МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЧАСТЬ 4

ШАПОШНИКОВ
СТАНИСЛАВ ВАЛЕРЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ОНУФРИЕНКО МАРИЮ ВИКТОРОВНУ

Содержание

Лекция 1

Кратный интеграл Римана. Основные утверждения

Определение 1. Множество $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ называется **замкнутым брусом** (параллелепипедом...)
Пусть брусок I — это декартово произведение каких-то промежутков.
$I = \{a_1, b_1\} \times ... \times \{a_n, b_n\}$, $\{...\}$ — некий промежуток (отрезок или интервал). Тогда что такое объем такого бруска I?
Объёмом такого бруска мы назовем по определению:
$|I| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot ... \cdot (b_n - a_n)$,
$|I|$ – объём

Определение 2. (разбиение замкнутого бруса I) Берем разбиение каждого из отрезков $[a_k, b_k]$ на отрезки Δ_k^j. Перемножаем все бруски вида $\Delta_{j_1}^1 \times ... \times \Delta_{j_n}^n$. Набор из таких брусков называется **разбиением бруска** I. Разбиение не обязательно выглядит, как клетки. Хотя любое разбиение отличное от них, можно привести к виду сетки с клетками.

Утверждение 1. *Если* $\{I_m\}$ *— разбиение* I*, то* $|I| = \sum\limits_m |I_m|$

Доказательство. Перемножаем длины рёбер бруска I. $|I| = (|\Delta_1^1| + |\Delta_1^2| + ...)(|\Delta_2^1| + |\Delta_2^2| + ...)...(|\Delta_n^1| + |\Delta_n^2| + ...) = \sum\limits_{j_1, ..., j_n} |\Delta_1^{j_1}|...|\Delta_n^{j_n}|$ — раскрыли скобки. ∎

Определение 3. $\mathbb{T} = \{I_m\}$ — разбиение I
$d(I_m) = \sup\limits_{x,y \in I_m} ||x - y||$ — диаметр бруска разбиения
$\lambda(\mathbb{T}) = \max\limits_m d(I_m)$ — **масштаб разбиения**
Итак, **масштаб (или параметр) разбиения** — это максимум из всех диаметров брусков разбиения.

Если мы не оговариваем этого дополнительно, то будем считать, что бруски — это отрезки положительной длины (то есть замкнуты и не являются точками).

Определение 4. Пусть задана функция $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
Сумма Римана определяется так:

$$\boxed{\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_m f(\xi_m)|I_m|}$$

$\mathbb{T} = \{I_m\}$ – разбиение I, $\xi = \{\xi_m\}$, $\xi_m \in I_m$ – отмеченные точки.

Определение 5. Число A называется **кратным интегралом Римана** от f по I, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется ($\exists$) $\delta > 0$ такая, что для любого отмеченного разбиения $(\mathbb{T}, \xi)$ (то есть в каждом $\{I_m\}$ выбрали точку ξ) с параметром $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ верно, что $|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon$

$$\boxed{A = \lim_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)}$$

Важно в этом определении, что предел равномерный по отмеченным точкам. То есть чтобы посчитать интеграл, достаточно составить сумму Римана, причем неважно, как при этом выбирать эти отмеченные точки.

Обозначение:

$$\int\limits_I f\,dx \text{ или } \int\limits_I \cdots \int f(x_1, ..., x_n)\,dx_1...dx_n$$

Утверждение 2. *(Необходимое условие интегрируемости по Риману)*
Если f интегрируема по Риману на I, то f ограничена. Обратное неверно.

Доказательство. Будем доказывать от противного.
Предположим, что f не ограничена, то есть принимает сколь угодно большие значения.
Возьмем $\varepsilon = 1$ и запишем определение интеграла: $\exists \delta > 0\ \forall (\mathbb{T}, \xi)\ \lambda(\mathbb{T}) < \delta$

$$\int\limits_I f\,dx - 1 < \sum_m f(\xi_m)|I_m| < \int\limits_I f\,dx + 1$$

Если f не ограничена, то она не является ограниченной на каком-то из брусков разбиения I_m. Пусть на I_M. Получаем:

$const$ (если фиксировали $\xi_k, k \neq M$) $< f(\xi_M)|I_M| < const$ (если фиксировали $\xi_k, k \neq M$)

Изменяя ξ_M, получаем, что $f(\xi_M)|I_M|$ принимает сколь угодно большие значения, а с другой стороны является ограниченной. Противоречие с неравенством.

∎

Пример 1. $f(x) \equiv const$
$\lhd\ \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum\limits_m f(\xi_m)|I_m| = const|I|$,
$\int\limits_I const\,dx = const|I|\ \rhd$

Пример 2. $J \subset I$, J–брус (не обязательно замкнутый)

$$\chi_J(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in J; \\ 0, & \text{если } x \notin J; \end{cases}$$

Утверждение 3. $\chi_J(x)$ *интегрируема и выполняется такое равенство:* $\int\limits_I \chi_J dx = |J|$

Доказательство. Для простоты будем рассматривать функцию на плоскости. Отличие будет состоять только в количестве индексов и декартовых произведений.

Пусть $(\mathbb{T}, \xi)$ — разбиение I, где $\mathbb{T} = \{I_m\}$. Нам нужно понять, как устроена риманова сумма: $\sum\limits_m \chi_J(\xi_m)|I_m|$.
Пусть $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, а $J = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$.
В характеристической функции в римановой сумме будет стоять единица, только если I_m будет задевать J, то есть точка ξ_m и из отрезка I_m, и из J.
Разобъём ось x: $a_1 < c_1 < x_k < ... < x_l < d_1 < b_1$ и ось y: $a_2 < c_2 < y_s < ... < y_t < d_2 < b_2$. Будем считать, что y_s – это первый лежащий полностью внутри промежутка (c_2, d_2), а y_t – последний такой. Аналогично с x_k и x_l из (c_1, d_1). x_k, x_l, y_s, y_t — это точки разбиения (аналоги $\Delta^n_{j_n}$ из определения разбиения, но для двумерного случая).
Тогда все те клетки разбиения, которые соответствуют $[x_i, x_i + 1]$, $i = k, ..., l$ и $[y_j, y_j + 1]$, $j = s, ..., t$, закрывают собой замкнутый параллелепипед $[x_k, x_l] \times [y_s, y_t]$, и на них $\chi_J(x)$ принимает значение 1. Тогда будет выполнено неравенство:

$$(d_1-c_1)(d_2-c_2)-\lambda(\mathbb{T})((b_2-a_2)+(b_1-a_1))-\lambda^2(\mathbb{T}) \leqslant (x_l-x_k)(y_t-y_s) \leqslant \sum_m \chi_J(\xi_m)|I_m|$$

Важно, что в левой части в записи присутствует константа, умноженная на $\lambda(\mathbb{T})$.
Оценим сверху:

$$\sum_m \chi_J(\xi_m)|I_m| \leq (d_1 - c_1)(d_2 - c_2) + \lambda(\mathbb{T})((b_2 - a_2) + (b_1 - a_1)) + \lambda^2(\mathbb{T})$$

Теперь $\lambda(\mathbb{T})$ устремляем к нулю, а тогда $\sum\limits_m \chi_J(\xi_m)|I_m| \longrightarrow |J|$.
Если, например, c_2 и d_2 совпали, то можно было бы накрыть бруском $\lambda(\mathbb{T}) \cdot const$.
■

Свойства кратного интеграла Римана

Теорема 1. *(Свойство линейности интеграла)*
Если f и g интегрируемы на I, то для всех чисел α и β функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на I и

$$\int_I (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx$$

Доказательство. По линейности: $\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) = \alpha\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) + \beta\sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$.
Далее для всякого $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$, что для любого разбиения $(\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$

$$|\int_I f(x) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)dx| < \varepsilon$$

$$|\int_I g(x) - \sigma(g, \mathbb{T}, \xi)dx| < \varepsilon$$

Тогда для любого разбиения $(\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ верно:

$$|\sigma(\alpha f+\beta g, \mathbb{T}, \xi)-\alpha\int\limits_I f dx-\beta\int\limits_I g dx| \leqslant |\alpha|\cdot|\int\limits_I f dx-\sigma(f, \mathbb{T}, \xi)|+|\beta|\cdot|\int\limits_I g dx-\sigma(g, \mathbb{T}, \xi)| \leqslant (|\alpha|+|\beta|)\cdot\varepsilon$$

Так как в силу произвольности ε константа не важна, то теорема доказана.

■

Теорема 2. *(Свойство монотонности)*
Если f и g интегрируемы на I и $f \leqslant g$, то $\int\limits_I f dx \leqslant \int\limits_I g dx$

Доказательство.
$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum f(\xi_k)|\Delta_k| \leqslant \sum g(\xi_k)|\Delta_k| = \sigma(g, \mathbb{T}, \xi)$
Далее для всякого $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$, что для любого разбиения $(\mathbb{T}, \xi)$ с $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$:
$\int\limits_I f dx - \varepsilon < \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$ и $\sigma(g, \mathbb{T}, \xi) < \int\limits_I g dx + \varepsilon$.
Так как $f \leqslant g$, то $\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leqslant \sigma(g, \mathbb{T}, \xi)$ и $\int\limits_I f dx - \varepsilon \leqslant \int\limits_I g dx + \varepsilon$.

Теперь $\varepsilon \to 0$, и, следовательно, $\int\limits_I f dx \leqslant \int\limits_I g dx$.

■

Следствие 1. *Если брусок* $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i \Longrightarrow |I| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} |I_i|$

Доказательство. Поскольку брусков конечное число, то можно считать, что их положили в один большой брус. Из условия $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$ следует, что $\chi_I \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \chi_{I_i}$. На всех точках I хотя бы одна из этих функций χ_{I_i} обязана равняться единице, потому что все точки входят в какое-то из этих множеств I_i. Дальше, проинтегрировав это неравенство, воспользуемся линейностью, монотонностью и результатом интегрирования функции χ_I и получим, что $|I| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} |I_i|$. Следствие доказано.

■

Следствие 2. *Если f интегрируема на I, то* $|\int\limits_I f dx| \leqslant \sup\limits_I |f| \cdot |I|$

Доказательство.

$$-\sup|f| \leqslant f \leqslant \sup|f|$$

Проинтегрируем это неравенство:

$$-\sup|f| \cdot |I| \leqslant \int\limits_I f dx \leqslant \sup|f| \cdot |I|$$

Получили в точности требуемое неравенство.

■

Лекция 2

Перестановочность предела и интеграла

Теорема 3. *(перестановочность равномерного предела и интеграла)*
Пусть f_n интегрируема на I, $f_n \overset{I}{\rightrightarrows} f$. Тогда f интегрируема на I и $\int\limits_I f_n dx \longrightarrow \int\limits_I f dx$.

Доказательство.
1) Наш интеграл — фундаментальная последовательность
$|\int\limits_I f_n dx - \int\limits_I f_m dx| =$ по линейности $= |\int\limits_I (f_n - f_m)dx| \leqslant \sup\limits_I |f_n - f_m| \cdot |I| \Rightarrow$ числовая последовательность $\int\limits_I f_n dx$ ограничена и сходится к некоторому числу A.

2) Метод 3ε для того, чтобы доказать, что A — это и есть интеграл $\int\limits_I f dx$

$$|A - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| \leqslant \underbrace{|A - \int\limits_I f_n dx|}_{\alpha<\varepsilon} + \underbrace{|\int\limits_I f_n dx - \sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi)|}_{\beta<\varepsilon} + + \underbrace{|\sigma(f_n, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)|}_{\gamma<\varepsilon} < 3\varepsilon$$

$\alpha < \varepsilon$: выбираем n такое, что это будем меньше ε, так как эта последовательность сходится к A по пункту 1)
$\beta < \varepsilon$: выбираем масштаб разбиения $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$, что разность интеграла и суммы будет меньше ε по определению интеграла
$\gamma < \varepsilon$: с помощью равномерной сходимости
Теорема доказана.

■

Следствие 3. *Если f непрерывна на I, то f интегрируема на I.*

Доказательство. Если $f \in C(I)$, I–компакт $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна. А значит

$$\forall N \ \exists \delta \ \forall \mathbb{T} = \{I_m\} \text{ с } \lambda(\mathbb{T}) < \delta$$

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{N} \ \forall x, y \in I_m$$

Будем устраивать такие разбиения. Для каждого N мы будем разбивать так мелко, как нужно, чтобы удовлетворить условию, поставленному N (чтобы значения мало отличались). Получаем последовательность разбиений $\{I_m^N\}$.
Так как параллелепипеды разбиения имеют общие грани, и нам это не очень удобно, то немного исправим его. Пусть $\{\widetilde{I_m^N}\}$ — разбиение из попарно непересекающихся

брусков (необязательно замкнутых). То есть мы разобрались (каким угодно способом), какие грани какому бруску принадлежат.
Как теперь по новому разбиению построить последовательность ступенчатых функций, которые будут приближать к f?
Возьмём

$$f_N(x) = \sum_m f(\xi_m^N) \cdot X_{\widetilde{I_m^N}}(x),\ \ \xi_m^N(x) \in \widetilde{I_m^N},$$

где ξ_m^N — это как угодно выбранные точки из соответствующих брусков.
Эту сумму можно описать так: представляем себе шахматную доску. В каждой клетке фиксируем по произвольной точке ξ_m^N. Берем какую-то точку x и какую-то клетку $\widetilde{I_m^N}$. Подставляем x в характеристическую функцию этой клетки. Если эта точка x была из $\widetilde{I_m^N}$, то $X_{\widetilde{I_m^N}}$ выдаст значение 1. Если нет, то 0. Пусть $X_{\widetilde{I_m^N}}$ стала равна единице. Тогда дальше мы будем суммировать значение произвольной фиксированной точки ξ_m^N из этой клетки, умноженной на 1 (то есть само это значение) с нулями, потому что на других клетках характеристическая функция равна нулю. Получим так называемую ступеньку ровно над выбранной клеткой. Теперь, рассматривая все x из области определения нашей ступенчатой функции, получим набор клеток разной высоты ровно над каждой клеткой разбиения. Это и будет $f_N(x)$.
Тогда как же отличается $f(x)$ от $f_N(x)$?
Так как бруски $\widetilde{I_m^N}$ дают в объединении всё, то, рассматривая такую разность $|f(x) - f_N(x)|$, мы понимаем, что x обязательно принадлежит какому-то $\widetilde{I_m^N}$. А на этом $\widetilde{I_m^N}$ в записанной выше сумме отличается от нуля только одно слагаемое (именно для этого мы сделали попарно непересекающиеся грани в разбиении — так не будет возникать суммирования значений), и оно выглядит так: $f(\xi_m^N) \cdot 1$. Запишем это: $|f(x) - f_N(x)| = |f(x) - f(\xi_m^N)| < 1/N$ (по построению).
Получилось, что во всех точках x эти функции отличаются меньше, чем на $1/N$. Итак, $f_N \overset{I}{\rightrightarrows} f$, f_N интегрируемы, следовательно, по предыдущей теореме f интегрируема.

■

Критерий интегрируемости

Утверждение 4. *Индикатор треугольника нельзя равномерно приблизить ступенчатой функцией.*

Доказательство. Пусть можно. Возьмем такую ступенчатую функцию, что выполняется неравенство $|X_{triangle}(x) - \sum\limits_m C_i \cdot X_{I_j}(x)| < 1/3$. Покроем треугольник брусками (неважно: замкнутыми или открытыми). Возьмём на диагонали треугольника точку, которая не лежит на сторонах квадратов. Квадратов конечное число, и их стороны пересекают диагональ в конечном числе точек. Следовательно, для всех квадратов, которым эта точка принадлежит, она будет внутренней. Значит, есть малая окрестность этой точки, где наша ступенчатая функция постоянная ($const$) (есть окрестность, которая принадлежит всем накрывающим эту точку квадартам, и для этих точек этой окрестности характеристическая функция вычисляется одним способом). Тогда $|1 - const| < 1/3$, а с другой стороны $const < 1/3$, и, следовательно 1<2/3. Противоречие.

$\blacksquare$

Теорема 4. *(Критерий интегрируемости)*
Ограниченная функция f на I интегрируема по Риману $\Leftrightarrow$ $\exists$ последовательности ступенчатых функций f_n и g_n такие, что $\forall x \in I$

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant ... \leqslant f(x)$$
$$f(x) \leqslant ... \leqslant g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x) \text{ и}$$
$$\int\limits_I g_n dx - \int\limits_I f_n dx \to 0$$

Доказательство. $\boxed{\Longleftarrow}$
$\int\limits_I f_n dx$ не убывает и ограничен сверху интегралом $\int\limits_I g_n dx$.
$\int\limits_I g_n dx$ не возрастает и ограничен снизу интегралом $\int\limits_I f_n dx$.
Эти последовательности ($\int\limits_I f_n dx$ и $\int\limits_I g_n dx$) сходятся, а благодаря тому, что их разность стремится к нулю (из условия), то сходятся к одному и тому же числу A.

$\boxed{\Longrightarrow}$
Сделаем из исходного разбиения $\mathbb{T} = \{I_m\}$ новое с непересекающимися гранями $\{\widetilde{I_m}\}$ и $\bigcup\limits_m \widetilde{I_m} = I$. Введем функции:

$$f_{\mathbb{T}}(x) = \sum_m \inf_{\widetilde{I_m}} f \cdot \chi_{\widetilde{I_m}}(x)$$

$$g_{\mathbb{T}}(x) = \sum_m \sup_{\widetilde{I_m}} f \cdot \chi_{\widetilde{I_m}}(x)$$

Ясно, что $f_{\mathbb{T}}(x) \leqslant f(x) \leqslant g_{\mathbb{T}}(x)$ $\forall x$. Пусть $\mathbb{T}' = \{\widetilde{J_{m,k}}\}$ — это измельчение $\mathbb{T} = \{\widetilde{I_m}\}$. Но мы подразбиваем $\widetilde{I_m}$ и опять делаем попарно непересекающиеся $\widetilde{J_{m,k}}$ и $\bigcup\limits_k \widetilde{J_{m,k}} = \widetilde{I_m}$.
Следовательно, $\chi_{\widetilde{I_m}} = \sum\limits_k \chi_{\widetilde{J_{m,k}}}$.
Утверждается, что $f_{\mathbb{T}}(x) \leqslant f_{\mathbb{T}'}(x)$ $\forall x$. Так как при уменьшении области inf увеличивается, то $\inf\limits_{\widetilde{I_m}} f \leqslant \inf\limits_{\widetilde{J_{m,k}}} f$.

$$f_{\mathbb{T}}(x) = \sum_m \inf_{\widetilde{I_m}} f \cdot \chi_{\widetilde{I_m}}(x) = \sum_m \sum_k \inf_{\widetilde{I_m}} f \cdot \chi_{\widetilde{J_{m,k}}}(x) \leqslant \sum_m \sum_k \inf_{\widetilde{J_{m,k}}} f \cdot \chi_{\widetilde{J_{m,k}}}(x) = f_{\mathbb{T}'}(x)$$

Аналогичным образом можно установить, что $g_{\mathbb{T}}(x) \geq g_{\mathbb{T}'}(x)\ \forall x$.
Выбираем последовательность $\mathbb{T}_N$ так, что $\mathbb{T}_{N+1}$ измельчает $\mathbb{T}_N$ и $\lambda(\mathbb{T}_N) \to 0$. Соответствующие функции обозначим f_N и g_N. Проверим, что разность их интегралов стремится к нулю.

$$\int\limits_I g_N dx - \int\limits_I f_N dx = \sum_m (\sup_{\widetilde{I^N_m}} f - \inf_{\widetilde{I^N_m}} f) \cdot |\widetilde{I^N_m}| =$$
$$= \sum_m \omega(f, \widetilde{I^N_m}) \cdot |\widetilde{I^N_m}| \leqslant \sum_m \omega(f, I^N_m) \cdot |I^N_m| == \sum_m (\sup_{I^N_m} f - \inf_{I^N_m} f) \cdot |I^N_m|$$

Выберем ξ^M_m, $\zeta^N_m \in I^N_m$:

$$\sup_{I^N_m} f < f(\xi^N_m) + \varepsilon$$
$$\inf_{I^N_m} f > f(\zeta^N_m) - \varepsilon$$

Вместо sup в последней сумме в неравенстве ставим $f(\xi^N_m)+\varepsilon$, а вместо inf: $f(\zeta^N_m)-\varepsilon$. Тогда ε-ы будут умножаться на бруски разбиения $|I^N_m|$, которые сложатся в весь брусок целиком.

$$\int\limits_I g_N dx - \int\limits_I f_N dx \leqslant \underbrace{\sigma(f, \mathbb{T}, \xi^N) - \sigma(f, \mathbb{T}, \zeta^N)}_{\longrightarrow 0 \text{ при } \lambda(\mathbb{T}_N) \to 0} + 2\varepsilon|I|$$

А так как ε можно выбирать любое, то теорема доказана.

■

Теорема Фубини

Теорема 5. *(Теорема Фубини)*
Пусть f интегрируема на бруске $I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{n+m}$, ($I_x \subset \mathbb{R}^n$, $I_y \subset \mathbb{R}^m$) и $\forall x \in I_x$ функция $y \to f(x, y)$ интегрируема на I_y
Тогда

$$\int\limits_{I_x \times I_y} f(x,y) dx dy = \int\limits_{I_x} (\int\limits_{I_y} f(x,y) dy) dx$$

Замечание 1. В утверждение теоремы также входит то, что $\int\limits_{I_y} f(x,y)dy$ как функция от x является интегрируемой по Риману функцией.

Доказательство.
1) Пусть сначала функция – это индикатор.
$f = \chi_J$, J – брусок $\subset I = [a_1, b_1] \times ... \times [a_{n+m}, b_{n+m}]$, $\Delta_i \subset [a_i, b_i]$ — любой ограниченный промежуток.
$J = \Delta_1 \times \Delta_2 \times ...\Delta_n \times \Delta_{n+1} \times ... \times \Delta_{n+m}$.

Мы знаем, чему равен интеграл он индикатора — объёму бруска. Объём в свою очередь равен произведению длин Δ_i. Далее расставим скобки в этом произведении.

$$\int\limits_{I=I_x\times I_y} \chi_J = |J| = |\Delta_1|...|\Delta_{n+m}| = (|\Delta_1|...|\Delta_n|)(|\Delta_{n+1}|...|\Delta_{n+m}|)$$

Утверждается, что $\chi_J(x,y) = \chi_{\Delta_1\times...\Delta_n}(x)\cdot\chi_{\Delta_{n+1}\times...\Delta_{n+m}}(y)$. Зафиксируем x, тогда функция $\chi_J(x,y)$ — интегрируема, потому что это индикатор, умноженный на число. Вычислим от неё интеграл:

$$\int\limits_{I_y}\chi_J(x,y)dy = \chi_{\Delta_1\times\Delta_n}(x)\cdot|\Delta_{n+1}|...|\Delta_{n+m}|$$

Полученное выражение проинтегрируем по x:

$$\int\limits_{I_x}(\int\limits_{I_y}\chi_J(x,y)dy)dx = (\int\limits_{I_x}\chi_{\Delta_1\times...\times\Delta_n}dx)\cdot|\Delta_{n+1}|...|\Delta_{n+m}| = (|\Delta_1|...|\Delta_n|)(|\Delta_{n+1}|...|\Delta_{n+m}|),$$

следовательно, теорема верна для $\chi_J(x)$.
2) По линейности равенство распространяется на конечные линейные комбинации индикаторов $\sum\limits_j c_j\chi_{J_j}(x)$. Следовательно, теорема верна для ступенчатых функции.

Лекция 3

Теорема Фубини

3) По критерию интегрируемости существуют неубывающая последовательность $f_N(x,y)$ и невозрастающая последовательность $g_N(x,y)$ такие, что $f_N(x,y) \leqslant f(x) \leqslant g_N(x,y)$; $f_N(x,y)$, $g_N(x,y)$— ступенчатые функции.
$\int\limits_{I_x\times I_y} f_N dxdy$ и $\int\limits_{I_x\times I_y} g_N dxdy$ стремятся при $N\to\infty$ к $\int\limits_{I_x\times I_y} f dxdy$
Поскольку функция f интегрируема по y, а интеграл — монотонное выражение по функции f, то мы можем проинтегрировать эту цепочку неравенств.

$$\underbrace{\int\limits_{I_y} f_N(x,y)dy}_{\text{ступенчатая} - F_N(x)} \leqslant \int\limits_{I_y} f(x,y)dy \leqslant \underbrace{\int\limits_{I_y} g_N(x,y)dy}_{\text{ступенчатая} - G_N(x)}$$

Когда мы интегрируем индикатор бруска по части переменных, то получаем константу, умноженную на индикатор какого-то бруска. Когда мы берем интеграл от ступенчатой функции по одной из переменных, то опять получаем ступенчатую функцию. В силу того, что f_N при увеличении N и при каждом фиксированном x поточечно не убывает по N, а интеграл монотонен, то и $F_N(x)$ не убывает по N при каждом фиксированном x при увеличении N; $G_N(x)$, соответственно, не возрастает при увеличении N при каждом фиксированном x по N.
$\int\limits_{I_x} F_N dx = \int\limits_{I_x}(\int\limits_{I_y} f_N dy)dx = \int\limits_{I_x\times I_y} f_N dxdy$ — так как проверили теорему Фубини для ступенчатых. Аналогично для функции G_N: $\int\limits_{I_x} G_N dx = \int\limits_{I_x\times I_y} g_N dxdy$.

Из установленного ранее $\int\limits_{I_x\times I_y} f_N dxdy$ и $\int\limits_{I_x\times I_y} g_N dxdy$ приближаются к одному и тому же — к $\int\limits_{I_x\times I_y} f dxdy$. В частности разность интегралов от F_N и G_N стремится к нулю.
Посмотрим на критерий интегрируемости: если нашлись такие последовательности функций F_N и G_N, с приведенными выше свойствами неубывания и невозрастания, и разность интегралов от них стремится к нулю, то про функцию, которую они зажимают, можно утверждать, что она интегрируема.
Следовательно, по критерию интегрируемости функция $x \longrightarrow \int\limits_{I_y} f(x,y)dy$ интегрируема по I_x, и $\int\limits_{I_x} F_N(x)dx \to \int\limits_{I_x}(\int\limits_{I_y} f(x,y)dy)dx$, и по аналогии $\int\limits_{I_x} G_N(x)dx \to \int\limits_{I_x}(\int\limits_{I_y} f(x,y)dy)dx$.

Таким образом, $\int\limits_{I_x\times I_y} f(x,y)dxdy = \lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_{I_x} F_N(x)dx = \int\limits_{I_x}(\int\limits_{I_y} f(x,y)dy)dx$. Доказательство завершено.
Кратко:
1) Теорема верна для индикатора бруска.
2) По линейности верна для их линейной комбинаций.
3) А этими линейными комбинациями можно приблизить какую-то функцию f (интегрируема тогда и только тогда, когда приблизили ступенчатыми).

■

Замечание 2. (по разбиению)
Пусть у нас есть квадарат с клетками 3×3. Зададим разбиение так: представим каждую грань в виде объединения полуинтервалов (попарно непересекающиеся промежутки).
Теперь возьмём $\Delta_i^1\times\Delta_j^2\cap\Delta_k^1\times\Delta_m^2$ (2 – вертикальная грань, 1 – горизонтальная). И пусть точка (x,y) принадлежит этому пересечению. Тогда её первая координата должна лежать и в Δ_i^1, и в Δ_k^1. Но так как мы делили на попарно непересекающиеся, то $i=k$. Аналогично для второй координаты $j=m$.
Поскольку после разбиения мы в объединении получаем все ребра, то, объединяя промежутки по всем i и j, получаем весь промежуток. $\bigcup\limits_{i,j}\Delta_i^1\times\Delta_j^2 = I$.

Следствие 4. *(формула интегрирования по частям)*
Пусть k – фиксированное число, f, g, $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$, $\frac{\partial g(x)}{\partial x_k}\in C(I)$, I –замкнутый брус, $f=0$ на ∂I (на границе бруса). Тогда верно равенство:

$$\int\limits_I \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\cdot g dx = -\int\limits_I f\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x_k}dx$$

Доказательство.
Брусок I устроен так: $I=[a_1,b_1]\times ...\times[a_n,b_n]$

$$\int\limits_I \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = (\text{по т. Фубини}) = \int\limits_{[a_1,b_1]} dx_1 \int\limits_{[a_2,b_2]} dx_2\dots\int\limits_{[a_k,b_k]} dx_k ... \int\limits_{[a_n,b_n]}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\cdot g dx_n = \odot$$

Так как в теореме Фубини не важен порядок переменных, то применяем её так, чтобы сначала интегрировать не по x_n, а по x_k

$$\odot = \int\limits_{[a_1,b_1]} dx_1\dots\widehat{\int\limits_{[a_k,b_k]} dx_k}\dots\int\limits_{[a_n,b_n]} dx_n \int\limits_{[a_k,b_k]}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\cdot g dx_k = \odot$$

$\int\limits_{[a_k,b_k]}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\cdot g dx_k$ — это обычный интеграл Римана (все остальные x_i зафиксировали).
Применяем обычную формулу интегрирования по частям.
Поскольку $f(x_1,...a_k,...,x_n)=0$ и $f(x_1,...b_k,...,x_n)=0$ (потому что после фиксации k-той переменной мы попали на соответствующие грани бруска), то интегрируем

как обычно.

$$\int\limits_{[a_k,b_k]} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \cdot g dx_k = -\int\limits_I f \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x_k} dx$$

и возвращаем это выражение обратно в кратный интеграл.

$$\odot = -\int\limits_{[a_1,b_1]} dx_1 \dots \int\limits_{[a_n,b_n]} dx_n \int\limits_I f \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x_k} dx = -\int\limits_I f \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x_k} dx$$

■

Множества меры нуль

Переформулировка критерия интегрируемости

Ограниченная функция f интегрируема на I тогда и только тогда, когда существует последовательность разбиений $\mathbb{T}_N = \{\widetilde{I_m^N}\}$ на попарно непересекающиеся бруски такие, что $\lambda(\mathbb{T}_N) \longrightarrow 0$, $\mathbb{T}_{N+1}$ — измельчение $\mathbb{T}_N$.

$$\int\limits_I \sum_m \sup_{\widetilde{I_m^N}} f \cdot X_{\widetilde{I_m^N}}(x) - \sum_m \inf_{\widetilde{I_m^N}} f \cdot X_{\widetilde{I_m^N}}(x) dx \longrightarrow 0$$

Обозначим $g_N(x) = \sum\limits_m \sup\limits_{\widetilde{I_m^N}} f \cdot X_{\widetilde{I_m^N}}(x)$ и $f_N = \sum\limits_m \inf\limits_{\widetilde{I_m^N}} f \cdot X_{\widetilde{I_m^N}}(x)dx$. То есть интегрируемость равносильна тому, что эта разность стремится к нулю. Отличие исходной теоремы от переформулировки: в первом любые последовательности супенчатых функций годятся, а во втором всегда можно считать, что они построены фиксированным образом.

Идея Критерия Лебега

Мы начинаем дробить квадрат на бруски. Теперь забудем о получающейся у нас сетке и будем смотреть на точки, которые оказываются внутри (не задевающие сетку). Такие точки есть, потому что координаты сетки — это счетный набор точек по двум ребрам, следовательно, если их убрать, то останутся еще точки. Итак, возьмем точку x, кооринаты которой не совпадают с координатами точек сетки. К чему стремится разность функций $g_N(x)$ и $f_N(x)$ в этой точке?

Чему эта разность каждый раз равна? Она равна разности sup и inf на некоторой окрестности, и эта окрестность уменьшается. А что получается, когда мы берем разность супремума и инфимума и сжимаем окрестность? Колебание в точке. Значит разность этих функций при $N \to \infty$ приближается к колебанию функции f в точке x.

$$g_N(x) - f_N(x) \longrightarrow \omega_f(x)$$

Пусть у нас всё интегрируемо. Тогда получается, что

$$L = \int\limits_I \sum_m \sup_{\widetilde{I_m^N}} f \cdot X_{\widetilde{I_m^N}}(x) - \sum_m \inf_{\widetilde{I_m^N}} f \cdot X_{\widetilde{I_m^N}}(x) dx \longrightarrow \int\limits_I \omega_f(x) dx$$

Да, мы не во всех точках проверили эту сходимость, но таких мало; они по объему составляют множество меры ноль, изменения на котором интеграл не воспринимает.

Итак, суть критерия интегрируемости в такой формулировке состоит в том, что ограниченная функция интегрируема $\Leftrightarrow L = 0$. А интеграл от неотрицательной функции равен нулю, когда эта функция почти всюду ноль. А функция почти всюду – ноль, когда функция в точке непрерывна (её модуль непрерывности — $\omega_f(\delta)$ – ноль).

Определение 6. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется **множеством меры нуль** по Лебегу, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счетный набор замкнутых брусков $\{I_k\}$ такой, что сумма их объёмов меньше эпсилон $\sum\limits_k |I_k| < \varepsilon$ и они покрывают множество E: $E \subset \bigcup\limits_k I_k$.

Утверждение 5. *В определении замкнутые бруски можно заменить открытыми.*

Доказательство. Ясно, что если мы смогли открытыми I_k° покрыть множество E так, что сумма их объемов меньше эпсилон, то, замкнув их, сможем покрыть и замкнутыми, а объем их не изменится.
Пусть теперь E содержится в объединении замкнутых так, что сумма их объемов меньше эпсилон.

$$I_k = \underbrace{[a_1^k, b_1^k]}_{\text{длина } l_1,\ c_1^k=(a_1^k+b_1^k)/2} \times ... \times \underbrace{[a_n^k, b_n^k]}_{\text{длина } l_n,\ c_n^k=(a_n^k+b_n^k)/2}$$

$$J_k^\circ = 2I_k = (c_1^k - l_1^k; c_1^k + l_1^k) \times ... \times (c_n^k - l_n^k; c_n^k + l_n^k)$$

$$J_k^\circ \supset I_k; \text{ объём: } |J_k^\circ| = 2^n |I_k|$$

Следовательно, $\sum\limits_k |J_k^\circ| < 2^n \cdot \sum\limits_k |I_k| < 2^n\varepsilon$ (n – это размерность, она фиксирована).

■

Пример 3.

1) **Точка** — множество меры нуль.

2) **Невырожденный брусок** не является множеством меры нуль.

   Доказательство. Брусок I — компакт. Если мы этот компакт покрыли открытыми брусками $I \subset \bigcup\limits_k I_k^\circ$, то существует конечное подпокрытие, то есть брусок I содержится в объединении $I \subset I_{k_1}^\circ \cup ... \cup I_{k_m}^\circ$. Из монотонности и линейности интеграла и значения интеграла от бруска мы знаем, что объем этого бруска — это положительное число и не превосходит суммы объемов брусков подпокрытия: $0 < |I| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} |I_{k_j}^\circ|$. Отсюда видно, что нельзя сделать так, что сумма объемов покрывающих была меньше ε, если взять $\varepsilon = |I|/2$. Покрыть нельзя. ■

3) Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – компакт. Тогда **график** $\{(x, y)|y = f(x),\ x \in K$ — множество меры нуль по Лебегу в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Доказательство. f — непрерывна на $K \Longrightarrow f$ равномерно непрерывна на K. Возьмём $\varepsilon > 0$ и найдем $(\exists)$ $\delta > 0$ такое, что как только расстояние между x и y стало меньше δ $||x - y|| < \delta$, то $|f(x) - f(y)|$ стало меньше ε ($|f(x) - f(y)| < \varepsilon$) $\forall x, y \in K$. Пусть брус I содержит K ($I \supset K$). Возьмём разбиение $\{I_m\}$ масштаба (диаметра) $< \delta$.
Возьмём m такие, что $I_m \bigcap K \neq \varnothing$ и $\xi_m \in I_m \cap K$, и вот по таким устроим покрытие: $\Gamma_g \subset \bigcup\limits_{\text{по таким } m} I_m \times [f(\xi_m) - \varepsilon; f(\xi_m) + \varepsilon]$. График содержится в этом множестве, потому что на каждом I_m колебание функции меньше, чем ε, поэтому все значения на соответствующем I_m точно лежат в этом отрезке, а значит кусок графика над этим I_m попал внутрь этого кубика. Теперь надо проверить, что это не слишком большое по объему покрытие.
$\sum\limits_m |I_m \times [...]| \leqslant |I| \cdot 2\varepsilon$ (длина отрезка – 2ε, а сумма объёмов I_m – это объём бруса). Понятно, что можно сделать этот объём меньше наперёд заданного ε. Следовательно, график — это множество меры ноль. ■

Теорема 6. *(Свойства множеств меры нуль)*
1) Если E – множество меры нуль по Лебегу и $D \subset E$, то D — множество меры нуль по Лебегу.
2) Если $\{E\}$ — не более чем счетный набор множеств меры нуль, то их объединение также является множеством меры нуль.

Доказательство. Рассмотрим счетный набор множеств меры нуль $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ Для заданного $\varepsilon > 0$ и для каждого n покроем множество A_n счетной системой интервалов с общей длиной меньше $\varepsilon/2^n$. Тогда всё множество $A = A_1 + ... + A_n + ...$ окажется покрытым счетной системой интервалов (сумма счетного множества счетных множеств) с общей длиной, меньше ε. Следовательно, A имеет множество меры нуль.

■

Определение 7. Если некоторое свойство не имеет место лишь на множестве меры нуль по Лебегу, то говорят, что это свойство имеет место почти всюду.

Лекция 4

Критерий Лебега

Теорема 7. *(Критерий Лебега)*
Функция f интегрируема по Риману на бруске I тогда и только тогда, когда f ограничена и непрерывна почти всюду.

Доказательство. Поскольку мы уже знаем, что интегрируемая функция необходимо должна быть ограниченной, то единственное, что надо доказать — это то, что из интегрируемости следует непрерывность почти всюду, а из ограниченности и непрерывности почти всюду следует интегрируемость. Поэтому считаем f априори ограниченной.

f — интегрируема $\Longleftrightarrow \int\limits_I g_N(x) - f_N(x)dx \longrightarrow 0$ при $N \to \infty$ (из идеи для Критерия Лебега).

Итак, у нас есть последовательность вложенных друг в друга, попарно непересекающихся измельчений $\mathbb{T}_N = \{\widetilde{I_m^N}\}$, и функции $g_N(x) = \sum\limits_m \sup\limits_{\widetilde{I_m^N}} f \cdot X_{\widetilde{I_m^N}}(x)$ и $f_N = \sum\limits_m \inf\limits_{\widetilde{I_m^N}} f \cdot X_{\widetilde{I_m^N}}(x)dx$.

Пусть для всех N все $x \notin$ сетке разбиений (плоскостям разбиения). Заметим, что сетка — это множество меры ноль, потому что каждое её сечение — это множество меры ноль. Это в свою очередь так, потому что его можно накрыть интервалами (отрезками) длины (или площади) равной ε. А теперь из-за того, что всех сечений не более чем счетный набор, то при их объединении мы получаем множество меры нуль (по свойству). Значит, мы берем x из дополнения к множеству меры нуль. Давайте докажем, что для него $g_N - f_N \longrightarrow \omega_f(x)$ при $N \to \infty$, где $\omega_f(x) = \lim\limits_{\delta \to 0+} \underbrace{\omega(f, U_\delta(x))}_{\sup\limits_{U_\delta(x)} f - \inf\limits_{U_\delta(x)} f = \sup\limits_{x_1, x_2 \in U_\delta(x)} |f(x_1) - f_(x_2)|}$, f непрерывна в точке $x \Leftrightarrow \omega_f(x) = 0$.

Возьмём на $\widetilde{I_m^N}$ точку x. По нашему построению эта точка будет внутренней, значит она входит в $\widetilde{I_m^N}$ с некоторым шаром радиуса δ. Это означает, что $g_N(x) - f_N(x) \geq \omega(f)$, а так как в правой части стоит супремум, то при уменьшении области он может только уменьшаться $\Rightarrow g_N(x) - f_N(x) \geq \omega(f) \geq \omega_f(x)$ (предельное значение)

Теперь поймём, что будет с другой стороны. Масштаб у наших разбиений стремится к нулю, значит, если мы возьмем x, возьмем окружность с центром в точке x и радиусом δ и подождем, пока масштаб разбиения станет меньше дельта $\lambda(\mathbb{T}_N) < \delta$, то брусок, содержащий точку x, полностью поместится внутри этой окружности (окрестности точки x). А как только это произойдет, то $\Rightarrow g_N(x) - f_N(x) \leqslant \omega(f, U_\delta(x))$. Получается, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $\omega(f, U_\delta(x)) \leqslant \omega_f(x) + \varepsilon$ и существует такое N_0, что для любого $N > N_0$: $\lambda(\mathbb{T}_N) < \delta$ и $\omega_f(x) \leqslant g_N(x) - f_N(x) \leqslant \omega_f(x) + \varepsilon$.

Итак, 1) для почти всех $x \in I$: $g_N(x) - f_N(x) \longrightarrow \omega_f(x)$

2) $0 \leqslant g_N(x) - f_N(x) \leqslant 2 \sup_I f$.

По теореме Лебега $\int\limits_I g_N - f_N dx \longrightarrow \int\limits_I \omega_f(x)dx$ – интеграл Лебега.

f интегрируема $\iff \int\limits_I \omega_f(x)dx = 0 \iff \omega_f(x) = 0$ почти всюду $\iff f$ — почти всюду непрерывна. Пояснения по поводу интеграла Лебега будут позже. ■

Следствие 5. *Пусть φ — непрерывная функция, а f — интегрируемая функция на брусе I. Тогда $\varphi(f)$ интегрируема на I. (Обратно делать нельзя).*

Доказательство. Область значений ограничена, потому что интегрируемая функция ограничена. Непрерывная функция на отрезке ограничена. Поэтому $\varphi(f)$ автоматически ограничена. А во всех точках непрерывности f композция непрерывна. Поэтому $\varphi(f)$ почти всюду непрерывна и по Критерию Лебега она интегрируема. ■

Интеграл по множеству

Определение 8. Пусть A — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ и $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. **Интеграл по множеству** A : $\int\limits_A f dx = \int\limits_{I \supset A} f(x) \cdot \chi_A(x)dx$ (считаем, что f как угодно доопределена вне множества A, а само это произведение под интегралом означает, что мы вместо функции f рассматриваем функцию, которая вне A равна нулю). I – какой-то замкнутый брус, содержащий A.

Утверждение 6. *Определение корректно, то есть не зависит от выбора бруска I.*
Замечание: корректность надо определять, потому что могло так оказаться, что для одного бруска есть интеграл, а для другого нет. Или для двух разных брусков интегралы есть, но они разные.

Доказательство. 1) Попытаемся понять, зависит ли интегрируемость от выбора бруска.
Берём два бруска I_1 I_2. Оба содержат A. Но тогда и их пересечение, которое также является бруском, тоже содержит A: $I_1 \cap I_2 = J \supset A$.
Если $f \cdot \chi_A$ – ограничена на $I_1 \Longrightarrow$ она будет ограничена на J, но поскольку по определению она вне J точно ноль (потому что она вне A точно ноль), то $f \cdot \chi_A$ – ограничена на I_2 (так как на $I_2 \setminus J$ она равна нулю). В итоге $f \cdot \chi_A$ ограничена на двух брусках.
Посмотрим на свойство непрерывности. Пусть $f \cdot \chi_A$ — непрерывна почти всюду на I_1. Тогда эта функция непрерывна почти всюду на J, потому что $J \subset I_1$. То есть все точки непрерывности, которые лежали в J там и остаются, а точки разрыва в J — это подмножество исходных точек разрыва, а подмножество множества меры нуль — это множество меры нуль. Из непрерывности почти всюду на J следует непрерывность почти всюду на I_2. Это так, потому что вне замкнутого бруска J функция непрерывна (она там тождественна нулю), внутри бруска почти все точки — это точки непрерывности (они при переходе остались таковыми), а единственные

точки разрыва, которые могли добавиться, находятся на границе ∂J, а она является множеством меры нуль. Получается, что если функция ограничена и почти всюду непрерывна на бруске I_1, то она сохраняет эти же свойства на бруске I_2. По критерию Лебега это означает, что интегрируемость на I_1 влечет интегрируемость на I_2. Эти бруски можно поменять местами, а значит интегрируемость полностью сохраняется. Кроме того, мы проверили интегрируемость и на бруске J.
2) Поймём, что значение интеграла не зависит от выбора бруска.
Поскольку мы знаем, что интеграл существует на обоих брусках, то мы можем в определении интеграла выбрать нужное нам разбиение и отмеченные точки. Будем разбивать так, чтобы у этих двух брусков на общей части было общее разбиение. $\mathbb{T}_1$ для бруска I_1, $\mathbb{T}_2$ для бруска I_2 и $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ – разбиение для $J = I_1 \cap I_2$.
Теперь берём отмеченные разбиения: ξ^1, ξ^2, а на общей части они совпадают и дают ξ^3.
Важное замечание: на тех брусках разбиения, которые лежат вне бруска J, мы всегда выбираем отмеченную точку внутри: на $I_1 \setminus J$ и $I_2 \setminus J$ каждая ξ_i лежит внутри бруска. Это нужно для того, чтобы не добавить ненулевые слагаемые вне J в той ситуации, когда A вышло на границу J. Если этого не сделать, то при составлении римановой суммы могут добавиться бруски, лежащие в дополнении к J, но края которых принадлежат A. А мы напротив хотим, чтобы они стали нулевыми слагаемыми.

$$\sigma(f\chi_A, \mathbb{T}_1, \xi^1) = \sum_{\substack{\text{по } \mathbb{T}^1\cap\mathbb{T}^2 \\ (\text{по другим – } 0)}} f(\xi^3_m)|I_m| = \sigma(f\chi_A, \mathbb{T}_2, \xi^2)$$

Теперь устремляем масштаб к нулю. $\sigma(f\chi_A, \mathbb{T}_1, \xi^1) \longrightarrow \int\limits_{I_1}$, а $\sigma(f\chi_A, \mathbb{T}_2, \xi^2) \longrightarrow \int\limits_{I_2}$

$$\text{и} \implies \int\limits_{I_1} = \int\limits_{I_2}.$$

Если в пересечении I_1 и I_2 получается отрезок, то из-за особенности выбора разбиения и отмеченных точек $\sum\limits_{\substack{\text{по } \mathbb{T}^1\cap\mathbb{T}^2 \\ (\text{по другим – } 0)}} f(\xi^3_m)|I_m| = 0$, и доказательство корректно.

■

Пример 4. Пусть E —ограниченное множество. Когда существует $\int\limits_E 1dx$? Иначе говоря, когда интегрируема χ_E?

◀
По критерию Лебега: интегрируема $\iff$ почти всюду непрерывна.

Утверждение 7. *Множество точек разрыва χ_E — это в точности ∂E = множество всех граничных точек E.*
Граничная точка множества – точка пространства, любая (открытая) окрестность которой содержит как точки, принадлежащие рассматриваемому множеству, так и не принадлежащие ему точки (точки его дополнения). Граничная

точка множества может как принадлежать, так и не принадлежать этому множеству.

Доказательство. Возьмём точку x. Пусть это внутренняя точка. Тогда в целой окрестности функция тождественна $1 \Longrightarrow$ это точка непрерывности.
Пусть это внешняя точка. Тогда в целой окрестности функция тождественна $0 \Longrightarrow$ это точка непрерывности.
Теперь пусть $x \in \partial E$. Тогда во всякой окрестности есть точки, в которых значение — 1 и есть, в которых — 0: $\forall B(x,\delta)\ \chi_E(x_1)=0$ и $\chi_E(x_2)=1$. То есть точки на границе — точки разрыва, потому что можно взять последовательность точек, сходящихся к x, по которым функция будет единицей, но одновременно с этим можно найти такую последовательность, при которых будет ноль.

■

Следовательно, по критерию Лебега χ_E — интегрируема $\Longleftrightarrow \partial E$ — множество меры нуль.
▶

Определение 9. Если χ_E интегрируема, то есть E — ограниченное и ∂E — меры нуль, то объём или **мера Жордана** множества E — это:

$$|E| = \int\limits_E 1dx$$

Не любое ограниченное множество имеет объём и является допустимым. Например, у множества точек с рациональными координатами внутри единичного куба границей будет являться сам куб, то есть не множество меры нуль, то есть характеристическая функция такого множества не интегрируема по Риману.

Определение 10. Ограниченные множества с границей меры нуль по Лебегу называются **допустимыми или измеримыми по Жордану**.

Утверждение 8. *Если E_1, E_2 — допустимые, то $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cup E_2$, $E_1 \setminus E_2$ — допустимые.*

Доказательство. Ограниченность рассматриваемых множеств ясна, поэтому будем доказывать, что их границы — множества меры нуль.
Нужно доказать, что границы объединения, пересечения и разности — это подмножества объединения границ E_1 и E_2, потому что тогда они будут множествами меры нуль (подмножество меры нуль — это множество меры нуль).

$$\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$$

Пусть мы взяли точку $x \notin \partial E_1 \cup \partial E_2$. Она может быть внутренней или внешней и принадлежать либо E_1, либо E_2.
Пусть она принадлежит и E_1, и E_2. Тогда x будет внутренней для пересечения $\Longrightarrow$ это не граничная точка.
Пусть она не принадлежит ни E_1, ни E_2. Тогда x будет внешней для пересечения

$\Longrightarrow$ это не граничная точка.
Аналогично рассматриваются оставшиеся два случая.

■

Теорема 8. *Пусть E — допустимое множество. f интегрируема на $E \Longleftrightarrow f$ — ограничена и непрерывна почти всюду на E.*

Доказательство. f — интегрирума на $E \Longrightarrow f \cdot \chi_E$ — интегрируемо. Если f ограничено на E, то и произведение ограничено на E, и наоборот.
У множества E границы меры ноль, поэтому из всего множества достаточно рассматривать только внутренность. Взяли такую x внутреннюю. Если в окрестности это точка непрерывности $f \cdot \chi_E$, то она в этой окрестности точка непрерывности f. Значит все внутренние точки, которые были точками непрерывности произведения, остаются таковыми и для f. Получается, что если точка разрыва у $f \cdot \chi_E$ меры ноль, то и у f точки разрыва меры ноль, и, возможно, добавится граница, а она меры нуль. Итак, если $f \cdot \chi_E$ почти всюду непрерывно на E, то и f почти всюду непрерывна на E.
Такие же рассуждения применимы для: f почти всюду непрерывно $\Longrightarrow f \cdot \chi_E$ почти всюду непрерывно.

■

Лекция 5

Свойства интеграла по множеству

Теорема 9. *(СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА ПО МНОЖЕСТВУ)*

1) **Линейность.**
Пусть E — допустимое. f и g интегрируемы на E. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g$ интегрируема на E и

$$\int\limits_E (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int\limits_E f dx + \beta \int\limits_E g dx$$

Доказательство. По определению:

$$\int\limits_E (\alpha f + \beta g) dx = \int\limits_{I \supset E} (\alpha f \chi_E + \beta g \chi_E) dx = \star$$

По уже доказанному для бруска I:

$$\star = \alpha \int\limits_{I \supset E} f \chi_E dx + \beta \int\limits_{I \supset E} g \chi_E dx = \alpha \int\limits_E f dx + \beta \int\limits_E g dx$$

То, что уже доказано для бруска I относится не только к равенству, но и к существованию интеграла.

■

2) **Монотонность**.
Пусть E — допустимое. f и g интегрируемы на E и $f \leqslant g$ на E. Тогда:

$$\int\limits_E f dx \leqslant \int\limits_E g dx$$

Доказательство.

$$\int\limits_E f dx = \int\limits_{I \supset E} f \chi_E dx \overbrace{\leqslant}^{\substack{f\chi_E \leqslant g\chi_E \text{ (на E выполнено по условию,} \\ \text{а вне обе части равны 0)}}} \int\limits_{I \supset E} g \chi_E dx = \int\limits_E g dx$$

■

Следствие 6. *(Теорема о среднем)*
Если f интегрируема на E, то $\int\limits_E f dx = \mu \cdot |E|$, *где* $\mu \in [\inf\limits_E f; \sup\limits_E f]$.

Доказательство.
$\inf\limits_E f \leqslant f \leqslant \sup\limits_E f$. Теперь интегрируем это неравенство по множеству E, пользуясь

монотонностью:

$$\inf_E f|E| \leqslant \int_E f dx \leqslant \sup_E f|E|$$

Из этой цепочки неравенств следует, что если объём равен нулю, то интеграл f равен нулю. Если так случилось, то в качестве μ можем взять любое число. Если же объём не был равен нулю, то поделим на него всё неравенство и получим число, зажатое между верхней и нижней гранью, как и было указано в условии.

■

Замечание 3. Тем самым, если $|E| = 0$, то $\int\limits_E f dx = 0$ (в случае, когда f интегрируема по множеству E).

Утверждение 9. *Пусть f интегрируема на допустимом множестве E.*
1) если $f \geq 0$ и $\int\limits_E f dx = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E (то есть те точки, где она не ноль — это множество меры нуль по Лебегу).
2) если $f = 0$ почти всюду на E, то $\int\limits_E f dx = 0$.

Напоминание: $|E| = \int\limits_E \chi_E dx$.
В это утверждение включено следующее:
1) У множества нулевой объём $\Longrightarrow$ это множестов меры нуль по Лебегу ($\chi_E \geq 0$).
2) Множество допустимо и меры нуль по Лебегу $\Longrightarrow$ это множество имеет объём 0. (χ_E у множества меры нуль — 0 почти всюду).

Доказательство.
1) Рассмотрим функцию $f \cdot \chi_E \geq 0$ и $\int\limits_E f\chi_E dx = 0$.

По критерию Лебега $g = f \cdot \chi_E$ почти всюду непрерывна. Пусть в точке x_0 g непрерывна и $g(x_0) > 0$. Так как нас интересует все с точностью до почти всюду, то мы можем рассматривать точки, лежащие внутри или на границе. Тогда в целой окрестности существует брус J, $|I \cap J| > 0$, содержащий x_0: $g(x) \geq \frac{g(x_0)}{2}$ $\forall x \in J$. Следовательно, $\chi_{J\cap I}(x) \cdot \frac{g(x_0)}{2} \leqslant g(x)$, потому что на множестве $I \cap J$ это верно, а вне его функция $g(x)$ сравнивается с нулём, и неравенство верно. Проинтегрировав его, используя свойство монотонности, получим: $0 < |J \cap I|\frac{g(x_0)}{2} \leqslant \int\limits_I g dx$. Пришли к противоречию $\Longrightarrow$ во всех точках непрерывночти функция $g = 0$, тем самым она почти всюду ноль. То есть $f \cdot \chi_E$ почти всюду ноль. Однако точками, в которых она отлична от нуля, могут быть только точки множества E, потому что вне его $f \cdot \chi_E \equiv 0$. Значит множество $X \subset E$, где $f \cdot \chi_E \neq 0$, это точки, в которых $f \neq 0$, а выше было доказано, что это обязательно множество меры нуль.
2) Рассмотрим функцию $f \cdot \chi_E \geq 0$, которая по условию почти всюду ноль. Берём

брусок $I \supset E$ и хотим доказать, что $\int\limits_I f\chi_E dx \overbrace{=}^{?} 0$.

Интеграл — это предел римановых сумм. Когда мы считаем риманову сумму, то берем произвольные отмеченные точки (если известно, что функция интегрируема). В бруски не могут оказаться все точки, где функция не ноль, потому что тогда бы этот брус был бы подмножеством множества меры нуль, что противоречит определению невырожденного бруска, обладающего ненулевой мерой. Получается, что в римановой сумме $\sigma(f\chi_E, \mathbb{T}, \xi)$ мы всегда можем выбрать ξ так, что $\sigma(f\chi_E, \mathbb{T}, \xi) = 0$ для любого разбиения, потому что в каждом бруске разбиения обязательно есть точка, в которой $f\chi_E = 0$.
Итак, $\sigma(f\chi_E, \mathbb{T}, \xi) = 0 \Longrightarrow \int\limits_I f\chi_E dx = 0$.

■

3) **Аддитивность**.
Пусть E_1 и E_2 — допустимые множества и f интегрируема на $E_1 \cup E_2$. Тогда f интегрируема и на $E_1 \cap E_2$, и на E_1, и на E_2, и верно равенство:

$$\int\limits_{E_1\cup E_2} f dx = \int\limits_{E_1} f dx + \int\limits_{E_2} f dx - \int\limits_{E_1\cap E_2} f dx$$

В частности, если $|E_1 \cap E_2| = 0$, то последнего слагаемого нет.

Доказательство.
1) По критерию Лебега из интегрируемости на $E_1 \cup E_2$ следует интегрируемость на каждом и на пересечении.
• Если ограничена на $E_1 \cup E_2$, то на каждой части тоже ограничена.
• Ясно, что если функция непрерывна в какой-то точке из $E_1 \cup E_2$ по $E_1 \cup E_2$ (то есть можно взять последовательность точек, сходящихся к x_0, из $E_1 \cup E_2$, и предел будет равен значению в этой точке), то она будет в этой точке непрерывна и по E_1 (если она из E_1). Аналогично и с E_2, и с $E_1 \cap E_2$.
2) Равенство в формулировке следует из похожего для функций:

$$f\chi_{E_1\cup E_2} = f\chi_{E_1} + f\chi_{E_2} - f\chi_{E_1\cap E_2}$$

То есть аддитивность — это частный случай линейности.
3) Если объем, по которому мы интегрируем равен нулю, то и интеграл будет равен нулю.

■

Теорема 10. *Пусть E — допустимое множество в бруске $I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{n+m}$. $E_x = \{y | (x, y) \in E\}$ (сечение). Предполагаем, что для каждого x сечение E_x — допустимое.*
Пусть f интегрируема на E и $\forall x$ функция $y \longmapsto f(x, y)$ интегрируема на E_x. Тогда

$$\int\limits_E f(x, y) dx dy = \int\limits_{I_x} dx \int\limits_E f(x, y) dy$$

Аналогичное утверждение верно для $E_y = \{x|(x,y) \in E\}$.

Доказательство.
$\int\limits_E f dxdy = \int\limits_{I_x \times I_y} f\chi_E dxdy$. $f\chi_E$ интегрируема на бруске $I_x \times I_y$, а при каждом фиксированном x функция $y \longmapsto f(x,y)\chi_E(x,y)$ интегрируема на I_y. Также заметим, что если фиксировать x, то $\chi_E(x,\cdot)$ — характеристическая функция E_x.
Дальше применяем уже доказанную теорему Фубини:

$$\int\limits_{I_x \times I_y} f\chi_E dxdy = \int\limits_{I_x} dx \int\limits_{I_y} f\chi_E dy$$

Учитывая замечание про $\chi_E(x,\cdot)$, получаем:

$$\int\limits_{I_x} dx \int\limits_{I_y} f\chi_E dy = \int\limits_{E_x} f dy$$

■

Важный частный случай

Если E — допустимое и $\forall x$ E_x — допустимое, то $|E| = \int\limits_{I_x} E_x dx$ $(f \equiv 1)$.

Теорема 11. *Если любая плоскость, параллельная данной, пересекает два тела по фигурам равной площади, то объемы этих тел равны. (Если при каждом x площади сечений совпадают, то объёмы равны.)*

Доказательство. Обозначим через V_1 объём первого тела, а через V_2 — объем второго тела. По частному случаю $|V_1| = \int\limits_{I_x} S_1(x)dx$, $|V_2| = \int\limits_{I_x} S_2(x)dx$, а по условию $S_1(x) = S_2(x)$ $\forall x$. Следовательно, $V_1 = V_2$.

■

Лекция 6

Формула замены переменных

Пусть Ω и D — открытые множества в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi : \Omega \longrightarrow D$ — диффеоморфизм, то есть биекция и φ и φ^{-1} — непрерывно-дифференцируемые функции.

Утверждение 10. *Пусть $A \subset \Omega$ — множество меры нуль по Лебегу. Тогда $\varphi(A)$ —множество меры нуль по Лебегу.*

Доказательство. 1) Задача
Ω можно представить в виде объединения не более чем счетного набора брусков, пересекающихся только по границам. Идея: "накладываем"на Ω сетку и отмечаем е прямоугольники, которые попали внутрь Ω; поверх этой сетки накладываем сетку в 2 раза мельче, и т.д.

2) Таким образом, достаточно рассмотреть такую ситуацию:
Замкнутый брус $I \supset A$ и $\bar{I} \subset \Omega$. Поскольку брусок замкнутый, то $||\varphi'|| \leqslant M$, и на этом бруске $||\varphi(x)-\varphi(y)|| \leqslant M||x-y||$ (из-за $\varphi(x)-\varphi(y) = \int\limits_0^1 \varphi'(y+t(x-y))(x-y)dt$).
На всём открытом множестве такой оценки могло не быть.
φ' — это набор всех производных, они непрерывны, а на компакте ограничены.
3) A — множество меры нуль. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \{J_j\}$, $J_j \subset I$ и $A \subset \cup J_j$: $\sum\limits_j |J_j| < \varepsilon$.
Можно ли покрыть множество меры нуль кубами, то есть, чтобы J_j было кубом? Пусть у нас был какой-то брус. Увеличивая его так, чтоб его ребра оказались рациональными числами $\frac{s}{t}$ и $\frac{p}{q}$, и его объем возрос бы не больше чем в 2^n раза, можно разрезать этот брус на конечное число кубов с шагом $\frac{1}{tq}$.
Выберем в J_j точку c и посмотрим, куда она отображается. Самое большое расстояние в $\varphi(J_j)$ — это $a\sqrt{n}$, где a — это длина ребра. Радиус окружности именно такой из-за свойства сжимающего отображения. Далее вписываем её в куб с ребром $2Ma\sqrt{n}$.

$$\widetilde{J}_j = \underbrace{(2M\sqrt{n})^n}_{c-const} \cdot |J_j|$$

Тогда поскольку $A \subset \cup J_j \Longrightarrow \varphi(A) \subset \bigcup \varphi(J_j) \subset \bigcup \widetilde{J}_j$, $\sum |\widetilde{J}_j| < c \cdot \varepsilon$.
Доказательство завершено.

■

Утверждение 11. $\varphi : \Omega \longrightarrow D$ *— диффеоморфизм.* $A \bigcup \partial A = \bar{A} \subset \Omega$. *Тогда* $\varphi(\partial A) = \partial\varphi(A)$.

Доказательство. 1) Пусть $\varphi(x)$ — внутренняя точка $\varphi(A)$. Тогда $\exists$ открытая окрестность этой точки $V(\varphi(x)) \subset \varphi A$. Так как φ непрерывна $\Longrightarrow$ $\exists$ открытая окрестность $U(x)$: $\varphi(U(x)) \subset V(\varphi(x))$ (по определению непрерывности). Это означает, что $\varphi(U(x)) \subset V(\varphi(x)) \subset \varphi(A) \Longrightarrow U(x) \subset A$, потому что из-за биекции в φA переходят только точки из A. Мы доказали, что x входит в A с некоторой окрестностью и что если образ — внутренняя точка, то и сам x был внутренней точкой. То же самое рассуждение применимо к φ^{-1}. Итого: внутренние точки $A \longleftrightarrow$ внутренние точки

$\varphi(A)$.
Точно также доказывается, что внешние точки $A \longleftrightarrow$ внешние точки $\varphi(A)$.
2) Из доказанного выше следует, что $\varphi(\partial A) = \partial\varphi(A)$.
Пояснение: пусть взяли граничную точку. Она не может перейти ни во внутреннюю, потому что туда могла перейти только внутренняя, ни во внешнюю, потому что туда могла перейти только внешняя. И наоборот. Важно, что φ — это диффеоморфизм (хотя здесь был бы достаточен гомеоморфизм).

■

Следствие 7. *Если $\varphi : \Omega \longrightarrow D$ — диффеоморфизм, и $\bar{E} \subset \Omega$, и E — допустимое, то $\varphi(E)$ — допустимое множество.*

Доказательство. Нужно проверить, что множество ограничено и граница — множество меры нуль.
1) $\bar{E}$ — компакт, φ — непрерывно $\Longrightarrow \varphi(E)$ (и даже $\varphi(\bar{E})$) ограничено.
2) Граница переходит в границу (по предыдущему утверждению). Граница первого была множество меры нуль, а ММН переходит в ММН.

■

Теорема 12. *(Формула замены переменных)*
Пусть Ω и D — открытые множества и $\varphi : \Omega \longrightarrow D$ — диффеоморфизм. Пусть E — допустимое множество и $\bar{E} \subset \Omega$. Пусть f определена на $\varphi(E)$. (то есть функция на D).
Тогда f интегрируема на $\varphi(E) \Longleftrightarrow f(\varphi(t))|\varphi'(t)|$ интегрируема на E, где $|\varphi'(t)| = |\det($матрицы Якоби $\varphi)|$. Более того, в случае интегрируемости верно равенство:

$$\int\limits_{\varphi(E)} f(x)dx = \int\limits_{E} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt$$

Доказательство. Утверждение состоит из двух частей: интегрируемости и равенства.
1) Интегрируемость.
Ограниченность. Так как f интегрируема на $\varphi(E)$, то она ограничена на этом множестве и почти всюду непрерывна. Тогда $f(\varphi(t))$ ограничена, а $|\varphi'(t)|$ будет ограничена из-за непрерывности φ на $\bar{E}$, то есть на компакте. Пусть теперь $f(\varphi(t))|\varphi'(t)|$ ограничена; из-за диффеоморфизма матрица Якоби в каждой точке невырождена $\Rightarrow |\varphi'(t)| \geq m$, $m \geq$ на $\bar{E}$, потому что она достигает своего минимума, и он ненулевой. $\Longrightarrow f(\varphi(t))$ ограничена $\Longrightarrow f(x)$ ограничена, потому что $\varphi(t)$ пробегает все значения на $\varphi(E)$.
Непрерывность. $f(x)$ непрерывна в точке $x \in \varphi(E) \Longleftrightarrow f(\varphi(t))$ непрерывна в точке $\varphi^{-1}(x)$ (непрерывность композиции). Значит, $\varphi\underbrace{[\text{точки непрерывности } f(\varphi(t))]}_{E} =$

$\underbrace{\{\text{т. непрерывности } f\}}_{\varphi(E)}$.

Получается, что $\varphi($точки разрыва $f(\varphi(t))$ в $E) = \{$т. разрыва $f(x)\}$. Аналогично для φ^{-1}. Соответственнно, если одно из этих множеств меры нуль, то и другое,

и наоборот.
2) Равенство: $\int\limits_{\varphi(E)} f(x)dx = \int\limits_E f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt.$

• Можно считать, что $f \geq 0$, так как $f = f^+ - f^-$, где $f^+ = max\{f, 0\}$, $f^- = max\{-f, 0\}$ и доказываемое равенство линейно по f.

• Достаточно доказать, что $\int\limits_{\varphi(E)} f(x)dx \leqslant \int\limits_E f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt$ (здесь замена на $x = \varphi(t)$, а обратное неравенство получается заменой $t = \varphi^{-1}(x)$: $\leqslant \int\limits_{\varphi(E)} f(x)|\varphi'(\varphi^{-1}(x))| \cdot |\varphi'^{-1}(x)|dx$

• Можно считать, что $E \subset K \subset \Omega$, K — замкнутый куб, и даже заменить E на K. Существует конечный набор замкнутых кубов: K_j, пересекающихся только по границам, $K_j \subset \Omega$ и $E \subset \bigcup\limits_j K_j$. $\bar{E}$ — компакт, $\forall a \in \bar{E}$ $\exists K_a$ — открытый куб: $a \in K_a$ и $\bar{K_a} \subset \Omega \implies \bigcup\limits_{a \in \bar{E}} K_a \supset \bar{E} \rightsquigarrow$ конечное подпокрытие. Можно считать, что рёбра K_{a_i} имеют рациональные концы ($\bar{E} \subset K_{a_1} \bigcup ... \bigcup K_{a_N}$). Из этих кубов делаем набор попарно непересекающихся по внутренностям, замыкаем их: проецируем стороны на каждую из осей координат, получаем рациональные точки.
Итак, $E \subset \bigcup\limits_j K_j$, K_j не пересекаются внутренностями. Тогда из аддитивности:

$$\int\limits_E f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt = \sum_j \int\limits_{E \bigcap K_j} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt \geq \sum_j \int\limits_{\varphi(E \bigcap K_j)} f(x)dx = \int\limits_{\varphi(E)} f(x)dx,$$

так как $\varphi(E) = \bigcup\limits_j \varphi(E \bigcap K_j)$, $\varphi(E \bigcap K_j) \bigcap \varphi(E \bigcap K_m) = \varphi((E \bigcap K_j) \bigcap (E \bigcap K_m))$ — множество меры нуль по Лебегу как образ множества меры нуль по Лебегу. Почему можно заменить E на K?
Пусть $E \subset K \implies$

$$\int\limits_E f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt = \int\limits_K f(\varphi(t)) \underbrace{\chi_{\varphi(E)}(\varphi(t))}_{\chi_E(t)} |\varphi'(t)|dt = \int\limits_{\varphi(K)} f(x)\chi_{\varphi(E)}(x)dx = \int\limits_{\varphi(E)} fdx$$

Так как $E \subset K \implies \varphi(E) \subset \varphi(K)$.

• Достаточно доказать неравенство $|\varphi(k)| \leqslant \int\limits_K |\varphi'(t)|dt$, где K — куб в Ω. Рассмотрим $\mathbb{T} = \{I_m\}$ — разбиение K на кубы $\implies \int\limits_K f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt = \sum\limits_m \int\limits_{I_m} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt \geq$
$\sum\limits_m \inf\limits_{I_m} f \cdot \int\limits_{I_m} |\varphi'(t)|dt \geq \sum\limits_m \inf\limits_{I_m} f|\varphi(I_m)| = \sum\limits_m \sup\limits_{I_m} f(\varphi(t))|\varphi(I_m)| + \sum\limits_m (\inf\limits_{I_m} f) - \sup\limits_{I_m} f)|\varphi(I_m)| \geq$
$\sum\limits_m \int\limits_{I_m} f(x)dx - c\sum\limits_m \left(\sup\limits_{I_m} f(\varphi(t)) - \inf\limits_{I_m} f(\varphi(t))\right)|I_m|$

$|\varphi'| \leqslant M$ на $K \Longrightarrow ||\varphi(x)-\varphi(y)|| \leqslant M||x-y|| \Longrightarrow \varphi(I_m) \subset I_m$, $|J_m| = \underbrace{(2M\sqrt{n})^n}_{C}|I_m|$

(см. первое утверждение).
(1)$\longrightarrow$0 при $\lambda(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$, так как $f(\varphi(t))$ интегрируема на K (см. критерий интегрируемости).
Итак, есть $K \subset \Omega$ — куб; хотим доказать, что $|\varphi(K)| \leqslant \int\limits_K |\varphi'(t)|dt$.

Лекция 7

Продолжение ФЗП

Задача. Пусть $L(x) = Ax$, A — невырожденная матрица; K — куб. Доказать, что $|L(K)| = |\det A| \cdot |K|$.

Предположим, что неравенство не выполнено, то есть $|\varphi(K)| > \int\limits_K |\varphi'(t)|dt \iff$

$|\varphi(K)| \cdot q \geq \int\limits_K |\varphi'(t)|dt$, $0 < q < 1$ (некоторое число).

Делим каждое ребро K пополам, получаем 2^n кубиков $\{K_j\}$. $\int\limits_{K_j} |\varphi'(t)|dt > |\varphi(K_j)| \cdot q$ $\forall K_j$?

Нет, иначе, складывая неравенства, получаем $\int\limits_K |\varphi'(t)|dt > |\varphi(K)| \cdot q$ — противоречие $\Longrightarrow \exists j$: $\int\limits_{K_j} |\varphi'(t)|dt \leqslant |\varphi(K_j)| \cdot q$.

С K_j делаем такое же разбиение, получаем последовательность вложенных кубов $K_j \supset K_{j+1} \supset ...$ со свойствами <ребра>$\longrightarrow 0$, $\forall j$ $|\varphi(K_j)| \cdot q \geq \int\limits_{K_j} |\varphi'(t)|dt \Longrightarrow$

$\exists a \in \bigcap\limits_j K_j$.

Возьмём $\varepsilon > 0$; из определения диф. $\exists U(a)$: $||\varphi(t) - (\varphi(a) + \varphi'(a)(t-a))|| < \varepsilon ||t-a||$.
$L(t) := \varphi(a) + \varphi'(a)(t-a)$,
$L^{-1}(s) = a + (\varphi'(a))^{-1}(s - \varphi(a))$. $||L^{-1}(s_1) - L^{-1}(s_2)|| = ||(\varphi'^{-1}(a))^{-1}(s_1 - s_2)|| \underbrace{\overset{?}{\leqslant}} C \cdot ||s_1 - s_2||$.
$\psi(t) := L^{-1} \circ \varphi(t) = L^{-1}(\varphi(t))$. $||\psi(t) - t|| = ||L^{-1}(\varphi(t)) - L^{-1}(L(t))|| \leqslant C \cdot ||\varphi(t) - L(t)|| \leqslant C \cdot \varepsilon \cdot ||t-a||$.
Пусть j такое, что $K_j \subset U(a)$. Пусть l_j — длина ребра K_j. $||\psi(t) - t|| \leqslant \sqrt{n} C \varepsilon l_j$. ($(t-a)$ наибольшее — диагональ).
$|J_j| = (1 + 2\sqrt{n} C\varepsilon)^n |K_j| \Longrightarrow \psi(K_j) \subset J_j \Longrightarrow \varphi(K_j) = L \circ \psi(K_j) \subset L(J_j)$. $|L(J_j)| = |\varphi'(a)| \cdot |J_j|$ (см. задачу) $\Longrightarrow |\varphi(K_j)| \leqslant |\varphi'(a)| \cdot |K_j| (1 + 2\sqrt{n} C \varepsilon)^n|$ (C зависит только от точки a).
Отображение $t \longrightarrow |\varphi'(t)|$ непрерывно в точке $a \Longrightarrow$ уменьшая, если надо, окрестность $U(a)$, можно считать, что $\frac{|\varphi'(a)|}{|\varphi'(t)|} < 1 + \varepsilon \Longrightarrow |\varphi'(a)| \cdot |K_j| \leqslant \int\limits_{K_j} |\varphi'(t)|dt(1+\varepsilon)$ (проинтегрировали это неравенство).
Итог: $|\varphi'(K_j)| \leqslant \int\limits_{K_j} |\varphi'(t)|dt(1+\varepsilon)$. С другой стороны, по построению $|\varphi(K_j)| \geq \frac{1}{q} \int\limits_{K_j} |\varphi'(t)|dt \neq 0$ (K_j — положительного объёма, $|\varphi;(t)|$ отделена от нуля, >0). Отсюда $1 < \frac{1}{q} \leqslant (1+\varepsilon)(1 + 2\sqrt{n} C\varepsilon)^n \longrightarrow 1$ при $\varepsilon \to 0$ (сократим интеграл) — противоречие $\Longrightarrow$ неравенство верно.

■

Лекция 8

Теорема Брауэра

Теорема 13. *(Теорема Брауэра)*
Пусть $\bar{B}$ — замкнутый шар и $f\colon \bar{B} \longrightarrow \bar{B}$ — непрерывное отображение. Тогда $\exists x \in B\colon f(x) = x$.

Замечание 4. Достаточно рассмотреть случай, когда f — гладкая в окрестности $\bar{B}$.
Непрерывную функцию f на $\bar{B}$ можно продолжить до непрерывной на $\mathbb{R}^n$
Теперь f на $\bar{B}$ — равномерное приближение последовательности гладких f_j.

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение для гладких отображений.
Так как:
1) f_j — гладкие на $\mathbb{R}^n$; $f_j \rightrightarrows f$ — было. Надо, чтобы $f_j : \bar{B} \longrightarrow \bar{B}$.
$|f - f_j| < 1/k$; $g_k = k/k + 1 \cdot f_{j_k}$;
$|g_k| = k/k + 1|f_{j_k}| \leqslant k/k + 1(1 + 1/k) = 1$.
2) Гладкие $g_k \rightrightarrows f$ на $\bar{B}$, $g_k : \bar{B} \longrightarrow \bar{B}$.
Пусть для гладких доказали про неподвижную точку:
$x_k \in \bar{B}$, $g_k(x_k) = x_k$, $x_k \longrightarrow x_0$.
$f(x_0) \longleftarrow g_k(x_k) = x_k \to x_0$

■

Утверждение 12. *Теорема Брауэра следует из Леммы о барабане: (не $\exists$ гладкого отображения $F : \bar{B} \longrightarrow \partial\bar{B}$ и $F(x) = x$ на $\partial\bar{B}$).*

Доказательство.
Пусть $f : \bar{B} \longrightarrow \bar{B}$ $f(x) \neq x$ $\forall x$ $F(x) = x + \lambda(x - f(x))$.
$1 = ||x + \lambda(x - f(x))||^2 = ||x||^2 + \lambda^2||x - f(x)||^2 + 2\lambda < x, x - f(x) >$.

$$\lambda = \frac{- < x, x - f(x) > + \sqrt{< x, x - f(x) >^2 + (1 - ||x||^2)||x - f(x)||^2}}{||x - f(x)||^2}$$

$||x|| = 1, < x, x - f(x) >= 0, 1 = ||x||^2 =< x, f(x) >\leqslant ||x||||f(x)|| \longrightarrow ||f(x)|| = 1$.
$||x - f(x)||^2 = ||x||^2 - 2 < x, f(x) > + ||f(x)||^2 = 1 - 2 + 1 = 0$ — противоречие.
Если теорема Брауэра неверна, то можем строить такие отображения, а по лемме о барабане нет — противоречие.

■

Утверждение 13. *(Лемма о барабане)*

Доказательство. Проверим, что такое отображение есть;
$g : \bar{B} \longrightarrow \partial B$, $g(x) = x$ на $\partial\bar{B}$, $t \in [0, 1]$.
$G_t(x) = (1 - t)x + t \cdot g(x)$. $t \approx 0 \longrightarrow G_t$ — хорошие отображения; $t \approx 1 \longrightarrow G_t$ — плохое. $\Longrightarrow$ противоречие.
$t \approx 0$
1) $G_t(x)$ — инъекция (в окрестности $\bar{B}$)
$||G_t(x) - G_t(z)|| \geq (1 - t)||x - z|| - t||g(x) - g(z)|| \geq (1 - t - Lt)||x - z||$. $t \leqslant 1/2(1 + L)$.
$||G_t(x) - G_t(z)|| \geq 1/2||x - z|| \Longrightarrow$ инъекция.

2) $G'_t(x)$ — невырождено (в окрестности $\bar{B}$, то есть в $\bar{B}_{1+\delta}$).
$G_0(x) = x$, $G'_0(x) = E$.
$G_t : B_{1+\delta} \longrightarrow G_t(B_{1+\delta})$ — диффеоморфизм открытых множеств.
G_t — инъекция $\longrightarrow G_t : B_{1+\delta} \to G_t(B_{1+\delta})$ — биекция $\longrightarrow$ локально диффеоморфизм.
3) $G_t(B) \subset B$. $||G_t(x)|| \leqslant (1-t)||x|| + t||g(x)|| \leqslant 1$.
$G_t(B)$ — открытое множество в B. Покажем, что $G_t(B)$ замкнуто в B.
$y_n \in G_t(B)$ $y_n \longrightarrow y \in B \Longrightarrow y \in G_t(B)$.
$B = \{x : ||x|| < 1\}$. $x_n \in B : y_n = G_t(x_n)$. $x_{n_k} \to x_0$.
$G_t(x_{n_k}) \longrightarrow G_t(x_0) = y$. Надо проверить, что $x_0 \in B$.
Пусть $x_0 \in \partial\bar{B} \Longrightarrow G_t(x_0) = x_0 \in \partial B$, но $y \neq \partial B$ — противоречие.
Итак, $G_t(B) = B$. $0 < |B| = |G_t(B)| = \int\limits_B |\det G'_t(x)| dx = \int\limits_B \det G'_t(x) dx = P(t)$ — многочлен.
$G'_t(x) = (1-t)E + tg'(x) \Longrightarrow P(t) \equiv |B| \neq 0$. $P(1) = \int\limits_B \det g'(x) dx = 0$. То есть противоречие.

$\blacksquare$

Следствие 8. *Пусть $K = f(\bar{B})$, где f — гомеоморфизм, если $F : K \longrightarrow K$ — непрерывно, то $\exists x \in K$: $F(x) \equiv x$.*

Пример 5. $\mathbb{R}^{2n+1} \supset S^{2n} = \{x : x_1^2 + ... + x_{2n+1}^2 = 1\}$.
Будем говорить, что на S^{2n} задано гладкое векторное поле, если заданы гладкие в окрестности S^{2n} функции $V_1^{(x)}, ..., V_{2n+1}^{(x)}$ такие, что $< V(x), x >= 0$ $\forall x \in S^{2n}$, $V(x) = (V_1(x), ..., V_{2n+1}(x))$.

Лекция 9

Многомерный несобственный интеграл Римана

Пусть E — произвольное подмножество $\mathbb{R}^n$ (в том числе само $\mathbb{R}^n$); набор допустимых множеств E_n: $E_n \subset E_n + 1$, $\bigcup\limits_n E_n = E$ называется **исчерпанием** E.

Пример 6. 1) $E = \mathbb{R}^n$, $E_n = \{x : ||x|| < n\}$;
2) $E = \{x : 0 < ||x|| < 1\}$, $E_n = \{x : 1/n < ||x|| < 1\}$.

Определение 11. Пусть $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Если для любого исчерпания E_n множества E, для которого f интегрируема на каждом E_n, существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{E_n} f(x)dx$, и этот предел не зависит от выбора исчерпания, то этот предел называется **несобственным интегралом Римана от** f **по** E. Его обозначают $\int\limits_E f(x)dx$.

Лемма 1. *Пусть E — допустимо и E_n — его исчерпание. Тогда* $\lim\limits_{n\to+\infty} |E_n| = |E|$.

Доказательство. $E_n \subset E_{n+1}$, $\bigcup\limits_n E_n = E \Longrightarrow |E_n|$ возрастает и $|E_n| \leqslant |E| \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |E_n| = |E|$. Так как E_n и E допустимы, то существуют такие допустимые множества Δ_n, Δ (открытые множества, которые состоят из конечного числа кубов): $|\Delta_n| \leqslant \varepsilon/2^n$, $|\Delta| < \varepsilon$ и $\Delta_n \supset \partial E_n$, $\Delta \supset \partial E$ (граница — замкнутое множество (дополнение — внутренность и внешность — открытые множества), ограниченное множество $\to$ компакт+множество меры нуль).
$E_n \bigcup \Delta_n \bigcup \Delta$ — открытое множество. $\bar{E} = E \bigcup \partial E$. Компакт $\bar{E} \subset \bigcup\limits_n (E_n \cup \Delta_n \cup \Delta)$ $>$ конечное подпокрытие, $n \leqslant N$.
Итак, $E \subset E_N \bigcup (\bigcup\limits_{k=1}^{N} \Delta_k) \bigcup \Delta \Longrightarrow |E| \leqslant |E_N| + \sum\limits_k \varepsilon/2^k + \varepsilon$, то есть для достаточно больших N: $|E| \leqslant |E_N| + 2\varepsilon \Longrightarrow |E| \leqslant \lim\limits_{N\to+\infty} |E_N| + 2\varepsilon$, $\varepsilon \to 0 \Longrightarrow |E| \leqslant \lim\limits_{N\to+\infty} |E_N|$ $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |E_n| = |E|$.

■

Теорема 14. *Если E допустимо, f интегрируема по Риману на E, то для любого исчерпания E_n*

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{E_n} f(x)dx = \int\limits_E f dx$$

Доказательство. $|\int\limits_E f dx - \int\limits_{E_n} f dx| = |\int\limits_{E \setminus E_n} f dx| \leqslant \sup\limits_E |f|(|E| - |E_n|) \to 0$ по лемме.

■

Теорема 15. *Пусть $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$; если $\exists$ исчерпание E_n: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int E_n f dx$ — конечный, то существует несобственный интеграл $\int\limits_E f dx$.*

Доказательство. Пусть D_n — другое исчерпание, тогда $E_n \bigcap D_m$ — исчерпание E_n; $\int_{E_n} fdx = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{E_n\cap D_m} fdx \leqslant \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{D_m} fdx$. Аналогично $\int\limits_{D_m} fdx \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} fdx$.
1) $\int\limits_{D_m} fdx$ не убывают ($f \geq 0$) и ограничены пределом $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} fdx \Longrightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{D_m} fdx$.
2) из полученных неравенств $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{D_m} fdx \geq\leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} fdx \Longrightarrow$ они совпадают $\Longrightarrow$ предел не зависит от исчерпания.

■

Теорема 16. *(Достаточное условие сходимости) Пусть f, g определены на E, у этих функций совпадают наборы допустимых множеств, на которых они интегрируемы, и $|f| \leqslant |g|$ на E. Если $\int\limits_E gdx$ сходится, то $\int\limits_E fdx$ $\int\limits_E |f|dx$ сходятся.*

Доказательство. Пусть сначала $f \geq 0$; E_n — исчерпание $\Longrightarrow \int\limits_{E_n} fdx \leqslant \int\limits_{E_n} gdx \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} gdx \Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} fdx$. По предыдущей теореме это означает, что $\int\limits_E fdx$ существует.
В общем случае мы уже знаем, что $\int\limits_E |f|dx$ сходится ($|f| \geq 0$).
$f = f_+ - f_-$, $f_+ = \max\{f, 0\}$; $f_- = \max\{-f, 0\}$; $f_+, f_- \geq 0$ и $f_+ \leqslant |f|$, $f_- \leqslant |f| \Longrightarrow$ f_+, f_- интегрируемы $\Longrightarrow f$ интегрируема по линейности.

■

Утверждение 14. *(без доказательства)*
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, у f и $|f|$ одинаковый набор допустимых множеств, на которых они интегрируемы $\Longrightarrow \int\limits_E fdx$ сходится $\Longleftrightarrow \int\limits_E |f|dx$ сходится (не нужно отдельно исследовать абсолютную и условную сходимость).

Лекция 10

Мера и интеграл по мере

Пусть $X \neq 0$. Набор подмножеств X замкнутый относительно операций $\cup, \cap, \setminus$, содержащий $\varnothing$ и X, называется **алгеброй множеств**. Если алгебра множеств оказалась замкнутой относительно счётных операций $\cap, \cup$, то её называют σ**–алгеброй**. Пусть S —некоторый набор подмножеств X. Наименьшая по включению σ–алгебра, содержащая S, называется σ**–алгеброй, порожденной** S. Обозначение: $\sigma(S)$. То есть, если σ–алгебра $\mathcal{F}$ содержит набор S ($S \subset \mathcal{F}$), то $\sigma(S) \subset \mathcal{F}$. Её можно записать так: $\sigma(S) = \bigcap\limits_{S \subset \mathcal{F}} \mathcal{F}$.

$\sigma(S)$ является сигма–алгеброй. Нам необходимо проверить три пункта. Во-первых, нам надо убедиться в том, что все пространство принадлежит пересечению. Ну то есть пространство всех элементарных исходов находится в пересечении этих $sigma$–алгебр. Ну это, конечно, так. Потому что если $\mathcal{F}_i$ – это $sigma$–алгебра, то она содержит X в качестве своего элемента по определению. И если $\mathcal{F}_j$ – это $sigma$–алгебра, то она тоже содержит X. Ну если X содержится и в $\mathcal{F}_i$, и в $\mathcal{F}_j$, то, естественно, оно лежит в пересечении двух этих множеств. Так что первый пункт очевиден. Дальше нам нужно проверить, что каждое подмножество находится в нашей $sigma$–алгебре вместе со своим дополнением. Ну давайте, действительно, предположим, что A принадлежит пересечению. Это означает, конечно, что A принадлежит $\mathcal{F}_i$ и одновременно A принадлежит $\mathcal{F}_2$ по определению пересечения. Так как A принадлежит $\mathcal{F}_i$, и мы знаем, что $\mathcal{F}_i$ – это σ–алгебра, то дополнение A принадлежит $\mathcal{F}_i$. Аналогично для $\mathcal{F}_j$. Следовательно, что дополнение A лежит в пересечении. Остаётся проверить тот факт, что любые объединения и пересечения, в том числе счетные, каких-то подмножеств, лежащих в пересечении σ–алгебр, тоже находятся в этом пересечении. Возьмём подмножества A_1, ..., A_n и, вообще говоря, и так далее. Они принадлежат пересечению наших σ–алгебр. Отсюда, конечно, следует, что, во-первых, все они принадлежат $\mathcal{F}_i$ и, во-вторых, все они принадлежат $\mathcal{F}_j$. Значит объединение по всем i A_i–тых и пересечение по всем i A_i–тых принадлежит $\mathcal{F}_i$ по определению сигма–алгебры. Аналогично для $\mathcal{F}_j$. Ну раз объединение принадлежит и $\mathcal{F}_j$, и $\mathcal{F}_i$, значит объединение принадлежит их пересечению. Раз пересечение принадлежит $\mathcal{F}_j$ и $\mathcal{F}_i$, значит это пересечение принадлежит пересечению σ–алгебр. Ну все, мы проверили все три свойства, и значит, действительно, пересечение любых σ–алгебр тоже является σ-алгеброй. Естественным образом σ–алгебры возникают в теории вероятности. Там рассматриваются алгебры событий.

Пример 7. $\{\varnothing, X\}$ — σ–алгебра.

Пример 8. 2^X (все подмножества X) — σ–алгебра.

Пример 9. $B \subset X$; Набор $\{\varnothing, B, X \setminus B, X\}$=$\sigma(\{B\})$ — σ–алгебра, порожденная B. То есть изначально брали множество B и провели с ним все возможные операции. Сначала взяли дополнение к B — $X \setminus B$; затем, объединили их и получили X; дальше по определению включили пустое множество (дополнение к X) и получили весь набор. Это в данном простом случае и называется процедурой порождения.

Пример 10. $X = \mathbb{N}$; $\{$все конечные множества или дополнения к конечным$\}$. Этот набор является алгеброй, так как:
a) в него входят $\varnothing$ и всё множество;
b) замкнутость относительно пересечения:
· пересечение двух конечных множеств конечно, значит попадает в наш набор;
· пересечение дополнений к конечным — это дополнение к конечному, так как у них хвост, начиная с некоторого момента один и тот же (весь натуральный ряд, начиная с некоторого момента в них (в дополнения) входит; он и войдет в пересечение)
c) замкнутость относительно объединения:
· объединение двух конечных — конечное;
· объединение двух дополнений к конечным — дополнение к конечному;
· объединение конечного и дополнения к конечному — дополнение к конечному
d) дополнения все уже включены в набор
Не является σ–алгеброй: рассмотрим $A_k = \{2k\}$, $k = 1, 2, ...$; $\bigcup\limits_k A_k =$ чётные числа; дополнение к ним не является конечным.

Пример 11. $[0, 1] = X$; $\{$все конечные объединения промежутков из $[0, 1]$ $\}$ — алгебра. Не σ–алгебра: рассмотрим $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ — не является конечным объединением промежутков из $[0, 1]$.
$\lhd$ Можно рассматривать точки ($\mathbb{Q}$), так как это промежутки "от a до a".
Пусть является конечным объединением промежутков. Значит в нём нет отличных от точек, так как иначе там были бы иррациональные числа. Тогда рассматриваемое пересечение — это только точки, а по предположению — конечный набор точек, что противоречит счётности, но не конечности $\mathbb{Q}$. $\rhd$

Пример 12. (Самый важный пример)
Пусть X — метрическое пространство; σ–алгебра, порожденная открытыми множествами, называется **борелевской σ–алгеброй**.
Обозначение: $\mathcal{B}(X)$.

Утверждение 15. *Борелевская σ–алгебра совпадает с σ–алгеброй, порожденной всеми замкнутыми множествами.*

Доказательство.
1) Доказываем включение $\mathcal{B} \subset \sigma$–алгебра.
Так как элементы σ–алгебры замкнуты относительно операции дополнения, а по определению замкнутое множество — это дополнение к открытому, то наша σ–алгебра содержит все открытые. То есть включение верно.
2) Доказываем включение σ–алгебра$\subset \mathcal{B}$.
Согласно свойству минимальности (см. определение σ–алгебры, порожденной S) достаточно проверить, что $\mathcal{B}$ содержит в себе все замкнутые множества. Тогда она будет содержать и минимальную σ–алгебру, порожденную всеми замкнутуыми. $\mathcal{B}$ их содержит, потому что они — это дополнения к открытым (и есть замкнутость относительно взятия операции дополнения).

$\blacksquare$

Утверждение 16. *Борелевская σ–алгебра на $\mathbb{R}^n$ = σ(все открытые кубы)=σ(все открытые кубы с рациональными рёбрами)=σ(все открытые шары)=σ(все откры-*

тые шары с рациональными радиусом и цетром)=...(открытые $\to$ замкнутые). Все сигма–алгебры в утверждении порождены множествами в скобках при σ.

Доказательство.
Доказываем первое равенство: $\mathcal{B}(X) = \sigma$(все открытые кубы);
$\supset$ — очевидно, потому что $\mathcal{B}(X)$ содержит все открытые, а значит и все открытые кубы, а значит и минимальную сигма–алгебру, содержащую открытые кубы.
$\subset$ — нужно проверить, что мы можем любое открытое множество собрать из открытых кубов, используя счетные операции.
Берем открытое множество, У кажой точки там в ней есть окрестность; в этой окрестности рисуем куб с рациональными координатами вершин. Так можно сделать и это открытое множество есть объединение таких кубов и их не более чем счетно $U = \bigcup\limits_{u \in U}$. Значит научились из открытых кубов строить любое открытое множество. То есть σ(все открытые кубы) содержит все открытые множества, а значит и минимальную сигма–алгебру.

■

Определение 12. Пусть заданы X, $\mathcal{A}$ — σ–алгебра; $(X,\mathcal{A})$ — **измеримое множество**.
Функция μ: $\mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty)$ называется **σ–аддитивной неотрицательной конечной мерой**, если $\forall\ A_n \in \mathcal{A}$: $A_n \bigcap A_m = \varnothing\ \forall n \neq m\ \mu(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n \mu(A_n)$ (σ–**аддитивность**). Если бы это было выполнено только для конечных наборов A_n, то это **аддитивность**.
Область определения меры — сигма–алгебра, а не множество X. Например, как в теории вероятности измеряется вероятность события, а не исхода.

Пример 13. $\mu \equiv 0$, $\mathcal{A} = 2^X$;

Пример 14. мера Дирака (дельта–мера); $\mathcal{A} = 2^X$

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

Пример 15. $X = \{1, 2, ..., n\}$, $p_k \geq 0$; $\mu(A) = \sum\limits_{k \in A} p_k$ — сигма–аддитивная мера, $\mu(\varnothing) = 0$, $\mathcal{A} = 2^X$.

Пример 16. $X = \mathbb{N}$, $p_k \geq 0$; $\sum\limits_k p_k < \infty$; $\mu(A) = \sum\limits_{k \in A} p_k$, $\mu(\varnothing) = 0$, $\mathcal{A} = 2^X$.

Пример 17. $X = \mathbb{N}$, алгебра $\mathcal{A} = \{$конечные множества, дополнения к конечным$\}$,

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & A \text{ — конечно} \\ 0, & X \setminus A \text{ — конечно.} \end{cases}$$

Аддитивность есть, а σ–аддитивности нет: берем $\mathbb{N} = \bigcup\limits_n \{n\}$;
$\mu(\{n\}) = 0$, $\mu(\mathbb{N}) = 1$, $1 \neq 0 + 0 + 0 ...$.

Пример 18. $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{N}}$; $\exists$ аддитивная функция μ: $\mathcal{A}\cdot \longrightarrow [0,1]$: $\mu(\mathbb{N}) = 1$, но μ(конечное множество)=0.

Теорема 17. *(Построение Каратеодори)*
Функция $\nu : 2^X \longrightarrow [0;\infty]$ называется внешней мерой, если:
1) $\nu(\varnothing) = 0$;
2) $A \subset B \Longrightarrow \nu(A) \leqslant \nu(B)$;
3) $\nu(\bigcup\limits_n A_n) \leqslant \sum\limits_n \nu(A_n)$.

Определение 13. Множество E **измеримо** (ν–измеримо), если $\forall$ B: $\nu(E \bigcap B) + \nu(B \setminus E) = \nu(B)$ (E разбивает всякое множество B).

Пример 19. $X = \{1,2,3\}$, $\nu(\varnothing) = 0$, $\nu(X) = 2$, $\nu(A) = 1$ $\forall A \neq \varnothing$, $A \neq X$. ν — внешняя мера?
Свойство 1 выполнено, 2 тоже, 3 тоже: $E = \{1\}$ измеримо?
$B = \{1,2,3\}$: 2=1+1 — ok; $B = \{1,2\}$: 1=1+1=2 — неверно $\Longrightarrow E$ неизмеримо.

Теорема 18. *(Теорема Каратеодори)(без доказательства)*
Пусть ν — внешняя мера, $\mathcal{A}_\nu$ — набор измеримых множеств. Тогда:
1) $\mathcal{A}_\nu$ — σ–алгебра;
2) ν — σ–аддитивная мера на $\mathcal{A}_\nu$ (допускаются значения $+\infty$);
3) ν — полная мера на $\mathcal{A}_\nu$, то есть $\mathcal{A}_\nu$ содержит все множества меры нуль.

Итак, процедура построения меры состоит в следующем:
1) нужно задать внешнюю меру;
2) дальше нужно определить измеримые множества, которые составят сигма–алгебру, а потом на этой сигма–алгебре можно будт получить сигма–аддитивную функцию — сигма–аддитивную меру.

Лекция 11

Приближение открытыми и замкнутыми

Теорема 19. *(Теорема о приближении борелевскими множествами)*
Если μ — σ–аддитивная конечная мера н $aB(X)$, где X — метрическое пространство, то $\forall\varepsilon > 0$ $\forall B \in B(X)$ существует замкнутое F_ε и открытое U_ε: $F_\varepsilon \subset B \subset U_\varepsilon$ и $\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Доказательство. Если $B = F$ — замкнуто, то утверждение верно.
$F^{1/n} = \bigcup B(x, 1/n)$ — открытое множество.
$\bigcap\limits_n F^{1/n} = F$, $F^{1/n} \supset F^{1/n+1} \Longrightarrow \mu(F^{1/n}) \to \mu(F)$. $\forall\varepsilon > 0$ $\exists 1/n$ $\mu(F^{1/n}) - \mu(F) < \varepsilon$.
$U = F^{1/n}$, $F_\varepsilon = F$.
Теперь от замкнутых переходим к борелевским. Хотим показать, что $\{E | \forall\varepsilon > 0$ $\exists F_\exists \subset E \subset U_\varepsilon$, $\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon\}$ — σ–алгебра.
1) $\varnothing$ и $X \in$.
2) $F_\varepsilon \subset E \subset U_\varepsilon \Longrightarrow X \setminus U_\varepsilon \subset X \setminus E \subset X \setminus F_\varepsilon$. $(X \setminus F_\varepsilon) \setminus (X \setminus U_\varepsilon) = (U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon)$.
3) $\bigcup\limits_n E_n$ $\forall n$ $F_n \subset E_n \subset U_n$ $\mu(U_n \setminus F_n) < \varepsilon/2^n$.
$U_\varepsilon = \bigcup\limits_n U_n$ (уже открытое). $\widetilde{F_\varepsilon} = \bigcup\limits_n F_n$ (пока не замкнутое).
$U_\varepsilon \setminus \widetilde{F_\varepsilon} = \left(\bigcup\limits_n U_n\right) \setminus \widetilde{F_\varepsilon} = \bigcup\limits_n (U_n \setminus \widetilde{F_\varepsilon}) \leqslant \bigcup\limits_n (U_n \setminus F_n)$.
$\mu(U_\varepsilon \setminus \widetilde{F_\varepsilon}) \leqslant \sum\limits_n \varepsilon/2^n = \varepsilon$.
$\widetilde{F_n} = \bigcup\limits_{n=1}^{N} F_n$. Тогда $\widetilde{F_{N+1}} \supset \widetilde{F_N}$ и $\bigcup\limits_N \widetilde{F_N} = \widetilde{F_\varepsilon} \Longrightarrow \mu(\widetilde{F_N}) \longrightarrow \mu(\widetilde{F_\varepsilon})$ при $N \longrightarrow \infty$.
$\mu(\widetilde{F_\varepsilon} \setminus \widetilde{F_N}) = \mu(\widetilde{F_\varepsilon}) - \mu(\widetilde{F_N}) \longrightarrow 0$. (так как мера σ–аддитивная).
$\mu(U_\varepsilon \setminus \widetilde{F_N}) = \mu(U_\varepsilon) - \mu(\widetilde{F_N}) = \mu(U_\varepsilon) - \mu(\widetilde{F_\varepsilon}) + \mu(\widetilde{F_\varepsilon} \setminus \widetilde{F_N})$.
$F_\varepsilon = F_N$, $N > N_0$.

■

Мера Лебега

Определение 14. На $\mathbb{R}^n$ зададим функцию

$$\lambda^*(E) = \inf\{\sum_j |I_j| : E \subset \bigcup_j I_j \text{ (н. б. ч. счетное объединение)}\},$$

I_j — параллелепипеды с рёбрами, параллельными осям координат — **внешняя мера Лебега**.
Параллелепипеды можно считать открытыми или замкнутыми.

Утверждение 17. λ^* — *внешняя мера, причем измеримые множества включают все борелевские множества (то есть все борелевские будут измеримы).*

Доказательство.
Проверим, удовлетворяет ли λ^* свойствам внешней меры.

1) $\lambda^*(\varnothing) = 0$, так как пустое множество можно покрывать кубами сколь угодно малого объема.
2) Пусть $A \subset B$. Из $B \subset \bigcup\limits_j I_j \Longrightarrow A \subset \bigcup\limits_j I_j$ (потому что это подмножество B) $\Longrightarrow$ по определению $\lambda^*(A) \leqslant \sum\limits_j |I_j|$, то есть $\lambda^*(A)$ — это нижняя грань для $\sum\limits_j |I_j|$, покрывающих B, а так как $\lambda^*(B)$ — точная нижняя грань, то $\Longrightarrow \lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B)$ (по определению inf).
3) Возьмём $\bigcup\limits_m A_m$; для каждого A_m рассмотрим I_j^m такие, что $\sum\limits_j |I_j^m| \leqslant \lambda^*(A_m) + \varepsilon/2^m$; получается, что $\bigcup\limits_m A_m \subset \bigcup\limits_{m,j} I_j^m$ и $\sum |I_j^m| \leqslant \sum\limits_m \lambda^*(A_m) + \varepsilon \Longrightarrow \lambda^*(\bigcup\limits_m A_m) \leqslant \sum\limits_m \lambda^*(A_m) + \varepsilon$, $(\varepsilon \to 0)$.
Теперь докажем, что измеримые множества включают все борелевские.
Рассмотрим два множества A, B: $\inf\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}} \rho(x,y) = \gamma > 0$ (γ — это какая-то константа).
Заметим, что:
1) В определении λ^* можно считать, что $diam$ параллелепипедов I_j меньше $\gamma/3$. Просто доразбиваем покрытие в случае необходимости. Каждый параллелепипед разобъём на параллелепипеды столь маленькие, чтобы их объёмы были меньше, чем $\gamma/3$. От этого сумма объёмов I_j не меняется, а значит и inf тоже не меняется;
2) В определении λ^* из набора I_j можно выбросить такие I_j, что $I_j \cap E = \varnothing$. Так как пересечение пусто, то фактически эти I_j не участвуют в покрытии, а если мы их уберём, то сумма станет только меньше. То есть для вычисления inf стоит брать только те наборы, в которых каждое I_j имеет непустое пересечение с множеством E.
Далее в доказательстве учитываем эти замечания.
Пусть $A \bigcup B \subset \bigcup\limits_j I_j = \bigcup\limits_{k: I_k \cap A \neq \varnothing} I_k \cup \bigcup\limits_{m: I_m \cap B \neq \varnothing} I_m$. k и m — различные индексы (то есть наборы этих индексов не пересекаются), так как $diam I_j < \gamma/3\ \forall j$ (бруску не хватает диаметра для содержания точек и из A, и из B, наименьшее расстояние между которыми — γ) $\Longrightarrow \sum\limits_j |I_j| \geq \lambda^*(A) + \lambda^*(B) \Longrightarrow \lambda^*(A \cup B) \geq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$. Обратное неравенство уже доказано в пункте 3) $\Longrightarrow$ получили борелевские множества.

■

Обозначение
$\mathcal{L}_n$ — σ–алгебра измеримых относительно внешней меры Лебега. Итак, λ^* на $\mathcal{L}_n$ — σ–аддитивная мера и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_n$. Мера λ^* на $\mathcal{L}_n$ называется мерой Лебега (обозначение: λ).

Утверждение 18. *E — допустимое (измеримое по Жордану) $\Longrightarrow$ E измеримо по Лебегу и $|E| = \lambda(E)$.*

Доказательство.
1) Проверим, что $\lambda(I) = |I|$.
$\leqslant$ По определению $\lambda(I) \leqslant |I|$ ($I \subset I$ и используем определение с замкнутым параллелепипедом);
$\geq$ Используем покрытие открытыми кубами $I \subset \bigcup\limits_j I_j$ — открытое покрытие $\rightsquigarrow$ из

них можно выбрать конечное покрытие, а для него известно, что $|I| \leqslant \sum\limits_j |I_j|$ (см начало семестра).
2) $\lambda(\partial I) = 0$; $E \subset \partial I \Longrightarrow \lambda(E) = 0$. То есть если возьмем $\widetilde{I}$ — открытый параллелепипед и множество $E \subset \partial I \Longrightarrow \lambda(\widetilde{I} \cup E) = |I|$, потому что то, насколько они отличаются — это множество меры нуль.
Пусть теперь E — произвольное допустимое множество. Первое, что нам надо проверить, измеримо ли оно. Для этого нужно представить его как объединение измеримых множеств.
Пусть $\widetilde{E}$ — множество внутренних точек E. Оно открытое и измеримое (открытые множества являются измеримыми, потому что они борелевские). $E = \widetilde{E} \cup D$, где $D \subset \partial E$ — множество меры нуль, а всякое ММН измеримо; измеримые образуют сигма–алгебру $\Longrightarrow$ их объединение, то есть E измеримо по Лебегу.
$\lambda(\bar{E}) = \lambda(E)$, поскольку E отличается от своего замыкания добавлением множества меры нуль, и $|\bar{E}| = |E|$, так как $\chi_E = \chi_{\bar{E}}$ почти всюду (то есть интегралы совпадают). Поэтому дальше работаем с замыканием E — $\bar{E}$.
$|\bar{E}| = \int\limits_{I \supset \bar{E}} \chi_{\widetilde{E}} dx$. Можно устроить последовательность разбиений I — $\mathbb{T}^N$, состоящиее из брусков I_m^N и $\mathbb{T}^{N+1}$ получаем разбиением I_m^N (считаем, что I_m^N попарно не пересекаются). Также считаем, что $\lambda(\mathbb{T}^N) \to 0$. Тогда

$$|\bar{E}| = \int\limits_I \chi_{\bar{E}} dx = \lim_{N\to\infty} \sum_m \sup_{I_m^N} \chi_{\bar{E}} |I_m^N|$$

Введём множество $Q_N := \bigcup\limits_{\substack{m:\\ I_m^N \cap \bar{E} \neq \varnothing}} I_m^N$. Тогда

$$|\bar{E}| = \int\limits_I \chi_{\bar{E}} dx = \lim_{N\to\infty} \sum_m \sup_{I_m^N} \chi_{\bar{E}} |I_m^N| = \lim_{N\to\infty} \lambda(Q_N),$$

потому что бруски попарно не пересекаются, мера у нас сигма–аддитивная, и на брусках доказано, что объём — это мера Лебега.
Осталось заметить, что $\bar{E} = \bigcap\limits_N Q_N$ и $Q_{N+1} \subset Q_N$ (из-за построения разбиений и подразбиений: $I_k^{N+1} \subset Q^{N+1} \Longrightarrow I_k^N \subset Q^N$ — выбираем подмножества на тех брусках, которые были на предыдущем шаге). И пересечение действительно будет являться $\bar{E}$. Если бы это было не так, то нашлась бы точка из дополнения к $\bar{E}$, которая входила бы в него с окрестностью (дополнение открыто), и тогда, взяв масштаб разбиения меньше радиуса этой окрестности, мы пришли бы к противоречию: брусок не сможет одновременнно включать эту точку и накрывать E.
Из свойств меры и всего вышеизложенного получаем: $\lambda(\bar{E}) = \lim\limits_{N\to\infty} \lambda(Q_N)$.
То есть с одной этот предел — это интеграл и объём, а с другой — мера Лебега.

■

Следствие 9. *Пусть* $L(x) = b + Ax$, $\det A \neq 0$, b *— вектор,* $A \in M_n(\mathbb{R})$*. Тогда* $\lambda(L(B)) = |\det A| \cdot \lambda(B)$ *для всякого борелевского множества* B*.*

Доказательство.
1) Нужно доказать, что если B — борелевское, то $L(B)$ — борелевское множество (важно, что $\det A \neq 0$). Лучше доказать, что если B — борелевское множество, то $L^{-1}(B)$ — борелевское. Рассмотрим $\{E | L^{-1}(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (борелевская с.-а.)$\}$ — σ–алгебра (благодаря тому, что прообраз коммутирует со всеми операциями пересечения объединения и разности) и содержит все открытые (потому что их прообразы будут открытыми), а значит содержит все борелевские множества. Итак, прообраз любого борелевского — борелевский. К слову, здесь при таком доказательстве в качестве L подошло бы любое непрерывное отображение.
2) Теперь доказываем равенство.
Пусть K — куб, $\mathcal{B}(K)$ — борелевская σ–алгебра с двумя σ–аддитивными мерами, которые переводят борелевское множество B такими способами: борелевское $B \longmapsto \lambda(L(B))$ и борелевское $B \longmapsto |\det A| \cdot \lambda(B)$. Чтобы доказать, что эти две меры совпадают на борелевской сигма–алгебре, достаточно доказать совпадение на всяком открытом множестве. Однако неверно, что любое открытое множество допустимо, поэтому нам нужно представить его так: $U = \bigcup\limits_j I_j \bigcup \{$множество меры нуль$\}$, I_j открытые параллелепипеды, попарно не пересекаются. Таким образом можно представить любое открытое множество (было доказано в Формуле замены переменных). Объединение множеств меры нуль — это замкнутое множество (не более чем счетное объединение замкнутых). Эти две меры совпадают на I_j, потому что это допустимое множество, образ его — допустимое, и там работает обычная формула замены переменных; на множествах меры нуль дают 0, а тогда в силу σ–аддитивности меры совпадают на открытых $\Longrightarrow$ совпадают на всех борелевских. Мы доказали для куба, а нужно на всём $\mathbb{R}^n$. Поэтому дальше рассмотрим $K_m = [-m; m]^n$, тогда $\forall$ борелевское B можно представить в виду расширения множеств к нему: $B = \bigcup\limits_m (B \cap K_m)$. По доказанному $\lambda(L(B \cap K_m)) = |detA| \cdot \lambda(B \cap K_m)$, затем $m \longrightarrow \infty$, система расширяется к B, и получаем $\lambda(L(B)) = |\det A| \cdot \lambda(B)$.

■

Замечание 5. ν — внешняя мера и $\nu(E) = 0 \Longrightarrow E$ измеримо.

Доказательство.
Возьмем множество A и проверим выполнение критерия Каратеодори:

$$\nu(A) = \underbrace{\nu(A \setminus E)}_{\leqslant \nu(A)} + \underbrace{\nu(A \cap E)}_{\leqslant \nu(E)=0}$$

$\Longrightarrow \nu(A) \geq \nu(A \setminus E) + \nu(A \cap E)$.
По определению внешней меры: $\nu(A) \leqslant \nu(A \setminus E) + \nu(A \cap E)$. Следовательно, критерий выполнен.

■

Замечание 6. $\det A \neq 0$, $L(b) = b + Ax$; $\lambda(L(B)) = |\det A| \cdot \lambda(B)$
Важно, что определитель ненулевой, потому что, например, проекция может переводить борелевские в неборелевские. Поэтому если доказываем утверждение с нулевым детерминантом, то просто проверяем, что $L(B)$ — ММН, то есть меры от него равна нулю.

Лекция 12

Мера Хаусдорфа

Пусть $\delta > 0$, $\alpha \in (0, n]$; пространство — $\mathbb{R}^n$, F_j — замкнутые множества.

Определение 15.

$$H^\alpha_\delta(E) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |diamF_j|^\alpha : E \subset \bigcup_j F_j, diamF_j < \delta\right\}$$

При $\delta \to 0$ $H^\alpha_\delta(E)$ возрастает.

$$H^\alpha(E) = \lim_{\delta\to 0+} H^\alpha_\delta(E)$$

Бесконечность в данном пределе допустима.

Определение 16. $H^\alpha(E)$ называется **мерой Хаусдорфа** множества E.

Утверждение 19. *1) $H^\alpha(E)$ и $H^\alpha_\delta(E)$ — внешние меры;*
2) в σ–алгебре измеримых относительно H^α включаются все борелевские множества.

Доказательство.
1) $H^\alpha_\delta(\varnothing) = 0$ — покрываем точкой;
$A \subset B \subset \bigcup_j F_j \implies A \subset \bigcup_j F_j \implies \sum_j (diamF_j)^\alpha \geq H^\alpha_\delta(A)$ по определению $\implies$ $H^\alpha_\delta(A) \leqslant H^\alpha_\delta(B)$ по определению инфимума;
Рассмотрим $\bigcup_m A_m$, $A_m \subset \bigcup_j F^m_j$. $\sum \left(diamF^m_j\right)^\alpha \leqslant H^\alpha_\delta(A_m) + \varepsilon/2^m$, $\bigcup_m A_m \supset \bigcup_{j,m} F^m_j$,
$\sum_{j,m} \left(diamF^m_j\right)^\alpha \leqslant \sum_m H^\alpha_\delta(A_m) + \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$ (если все меры A_m конечны; иначе неравенство очевидно).
$H^\alpha(\varnothing) = \lim_{\delta\to 0+} H^\alpha_\delta(\varnothing) = 0$.
$A \subset B \implies H^\alpha_\delta(A) \leqslant H^\alpha_\delta(B) \implies$ при $\delta \to 0+$ $H^\alpha(A) \leqslant H^\alpha(B)$.
$H^\alpha_\delta(\bigcup_m A_m) \leqslant \sum_m H^\alpha_\delta(A_m) \leqslant \sum_m H^\alpha(A_m) \implies$ при $\delta \to 0+$ $H^\alpha(\bigcup_m A_m) \leqslant \sum_m H^\alpha(A_m)$ — проверили определение.
2) Рассмотрим A и B: $\gamma = \inf_{x\in A, y\in B} ||x - y|| > 0$. Берем $\delta < \gamma/3 \implies H^\alpha_\delta(A \cup B) = H^\alpha_\delta(A) + H^\alpha_\delta(B)$ (смю про меру Лебега), затем $\delta \to 0+$ и получаем $H^\alpha(A \cup B) = H^\alpha(A) + H^\alpha(B)$.
Таким образом, H^α — σ–аддитивная мера (возможно, принимает ∞ значения); σ–алгебра измеримых множеств включает все борелевские.

■

Утверждение 20. *H^1_δ и H^1 совпадает с λ_1 на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $E \subset \bigcup\limits_j F_j, diamF_j < \delta$; $F_j \subset [\inf F_j, \sup F_j] = I_j \implies E \subset \bigcup\limits_j I_j$.
$\sum\limits_j |I_j| = \sum\limits_j diamF_j \implies \lambda_1(E) \leqslant \sum\limits_j diamF_j \implies \lambda_1(E) \leqslant H^1_\delta(E)$ (F_j — произвольное покрытие E). $\geq$: всегда можно взять F_j = отрезок J_j такой, что $E \subset \bigcup\limits_j J_j$, то есть $H^1_\delta(E) \leqslant \sum\limits_j |J_j| \implies H^1_\delta(E) \leqslant \lambda_1(E)$ (J_j произвольны) $\implies$ в итоге получили равенство. Случай H^1: $\delta \to 0+$.

■

Утверждение 21. $H^n(E) = 0 \iff \lambda_n(E) = 0$.

Доказательство. ($\implies$) $H^n(E) = 0 \implies H^n_\delta(E) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists F_j$, $diamF_j < \delta$, $E \subset \bigcup_j F_j$; $\sum\limits_j (diamF_j)^n < \varepsilon$.
$\bar{B}_j = \bar{B}(r_j, x_j)$, $\lambda_n(B_j) = |\bar{B}_j| = \omega_n \cdot r_j^n$. $diamF_j = r_j$.
$E \subset \bigcup_j \bar{B}_j \implies \lambda(E) \leqslant \sum_j \lambda(\bar{B}_j) = \omega_n \sum\limits_j r_j^n < \omega_n\varepsilon$; $\varepsilon \to 0 \implies \lambda_n(E) = 0$.
($\Longleftarrow$): $\lambda_n(E) = 0 \iff \exists\ I_j$ (кубы): $E \subset \bigcup\limits_j I_j$, $\sum\limits_j |I_j| < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$.
$diamI_j = \sqrt{n}a_j \implies (diamI_j)^n = n^{n/2} \cdot |I_j| \implies \sum\limits_j (diamI_j)^n < n^{n/2}\varepsilon \implies H^n_\delta(E) < n^{n/2}\varepsilon$, $\varepsilon \to 0 \implies H^n_\delta(E) = 0$.
Можно выбирать кубы диаметра $< \delta$. Отсюда $H^n(E) = 0$.

■

Утверждение 22. $0 < H^n([0,1]^n) < \infty$.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$; рассмотрим I_j — разбиение куба с диаметрами $< \delta$ $\implies H^n_\delta([0,1]^n) \leqslant \sum\limits_j (diamI_j)^n = n^{n/2} \cdot 1 < \infty$ (1 — объем единичного куба) $\implies H^n([0,1]^n) \leqslant n^{n/2} < \infty$.
Если $H^n([0,1]^n) = 0$, то $\lambda_n([0,1]^n) = 0$, а это не так.

■

Утверждение 23. *H^α и H^α_δ не меняются при сдвигах и ортогональных преобразованиях.*

Доказательство. $H^\alpha_\delta = \inf\left\{\sum\limits_{j=1}^{\infty} (diamF_j)^\alpha : E \subset \bigcup\limits_j F_j, diamF_j < \delta\right\}$, $E \to E+b$ (F_j при сдвиге не перестают быть замкнутыми, $diamF_j$ сохранился). При ортогональном преобразовании длины не меняются, замкнутость F_j не теряется.

■

Лекция 13

Размерность Хаусдорфа

Утверждение 24. *1) Если $H^\alpha(E) < \infty$ и $\beta < \alpha$, то $H^\beta = 0$.*
2) Если $H^\alpha(E) > 0$ (в том числе $= \infty$) и $\beta < \alpha$, то $H^\beta(E) = +\infty$.

Доказательство. Так как второй пункт следует из первого, то нам достаточно доказать только первый. То есть, что $H^\alpha_\delta(E) = 0\ \forall \delta > 0$.

$E \subset \bigcup_j F_j$, $diamF_j < \delta$; $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(diamF_j)^\beta = \sum\limits_{j=1}^{\infty}(diamF_j/\delta)^\beta \cdot \delta^\beta \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty}(diamF_j/\delta)^\alpha \cdot \delta^\beta$
$\Longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty}(diamF_j)^\beta \leqslant \delta^{\beta-\alpha}\sum\limits_{j=1}^{\infty}(diamF_j)^\alpha \Longrightarrow H^\alpha_\delta(E) \leqslant \delta^{\beta-\alpha}H^\alpha_\delta(E) \to 0$ при $\delta \to 0$ по условию.

■

Следствие 10. *Для E рассмотрим* $\inf\{\alpha \geq 0 | H^\alpha(E) = 0\} = \beta$. *Если $\exists\gamma$: $n \geq \gamma > \beta$, то $H^\alpha(E) = 0$. Если $\exists\gamma$: $0 \leqslant \gamma \leqslant \beta$, то $H^\alpha(E) = \infty$. Если $\{n \geq \alpha \geq 0 | H^\alpha(E) = 0\} \neq \varnothing$, то $\beta = n$.*

Определение 17. β — размерность Хаусдорфа. $H^\beta(E)$ может быть любым числом от 0 до $+\infty$ (включая их самих). Если $\beta = k \in \mathbb{N}$, то это не значит, что E в каком–либо смысле k–мерная поверхность.

Изменение меры Хаусдорфа при лин отображении

Утверждение 25. *$L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$; $k \leqslant n$; $L(x) = Ax$; $rkA = k$. Тогда $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$, B ограничено, $H^k(L(B)) = \sqrt{\det A^*A} \cdot \lambda_k(B)$.*

Доказательство.

Лемма 2. *$A = UT_kS$, $\det S = \sqrt{\det A^*A}$, S — симметрична матрица, U — ортогональная, $T_k(x_1, ..., x_k) = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$.*

Доказательство. $S = \sqrt{A^*A}$, $AS^{-1} = UT_k$ — проверить самостоятельно.

■

$H^k(UT_kS(B)) = H^k(T_kS(B))$ (U — ортогональное преобразование).
$E \subset \mathbb{R}^k$, $T_k(E) \subset \prod_k = \{x_{k+1} = 0, ..., x_n = 0\}$; $H^k(T_k(E)) = H^k_{\mathbb{R}^k}(E)$, так как $T_k(E) \subset \bigcup\limits_j F_j$, $diamF_j < \delta$;
1) $F_j \to F_j \bigcap \prod_k$; далее, вычисляя $H^k(T_k(E))$, можно считать, что $F_j \subset \prod_k$.
2) Если F_j — замкнутое множество из $\prod_k$, то $F_j = T_k(\widetilde{F_j})$, $\widetilde{F_j} \subset \mathbb{R}^k$ — замкнутое множество. $diamF_j = diam\widetilde{F_j}$.

$E \subset \bigcup\limits_j \widetilde{F_j} \Longleftrightarrow T_k(E) \subset \bigcup\limits_j F_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(diam\widetilde{F_j}\right)^k = \sum\limits_{j=1}^{\infty}(diamF_j)^k \Longrightarrow H^k(T_k(E)) = H^k_{\mathbb{R}^k}(E) = \lambda_k(E)$. $\lambda_k(UT_kS(B)) = \det S \cdot \lambda_k(B)$.

■

Лекция 14

Интеграл Лебега–1

Пусть $(X, \mathfrak{A}_\mu, \mu)$ — измеримое пространство (была внешняя мера; μ — её ограничение на σ–алгебру измеримых множеств), μ — конечная мера.

Определение 18. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется μ–измеримой, если $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_\mu$ $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Утверждение 26. *Если X — метрическое, то $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \in \mathfrak{A}_\mu$, то всякая непрерывная функция измерима.*

Доказательство. Рассмотрим $\{E : f^{-1}(E) \in \mathfrak{A}_\mu\}$ — σ–алгбера; f непрерывна; U открыто $\Longrightarrow f^{-1}(U)$ открыто $\Longrightarrow$ эта σ–алгебра содержит все открытые $\Longrightarrow$ содержит все борелевские множества.

■

Определение 19. Если f — μ–измеримая функция, принимающая конечное число значений, то f называется **простой**. f — простая $\Longleftrightarrow f(x) = \sum\limits_j c_j \chi_{A_j}(x)$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ при $j \neq k$ ($A_j = \{x : f(x) = c_j\}$).
По определению $\int\limits_X f d\mu = \sum\limits_j c_j \mu(A_j)$ — **интеграл Лебега для простой функции**.

Утверждение 27. *1) определение не зависит от представления f;*
2) $\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu$;
3) $f \leqslant g \Longrightarrow \int\limits_X f d\mu \leqslant \int\limits_X g d\mu$.

Доказательство.

1) $f = \sum\limits_j c_j \chi_{A_j}(x) = \sum\limits_{k=1}^N x_k \cdot \sum\limits_{j : c_j = x_k} \chi_{A_j}(x)$

$\Longrightarrow \int\limits_X f d\mu = \sum\limits_j c_j \mu(A_j) = \sum\limits_{k=1}^N x_k \cdot \sum\limits_{j : c_j = x_k} \mu(A_j) = \sum\limits_{k=1}^N x_k \mu(B_k)$.

2) $\alpha f + \beta g = \alpha \sum\limits_j y_j \chi_{A_j} + \beta \sum\limits_m z_m \chi_{B_m} = \sum\limits_{j,m} (\alpha y_j + \beta z_m) \chi_{A_j \bigcap B_m}$

$\Longrightarrow \int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \sum\limits_{j,m} (\alpha y_j + \beta z_m) \mu(A_j \bigcap B_m) = \sum\limits_j \alpha y_j \mu(A_j) + \sum\limits_m \beta z_m \mu(B_m) = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu$.

3) Если $f \geq 0$, то $\int f d\mu \geq 0$ — очевидно.

■

Следствие 11. $|\int\limits_X f d\mu| \leqslant \sup |f| \mu(X)$.

Утверждение 28. *Пусть f_n — последовательность простых, $f_n \rightrightarrows f$. Тогда:*
1) $\int\limits_X f_n d\mu$ — фундаментальная последовательность чисел;
2) Если $g_n \rightrightarrows f$, g_n простые $\Longrightarrow \int\limits_X f_n d\mu - \int\limits_X g_n d\mu \longrightarrow 0$.

Доказательство. 1) $|\int\limits_X f_n d\mu - \int\limits_X f_m d\mu| \leqslant \sup\limits_X |f_n - f_m| \cdot \mu(X)$.
2) $|\int\limits_X f_n d\mu - \int\limits_X g_n d\mu| \leqslant \sup\limits_X |f_n - g_n| \cdot \mu(X)$.

■

Определение 20. $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$ — **интеграл Лебега** f **по** X.

Утверждение 29. *1)* $\int\limits_X \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu$;
2) $f \leqslant g \Longrightarrow \int\limits_X f d\mu \leqslant \int\limits_X g d\mu$.

Доказательство. Доказательство проводится с помощью предельного перехода.

■

Теорема 20. *(Неравенство Чебышева)*
Если $f \geq 0$, *то* $\mu(\{x : f(x) \geq A\}) \leqslant 1/A \int\limits_X f d\mu$.

Доказательство. Рассмотрим $B = \{x : f(x) \geq A\}$; $\chi_B(x) \cdot A \leqslant f(x) \Longrightarrow \int\limits_X f d\mu \geq \int\limits_X A \cdot \chi_B d\mu = A\mu(B)$.

■

$(X, \mathfrak{A}_\mu, \mu)$ — измеримое пространство; $\mu(X) < \infty$.

Лекция 15

Интеграл Лебега–2

Теорема 21. *(Теорема Егорова)*
Если $f_n \longrightarrow f$ μ–почти всюду (все f_n измеримы), то $\forall\varepsilon > 0$ $\exists X_\varepsilon$: $f_n \rightrightarrows f$ на X_ε и $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$.

Теорема 22. *(Теорема Лебега)*
Пусть $|f_n| \leqslant C$, $|f| \leqslant C$ и $f_n \longrightarrow f$ μ–почти всюду $\Longrightarrow \int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$; из теоремы Егорова возьмем X_ε: $f_n \rightrightarrows f$ на X_ε и $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$;
$|\displaystyle\int f d\mu - \int f_n d\mu| \leqslant \int |f - f_n| d\mu = \int |f - f_n|\chi_{X_\varepsilon} d\mu + \int |f - f_n|(1 - \chi_{X_\varepsilon}) d\mu = \int\limits_{X_\varepsilon} |f - f_n| d\mu + \int\limits_{X\setminus X_\varepsilon} |f - f_n| d\mu$.
$\int\limits_{X\setminus X_\varepsilon} |f - f_n| d\mu \leqslant 2C\mu(X \setminus X_\varepsilon) < 2C\varepsilon$.
$\exists N$: $\forall n > N$ $|f - f_n| < \varepsilon$ на $X_\varepsilon \Longrightarrow$ 1-ый интеграл $\leqslant \varepsilon \cdot \mu(X_\varepsilon) \leqslant \varepsilon \cdot \mu(X) \Longrightarrow$ сумма интегралов оценивается сверху — $\varepsilon(2C + \mu(X))$.

■

Утверждение 30. *Если f интегрируема по Риману на брусе I, то f интегрируема по Лебегу на I и $\int\limits_I f dx = \int\limits_I f d\lambda$, где λ — мера Лебега.*

Доказательство. Считаем, что f ограничена. $\widetilde{I_m^N}$ — попарно не пересекаются. $\bigcup\limits_m \widetilde{I_m^N} = I$; $(N+1)$–е разбиение получается разбиением брусков N–го разбиения. Затем строились $h_N(x) = \sum\limits_m \sup\limits_{\widetilde{I_m^N}} f \cdot \chi_{\widetilde{I_m^N}}(x)$, $\int\limits_I h_N dx = \sum\limits_m \sup\limits_{\widetilde{I_m^N}} f \cdot |\widetilde{I_m^N}| \Longrightarrow \int\limits_I f dx$ (это всё интеграл Римана); $h_N \to f$ почти всюду.
a — точка непрерывности f, не лежащей на сетке разбиения $\forall N$; если $\widetilde{I_m^N}$ мал, то $|\sup\limits_{\widetilde{I_m^N}} f - f(a)| < \varepsilon \Longleftrightarrow |h_N(a) - f(a)| < \varepsilon$ (здесь используем критерий Лебега). h_N — простые функции ($\Longrightarrow$ λ–измеримые) $\Longrightarrow$ по свойству измеримых функций f λ–измерима. По теореме Лебега $\int h_N d\lambda \to \int f d\lambda$. Остаётся заметить, что $\int\limits_I h_N dx = \int\limits_I h_N d\lambda$ (мера Лебега на брусе совпадает с его объёмом). ■

Далее интеграл по мере Лебега пишем $\int f dx$ вместо $\int f d\lambda$.

Формула замены переменных

$(X, \mathfrak{A}_\mu, \mu)$ — измеримое пространство; $(Y, \mathfrak{B})$ — тоже; $\phi : X \longrightarrow Y$ измеримо, то есть $\varphi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_\mu$ $\forall B \in \mathfrak{B}$.

Тогда на $(Y, \mathfrak{B})$ определена мера $\mu_0\varphi^{-1}(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$ (образ μ при отображении μ).

Теорема 23. $\forall$ *ограниченной* $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$*, измеримой относительно* $\mathfrak{B}$*, верно равенство* $\int f(\varphi(t))d\mu = \int f(x)d\mu_0\varphi^{-1}$.

Теорема Фубини

Определение 21. $(X, \mathfrak{A}_\mu, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}_\nu, \nu)$ — измеримые пространства, $\mu(X) < \infty$, $\nu(X) < \infty$.
$\mu \bigotimes \nu(E) := \inf\limits_n \{\sum\limits_n \mu(A_n) \cdot \nu(B_n) | E \subset \bigcup\limits_n A_n \times B_n, A_n \in \mathfrak{A}_\mu, B_n \in \mathfrak{B}_\nu\}$, $E \subset X \times Y$ — **произведение мер**; это внешняя мера.

Утверждение 31. *1)* $\mu \bigotimes \nu$ *— внешняя мера;*
2) σ*–алгебра измеримых множеств содержит* $mathfrakA_\mu \bigotimes \mathfrak{B}_\nu := \sigma(\{A \times B | A \in \mathfrak{A}_\mu, B \in \mathfrak{B}_\nu)$*;*
3) $\mu \bigotimes \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$*, где* $A \times B$ *— измеримый прямоугольник.*

Теорема 24. *(Теорема Фубини) Если* f $\mu \bigotimes \nu$*–интегрируема, то для* μ*–почти всех* x *отображение* $y \mapsto f(x, y)$ ν*–интегрируемо, для* ν*–почти всех* y $x \mapsto f(x, y)$ μ*–интегрируемо. Отображение* $x \mapsto \int f(x, y)d\nu$ μ*–интегрируемо; отображение* $y \mapsto \int f(x, y)$ ν*–интегрируемо и* $\int\limits_{X \times Y} f(x, y)d\mu \bigotimes \nu = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f d\nu\right) d\mu = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f d\mu\right) d\nu$.

Лекция 16

Формула площади

Определение 22. Множество S^k в $\mathbb{R}^n$ $(k \leqslant n)$ называется k–**мерной элементарной гладкой поверхностью**, если $\exists$ открытое и ограниченное множество U в $\mathbb{R}^k$ и непрерывно дифференцируемое отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$, такие, что $rkf' = k$ и $f(U) = S^k$, f — гомеоморфизм.

Утверждение 32. *Если S^k — k–мерная элементарная поверхность, то $\forall p \in S^k$, $p = f(a)$, $\exists$ окрестность $U((a_1, ..., a_k, 0, ..., 0))$ и $V(p)$ — открытое множество и диффеоморфизм $F : U \longrightarrow V$, такие, что $F|_{U \cap \{t_{k+1}=0,...,t_n=0\}} = f$.*

Доказательство. Будем считать, что $f'(x) \neq 0$ (иначе переименуем переменные).
$F : (t_1, ..., t_n) \mapsto (x_1(t_1, ..., t_k), ..., x_k(t_1, ..., t_k), t_{k+1} + x_{k+1}(t_1, ..., t_k), ..., t_n + x_n(t_1, ..., t_k))$;
$F(t_1, .., t_k, 0, ..., 0) = f(t_1, .., t_k)$.
$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial t_j} & O \\ * & E \end{pmatrix}$. $\det F'(\widetilde{a}) \neq 0$ по условию.
F — диффеоморфизм по теореме об обратной функции.

■

Следствие 12. *$\forall p \in S^k$ существует окрестность $\widetilde{V}(p)$ и $C > 0$, такая что $\forall x, y \in S^k \bigcap \widetilde{V}(p)$ $||f^{-1}(x) - f^{-1}(y)|| \leqslant C||x - y||$.*

Доказательство. В малой окрестности точки p f^{-1} совпадает с F^{-1}. Если окрестность еще уменьшить, то F^{-1} — липшецево отображение.
$V_0 = f(U(\widetilde{a}))$ — открытое множество в S^k. $V_0 = S^k \cap \widetilde{V}(p)$, где $\widetilde{V}(p)$ — искомая. F^{-1} совпадает с f^{-1} на V_0.

■

Утверждение 33. *Пусть $S^k = f(U)$ — гладкая элементарная поверхность, $p \in S^k$, $p = f(a)$ и $L(t) = f(a) + f'(a)(t - a)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ окрестность $V(p)$: $\forall x, y \in V(p) \bigcap S^k$ $||L \circ f^{-1}(x) - L \circ f^{-1}(y)|| \geq (1 - \varepsilon)||x - y||$ и $\leqslant (1 + \varepsilon)||x - y||$ ($L \circ f^{-1}$ — почти изометрия.*

Доказательство. Сразу выбираем окрестность V_1 так, что $||f^{-1}(x) - f^{-1}(y)|| \leqslant C||x - y||$. Пусть задано $\varepsilon > 0$; выбираем окрестность $U(a) \subset \mathbb{R}^k$: $\forall s, t \in U(a)$ $||f(t) - f(s) - f'(a)(t - s)|| \leqslant \varepsilon||t - s||$ (определение дифференцируемости в точке a для t и s).
$V(p) := V_1 \bigcap f(U(a))$. Рассмотрим $||L(f^{-1}(x)) - L(f^{-1}(y))|| = ||f'(a)(t - s)|| \leqslant ||x - y|| + \varepsilon||t - s||(*)$, $\geq ||x - y|| - \varepsilon||t - s||(**)$; $(*) \leqslant ||x - y||(1 + \varepsilon C)$, $\geq ||x - y||(1 - \varepsilon C)$, так как $f(t) = x$, $f(s) = y$.

■

Теорема 25. *Пусть E — борелевское множество в U, $S^k = f(U)$, $J_f(a) = f'(a)$. Тогда $H^k(f(E)) = \int\limits_E \sqrt{\det(J_f^* J_f)} dt$.*

Доказательство.
($k = n$: просто формула замены переменных) будем считать, что E лежит в кубе. Предположим противное, то есть $H^k(f(E)) \geq q\int\limits_E \sqrt{\det(J_f^* J_f)}dx$, $q > 1$, или $\leqslant q\int\limits_E \sqrt{\det(J_f^* J_f)}dx$, $0 < q < 1$. Докажем для первого случая.

Разбиваем куб на I_m: $I_m \bigcap I_l = \varnothing$, $E_m := E\bigcap I_m$. $\exists m$: $H^k(f(E_m)) \geq q\int\limits_{E_m} \sqrt{\det(J_f^* J_f)}dt$.

Существует последовательность вложенных кубов $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, таких, что на $E_m = I_m \bigcap E$ имеет место неравенство с q, $diam I_m \to 0$.
Пусть $a \in \bigcap\limits_m \bar{I}_m$. $\exists p$: $p = f(a)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем окрестность $U(a)$: вокрестности $f(U(a))$ отображение $L \circ f^{-1}$ — почти изометрия с константами $(1+\varepsilon)$, $(1-\varepsilon)$.
$(1-\varepsilon) \leqslant \dfrac{\sqrt{\det(J_f^* J_f)(a)}}{\sqrt{\det(J_f^* J_f)(x)}} \leqslant (1+\varepsilon)$. Пусть $E_m \subset U(a)$. Оценим $H^k(L\circ f^{-1}(f(E_m))) =$
$H^k(L(E_m)) = \sqrt{\det(J_f^* J_f(a))}\lambda_k(E_m)$.
$L \circ f^{-1} =: \psi$, $(1-\varepsilon)||x-y|| \leqslant ||\psi(x) - \psi(y)|| \leqslant (1+\varepsilon)||x-y||$.
Тогда $(1-\varepsilon)^k H^k(f(E_m)) \leqslant H^k(L\circ f^{-1}(f(E_m))) = \sqrt{\det(J_f^* J_f(a))}\lambda_k(E_m) \leqslant (1+\varepsilon)^k H^k(f(E_m))$.
Отсюда $H^k(f(E_m)) \leqslant (1-\varepsilon)\sqrt{\det(J_f^* J_f(a))}\lambda_k(E_m) \leqslant (1-\varepsilon)^{-k}\cdot(1+\varepsilon)\int\limits_{E_m} \sqrt{\det(J_f^* J_f(x))}dx$.

Выбираем ε так, что $(1-\varepsilon)^{-k}\cdot(1+\varepsilon) < q$ — противоречие.

■

Лекция 17

Формула площади

Определение 23. Множество M^k называется *кусочно–гладкой k–мерной поверхностью в* $\mathbb{R}^n$, если оно является объединением конечного числа гладких элементарных поверхностей и множества H^k меры нуль. Ограничение меры H^k на M^k называют *поверхностной мерой*. Иногда ее обозначают σ_M или просто σ. В одномерном случае пишут $\mathrm{d}s$ вместо $\mathrm{d}H^1$.

Определение 24. Интеграл

$$\int_{M^k} g\,\mathrm{d}\sigma$$

называется *поверхностным интегралом первого рода.*

Замечание 7. Если S^k — элемент поверхности, то

$$\int_{S^k} g\,\mathrm{d}\sigma = \int_U g(f(t))\sqrt{\det[J_f * J_f](x)}\,\mathrm{d}x.$$

$(*)$**Тонкость.** Точка a может оказаться на границе U. Как исправить? Попробовать, чтобы $\overline{E} \subset U$. На самом деле достаточно формулу лишь для куба I: $\overline{I} \subset U$. Почему? На $\mathfrak{B}(U)$ существуют два отображения:

$$E \mapsto H^k(f(E)) \quad \text{и} \quad E \mapsto \int_E \sqrt{\det[J_f * J_f](x)}\,\mathrm{d}x$$

— меры на $\mathfrak{B}(U)$. Для их совпадения достаточно проверить совпадение на любом кубе, а также удостовериться, что множества меры нуль совпадают:

1) $\lambda(E) = 0$ и, стало быть, обе меры множества E нулевые;

2) формула верна на кубах (уже доказано)

Проверим (1): Так как $\lambda(E) = 0$, то

$$\int_E \sqrt{\ldots}\,\mathrm{d}x = 0;$$

$\forall a \in U\, \epsilon B(q_j;\, r_j) \subset U$, $q_j,\, r_j \in \mathbb{Q}$, содержащий a и f липшицево: $|f(t) - f(s)| \leqslant L_j\|t - s\|\, \forall t,\, s \in B(q_j;\, r_j)$.

$$U = \bigcup_j B(q_j;\, r_j);$$

рассмотрим $E \cap B(q_j;\, r_j) = E_j$:

$$f(E) \subset \bigcup_j f(E_j).$$

По свойствам меры Хаусдорфа

$$H^k(f(E)) \leqslant \sum_j H^k(f(E_j)) \leqslant \sum_j L_j^k \lambda(E_j) = 0$$

(второе неравенство следует из полуаддитивности; равенство из эквивалентности $H^k(E_j) \approx \lambda^k(E_j)$ с точностью до коэффициента). Далее, всякое открытое множество представимо в виде объединения открытых попарно непересекающихся кубов, замыкание которых содержится в U, и множества меры нуль; меры кубов и множеств меры нуль совпадают и, стало быть, совпадают и на всех борелевских.

Без меры:

$$H^k(f(E_j)) = \int_{E_j} \sqrt{\ldots}\,\mathrm{d}x; \qquad H^k(f(D \cap E)) = \int_D \sqrt{\ldots}\,\mathrm{d}x = 0$$

и, стало быть,

$$H^k(f(E)) = \int_E \sqrt{\ldots}\,\mathrm{d}x.$$

Пример 20. $k = 1$; $U = (\alpha;\, \beta)$; $E = [a;\, b] \subset (\alpha;\, \beta), f(t) = (x_1(t),\, \ldots,\, x_n(t))$ — регулярная параметризованная кривая γ.

$$H^1(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1^2 + \ldots + \dot{x}_n^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$J_f = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}; \qquad J_f^* = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \ldots & \dot{x}_n \end{pmatrix};$$

$$J_f^* J_f = \dot{x}_1^2 + \ldots + \dot{x}_n^2.$$

Пример 21. $k \geqslant 1$;

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial t_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial x}{\partial t_k} \end{pmatrix};$$

$\langle J_f^* J_f e_i,\, e_j \rangle$ — элемент $J_f^* J_f$ с номером ij; это эквивалентно тому, что

$$\langle J_f e_i,\, J_f e_j \rangle = \left\langle \frac{\partial x}{\partial t_i},\, \frac{\partial x}{\partial t_j} \right\rangle$$

и, стало быть,

$$H^k(f(E)) = \int_E \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial t_i},\, \frac{\partial x}{\partial t_j} \right\rangle\right)}.$$

Пример 22. $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$;

$$r = r(t_1,\, t_2) = (x(t_1,\, t_2),\, y(t_1,\, t_2),\, (t_1,\, t_2));$$

$$\sqrt{\begin{vmatrix} \left\langle \frac{\partial r}{\partial t_1}, \frac{\partial r}{\partial t_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial r}{\partial t_1}, \frac{\partial r}{\partial t_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial r}{\partial t_2}, \frac{\partial r}{\partial t_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial r}{\partial t_2}, \frac{\partial r}{\partial t_2} \right\rangle \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial z}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x}{\partial t_2} & \frac{\partial y}{\partial t_2} & \frac{\partial z}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \langle v,\, w \rangle = \|w\|$$

$$\sqrt{|\ldots|} = \left|\left[\frac{\partial r}{\partial t_1}, \frac{\partial r}{\partial t_2}\right]\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial z}{\partial t_1} \\ \frac{\partial y}{\partial t_2} & \frac{\partial z}{\partial t_2} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_1} \\ \frac{\partial z}{\partial t_2} & \frac{\partial x}{\partial t_2} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x}{\partial t_2} & \frac{\partial y}{\partial t_2} \end{vmatrix}^2}$$

Определение 25. Множество $M^k \subset \mathbb{R}^n$ называется *кусочно–гладкой k–мерной поверхностью*, если оно является объединением конечного числа элементарных гладких k–мерных поверхностей и множетсва H^k меры нуль.

Поверхностная мера на M^k — мера Хаусдорфа H^k.

Определение 26. Интеграл

$$\int_{M^k} g \,\mathrm{d}H^k$$

называется *поверхностным интегралом первого рода.*

Если

$$M^k = D \cup \Big(\bigcup_j S_j^k\Big),$$

то

$$\int_{M^k} g \,\mathrm{d}H^k = \sum_j \int_{S_j^k} g \,\mathrm{d}H^k.$$

Тем самым, интеграл не зависит от представления M^k.

Утверждение 34.

$$\int_{S^k} g \,\mathrm{d}H^k = \int_U g(f(t))\sqrt{\det[J_f^* J_f](t)}\,\mathrm{d}t,$$

где $S^k = f(U)$.

Доказательство. Рассмотрим $g = I_B$, $B \in \mathfrak{B}(S^k)$ — индикатор. Получим

$$H^k(B) = \int_{f^{-1}(B)} \sqrt{\det[J_f^* J_f](t)}\,\mathrm{d}t$$

— формула площади. Следовательно, по линейности формула верна для простых функций (функций вида $\sum c_j I_{B_j}$), которыми равномерно приближается любая функция g: если $g_N \rightrightarrows g$, где g_N — простые функции, то

$$\begin{array}{ccc} \int g_N \,\mathrm{d}H^k & = & \int g_N(f(t))\sqrt{\ldots}\,\mathrm{d}t\,. \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int g \,\mathrm{d}H^k & & \int g(f(t))\sqrt{\ldots}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

■

Часто вместо $\mathrm{d}H^k$ пишут $\mathrm{d}\sigma$. Кроме того, вместо $\mathrm{d}H^1$ часто пишут $\mathrm{d}s$.

$$H^1(\gamma) = \int_a^b \underbrace{\|\dot{x}(t)\|}_{>0}\,\mathrm{d}t.$$

Рассмотрим

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

Отображение $t \mapsto s(t)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция. Можно обратить (с помощью нарутального параметра): $\mathrm{d}s = \|\dot{x}\|\mathrm{d}t$ и тогда

$$\int_a^b g(x(t))\,\underbrace{\|\dot{x}(t)\|\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}s}.$$

Лекция 18

Формула интегрирования по частям

Определение 27. Ограниченное множество E в $\mathbb{R}^n$ будем называть пренебрежимым, если $\lambda(E^\varepsilon) = \bar{o}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, где $E^\varepsilon = \bigcup\limits_{a\in E} B(a,\varepsilon)$

Пусть E — ограниченное множество, такое что $\lambda(E^\varepsilon) = \bar{o}(\varepsilon)$ $\varepsilon \to 0$, где $E^\varepsilon = \bigcup\limits_{a\in E} B(a,\varepsilon)$.

Утверждение 35. *1) Если $E_1,\ldots,E_N$ — пренебрежимые множества, то $\bigcup\limits_{i=1}^{N} E_i$ пренебрежимо;*
2) $E \subset D$ и D — пренебрежимо, то E пренебрежимо.

Доказательство.
2) $E \subset D \Longrightarrow E^\varepsilon \subset D^\varepsilon$; $0 \leqslant \lambda(E^\varepsilon/\varepsilon) \leqslant \lambda(D^\varepsilon/\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.
1) $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{N} E_i\right)^\varepsilon \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} E_i^\varepsilon \Longrightarrow \lambda\left(\left(\bigcup\limits_{i=1}^{N} E_i\right)^\varepsilon\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda(E_i^\varepsilon)$, обе части делим на ε, и устремляем его к нулю.

■

Утверждение 36. *Если E пренебрежимо, то $H^{n-1}(E) = 0$.*

Доказательство.
$\exists$ такой конечный набор $a_1,..,a_m \in E$, что $\rho(a_i,a_j) \geq \varepsilon$ и $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \bar{B}(a_i,\varepsilon)$. Следует из ограниченности E и теоремы Больцано.
$H^{n-1}(E) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \left(diam\bar{B}(a_j,\varepsilon)\right)^{n-1} = \sum\limits_{j=1}^{m} (2\varepsilon)^{n-1} = \frac{4^{n-1}}{2\omega_n\varepsilon} \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda\left(B(a_j,\varepsilon/2)\right)$.
$\bigcup\limits_{j=1}^{n} B(a_j,\varepsilon/2) \subset E^\varepsilon \Longrightarrow H^{n-1}(E) \leqslant \frac{4^{n-1}}{2\omega_n} \cdot \lambda(E^\varepsilon)/\varepsilon \longrightarrow 0$ при $\varepsilon \longrightarrow 0 \Longrightarrow H^{n-1}(E) = 0$.

■

Утверждение 37. *Пусть I_{n-1} — замкнутый невырожденнный куб в $\mathbb{R}^3$, и на этом кубе определена гладкая функция $x_n = f(x_1,\ldots,x_{n-1})$. Если замкнутое множество $E \subset \Gamma_f$ таково, что $H^{n-1}(E) = 0$, то E пренебрежимо.*

Доказательство.
Пусть E' — проекция E на плоскость $x_n = 0$. $\lambda_{n-1}(E') = H^{n-1}(E) \leqslant H^{n-1}(E)$ (так как при проектировании диаметры не увеличиваются) $\Longrightarrow \lambda_{n-1} = 0$.
Пусть $\varepsilon > 0$, $\lambda((E')^\varepsilon) \to \lambda(E') = 0$. Таккак f гладкаяна I, то $\exists L > 0$: $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|$ $\forall x,y \in I_{n-1}$.
Рассмотрим $D_\varepsilon = \{(x_1,\ldots,x_n)|(x_1,\ldots,x_n - 1 \in (E')^\varepsilon), x_n \in [f(x)-(L+1)\varepsilon, f(x)+(L+1\varepsilon)]\}$. Покажем, что $E^\varepsilon \subset D^\varepsilon$.
Рассмотрим $(\underbrace{a_1,\ldots,}_{\bar{a}}a_n) \in E^\varepsilon \Longrightarrow \exists\ (\underbrace{b_1,\ldots,b_{n-1}}_{\bar{b}\in E'}, f(b_1,\ldots,b_n-1))$ такое, что

$||\bar{a}-\bar{b}||^2+|a_n-f(\bar{b})|^2<\varepsilon^2 \Longrightarrow ||\bar{a}-\bar{b}||^2<\varepsilon$ и $\bar{a}\in(E')^{\varepsilon}$. $|a_n-f(\bar{a})|\leqslant|a_n-f(\bar{b})|+|f(\bar{b})-f(\bar{a})|\leqslant\varepsilon+L\varepsilon=(L+1)\varepsilon$.

Далее по теореме Фубини $\lambda(D^{\varepsilon})=\int\limits_{(E')^{\varepsilon}}dx_1\ldots dx_n\times\int\limits_{f(x_1,\ldots,x_n-1)-(L+1)\varepsilon}^{f(x_1,\ldots,x_n-1)+(L+1)\varepsilon}=2(L+1)\varepsilon\lambda((E')^{\varepsilon})=\bar{o}(\varepsilon)$.

■

Определение 28. Пусть Q — компакт в $\mathbb{R}^n$. Точка $p\in\partial Q$ называется **регулярной**, если существует открытый куб I с рёбрами, параллельными осям и центром в точке p, и непрерывно дифференцируемая функция F на этом кубе I такие, что $gradF\neq0$ на I, $\partial Q\bigcap I=\{x\in I: F(x)=0\}$, $(Q\setminus\partial Q)\bigcap I=\{x\in I: F(x)<0\}$, $I\setminus Q=\{x\in I: F(x)>0\}$. Вектор $N(p)=\dfrac{\bigtriangledown F(p)}{||\bigtriangledown F(p)||}$ называется **вектором внешней нормали**.

Утверждение 38. *Определение внешней нормали корректно.*

Доказательство. Пусть кроме куба I и функции F существуют другой куб I' и G, удовлетворяющие определению регулярной точки. Выбираем из I и I' самый маленький. Пусть это I. Надо проверить, что $\bigtriangledown G(p)=C\cdot\bigtriangledown F(p)$ (они коллинеарны) и $<\bigtriangledown G(p),\bigtriangledown F(p)>\geqslant0$ (сонаправлены).
$\bigtriangledown F(p)\neq0$. Пусть $\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\neq0$, тогда $F(x)=0\Longleftrightarrow x_n=f(x_1,...,x_{n-1})$ в окрестности точки p (теорема о неявной функции). $F(x_1,...,x_{n-1},f(x_1,...,x_{n-1}))=0\Longrightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\dfrac{\partial F}{\partial x_i}/\dfrac{\partial F}{\partial x_n}$.
$G(x_1,...,x_{n-1},f(x_1,...,x_{n-1}))=0$ в окрестности точки p (точки границы). Продифференцируем:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}+\frac{\partial G}{\partial x_n}\cdot\left(\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}\right)=0\Longrightarrow\frac{\partial G}{\partial x_i}=\frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot\underbrace{\left(\frac{\dfrac{\partial G}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}\right)}_{C}$$

Пусть $v=\bigtriangledown F(p)$; рассмотрим функцию $t\longmapsto F(p+tv)$. $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}=<\bigtriangledown F(p),v>=|\bigtriangledown F(p)|^2>0\Longrightarrow$ в малых окрестностях нуля она возрастает. При $t=0$ получим $F(p)=0$, при $t<0$ — $F(p+tv)<0\Longrightarrow(p+tv)\in Q$ при $t<0$, $(p+tv)\notin Q$ при $t>0$. При $-\delta<t<0$ $G(p+tv)<0$ и $G(p)=0$.

$$\frac{d}{dt}G(p+tv)\Big|_{t=0}\geqslant0\Longrightarrow<\bigtriangledown G(p),v>\geqslant0\Longrightarrow\bigtriangledown G(p),\bigtriangledown F(p)\text{ сонаправлены}$$

■

Замечание 8. Пусть $\dfrac{\partial F}{\partial x_n} > 0$ без ограничения общности. $F(x) = 0 \iff x_n = f(x_1, ..., x_{n-1})$. Уменьшая, если надо, куб I, можно считать, что $\{F < 0\} = \{x : x_n < f(x_1, ..., x_{n-1})\}$.
$\{F > 0\} = \{x : x_n > f(x_1, ..., x_{n-1})\}$, то есть F можно заменить на функцию $x_n - f(x_1, ..., x_{n-1})$.

$$N(p) = \pm\frac{\left(-\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., -\dfrac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right)}{\sqrt{1 + (\bigtriangledown f)^2}}$$

В нерегулярных точках полагаем $N(p) = (0, ..., 0, 1)$.

Теорема 26. *Пусть Q — компакт, ∂Q — кусочно-гладкая $(n-1)$–мерная поверхность, причем существует пренебрежимое множество E в ∂Q: $\partial Q \setminus E$ состоит только из регулярных точек. Пусть f непрерывно дифференцируема в окрестности Q, N_i — i–ая компонента вектора нормали. Тогда:*

$$\int\limits_Q \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int\limits_Q f \cdot N_i dH^{n-1}$$

Следствие 13. *(Формула интегрирования по частям)*
Пусть f,g непрерывно дифференцируемы в окрестности Q.Тогда

$$\int\limits_Q \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = \int\limits_Q f\frac{\partial g}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\partial Q} fgN_i dH^{n-1}$$

Следствие 14. *(Формула Гаусса–Остроградского)*
$n \geq 2$. Пусть $V(x) = (V_1(x), ..., V_n(x))$ — непрерывно дифференцируемое векторное поле в окрестности Q. Тогда:

$$\int\limits_Q divV(x)dx = \int\limits_{\partial Q} < V(x), N(x) > dH^{n-1},$$

где $divV(x) = \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + ... + \dfrac{\partial V_n}{\partial x_n}$.
Это поток векторного поля V через ∂Q.

Замечание 9. Теорема верна и в случае $n = 1$:
$\int\limits_{[a,b]} f'(x)dx = f(b) - f(a) = \int\limits_{\partial[a,b]} f \cdot N(\delta_a + \delta_b)$ — правильная трактовка (δ — мера).

Формула Гаусса–Остроградского

Теорема 27. $V = (V_1, V_2)$, $\partial D = \gamma(t)$ *(параметризация); это правильная параметризация (правильная ориентация ∂D), если N и $\dot\gamma$ образуют правильно ориентированный репер:* $\begin{vmatrix} N_1 & \dot x \\ N_2 & \dot y \end{vmatrix} > 0$. $N_1 = \dot y \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot y^2 + \dot x^2}}$; $N_2 = -\dot x \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot y^2 + \dot x^2}}$.

$\int\limits_D\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_a^b\left(\frac{\dot y}{\sqrt{\dot y^2+\dot x^2}}\cdot V_1-\frac{\dot x}{\sqrt{\dot y^2+\dot x^2}}\cdot V_2\right)\cdot\sqrt{\dot y^2+\dot x^2}dt=\int\limits_{\partial D}V_1dy-V_2dx$, *где* $\dot y dt=dy$, $\dot x dt=dx \iff$

$$\int\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{\partial D}Pdx+Qdy$$

— *формула Грина. Положим* $V_2=-P$, $V_1=Q$.

Доказательство. Разобъем на отдельные шаги.
ШАГ 1: Частные случаи (их два)
1) Q — куб I, $f\equiv 0$ на ∂I. Уже доказывали после теоремы Фубини, что $\int\limits_I\frac{\partial f}{\partial x_i}dx=0$ ($g\equiv 1$, смотрите интегрирование по частям)$=\int\limits_{\partial I}f\cdot N_i dH^{n-1}$.
2) I_{n-1} — куб в $\mathbb{R}^{n-1}(x_1,...,x_{n-1})$, есть $x_n=g(x_1,...,x_{n-1})$ непрерывно дифференцируема на I_{n-1}, Q — подграфик функции $g:\{(x_1,...,x_n):(x_1,...,x_{n-1})\in I_{n-1}$ и $x_n\leqslant g(x_1,...,x_{n-1}), x_n\geqslant a\}$. Функция $f\equiv 0$ на границе.
$i=n$.

$$\int\limits_Q\frac{\partial f}{\partial x_i}dx=\int\limits_{I_{n-1}}dx_1...dx_{n-1}\int\limits_a^{g(x_1,...,x_{n-1})}\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n=\int\limits_{I_{n-1}}\Big(f(x_1,...,x_{n-1},g(x_1,...,x_{n-1}))-$$
$$-f(x_1,...,x_{n-1},a)\Big)dx_1...dx_{n-1}=\int\limits_{I_{n-1}}f(x_1,...,x_{n-1},g(x_1,...,x_{n-1}))dx_1...dx_{n-1}.$$

$$N=\frac{(-\frac{\partial g}{\partial x_1},...,-\frac{\partial g}{\partial x_{n-1}},1)}{\sqrt{1+|\bigtriangledown g|^2}}$$

$$\int\limits_{\partial Q}f\cdot N_i dH^{n-1}=\int\limits_{\text{по графику } g(I_{n-1})}f\cdot\frac{1}{\sqrt{1+|\bigtriangledown g|^2}}\cdot\sqrt{1+|\bigtriangledown g|^2}dx_1...dx_{n-1}=$$
$$=\int\limits_{I_{n-1}}f(x_1,...,x_{n-1},g(x_1,...,x_{n-1}))dx_1...dx_{n-1}\text{ — совпало.}$$

В итоге $\int\limits_Q\frac{\partial f}{\partial x_i}dx=\int\limits_{\partial Q}f\cdot N_n dH^{n-1}$.

$i < n$:

$$\int\limits_Q \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int\limits_{I_{n-1}} dx_1 ... dx_{n-1} \int\limits_a^{g(x_1,...,x_{n-1})} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_n =$$

$$= \int\limits_{I_{n-1}} dx_1 ... dx_{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_a^{g(x_1,...,x_{n-1})} f dx_n - \frac{\partial g}{\partial x_i} f(x_1, ..., x_{n-1}, g(x_1, ..., x_{n-1})) \right) =$$

$$= \int\limits_{I_{n-1}} \underbrace{dx_1..dx_{n-1}}_{\text{без } x_i} \int\limits_a^g f dx_n \Bigg|_{x_i=a_i}^{x_i=b_i} + \int\limits_{I_{n-1}} dx_1 ... dx_{n-1} f(x_1, ..., x_{n-1}, g(x_1, ..., x_{n-1})) \cdot \left(- \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) =$$

$$= \int\limits_{I_{n-1}} dx_1 ... dx_{n-1} f(x_1, ..., x_{n-1}, g(x_1, ..., x_{n-1})) \cdot \left(- \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + |\bigtriangledown g|^2}} \cdot \sqrt{1 + |\bigtriangledown g|^2} =$$

$$= \int\limits_{\text{график } g} f \cdot N_i dH^{n-1}.$$

Пояснения к проведенным действиям:

1) $\frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_a^{g(x_1,...,x_{n-1})} f(x_1, ..., x_n) dx_n = \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot f(x_1, ..., x_{n-1}, g(x_1, ..., x_{n-1})) + \int\limits_a^{g(x_1,...,x_{n-1})} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_n$.

2) $I_{n-1} = [a_1, b_1] \times ... \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$

ШАГ 2 (Разбиение единицы, подчиненное покрытию)

Утверждение 39. *Пусть K — компакт и $U_1, ..., U_N$ — открытые множества, покрывающие K. Тогда $\exists$ конечный набор непрерывно дифференцируемых функций $\psi_1, ..., \psi_M$ таких, что*
1) носитель ψ_i лежит в каком–то U_j $\forall i = 1, ..., M$.
Носитель — это наименьшее замкнутое множество, вне которого функция $\equiv 0$.
2) $\sum\limits_{i=1}^M \psi_i \equiv 1$ на K; $\psi_i \geqslant 0$, $\psi_i \leqslant 1$.
В качестве ψ берем такую функцию: она константа от 0 до r, а потом гладкой убывает как $\sqrt{r}$.

Доказательство. $\forall x \in K$ существует шар $B(x, 3r) \subset U_j$, где $x \in U_j$. $K \subset \bigcup\limits_x B(x, r)$ — конечное подпокрытие — $B(x_1, r_1), ..., B(x_M, r_M)$.
Для $B(x_i, r_i)$ строим $\widetilde{\psi_i}$: $\widetilde{\psi_i}(x) = \varphi_i(||x - x_i||^2)$.
$\psi_1 = \widetilde{\psi_1}$; $\psi_2 = \widetilde{\psi_1}(1 - \widetilde{\psi_1})$; $\psi_3 = \widetilde{\psi_3}(1 - \widetilde{\psi_1})(1 - \widetilde{\psi_2})$ и так далее. ψ_i — бесконечно гладкие.
$1 - (\psi_1 + ... + \psi_M) = 1 - \widetilde{\psi_1} - \widetilde{\psi_2}(1 - \widetilde{\psi_1}) - \widetilde{\psi_3}(1 - \widetilde{\psi_1})(1 - \widetilde{\psi_2}) - ... = (1 - \widetilde{\psi_1})(1 - \widetilde{\psi_2}) \cdot ... \cdot (1 - \widetilde{\psi_M}) = 0$ на K по построению.

∎

ШАГ 3 Пусть $f \equiv 0$ в окрестности множества E. $\forall x \in Q$ $\exists$ открытый куб $I(x)$: или I_x, лежащий внутри Q (если x — внутренняя точка Q), или I_x — куб из определения регулярной точки (если $x \in \partial Q$ — регулярная точка), или I_x, лежащая в окрестности множества E, в которой $f \equiv 0$ (если $x \in E$). Кубы I_x покрывают Q, и можно выбрать конечное подпокрытие $I(x_1), ..., I(x_m)$.
Пусть ψ_j — подчинённое этому покрытию разбиение единицы.
$\int\limits_Q \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum\limits_k \psi_k f\right) dx = \sum\limits_k \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi_k f)\, dx = \sum\limits_k \int\limits_{\partial Q} \psi_k f N_i dH^{n-1}$ (так как или попали во внутренний куб, или в куб из окрестности E, там $f \equiv 0$, или в куб из определения регулярной точки) $= \int\limits_{\partial Q} f N_i dH^{n-1}$.

ШАГ 4: Общий случай.
Пусть E — замкнутое, ограниченное множество, $E^\varepsilon = \bigcup\limits_{a \in E} B(a, \varepsilon) \implies$ существует функция ψ_ε — непрерывно дифференцируемая, такая, что $\psi_\varepsilon \equiv 1$ в окрестности E и $\psi_\varepsilon \equiv 0$ вне E_ε. Более того, $|\bigtriangledown \psi_\varepsilon| \leqslant C \cdot \varepsilon^{-1}$, C не зависит от ε (доказательство ниже).

■

Лекция 19

Теорема Сарда

Лемма 3. *Пусть E — компакт в $\mathbb{R}^n \Longrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists$ непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция ψ_ε: $0 \leqslant \psi_\varepsilon \leqslant 1$; $|\bigtriangledown \psi_\varepsilon| \leqslant \frac{C}{\varepsilon}$; $\psi_\varepsilon \equiv 1$ в окрестности E и $\equiv 0$ вне E_ε, где $E_\varepsilon = \bigcup\limits_{a\in E} B(a,\varepsilon)$. C не зависит от ε.*

Доказательство. Заменим ε на 2ε, E на $\bar{E}^\varepsilon$ и будем строить ψ_ε: $\varepsilon \equiv 1$ на E и $\psi_\varepsilon \equiv 0$ вне E^ε. $dist(x,E) = \min\limits_{y\in E} ||x-y||$ — расстояние до E. Свойства:
1) $|dist(x,E) - dist(z,E)| \leqslant ||x-z|| \Longrightarrow$ это 1–липшецева функция.
2) $dist(x,E) = 0 \Longleftrightarrow x \in E$ (так как E компакт) — очевидно.
Пункт 1: $\min\limits_{y\in E} ||x-y|| - \min\limits_{y\in E} ||z-y|| \leqslant ||x-\widetilde{y}|| - ||z-\widetilde{y}|| \leqslant ||x-z||$ (треугольник).
Еще одна 1–липшецева функция: $\max\{t,0\} = \frac{t+|t|}{2}$.

Их композиция $\max\{0, 1-\frac{1}{\delta}dist(x,E)\} = \varphi_\delta(x)$ — липшецева с константой $\frac{1}{\delta}$. $0 \leqslant \varphi_\delta(x) \leqslant 1$; $\varphi_\delta(x) \equiv 1$ на E; $\varphi_\delta(x) \equiv 0$ при $x \notin E^\delta$. Проблемы с непрерывной дифференцируемостью. Исправим: теперь изготовим из φ_δ непрерывно дифференцируемую функцию с указанными свойствами: ω_N — δ–образная последовательность.
$\omega_N = 0$ вне шара $B(0,1/N)$; $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_N dx = 1$. $\omega_N * \varphi_\delta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_N(y)\varphi_\delta(x-y)dy$.
Если $1/N < \delta$, то $\omega_N * \varphi_\delta(x) = 0$ при $x \notin E^{2\delta}$. $0 \leqslant \omega_N * \varphi_\delta(x) \leqslant 1$. На E не выполняется равенство $\omega_N * \varphi_\delta(x) = 0$. Знаем только, что $\omega_N * \varphi_\delta(x) \rightrightarrows^E \varphi_\delta \equiv 1$ на E, можно выбрать N: $1/2 \leqslant \omega_N * \varphi_\delta(x) \leqslant 1$ на E.
Положим $\psi_\varepsilon(x) = h(\omega_N * \varphi_\delta(x))(x)$.
Оценим $\bigtriangledown\psi_\varepsilon$:

$$\omega_N * \varphi_\delta(x)(x+te_i) - \omega_N * \varphi_\delta(x)) \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_N(y)(\varphi(x+te_i) - \varphi(x-y))dy \leqslant 1/\delta$$

по модулю $\Longrightarrow |\bigtriangledown \psi_\varepsilon| \leqslant \frac{16\sqrt{n}}{\varepsilon}$, берём $\delta = \varepsilon/4$.

■

Теорема 28. *(Теорема Сарда)*
Пусть $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема на открытом множестве U. Положим $E := \{x \in U | f'(x) = 0\}$, то есть $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ для любого $i = 1,...,n$. Тогда $f(E)$ — меры нуль по Лебегу. $f(E)$ состоит из таких y, что в $f^{-1}(y)$ есть критическая точка x. Если $y \notin f(E)$, то $\{x : f(x) = y\}$ — гладкая $(n-1)$–мерная поверхность.

Доказательство. Можно рассматривать f на кубе.
ШАГ 1: $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ — бесконечно гладкая. $E = \{x \in [0,1] | f'(x) = 0\}$. Покажем, что $f(E)$ — меры нуль.
Разобьем $[0,1]$ на отрезки с диаметром $1/N$. $C = \max|f''|$. Пусть в I (в отрезке разбиения) $\exists x_0 \in E$.
$x,y \in I \Longrightarrow |f(x) - f(y)| = |f(x) - (f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)) - f(y) + (f(x_0) - f'(x_0)(y-$

$x_0))| \leqslant \dfrac{C}{2} \cdot \dfrac{1}{N^2} + \dfrac{C}{2} \cdot \dfrac{1}{N^2} = \dfrac{C}{N^2}$ (формула Тейлора).
Рассмотрим образ отрезков, содержащих критическую точку: $f(I) \subset [f(x) - \frac{C}{N^2}; f(x) + \frac{C}{N^2}]$. $|J| = \frac{2C}{N^2}$. $f(E) \subset \bigcup\limits_{I: I\cap E \neq \varnothing} f(I) \subset \bigcup$отрезков, длина которых $\dfrac{2C}{N^2}$, их количество — $N \Longrightarrow f(E)$ покрыто отрезками, сумма длин которых $\leqslant \dfrac{2C}{N}$.
ШАГ 2: $E_m = \{x : f^{(i)} = 0, i \leqslant m\}$. Наше множество — E_1. Утверждается, что существует m такое, что $f(E_m)$ — множество меры нуль.
$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{C}{N^{m+1}}$. $f(I)$ принадлежит объединению отрезков длины $\dfrac{2C}{N^{m+1}} \Longrightarrow$ $f(E_m)$ покрывается отрезками суммарные длины $\leqslant \dfrac{2C}{N^{m+1}} \cdot N^n$ Берем $m : m+1 > n$.
ШАГ 3: Предположим, что теорема Сарда выполнена для $(n-1)$. Докажем для n. Покажем, что $f(E_{k-1} \setminus E_k)$ — меры нуль. $E_1 = (E_1 \setminus E_2) \bigcup (E_2 \setminus E_3) \bigcup \ldots \bigcup (E_{m-1} \setminus E_m) \bigcup E_m$. Докажем для случая: $(E_1 \setminus E_2)$: $x_0 \in (E_1 \setminus E_2)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$, но $\exists j : \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \neq 0$ (пусть $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) \neq 0) \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \neq 0$ в окрестности $U(x_0)$; в $U(x_0)$ $E_1 \setminus E_2$ лежит на гладкой $(n-1)$–мерной поверхности $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0$.
Эта поверхность в окрестности точки x_0 является графиком гладкой функции $x_2 = h(x_1, x_3, ..., x_n)$. $x_1, x_3, ..., x_n \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (область определения). В D есть D' — проекция $E_1 \setminus E_2$. $f(\underbrace{E_1 \setminus E_2}_{\text{из } U(x_0)}) = \widetilde{f}(D')$, где $\widetilde{f} = (x_1, x_3, ..., x_n) = f(x_1, h(x_1, ..., x_n), x_3, ..., x_n$.
Пусть $a \in D'$; $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \dfrac{\partial h}{\partial x_i} + \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.
$\Longrightarrow D'$ — критические точки для $\widetilde{f}$; но $f : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ и для нее теорема Сарда уже есть по предположению индукции. $U(x_0)$ — с рациональным центром и рациональным радиусом; их счетное объединение. ■

Лекция 20

Формула ко–площади

Пусть Φ — гладкая функция и U — гладкая, неотрицательная, с компактным носителем функция.

Теорема 29. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi|\bigtriangledown U|dx = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{U=t} \Phi dH^{n-1} \right) dt.$

Доказательство. Рассмотрим гладкое векторное поле $W = (W_1, ..., W_n)$.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} < W, \bigtriangledown U > dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} divW \cdot U dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} divW(x) \cdot \int\limits_0^\infty \chi_{U \geq t} dt dx =$$

$$= -\int\limits_0^\infty dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} divW(x) \cdot \chi_{U\geq t} dx = \int\limits_0^\infty dt \int\limits_{U=t} < W, \frac{\bigtriangledown U}{|\bigtriangledown U|} > dH^{n-1}.$$

$\dfrac{\bigtriangledown U}{|\bigtriangledown U|}$ — вектор внутри нормали; из–за этого исчез минус.

В качестве W берём $\dfrac{\Phi \bigtriangledown U}{\sqrt{|\bigtriangledown U|^2 + \varepsilon^2}}$.

Подставим: $\int\limits_0^\infty dt \int\limits_{U=t} \Phi \dfrac{\bigtriangledown U}{\sqrt{|\bigtriangledown U|^2+\varepsilon^2}} dH^n; \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi \dfrac{|\bigtriangledown U|^2}{\sqrt{|\bigtriangledown U|^2+\varepsilon^2}}$, $\varepsilon \longrightarrow 0$ + теорема Лебега:

$$\int\limits_0^\infty dt \int\limits_{U=t} \Phi dH^{n-1} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi|\bigtriangledown U|dx.$$

■

Общие утверждения про площадь

Теорема 30. *(Родемахер)*
Если отображение $f \colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ локально липшицево, то есть $\forall$ шара B $\exists$ константа $C > 0$: $||f(x) - f(y)|| \leqslant C||x - y||$ $\forall x, y \in B$, то f почти всюду дифференцируема.

Теорема 31. *(формула площади)*
Пусть $k \leqslant n$ и $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ локально липшицево, тогда $\forall$ множества E верно равенство: $\int\limits_E \sqrt{\det J_f^* J_f} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \#\{E \bigcap f^{-1}(y)\} dH^k$.

Если f — инъекция, то $\#\{E \bigcap f^{-1}(y)\} = \chi_{f(E)}$ и $\int\limits_E \sqrt{\det J_f^* J_f} dx = H^k(f(E))$ (наш случай).

Следствие 15. *(обобщение формулы замены переменных)*
$\int\limits_{\mathbb{R}^k} g(x)\sqrt{\det J_f^* J_f} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \cdot \sum\limits_{x \in f^{-1}(y)} g(x) dH^k$, *$g$ измерима.*

Лекция 21

Криволинейный интеграл второго рода

Пусть $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое инъективное отображение, $t \mapsto (x_1(t), ..., x_n(t))$.
В окрестности $\gamma([a,b])$ задано гладкое векторное поле $(A_1, ..., A_n)$.
Как найти работу этого поля вдоль кривой γ?
В физике это записывают так:

$$\sum_i < \dot{\gamma}(t_{i-1}), A > \Delta t_i \longrightarrow \int_a^b < A(x(t)), \dot{x}(t) > dt = \int_a^b A_1 dx_1 + ... + A_n dx_n.$$

Определение 29. Выражение $\int_a^b < A, \dot{x} > dt$ называется **криволинейным интегралом 2–го рода**.

Определение 30. Допустимой заменой параметра называется диффеоморфизм $t(\tau)$ отрезка $[\alpha, \beta]$ на $[a,b]$.
Из выражения $\dfrac{d}{d\tau}\gamma(t(\tau)) \cdot t'(\tau)$ легко видно, что $t' > 0$ — сохранение ориентации при замене параметра; $t' < 0$ — смена ориентации.

Следствие 16. *Если замена параметра сохраняет ориентацию, то она не меняет интеграл второго рода. Если она не сохраняет ориентацию, то она не меняет абсолютную величину, но умножает его на* (-1).

Доказательство. $\int_a^b < A(x(t)), \dot{x}(t) > dt;$

$$\int_\alpha^\beta < A(x(t(\tau))), \frac{d}{d\tau}x(t(\tau)) > d\tau = \int_\alpha^\beta < A, \dot{x} > t'(\tau) d\tau = sgn t' \int_\alpha^\beta < A, \dot{x} > |t'(\tau)| d\tau.$$

■

1–формы

$l(h) = A_1 h_1 + \ldots + A_n h_n$, $A_i = l(e_i)$, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Определение 31. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$; если в каждой точке $x \in U$ определена линейная функция $\omega_x(h) = A_1(x)h_1 + \ldots + A_n(x)h_n$ и A_i — гладкие функции на U, то говорят, что на U задана **дифференциальная 1–форма**.

Пример 23. (Самый важный пример)
f непрерывно дифференцируема на U. $df(x,h) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot h_1 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot h_n$,
$dx_i(h) = h_i$.
$\omega_x = A_1(x)dx_1 + \ldots + A_n(x)dx_n$.

Теорема 32. *Восстановление функции по дифференциалу.*
Иными словами: дано df; найти f.

Доказательство. Решение:
Фиксируем точку x_0, ищем $f(x_0) = 0$. $f(x) =?$
Зададим функцию кривой $\gamma = x(t)$, $t = [0;1]$ с началом в точке x_0 и с концом в точке x. $\dfrac{\partial}{\partial t} f(x(t)) = df(\dot{x}(t)) = \sum\limits_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \dot{x}_j$.

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(x(t))dt = f(x) - f(x_0) =$$

$$= f(x) = \int\limits_0^1 df(\dot{x}(t))dt = \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t))\dot{x}_1(t) + \ldots + (\frac{\partial f}{\partial x_n}(x(t))\dot{x}_n(t) \right).$$

■

Определение 32. $\int\limits_\gamma \omega_x = \int\limits_a^b \omega_{x(t)}(\dot{x}(t))dt$ — интеграл от ω по γ. $\omega = A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n \Longrightarrow \int\limits_\gamma \omega_x = A_1\dot{x}_1 + \ldots + A_n\dot{x}_n$ — просто интеграл второго рода от векторного поля $(A_1, \ldots, A_n)$.
Если γ соединена A и B, $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$, то $\int\limits_\gamma df = f(B) - f(A)$.

Определение 33. Форма $\omega = df$ называется точной, а соответствующее векторное поле $(A_1, \ldots, A_n)$ называется потенциальным, f — его потенциал. $A_i = \partial f/\partial x_i$.

Утверждение 40. *Форма ω на связном открытом множестве U точна $\Longleftrightarrow$ для всякой кривой γ $\int\limits_\gamma \omega_x$ зависит только от начала и конца.*

Доказательство. ($\Longrightarrow$) уже доказано;
($\Longleftarrow$) есть ω_i хотим найти f такое, что $\omega = df$. Фиксируем точку x_0 и $\forall x \in U$ положим $f(x) := \int\limits_{x_0}^{x} \omega$. Проверим, что $df = \omega$: $\omega = A_1 dx_1 + ... + A_n dx_n$. Покажем, что $\partial f/\partial x_i = A_i$:

$$\frac{f(x+te_i) - f(x)}{t} = \frac{1}{t}\left(\int\limits_{x_0}^{x+te_i} \omega - \int\limits_{x_0}^{x} \omega \right) \doteq.$$

При достаточно маленьком t $x + te_i$ и x можно соединить отрезком. Параметризуем отрезок $s \in [0;t]$: $x_1(s) = x_1; ..., x_i(s) = s; ..., x_n(s) = x_n$.

$\Longrightarrow \dot{=} 1/t \int\limits_{[x,x+te_i]} \omega = 1/t \int\limits_0^t A_i(x+se_i)ds \longrightarrow A_i(x)$ $(t \to 0)$ — дифференцирование интеграла по верхнему пределу.

■

Определение 34. Пусть $\phi : \mathbb{R}^{\ltimes} \longrightarrow \mathbb{R}^{\gtrdot}$ — гладкое отображение и ω_y — 1–форма на $\mathbb{R}^m$. Тогда $\phi * \omega_x(h) := \omega_{\phi(x)}\left(\phi'(x) \cdot h\right)$ — **перенос формы**.

2–формы

Кососимметрическая билинейная. $\omega(\xi, \eta)$, ξ, η — векторы; $\omega(\xi, \eta) = -\omega(\xi, \eta)$; линейная по обоим аргументам. Если e_i — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, то $\omega(\xi, \eta) = \sum\limits_{i<j} A_{ij}(x_iy_j - x_jy_i)$, $A_ij = \omega(e_i, e_j)$.

Определение 35. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$; если для любого $x \in U$ определена кососимметрическая билинейная функция $\omega_x(\xi, \eta) = \sum\limits_{i<j} A_ij \cdot ($ и A_ij — гладкие функции, то говорят, что задана **дифференциальная 2–форма.**

Как получить 2–форму из 1-формы?

Определение 36. Способ 1: ω^1, ω^2 — 1–формы. $\omega^1(\xi)\omega^2(\eta) - omega^2(\xi)\omega^1(\eta)$ — **внешнее произведение 1–форм**. Обозначение: $\omega^1 \wedge \omega^2(\xi, \eta)$. Отсюда $\omega^1 \wedge \omega^2 = -\omega^2 \wedge \omega^1$, $\omega^1 \wedge \omega^2 = 0$.
$dx_i \wedge dx_j(\xi, \eta) = dx_i(\xi)dx_j(\eta) - d_j(\xi)dx_i(\eta) = \xi_i\eta_j - \eta_i\xi_j$.
Далее пишем, что $\omega_x(\xi, \eta) = \sum\limits_{i<j} A_{ij}(x)dx_i \wedge dx_j$.

Определение 37. Способ 2: **внешнее дифференцирование**: ω_x — 1–форма, $\omega_x = \sum\limits_j A_j(x)dx_j$, $d\omega := \sum\limits_j dA_j \wedge dx_j$ — внешняя производная. Договорённость: df — обычный дифференциал.
$d(df) = d(\sum\limits_j \frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j) = \sum\limits_j \left(\sum\limits_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}dx_k\right) \wedge dx_j = \sum\limits_{j<k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right) dx_k \wedge dx_j = 0$.
Если $d\omega = 0$, то ω называется **замкнутой формой**. Если $\omega = A_1dx_1 + ... + A_ndx_n$, то $d\omega = 0 \Longrightarrow \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$.

Лемма 4. *(Лемма Пуанкаре)*
Пусть U — шар с центром в нуле. Тогда $d\omega = 0 \Longleftrightarrow \omega = df$. Поле $(A_1, ..., A_n)$ потенциально $\Longleftrightarrow \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$. Форма $d\omega$ замкнута тогда и только тогда, когда она точна.

Доказательство. ($\Longleftarrow$): уже доказано.

($\Longrightarrow$): пусть U — шар с центром в нуле; $f(x) = \int\limits_{[0,x]} \omega = \int\limits_0^1 A_1(tx)x_1 + ... + A_n(tx)x_n dt$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int\limits_0^1 \dfrac{\partial A_1}{\partial x_i}(tx) \cdot tx_1 + ... + \dfrac{\partial A_n}{\partial x_i}(tx) \cdot tx_n + A_i(tx)dt$ (собственный интеграл с параметром).

По условию $\dfrac{\partial A_k}{\partial x_i} = \dfrac{\partial A_i}{\partial x_k} \Longrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_1}(tx) \cdot x_1 + ... + \frac{\partial A_i}{\partial x_n}(tx) \cdot x_n\right) + A_i(tx)dt = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}(A_i(xt)t)dt = A_i(x)$$

по формуле Ньютона–Лейбница.

■

Доказательство без изменений обобщается на звездные области (в них есть точка x_0, от которой до любой точки можно провести отрезок, целиком лежащий в этой области). На самом деле это верно и для односвязных областей.

Пример 24. (заменить U на любую область нельзя)
Рассмотрим $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $\varphi(x,y)$ — полярный угол.
$d\varphi(x,y) = d\operatorname{arctg}(y/x) = \dfrac{\frac{xdy-ydx}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \omega.$
Форма ω определена всюду на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $d\omega = 0$, но она не является точной:
$\int\limits_{S^1} \omega = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\cos^2 tdt + \sin^2 tdt}{1} = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$ — противоречие.

Лекция 22

Утверждения про 2–формы

Пример 25. (индекс/степень отображения $\varphi : S^1 \longrightarrow S^1$): φ — гладкое отображение; $(x(t), y(t)) = \varphi$ — 2π—периодическая; $x^2 + y^2 = 1$, $t \in [0, 2\pi]$.
$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^1} \varphi^*\omega$—? $\varphi(t) = (x(t) = \cos mt, y(t) = \sin mt)$

$\int\limits_{S^1} \varphi^*\omega = \int\limits_0^{2\pi} \cos mt \cdot m \cdot \cos mt + \sin mt \cdot m \cdot \sin mt dt = 2\pi m$, m — число оборотов точки $\varphi(t)$ при $t \in [0, 2\pi]$ — степень отображения φ.

Утверждение 41. *Пусть $\varphi : S^1 \longrightarrow S^1$ — гладкое отображение; $\varphi(0) = (1, 0)$;*
1) существует непрерывная функция f на $[0, 2\pi]$: $\varphi(t) = (\cos 2\pi f(t), \sin 2\pi f(t))$ (f — поднятие), $f(0) = 0$.
2) $f(2\pi) \in \mathbb{Z}$ — степень отображения φ.
3) $f(2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^1} \varphi^*\omega$.

Доказательство. 1) Пусть $\varphi([t_{i-1}; t_i]) \subset \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow f(t) = \operatorname{arctg} \varphi(t) \cdot \frac{1}{2\pi}$ 2) $f(2\pi) \in \mathbb{Z}$, так как $\varphi(2\pi) = \varphi(0)$: $1 = \cos 2\pi f(2\pi)$, $0 = \sin 2\pi f(2\pi)$.

3) $$\int\limits_{S^1} \varphi^*\omega = \int\limits_0^{2\pi} \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} dt = \sum_i \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} 2\pi df_{i-1} = \sum_i 2\pi(f_{i-1}(t_{i-1}) + f_{i-1}(t_i)) = 2\pi \cdot f(2\pi).$$

■

Пример 26.
$\mathbb{R}^2, \vec{V}(x)$ — векторное поле. $\varphi(x) = \dfrac{\vec{V}(x)}{||V(x)||}$ – – – **индекс векторного поля**. $\dfrac{\gamma(t)}{||\gamma(t)||}$ — **индекс кривой**.
2–форма: $\varphi^*\omega_x(\xi, \eta) := \omega_{\varphi(x)}(\varphi'(x)\xi, \varphi'(x)\eta)$ — **перенос 2–формы**.

Замечание 10. (про 1–формы)
В координатах $x_1, ..., x_n$ $\omega = A_1 dx_1 + ... + A_n dx_n$.
Другие координаты $y_1, ..., y_n$: $\omega = B_1 dy_1 + ... + B_n dy_n$. Как связаны dx_1 и dy_1?
$dy_1 = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + ... + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} dx_n$ — первая координата $\varphi'(x)$ (вместо dy_i пишем v_i).
При переносе формы просто вместо dy_i ставим $dy_i(x) = \dfrac{\partial y_i}{\partial x_1} dx_1 + ... + \dfrac{\partial y_i}{\partial x_n} dx_n$.

Утверждение 42. *1) $d(df) = 0$*
2) $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$, ω — 1–форма.
3) если f — функция, то $\varphi^* f := f(\varphi(x))$; $d(\varphi^* f) = \varphi^* df$.
4) $\varphi^*(\omega^1 \wedge \omega^2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2$.
5) $\varphi^* d\omega = d(\varphi^*\omega)$

Доказательство. 1) уже доказано
2) $\omega = A_1 dx_1 + ... + A_n dx_n$, $f\omega = fA_1 dx_1 + ... + fA_n dx_n$.
$d(f\omega) = d(fA_1) \wedge dx_1 + ... + d(fA_n) \wedge dx_n =$ правило Лейбница $= A_1 df \wedge dx_1 + fdA_1 \wedge dx_1 + ... + A_n df \wedge dx_n + fdA_n \wedge dx_n = df \wedge \omega + fd\omega$.
3) $\varphi^* f = f(\varphi(t)) = f(x_1(t), ..., x_n(t))$, $t = (t_1, ..., t_m)$.
$d\varphi^* f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + ... + \ dfrac \partial f \partial x_n dx_n = \sum ... dt_k$ (расписали dx_i).
$\varphi^* df = df\Bigg(\varphi'(x)\Bigg(dt_1, ..., dt_m\Bigg)^T\Bigg) = d\varphi^* f$ — инвариантность первого дифференциала.
4) Этот пункт остаётся в качестве упражнения
5) $\omega = A_1 dy_1 + ... + A_n dy_n$, φ^* и d линейны по $\omega \Longrightarrow$ достаточно рассмотреть $A_1 dy_1$.
$\varphi^* d\omega = \varphi^*(dA_1 \wedge dy_1) = \varphi^* dA_1 \wedge \varphi^* dy_1 = d\varphi^* A_1 \wedge dy_1(x)$.
Правая часть: $d(\varphi^* A_1 dy_1) = d(A_1(y(x)) dy_1(x)) = dA_1(y(x)) \wedge dy_1(x) + A_1 d(dy_1)$ — совпало.

■

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана двумерная гладкая элементарная поверхность $S = f(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество, f — гладкое инъективное отображение, $rkf' = 2$. $(t_1, t_2) \in U$, $S : (x_1(t_1, t_2), ..., x_n(t_1, t_2))$.
Пусть $D \subset U$ — измеримое пространство, $\Sigma = f(D)$. Предположим, что в окрестности S задана дифференциальная 2–форма ω.

Определение 38. $\displaystyle\int\int_\Sigma \omega := \int\int_D f^*\omega$ — 2–форма на $\mathbb{R}^2$ с координатами t_1, t_2; $f^*\omega = A(t_1, t_2) dt_1 \wedge dt_2 \Longrightarrow \displaystyle\int\int_\Sigma \omega := \int\int_D A(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ — очень сильно зависит от (f, Σ), от параметризации.
Если $\varphi : \Omega \longrightarrow D$ — диффеоморфизм, то говорят, что **задана допустимая замена параметров (координат на поверхности)**.

$$\varphi := \begin{cases} t_1 = t_1(s_1, s_2) \\ t_2 = t_2(s_1, s_2) \end{cases}$$

Будем говорить, что φ **не меняет ориентацию** на Σ, если $\det \varphi' > 0$; будем говорить, что φ **меняет ориентацию** на Σ, если $\det \varphi' < 0$.

Утверждение 43. *1) если φ не меняет ориентацию, то $\displaystyle\int\int_D f^*\omega = \int\int_D (f \circ \varphi)^*\omega$, то есть $\displaystyle\int\int_\Sigma \omega$ не зависит от выбора координат на поверхности, если не меняется ориентация.*
2) если φ меняет ориентацию на Σ, то $\displaystyle\int\int_D f^*\omega = -\int\int_D (f \circ \varphi)^*\omega$, то есть выражение $\displaystyle\int\int_\Sigma \omega$ меняет знак.

Доказательство.
$(f\circ\varphi)^*\omega = \varphi^*(f^*\omega)$ по определению $*$: $\varphi^*(f^*\omega)_x(\xi,\eta) = f^*\omega_{\varphi(x)}(\varphi'(x)\xi, \varphi'(x)\eta) = \omega_{f(\varphi(x))}(f'(\varphi(x))\varphi'(x)\xi, f'(\varphi(x))\varphi'(x)\eta) = (f\circ\varphi)^*_x\omega(\xi,\eta)$.
Пусть $f^*\omega = A(t_1,t_2)dt_1\wedge dt_2$;

$$\varphi^*(A(t_1,t_2)dt_1\wedge dt_2) = A(t_1(s_1,s_2),t_2)\left(\frac{\partial t_1}{\partial s_1}ds_1 + \frac{\partial t_1}{\partial s_2}ds_2\right)\wedge\left(\frac{\partial t_2}{\partial s_1}ds_1 + \frac{\partial t_2}{\partial s_2}ds_2\right) =$$
$$= A(t_1(s_1,s_2),t_2(s_1,s_2))\cdot\left(\frac{\partial t_1}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial t_2}{\partial s_2} - \frac{\partial t_1}{\partial s_2}\cdot\frac{\partial t_2}{\partial s_1}\right)ds_1\wedge ds_2.$$

Случаи:
1) $\det\varphi' > 0$: $\displaystyle\int\int_D A dt_1dt_2$ и $\displaystyle\int\int_\Omega A\det\varphi' ds_1ds_2$ равны по формуле замены переменных.
2) $\det\varphi' < 0$: $\displaystyle\int\int_D A dt_1dt_2$ и $\displaystyle-\int\int_\Omega A|\det\varphi'| ds_1ds_2$ равны по формуле замены переменных.

■

Определение 39. Выражение $\displaystyle\int\int_\Sigma \omega$ называют **поверхностным интегралом второго рода**.

Запись формулы Грина на языке дифференциальных форм

D такая же, как в теореме Гаусса—Остроградского. ∂D параметризована $\gamma(t)$, причем ориентация ∂D согласовано с D, то есть $\dot\gamma$ и внешняя нормаль образуют правую пару (D слева от ∂D). Тогда:

$$\int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = \int\int\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

Рассмотрим $\omega = Pdx + Qdy$, $d\omega = dP\wedge dx + dQ\wedge dy = \dfrac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx + \dfrac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$.
Формула Грина:
$\displaystyle\int\int\limits_{\partial D}\omega = \int\int\limits_D d\omega.$

Теорема 33. *(Формула Стокса)*
Пусть Σ — двумерная поверхность; $\Sigma = f(\bar D)$, $\partial\Sigma := f(\partial D)$ и ∂D и D ориентированы согласовано (как в формуле Грина). ω — 1–форма, определенная в окрестности Σ. Тогда

$$\int\limits_{\partial\Sigma}\omega = \int\int\limits_\Sigma d\omega$$

Доказательство. *Доказательство.* $\int\limits_{\partial\Sigma} \omega = \int\limits_{\partial D} f^*\omega = \int\int\limits_{D} d(f^*\omega) = \int\int\limits_{D} f^*(d\omega) = \int\int\limits_{\Sigma} d\omega.$ ∎

Замечание 11. $\int\int\limits_{\Sigma} d\omega = \int\limits_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \int\int\limits_{\Sigma} < rot\vec{V}, N > dH^2$ — поток ротора $\vec{V}$ через Σ, где $rot\vec{V}$ — это разложение по первой строке определителя $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. $d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$, $(P, Q, R) = \vec{V}$.

∎

Лекция 23

Приложение дифференциальных форм и формулы Стокса

(1)

Лемма 5. *(О барабане) Пусть B_1 — единичный круг в $\mathbb{R}^2$. Не существует гладкого отображения $\varphi : \bar{B}_1 \longrightarrow S_1 = \partial B_1$, $\varphi(x) = x\ \forall x \in S_1$.*

Доказательство. Рассмотрим форму $\omega = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

$$2\pi = \int\limits_{S_1} \omega = \int\limits_{\varphi(S_1)} \omega = \int\limits_{S_1} \varphi^*\omega = \iint\limits_{B_1} d(\varphi^*\omega) = \iint\limits_{B_1} \varphi^* d\omega = 0 \text{ — противоречие.}$$

■

Теорема 34. *(Борсук—Улам)*
Пусть $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — гладкое отображение. Тогда существует $x \in S^2$: $f(x) = f(-x)$.

Доказательство. Будем доказывать от противного.
Рассмотрим $g(x) = f(x) - f(-x)$, $g(x) \neq 0$ нигде. Режем сферу пополам и проецируем точки $x \in S^2$ на единичный круг B_1.
$x \in S^1$; $g(x) = -g(-x)+$ ортонормируем: $\frac{g(x)}{||g(x)||}$.
$\varphi : \bar{B} \longrightarrow S^1$; $\varphi(x) = -\varphi(-x)\ \forall x \in S^1$ — гладкое отображение. Но такого φ не существует.
Рассмотрим форму $\omega = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$. $2\pi\cdot <$ число оборотов $>= \int\limits_{S_1} \varphi^*\omega = \iint\limits_{B_1} d(\varphi^*\omega) =$

$\iint\limits_{B_1} \varphi^* d\omega = 0$. Покажем, что степень отображения $\varphi : S^1 \longrightarrow S^1$ не равна нулю.

Существует $h(t)$ — непрерывная на $[0, 2\pi]$. $\varphi(t) = \Big(\cos 2\pi h(t), \sin 2\pi h(t)\Big)$, степень $h(2\pi)$ (смотрите прошлую лекцию). По построению $\varphi(t + \pi) = -\varphi(t)$, $t \in [0, \pi]$.
$\cos 2\pi h(t+\pi) = -\cos(2\pi h(t))$, $\sin 2\pi h(t+\pi) = -\sin(2\pi h(t))$, $t \in [0, \pi] \Longrightarrow 2\pi h(t+\pi) = 2\pi h(t) + (2m + 1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Из—за непрерывности h m одно и то же $\forall t \in [0, \pi]$.
$h(0) = 0 \Longrightarrow h(\pi) = m + 1/2$, $h(2\pi) = h(\pi) + m + 1/2 = 2m + 1 \neq 0\ \forall m \in \mathbb{Z}$. Пришли к противоречию.

■

Геометрическая и физическая интерпретация $d\omega$

$x(t, s) = t\xi + s\eta$ — параметризация $\prod_\varepsilon$, $(t, s) \in [0, \varepsilon]^2$.
$\partial \prod_\varepsilon$ правильно ориентирована. Пусть ω — один—форма.

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\partial \prod_\varepsilon} \omega = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\int_{\prod_\varepsilon} d\omega = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{[0,\varepsilon]\times[0,\varepsilon]} d\omega(\xi, \eta) dt ds \longrightarrow d\omega(\xi, \eta)\Big|_{t=s=0}.$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{\partial \prod_\varepsilon} \omega = d\omega(\xi, \eta)\varepsilon^2 + \bar{o}(\varepsilon^2) \text{ — новое определение } d\omega.$$

Дифференциальные формы высоких порядков

k — линейная кососимметрическая функция: $\omega(\xi^1, ..., \xi^k) = sgn\sigma\omega(\xi^{\omega(1),...,\xi^{\omega(k)}})$.
$\omega = \sum\limits_{1\leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n} a_{i_1,...,i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$, $dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}(\xi^1, ..., \xi^n) :=$ вставить определитель.

Определение 40. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество; если для любого $x \in U$ определена ω_x — k–форма, такая, что $a_{i_1,..,i_k}$ — гладкие функции на U, то говорят, что определена дифференциальная k–форма.

Внешнее умножение
$\omega^k \wedge \omega^l(\xi^1, ..., \xi^{k+l}) = \sum\limits_{\sigma} sgn\sigma\omega^k(\xi^{\omega(1),...,\xi^{\omega(k)}}) \cdot \omega^l(\xi^{\omega(k+1),...,\xi^{\omega(k+l)}})$.
Внешнее дифференцирование
$d\omega = \sum\limits_{1\leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n} da_{i_1,...,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$.
Перенос формы
$\varphi * \omega_x(\xi^1, ..., \xi^k) = \omega_{\varphi(x)}(\varphi'(x)\xi^1, ..., \varphi'(x)\xi^k)$.
Интеграл от k–формы
Пусть S — гладкая элементарная поверхность, заданная отображением $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset U$, $\Sigma = f(D)$;
$\int\limits_{\Sigma} \omega = \int\limits_{D} f * \omega dx = \int\limits_{D} A dt_1 ... dt_k$ — зависит от параметризации с точностью до знака.

Теорема 35. *(Формула Гаусса–Остроградского) Было* $\int\limits_{\partial Q} < \vec{A}, \vec{N} > dH^{n-1} = \int\limits_{Q} divAdx$.

Стало $\int\limits_{\partial Q} \omega = \int\limits_{Q} d\omega$.

Теорема 36. *(Теорема Стокса) Если задано k–мерное гладкое компактное ориентированное многообразие с краем ∂M^k (ориентация согласована с ориентацией M^k) и ω — $(k-1)$–форма, то* $\int\limits_{\partial M^k} \omega = \int\limits_{M^k} d\omega$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ