.

65. $y^{IV} + 64y = 0$.

66. $y^{IV} + 4y = 0$.

67. $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$.

68. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

69. $y'' - 9y = e^{3x}\sin x$.

70. $y'' + y = \sin x$.

71. $y'' - y = 2e^{x} - x^2$.

72. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$.

73. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

74. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(x + \cos x)$.

75. $y'' - 2y' + 5y = 5\sin 2x$.

76. $y'' + 4y' + 5y = -2e^{-2x}\cos x$.

77. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$.

78. $y''' - y' = x^2 + x$.

79. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$.

80. $y^{(4)} + y''' = x$.

Выписать вид частного решения с неопределенными коэффициентами.

81. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x}\sin 5x$.

82. $y'' + y = \sin x + x\cos x$.

83. $y'' - 2y' + y = 3e^x + x\cos 2x$.

84. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x}\cos 5x$.

85. $y'' - 6y' + 13y = x^2e^{3x} - 3\cos 2x$.

86. $y'' + 4y = \cos 2x - \cos 4x$.

87. $y'' - 8y' + 17y = x^2e^{4x} - 3xe^{4x}\cos x$.

88. $y'' - 9y = e^{3x}(x^2 + \sin 3x)$.

89. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(2 - \sin 2x)$.

Решить задачу Коши для уравнений второго порядка.

90. $y'' + 5y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2$.

91. $y'' + 4y' + 8y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2$.

92. $y'' + 4y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3$.

93. $y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = -1.$

94. $y'' - 4y' + 3y = 0, \qquad y(0) = -1, \qquad y'(0) = 1.$

95. $y'' - 6y' + 9y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 1.$

96. $y'' + 6y' + 13y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -4.$

97. $y'' + 2y' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3.$

98. $y'' - 2y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1.$

99. $y'' - 8y' + 16y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -2.$

100. $y'' + 2y' - 3y = 16\,xe^x, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 1.$

101. $y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 1.$

Решить уравнения.

102. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}.$

103. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}.$

104. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x^2}.$

105. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}.$

Решить системы уравнений.

106. $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$

107. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

108. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$

109. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

110. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$

111. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + 4y. \end{cases}$

112. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3x - 2y. \end{cases}$

113. $\begin{cases} \dot{x} = -7x + y, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$

114. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

115. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y. \end{cases}$

116. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

117. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

118. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

119. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

120. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$

121. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

122. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{t}, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$

123. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$

124. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

Решить системы.

125. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases}$

126. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$

127. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$

128. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$

129. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x. \end{cases}$

130. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = y + 2z - x. \end{cases}$

Исследовать на устойчивость тривиальное решение систем.

131. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = 3x - 2y. \end{cases}$

132. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$

133. $\begin{cases} \dot{x} = -4y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

Решить линейные разностные уравнения первого порядка.

134. $x(t+1) - \dfrac{t+1}{t+2}\,x(t) = \dfrac{2}{t+2}$.

135. $x(t+1) - \dfrac{t+2}{t+1}\,x(t) = \dfrac{2}{t+3}$.

136. $x(t+1) - \dfrac{t+3}{t+2}\,x(t) = \dfrac{3}{t+4}$.

137. $x(t+1) - \dfrac{2t+1}{2t+3}\,x(t) = \dfrac{2t-1}{2t+3}$.

138. $x(t+1) - 2^t x(t) = 2^{\frac{t^2+3t}{2}}$.

139. $x(t+1) - \left(\frac{t+2}{t+1}\right)^2 x(t) = \frac{2(t+2)}{t+4}$.

140. $x(t+1) - \left(\frac{t+3}{t+2}\right)^2 x(t) = \frac{2(t+3)}{t+5}$.

141. $x(t+1) - \left(\frac{t+3}{t+2}\right)^2 x(t) = 2^t (t+3)^2$.

142. $x(t+1) - \left(\frac{t+3}{t+4}\right)^2 x(t) = \frac{1}{t+4}$.

143. $x(t+1) - \frac{t+3}{t+2} x(t) = \frac{2}{t+5}$.

144. $x(t+1) - \frac{t+2}{t+1} x(t) = \frac{2}{t+4}$.

145. $x(t+1) - (t+2)x(t) = (t+2)!$.

146. $x(t+1) - \left(\frac{t+3}{t+2}\right)^2 x(t) = \frac{3(t+3)}{t+4}$.

147. $x(t+1) - \left(\frac{t+2}{t+1}\right)^3 x(t) = \frac{2(t+3)^2}{t+3}$.

148. $x(t+1) - \left(\frac{t+3}{t+2}\right)^3 x(t) = \frac{3(t+3)^2}{t+4}$.

Решить линейные разностные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами.

149. $x(t+1) + 2x(t) = 3t^2 + 2t - 2$.

150. $x(t+1) + x(t) = 4t + 6$.

151. $x(t+1) - 2x(t) = 2t^2 + t - 7$.

152. $x(t+1) - x(t) = 4t + 1.$

153. $x(t+1) + 7x(t) = 11 \cdot 4^t.$

154. $x(t+1) - 5x(t) = 9 \cdot 2^t.$

155. $x(t+1) + 3x(t) = 3(2t-1)(-3)^t.$

156. $x(t+1) - 3x(t) = (t+2)3^{t+1}.$

157. $x(t+1) - 5x(t) = 4t \cdot 5^t.$

158. $x(t+1) + 5x(t) = (6t+5)5^t.$

159. $x(t+1) + x(t) = 2\sin t.$

160. $x(t+1) - x(t) = 2\cos t.$

161. $x(t+1) + 5x(t) = 6t + 7 \cdot 2^t.$

162. $x(t+1) + 6x(t) = 6 - 7t + 4(-2)^t.$

163. $x(t+1) - 5x(t) = 8t + 2 + 2 \cdot 3^t.$

164. $x(t+1) - 6x(t) = 6 - 5t - 9(-3)^t.$

Методом вариации постоянной решить следующие уравнения.

165. $x(t+1) - x(t) = \dfrac{1}{(3t+1)(3t+4)}.$

166. $x(t+1) - x(t) = \dfrac{1}{(4t+1)(4t+5)}.$

167. $x(t+1) - x(t) = \dfrac{1}{4t^2-1}.$

168. $x(t+1) - x(t) = \dfrac{(t+1)^2}{(2t+1)(2t+3)}.$

169. $x(t+1) - x(t) = \dfrac{1}{9t^2 - 3t - 2}.$

170. $x(t+1) - x(t) = \dfrac{1}{25t^2 + 5t - 6}.$

Решить разностную задачу Коши.

171. $x(t+1) - 4x(t) = (2t+2)3^t, \qquad x(1) = 0.$

172. $x(t+1) + 4x(t) = (t-1)(-3)^t, \qquad x(1) = 1.$

173. $x(t+1) - 3x(t) = (-7t+3)(-4)^t, \qquad x(1) = 1.$

174. $x(t+1) + 3x(t) = (7t+11)4^t, \qquad x(1) = 2.$

175. $x(t+1) - 6x(t) = (t+1)2^{t+2}, \qquad x(1) = 0.$

176. $x(t+1) + 6x(t) = (1-2t)(-2)^{t+1}, \qquad x(1) = 3.$

Решить линейные однородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами.

177. $x(t+2) + x(t+1) - 2x(t) = 0.$

178. $x(t+2) + 3x(t+1) + 2x(t) = 0.$

179. $x(t+2) + 5x(t+1) + 6x(t) = 0.$

180. $x(t+2) - x(t+1) - 2x(t) = 0.$

181. $x(t+2) + 14x(t+1) + 49x(t) = 0.$

182. $x(t+2) - 8x(t+1) + 16x(t) = 0.$

183. $x(t+2) - 2\sqrt{3}x(t+1) + 4x(t) = 0.$

184. $x(t+2) + 4x(t+1) + 8x(t) = 0.$

185. $x(t+2) - 6x(t+1) + 18x(t) = 0.$

186. $x(t+3) - x(t+2) - x(t+1) + x(t) = 0.$

187. $x(t+3)+6x(t+2)+11x(t+1)+6x(t)=0$.

Решить линейные неоднородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами.

188. $x(t+2)+2x(t+1)+2x(t)=1-5t$.

189. $x(t+2)-4x(t+1)+4x(t)=16(t+2)(-2)^t$.

190. $x(t+2)+3x(t+1)+2x(t)=(20t+7)3^t$.

191. $x(t+2)-6x(t+1)+18x(t)=13t-4$.

192. $x(t+2)-4x(t+1)+3x(t)=t\cdot 2^t$.

193. $x(t+2)-x(t)=\cos t$.

194. $x(t+2)+x(t)=\sin t+\sin(t+2)$.

195. $x(t+2)-x(t)=-\cos(t+2)$.

196. $x(t+2)-x(t+1)+x(t)=(7t+3)(-2)^t$.

197. $x(t+2)+2x(t+1)+x(t)=-(t+3)\,2^t$.

198. $x(t+2)-x(t+1)-2x(t)=6(-1)^t$.

199. $x(t+2)-2x(t+1)+4x(t)=-(7t+5)\,3^t$.

200. $x(t+2)-x(t)=8t+2$.

201. $x(t+2)+2x(t+1)-3x(t)=12(-3)^t$.

202. $x(t+2)-7x(t+1)+12x(t)=(15t+1)(-2)^t$.

203. $x(t+2)-2x(t+1)+x(t)=-8(2t+3)\,5^t$.

204. $x(t+2)-2x(t+1)+5x(t)=4(t+1)$.

205. $x(t+2)+6x(t+1)+10x(t)=(10t-3)(-1)^t$.

206. $x(t+2)-2x(t)=8(\sqrt{2})^t$.

207. $x(t+2) - 3x(t) = -6(\sqrt{3})^t$.

208. $x(t+2) + 4x(t) = 8(t+1)2^t$.

209. $x(t+2) - 4x(t) = 3t^2 - t$.

210. $x(t+2) + 3x(t) = 4t^2 + 2$.

211. $x(t+2) - x(t) = (3t+5)2^t - 3(-2)^t$.

212. $x(t+2) + x(t) = (5t+3)(-2)^t + 5 \cdot 2^t$.

213. $x(t+2) - x(t) = 4t - 6 + 8(-3)^t$.

214. $x(t+2) + x(t) = 2t^2 + 4t - 2 - 10 \cdot 3^t$.

215. $x(t+2) - 4x(t+1) + 5x(t) = 3t - 4 + 10(-1)^t$.

Найти положения равновесия разностных уравнений и исследовать их на устойчивость.

216. $x(t+2) + 5x(t+1) + 6x(t) = 12$.

217. $x(t+2) + 2x(t+1) + 5x(t) = -8$.

218. $x(t+2) + x(t+1) + \frac{1}{4}x(t) = 9$.

219. $x(t+2) + 4x(t+1) + 4x(t) = -9$.

220. $x(t+2) - 4x(t+1) + 5x(t) = 4$.

221. $x(t+2) - 6x(t+1) + 25x(t) = 20$.

222. $x(t+2) + \frac{3}{2}x(t+1) + \frac{1}{2}x(t) = -6$.

223. $x(t+2) + \frac{1}{2}x(t+1) - \frac{1}{2}x(t) = 3$.

224. $x(t+2) - x(t+1) + \frac{1}{2}x(t) = -2$.

Ответы к заданиям

1. $y = \frac{-x+C}{x+2}$. **2.** $\ln|x| - \sqrt{y^2+1} + C = 0$, $x = 0$. **3.** $\sin y = \frac{C}{\cos x}, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$ **4.** $y = \ln e^x + C$. **5.** $y = Ce^{\frac{1}{x}}$. **6.** $x^2 + y^2 = C$. **7.** $y(\ln|x^2-1| + C) = 1, y = 0; y(\ln(1-x^2)+1) = 1$. **8.** $y = Ce^{\sqrt{x}}$; $y = e^{\sqrt{x}-2}$. **9.** $y^2 = 2\ln(1+e^x) + C; y^2 = 2\ln(1+e^x) + 1 - 2\ln 2$. **10.** $y = C\sin^2 x - \frac{1}{2}$; $y = 2\sin^2 x - \frac{1}{2}$. **11.** $y = 2 + C\cos x; y = 2 - 4\cos x$. **12.** $\sqrt[5]{y^3} = 3x + C, y = 0; \sqrt[5]{y^3} = 3x + \sqrt[5]{2^3}$. **13.** $y = \frac{1}{1+Cx}, y = 0, y = 1; y = \frac{1}{1+x}$. **14.** $\ln y = C\frac{1-\cos x}{\sin x}$; $y = 1$. **15.** $e^{\frac{x}{y}} = \ln\frac{C}{|x|}$. **16.** $y = -x + Cx^2, x = 0$. **17.** $\ln(x^2+y^2) = C + 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. **18.** $x(y-x) = Cy, y = 0$. **19.** $x = \pm y\sqrt{\ln Cx}, y = 0$. **20.** $\sin\frac{y}{x} = Cx$. **21.** $\ln Cx = \operatorname{ctg}(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}), y = xe^{2\pi k}, k = 0, \pm 1, \ldots$. **22.** $y = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}$. **23.** $y = -1 - x + Ce^x$. **24.** $y = 1 + Ce^{-\frac{1}{3}x^3}$. **25.** $y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{C}{x^2}$. **26.** $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$. **27.** $y = 2\sin x - 2 + Ce^{-\sin x}$. **28.** $y = 1 + \frac{\ln(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x) + C}{\cos x}$. **29.** $y = -x^2 + Cx^3$. **30.** $xy = -\ln x + C$. **31.** $xy = (x^3 + C)e^{-x}$. **32.** $y = \sin x + C\cos x$. **33.** $x = (C - \cos y)\sin y$. **34.** $y = -1 + Ce^{\cos x}$, $y = -1 + e^{\cos x}$. **35.** $y = x\sin x + Cx$, $y = x\sin x - x$. **36.** $y = x^4\ln^2 Cx$, $y = 0$. **37.** $y = \frac{2}{3-3x^2+2Ce^{-x^2}}$, $y = 0$. **38.** $y = \frac{1}{x(\ln|x|+C)}$, $y = 0$. **39.** $\frac{1}{y^2} = (2x + C)e^{-x^2}$, $y = 0$. **40.** $\frac{1}{y^2} = 1 + x^2 + Ce^{x^2}$, $y = 0$. **41.** $y = \frac{1}{1+\ln x+Cx}$, $y = 0$. **42.** $\frac{1}{y^2} = 1 + Ce^{x^2}$, $y = 0$. **43.** $y = C$, $y = \frac{x^2}{2} + C$, $y = \frac{x}{C_1} - \frac{\ln|1+C_1x|}{C_1^2} + C_2$. **44.** $y^3 = (C_1x + C_2)^2$. **45.** $y = C_1 + C_2(x - e^{-x})$. **46.** $y = C_2e^{C_1x}$. **47.** $y = -\frac{1}{C_1x+C_2}$. **48.** $y = C_1x + C_2$. **49.** $y^2 = = x^2 + C_1x + C_2$. **50.** $y = C_1 + C_2x^3$. **51.** $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}C_1x^3 + C_2$. **52.** $y = C_1 + C_2\ln|x|$. **53.** $y = C_1 + C_2\sqrt{|x|}$. **54.** $y = -\frac{1}{3}x^3 + C_1\frac{1}{2}x^2 + C_2$. **58.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$. **59.** $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x}$. **60.** $y = e^{2x}(C_1\sin x + C_2\cos x)$. **61.** $y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$. **62.** $y = C_1 + C_2e^{3x}$.

63. $y = e^{x}(C_1 + C_2x)$. **64.** $y = e^{-x}(C_1\sin 3x + C_2\cos 3x)$. **65.** $y = e^{2x}(C_1\sin 2x + C_2\cos 2x) + e^{-2x}(C_3\sin 2x + C_4\cos 2x)$. **66.** $y = e^{-x}(C_1\sin x + C_2\cos x) + e^{x}(C_3\sin x + C_4\cos x)$. **67.** $y = C_1 + (C_2x + C_3)\sin 2x + (C_4x + C_5)\cos 2x$. **68.** $y = C_2e^{-x} + C_1e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}$. **69.** $y = C_2e^{3x} + C_1e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{3x}x\sin x$. **70.** $y = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x - C_1e^{-x} + C_2$. **71.** $y = C_2e^{x} + C_1e^{-x} + xe^{x} + x^2 + 2 - \frac{1}{2}e^{x}$. **72.** $y = \frac{1}{10}x\cos x - \frac{3}{10}x\sin x - \frac{17}{50}\sin x - \frac{3}{25}\cos x + C_1e^{2x} + C_2e^{x}$. **73.** $y = C_1e^{5x} + C_2 - \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{25}x^2 - \frac{1}{50}\sin 5x + \frac{1}{50}\cos 5x - \frac{6}{125}x$. **74.** $y = e^{-x}(C_1\sin x + C_2\cos x) + \frac{1}{2}e^{-x}(2x + \cos x + x\sin x)$. **75.** $y = e^{x}(C_1\sin 2x + C_2\cos 2x) + \frac{5}{17}\sin 2x + \frac{20}{17}\cos 2x$. **76.** $y = e^{-2x}(C_1\sin x + C_2\cos x) - e^{-2x}(\cos x + x\sin x)$. **77.** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{x} - \frac{15}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4$. **78.** $y = C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{-x} - 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$. **79.** $y = C_1 + C_2e^{-2x} + C_3e^{-x} + \frac{15}{4}x - \frac{7}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3$. **80.** $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-x} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$. **90.** $y = 2e^{-x} - e^{-4x}$. **91.** $y = 2e^{-2x}\sin 2x + e^{-2x}\cos 2x$. **92.** $y = e^{-2x} + 5xe^{-2x}$. **93.** $y = 5e^{-3x} - 7e^{-2x}$. **94.** $y = e^{3x} - 2e^{x}$. **95.** $y = -2e^{3x} + 7xe^{3x}$. **96.** $y = -\frac{1}{2}e^{-3x}\sin 2x + e^{-3x}\cos 2x$. **97.** $y = e^{-x} + 4xe^{-x}$. **98.** $y = -e^{x}\sin 2x + e^{x}\cos 2x$. **99.** $y = e^{4x} - 6xe^{4x}$. **100.** $y = -e^{-3x} - e^{x} + (-1 + 2x)xe^{x}$. **101.** $y = 3e^{x}\sin x - 2e^{x}\cos x + +xe^{x}\sin x$. **102.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin x \cdot \ln|\sin(x)| - x\cos x$. **103.** $y = e^{x}(C_1 + C_2x) + xe^{x}(-1 + \ln|x|)$. **104.** $y = (C_1 + C_2x - \ln|x| - 1)e^{-x}$. **105.** $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^{x} + 1) + C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$. **106.** $x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$, $y = \frac{1}{2}(C_1e^{-t} - C_2e^{3t})$. **107.** $x = e^{3t}(C_1 + C_2t)$, $y = e^{3t}(C_1 + C_2t - C_2)$. **108.** $x = C_1\sin t + C_2\cos t$, $y = \frac{1}{2}(-C_1\cos t + C_2\sin t + C_1\sin t + C_2\cos t)$. **109.** $x = e^{2t}(C_1\sin t + C_2\cos t)$, $y = e^{2t}(-C_1\cos t + C_2\sin t)$. **110.** $x = e^{3t}(C_1 + C_2t)$, $y = e^{3t}(C_1 + C_2t + C_2)$. **111.** $x = C_1 + C_2e^{5t}$, $y = -4C_2e^{5t} + C_1$. **112.** $x = C_1e^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{21})t} + C_2e^{-\frac{1}{2}(-1+\sqrt{21})t}$, $y = \frac{C_1}{2}(-3 + \sqrt{21}) \times e^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{21})t} - \frac{C_2}{2}(3 + \sqrt{21})e^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{21})t}$. **113.** $x = e^{-6t} \times (C_1\sin t + C_2\cos t)$, $y = e^{-6t}(C_1\sin t + C_1\cos t + C_2\cos t - C_2\sin t)$. **114.** $x = C_2e^{3t} - \frac{1}{3}C_1e^{-t} + \frac{8}{9} - \frac{4}{3}t$, $y =$

$= C_2e^{3t} + C_1e^{-t} - \frac{28}{9} + \frac{8}{3}t$. **115.** $x = e^{2t}(C_1 + C_2t)$, $y = -\frac{1}{3}e^{2t}(3C_1 + 3C_2t - C_2)$. **116.** $x = C_1e^t - C_2e^{-t} - 2 + \frac{1}{2}e^t + te^t - t^2$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t} - 2t - \frac{1}{2}e^t + te^t$. **117.** $x = e^{(-1+\sqrt{3})t}C_2 + e^{(-1-\sqrt{3})t}C_1 + \frac{20}{13}\cos t - \frac{35}{13}\sin t$, $y = (-1 + \sqrt{3})e^{-t+t\sqrt{3}}C_2 + (-1 - \sqrt{3})e^{-t-t\sqrt{3}}C_1 - \frac{20}{13}\sin t + \frac{30}{13}\cos t$. **118.** $x = -C_2e^t + 2C_1e^{4t} - 3e^{5t}, y = C_2e^t + C_1e^{4t} - e^{5t}$. **119.** $x = C_1(-\sin 2t + \cos 2t) + C_2(\sin 2t + \cos 2t)$, $y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + e^{-2t}$. **120.** $x = -\frac{1}{2}C_2e^{2t} - C_1e^{3t} + e^{2t} + te^{2t}$, $y = C_1e^{3t} + C_2e^{2t} - 2te^{2t}$. **121.** $x = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}$, $y = \frac{C_2}{3}e^{4t} + C_1e^{2t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}$. **122.** $x = -\frac{1}{2}C_2e^t(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}C_1e^t(-\sin x + \cos x) + 1 + t + e^t$, $y = e^t(C_2\sin t + C_1\cos t) - 1 - 2t - 2e^t$. **123.** $x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - \cos t + 3\sin t$, $y = \frac{C_2}{2}e^{2t} - C_1e^{-t} - \sin t + 2\cos t$. **124.** $x = C_1e^{3t} + C_2 + 2t + 3t^2$, $y = -C_1e^{3t} + 2C_2 - 2 - 2t + 6t^2$. **125.** $x = C_1e^{2t} - \frac{1}{5}C_2e^{-t} + C_3e^t$, $y = \frac{3}{5}C_2e^{-t} + C_3e^t$, $z = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} + C_3e^t$. **126.** $x = C_1 + 3C_2e^{2t}$, $y = -2C_2e^{2t} - \frac{1}{2}C_3e^{-t}$, $z = C_1 + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$. **127.** $x = C_2e^{3t} + C_3e^{2t}$, $y = C_1e^t + C_3e^{2t}$, $z = C_1e^t + C_2e^{3t} + C_3e^{2t}$. **128.** $x = e^t(C_2\sin 2t + C_3\cos 2t)$, $y = \frac{1}{2}e^t(2C_1 - C_2\cos 2t - C_2 + C_3\sin 2t)$, $z = \frac{1}{2}e^t(-2C_1 - 3C_2\cos 2t + 3C_3\sin 2t + C_2)$. **129.** $x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}\sin t + C_3e^{3t}\cos t$, $y = e^{3t}(C_2\sin t + C_2\cos t + C_3\cos t - C_3\sin t)$, $z = C_1e^{2t} + 2C_2e^{3t}\sin t - C_2e^{3t}\cos t + 2C_3e^{3t}\cos t + C_3e^{3t}\sin t$. **130.** $x = C_2 + C_3e^t$, $y = C_1e^t + 3C_2 + 3C_3e^t$, $z = -C_1e^t - 2C_3e^t - C_2$. **131.** Асимптотически устойчиво. **132.** Неустойчиво. **133.** Устойчиво. **134.** $x(t) = \frac{2t+C}{t+1}$. **135.** $x(t) = (t+1)\left(C + \frac{t}{t+2}\right)$. **136.** $x(t) = (t+2)\left(C + \frac{t}{t+3}\right)$. **137.** $x(t) = \frac{1}{2t+1}(C + t(t-2))$. **138.** $x(t) = 2^{\frac{t^2-t}{2}}\left(2^t + C\right)$. **139.** $x(t) = (t+1)^2\left(C - \frac{2t+5}{(t+2)(t+3)}\right)$. **140.** $x(t) = (t+2)^2\left(C - \frac{2t+7}{(t+3)(t+4)}\right)$. **141.** $x(t) = (t+2)^2 \times (C + 2^t)$. **142.** $x(t) = \frac{1}{2}\frac{t^2+7t+2C}{(t+3)^2}$. **143.** $x(t) = (t+2) \times \left(C - \frac{2t+7}{(t+3)(t+4)}\right)$. **144.** $x(t) = (t+1)\left(C - \frac{2t+5}{(t+2)(t+3)}\right)$.

145. $x(t) = (t+1)!(C+t)$. **146.** $x(t) = (t+2)^2\left(C+\frac{t}{t+3}\right)$. **147.** $x(t) = (t+1)^3\left(C+\frac{t}{t+2}\right)$. **148.** $x(t) = (t+2)^3\left(C+\frac{t}{t+3}\right)$. **149.** $x(t) = (-2)^t + t^2 - 1$. **150.** $x(t) = (-1)^t + 2t + 2$. **151.** $x(t) = C \cdot 2^t - 2t^2 - 5t$. **152.** $x(t) = C + 2t^2 - t$. **153.** $x(t) = C(-7)^t + 4^t$. **154.** $x(t) = C \cdot 5^t - 3 \cdot 2^t$. **155.** $x(t) = (C + 2t - t^2)(-3)^t$. **156.** $x(t) = \left(C + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right)3^t$. **157.** $x(t) = \left(C + \frac{2}{5}t(t-1)\right)5^t$. **158.** $x(t) = \left(C + \frac{1}{5}(3t+1)\right)5^t$. **159.** $x(t) = C(-1)^t + \frac{\sin t + \sin(t-1)}{1+\cos 1}$. **160.** $x(t) = C + \frac{\cos t - 1 - \cos t}{1 - \cos 1}$. **161.** $x(t) = C(-5)^t - \frac{1}{6} + t + 2^t$. **162.** $x(t) = C(-6)^t + 1 - t + (-2)^t$. **163.** $x(t) = C \cdot 5^t - 3^t - 1 - 2t$. **164.** $x(t) = C \cdot 6^t - 1 + t + (-3)^t$. **165.** $x(t) = C + \frac{1}{3t+1}$. **166.** $x(t) = C + \frac{1}{4t+1}$. **167.** $x(t) = C - \frac{t}{2t-1}$. **168.** $x(t) = C + \frac{t(t+1)}{2(2t+1)}$. **169.** $x(t) = C - \frac{t}{2(3t-2)}$. **170.** $x(t) = C - \frac{t}{2(5t-2)}$. **171.** $x(t) = -2(t+4)3^t + \frac{15}{2}4^t$. **172.** $x(t) = -\frac{5}{2}(-4)^t + (t+2)(-3)^t$. **173.** $x(t) = 3^{t-1} + (t-1)(-4)^t$. **174.** $x(t) = 2(-3)^t + (t+1)4^t$. **175.** $x(t) = 5 \cdot 6^{t-1} + (-t - \frac{3}{2})2^t$. **176.** $x(t) = 5(-6)^{t+1} + t(-2)^t$. **177.** $x(t) = C_1 + C_2(-2)^t$. **178.** $x(t) = C_1(-1)^t + C_2(-2)^t$. **179.** $x(t) = C_1(-2)^t + C_2(-3)^t$. **180.** $x(t) = C_1(-1)^t + C_2 2^t$. **181.** $x(t) = (C_1 + C_2 t)(-7)^t$. **182.** $x(t) = (C_1 + C_2 t)4^t$. **183.** $x(t) = 2^t\left(C_1 \cos\frac{\pi t}{6} + C_2 \sin\frac{\pi t}{6}\right)$. **184.** $x(t) = (2\sqrt{2})^t\left(C_1 \cos\frac{3\pi t}{4} + C_2 \sin\frac{3\pi t}{4}\right)$. **185.** $x(t) = (3\sqrt{2})^t\left(C_1 \cos\frac{\pi t}{4} + C_2 \sin\frac{\pi t}{4}\right)$. **186.** $x(t) = C_1(-1)^t + C_2 + C_3 t$. **187.** $x(t) = C_1(-1)^t + C_2(-2)^t + C_3(-3)^t$. **188.** $x(t) = (\sqrt{2})^t\left(C_1 \cos\frac{3\pi t}{4} + C_2 \sin\frac{3\pi t}{4}\right) + 1 - t$. **189.** $x(t) = (C_1 + C_2 t)2^t + (1+t)(-2)^t$. **190.** $x(t) = C_1(-1)^t + C_2(-2)^t + (t-1)3^t$. **191.** $x(t) = (3\sqrt{2})^t\left(C_1 \cos\frac{3\pi t}{4} + C_2 \sin\frac{3\pi t}{4}\right) + t$. **192.** $x(t) = C_1 + C_2 3^t - t2^t$. **193.** $x(t) = C_1(-1)^t + C_2 - \frac{1}{2}\cos t + \frac{\sin 2 \sin t}{2(1-\cos 2)}$. **194.** $x(t) = C_1 \cos\frac{\pi t}{2} + C_2 \sin\frac{\pi t}{2} + \sin t$. **195.** $x(t) = C_1(-1)^t + C_2 - \frac{1}{2}\cos t - \frac{\sin t}{2(1-\cos 2)}$. **196.** $x(t) = C_1 \cos\frac{\pi t}{3} + C_2 \sin\frac{\pi t}{3} + (t-1)(-2)^t$. **197.** $x(t) = (C_1 + C_2 t)(-2)^t + (t-1)2^t$. **198.** $x(t) = C_1(-1)^t + C_2 2^t + 2t(-1)^t$.

199. $x(t) = 2^t\left(C_1\cos\frac{\pi t}{3} + C_2\sin\frac{\pi t}{3}\right) + (1-t)3^t$. **200.** $x(t) = C_1(-1)^t + C_2 + 2t^2 - 3t$. **201.** $x(t) = C_1(-3)^t + C_2 + t(-3)^t$. **202.** $x(t) = C_1\cdot 3^t + C_2\cdot 4^t\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}\right)(-2)^t$. **203.** $x(t) = C_1 + C_2t + (1-t)5^t$. **204.** $x(t) = (\sqrt{5})^t\,(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + t + 1$, $\omega = \operatorname{arctg} 2$. **205.** $x(t) = (\sqrt{10})^t\,(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + (2t+1)(-1)^t$, $\omega = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **206.** $x(t) = C_1(-\sqrt{2})^t + (C_2 + 2t)(\sqrt{2})^t$. **207.** $x(t) = C_1(-\sqrt{3})^t + (C_2 - t)(\sqrt{3})^t$. **208.** $x(t) = 2^t\left(C_1\cos\frac{\pi t}{2} + C_2\sin\frac{\pi t}{2}\right) + t\,2^t$. **209.** $x(t) = C_1(-2)^t + C_2\,2^t - (t^2 + t + 2)$. **210.** $x(t) = (\sqrt{3})^t(C_1\cos\frac{\pi t}{2} + C_2\sin\frac{\pi t}{2}) - t + t^2$. **211.** $x(t) = C_1(-1)^t + C_2 + (t-1)2^t - (-2)^t$. **212.** $x(t) = C_1\cos\frac{\pi t}{2} + C_2\sin\frac{\pi t}{2} + (t-1)(-2)^t + 2^t$. **213.** $x(t) = C_1(-1)^t + C_2 + t^2 - t + (-3)^t$. **214.** $x(t) = C_1\cos\frac{\pi t}{2} + C_2\sin\frac{\pi t}{2} + t^2 - 3 - 3^t$. **215.** $x(t) = (\sqrt{5})^t\,(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + t - 1 + (-1)^t$, $\omega = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **216.** $x(t) = 1$ — неустойчивое положение равновесия. **217.** $x(t) = -1$ — неустойчивое положение равновесия. **218.** $x(t) = 4$ — асимптотически устойчивое положение равновесия. **219.** $x(t) = -1$ — неустойчивое положение равновесия. **220.** $x(t) = 2$ — неустойчивое положение равновесия. **221.** $x(t) = 1$ — неустойчивое положение равновесия. **222.** $x(t) = -2$ — устойчивое положение равновесия. **223.** $x(t) = 3$ — устойчивое положение равновесия. **224.** $x(t) = -4$ — асимптотически устойчивое положение равновесия.

Учебное издание

Коврижных Антон Юрьевич
Коврижных Ольга Олеговна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Завсдующий редакцией	М. А. Овечкина
Редактор	В. И. Первухина
Корректор	В. И. Первухина
Оригинал-макет	О. О. Коврижных

План выпуска 2014 г. Подписано в печать 25.11.2014.
Формат $60 \times 84^1/16$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 7,0. Усл. печ. л. 8,6. Тираж 130 экз. Заказ 1689
Издательство Уральского университета
620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
Тел.: +7 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru