

Б. Т. Мазуров

ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Новосибирск
СГУГиТ
2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОСИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ»
(СГУГиТ)

Б. Т. Мазуров

ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебника для студентов, обучающихся по направлению
подготовки бакалавров 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование»

Новосибирск
СГУГиТ
2016

УДК 528.2/3
М139

Рецензенты: доктор технических наук, профессор, Сибирская автомобильно-дорожная академия, *Ю. В. Столбов*

кандидат технических наук, доцент, Омский государственный аграрный университет, *А. И. Уваров*

Мазуров, Б. Т.

М139 Высшая геодезия [Текст] : учебник / Б. Т. Мазуров. – Новосибирск : СГУГиТ, 2016. – 203 с.
ISBN 978-5-87693-982-1

Учебник подготовлен доктором технических наук, профессором Б. Т. Мазуровым на кафедре физической геодезии и дистанционного зондирования СГУГиТ. Содержит теоретический и практический материал по высшей геодезии. Дан обзор классических методов построения координатной основы для обширных территорий, математической обработки геодезических наблюдений. Описаны основы математической картографии и физической геодезии.

Учебник предназначен для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование», а также может быть использован при обучении студентов по специальности 21.05.04 «Горное дело».

Рекомендован к изданию Ученым советом Института геодезии и менеджмента СГУГиТ.

Ответственный редактор: кандидат технических наук, доцент, СГУГиТ
К. Ф. Афонин

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 528.2/3

ISBN 978-5-87693-982-1

© СГУГиТ, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Введение	10
1. Высшая геодезия – предмет и задачи, история развития	12
1.1. Предмет и задачи высшей геодезии	12
1.2. Некоторые сведения об объекте изучения – Земле	14
1.3. Первые измерения радиуса Земли. Развитие представлений о форме Земли в XVII в.	16
1.4. Понятие о геоиде и земном эллипсоиде. Элементы земного эллипсоида	18
2. Системы астрономических и геодезических координат.	
Основные понятия и определения из геодезической астрономии	21
2.1. Системы координат в геодезии	21
2.2. Система астрономических координат	21
2.3. Основные понятия и определения из геодезической астроно- мии. Общие принципы определения широты, долготы и ази- мута из астрономических наблюдений	23
2.4. Звездное и солнечное время, время на различных меридиа- нах, всемирное, поясное и декретное время.....	24
2.5. Системы координат, используемые в высшей геодезии. Классификация систем координат	26
2.6. Система прямоугольных координат x , y , отнесенных к плоскости меридиана	28
2.7. Система прямоугольных декартовых пространственных координат	28
2.8. Система геодезических пространственных координат	30
2.9. Система полярных координат. Система геодезических пространственных координат	33
2.10. Эллипсоид как вспомогательная координатная поверхность	34

3. Земные эллипсоиды. Параметры земного эллипсоида	37
3.1. Общий земной эллипсоид и референц-эллипсоиды	37
3.2. Связь пространственных геодезических координат B, L, H с пространственными прямоугольными координатами X, Y, Z	40
3.3. Связь двух систем прямоугольных пространственных коор- динат	41
3.4. Государственная геодезическая система координат ГСК-2011	44
3.5. Общие сведения о государственной геодезической системе координат 2011 г.	45
4. Геометрия земного эллипсоида	48
4.1. Нормальные сечения эллипсоида	48
4.2. Наклонные сечения эллипсоида. Сечение по параллели	52
4.3. Геодезическая линия и ее свойства	54
4.4. Главные геодезические задачи на поверхности эллипсоида и методы их решения	56
4.5. Решение главных геодезических задач по формулам со сред- ними аргументами (формулы Гаусса).....	60
5. Конформное отображение поверхности земного эллипсоида на плоскость. Плоские прямоугольные координаты. Проекция Гаусса – Крюгера	64
5.1. Важнейшие картографические проекции, порядок приме- нения системы координат Гаусса – Крюгера в топографо- геодезических и маркшейдерских работах.....	64
5.2. Плоские прямоугольные координаты. Проекция Гаусса – Крюгера	68
5.2.1. Общие сведения о проекциях эллипсоида на плоскость	68
5.2.2. Понятие о зоне проекции Гаусса – Крюгера.....	76
5.2.3. Свойства проекции Гаусса – Крюгера.....	76
5.2.4. Вычисление прямоугольных координат Гаусса – Крюгера по заданным геодезическим координатам и обратное преобразование	81
5.2.5. Вычисление сближения меридианов	84
5.2.6. Вычисление масштаба изображения и поправок в длины линий за масштаб изображения	85

5.2.7. Вычисление поправок в направления за кривизну изображения геодезических линий	87
5.3. Последовательность редуцирования геодезической сети на плоскость проекции Гаусса – Крюгера	87
5.4. Связь между системами координат различных зон проекции Гаусса – Крюгера.....	91
6. Государственные геодезические сети.....	93
6.1. Общие сведения об государственных геодезических сетях	93
6.2. Современное состояние обеспечения РФ государственной системой координат ГСК-2011	94
6.3. Астрономо-геодезическая сеть	100
6.3.1. Принцип построения и точностные характеристики астрономо-геодезической сети, методы создания	100
6.3.2. Центры пунктов. Геодезические знаки	105
6.3.3. Высокоточные угловые измерения	110
6.3.4. Способ круговых приемов	112
6.3.5. Способ измерения горизонтальных углов во всех комбинациях	113
6.4. Предварительная обработка измерений в ГГС	116
6.5. Определение элементов приведения. Вычисление поправок за центрировку и редукцию	117
6.6. Редуцирование угловых и линейных измерений на поверх- ность эллипсоида.....	120
6.7. Вычисление невязок	122
6.8. Предварительная обработка измерений в высотных геодези- ческих сетях	123
7. Уравнивание геодезических сетей	125
7.1. Общие положения	125
7.2. Задача уравнивания геодезических измерений	126
7.2.1. Необходимые и избыточные измерения	126
7.2.2. Математический аппарат уравнивания	129
7.3. Коррелятный способ	131
7.3.1. Виды условных уравнений	131

7.3.1.1. Условие фигур	131
7.3.1.2. Условие горизонта	132
7.3.1.3. Полюсное условие.....	132
7.3.1.4. Условие жесткого дирекционного угла	134
7.3.1.5. Условие базиса	135
7.3.1.6. Условия координат	136
7.3.2. Выбор необходимых и независимых условных уравнений	138
7.3.3. Допустимые величины свободных членов условных уравнений	140
7.3.4. Алгоритм коррелятного способа уравнивания геодези- ческих измерений в плановой сети.....	141
7.4. Параметрический способ	145
7.4.1. Последовательность уравнительных вычислений	145
7.4.2. Уравнения поправок измеренных величин	147
7.4.2.1. Уравнения поправок направлений	147
7.4.2.2. Уравнение поправок дирекционного угла.....	149
7.4.2.3. Уравнения поправок измеренных углов.....	149
7.4.2.4. Уравнения поправок измеренных сторон.....	150
7.4.3. Алгоритм параметрического способа уравнивания геодезических измерений в плановой сети	151
7.4.4. Оценка точности результатов уравнивания.....	154
7.5. Уравнивание линейно-угловой сети параметрическим способом.....	155

8. Основные сведения о теоретической геодезии.

Системы высот	161
8.1. Общие сведения из гравиметрии	161
8.2. Ускорение силы тяжести и потенциал силы тяжести.....	162
8.3. Геометрия поля силы тяжести.....	164
8.4. Уровенный эллипсоид.....	164
8.5. Трансформанты потенциала (характеристики) отклонения отвесной линии и аномалия высоты.....	167
8.6. Теория высот	170

9. Нивелирные (высотные) геодезические сети	179
9.1. Структура построения нивелирных сетей	179
9.2. Рекомендации проектирования нивелирных сетей	180
9.3. Нивелирование I класса	183
9.4. Контроль наблюдений на станции.....	186
9.5. Нивелирование II класса.....	186
9.6. Особенности нивелирования на геодинамических и техногенных полигонах.....	188
Заключение	191
Библиографический список	192
Приложения.....	194

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для самой большой по площади в мире государственной территории – Российской Федерации – вопросы координирования всегда будут актуальны. Важной функцией государства является развитие, поддержание и надежное использование существующих государственных геодезических сетей. Реализовать эти задачи могут молодые специалисты, получившие высшее образование по направлению подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование».

Образовательный процесс студентов этого направления предусматривает получение ими следующих знаний, навыков и компетенций:

- умение обрабатывать измерительную пространственную информацию о поверхности и физических полях Земли, объектах Земли, околоземного и космического пространства, отображать поверхность Земли или отдельных ее территорий на планах, картах и цифровых моделях;
- осуществление координатно-временной привязки объектов, явлений и процессов на поверхности Земли и в окружающем космическом пространстве;
- организация работ по сбору, хранению и распространению геопространственных данных как на территории Российской Федерации в целом, так и на отдельных ее регионах с целью развития их инфраструктуры;
- способность к выполнению полевых и камеральных геодезических работ по созданию, развитию и реконструкции опорных геодезических, нивелирных, гравиметрических сетей и сетей специального назначения;
- создание планово-высотных сетей, применение современных компьютерных технологий для математической обработки результатов полевых геодезических, астрономических и гравиметрических наблюдений.

Содержание учебника соответствует программе подготовки бакалавров по направлению 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование» и соответствующим рабочим программам. Также он может быть исполь-

зован студентами, обучающимися по специальности 21.05.04 «Горное дело», магистрантами и аспирантами.

При написании учебника были использованы монографии, учебники, учебные пособия и методические рекомендации таких авторов, как В. Г. Зданович, П. С. Закатов, Н. В. Яковлев, Л. В. Огородова, К. М. Антонович, Н. А. Телеганов, А. В. Елагин, К. Ф. Афонин, Г. Н. Тетерин, А. Г. Малков, Г. А. Панаев, В. А. Падве, В. Торге и др.

Автор выражает благодарность ответственному редактору – кандидату технических наук, доценту К. Ф. Афонину (СГУГиТ), рецензентам – доктору технических наук, профессору Ю. В. Столбову (СибАДИ), кандидату технических наук, доценту А. И. Уварову (ОмГАУ), а также кандидату технических наук, доценту В. А. Падве (СГУГиТ), чьи замечания способствовали улучшению данного учебника.

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение и дальнейшее развитие высшей геодезии как одной из составляющих объективно существующего стремления человеческого общества к пониманию места своего проживания имеет историю, которая складывалась более двух тысяч лет.

Развитие представлений о форме Земли и даже факты первых определений размеров Земли как шара и как эллипсоида в данном учебнике отражены в 1-м разделе. Возможности более точного определения параметров Земли, создаваемого ею гравитационного поля в настоящее время связаны с высоким уровнем развития приборостроения, глубоким теоретическим и методическим описанием технологий получения измерительной информации о Земле. Написанные еще в XX в., монографии, учебники по высшей геодезии в некоторых вопросах объективно устарели. Это касается многих технологий производства геодезических измерений – например, базисных измерений, частично методов создания геодезических сетей на больших территориях и др. ГНСС-технологии оптимизировали очень многие этапы создания геодезических сетей, другие важные процессы координатно-временных определений.

В последние десятилетия было создано достаточно много учебников, учебных пособий для успешной подготовки высококвалифицированных специалистов в области геодезии. Их значение велико и в настоящее время. С развитием новых технологий изменилось соотношение востребованности различных разделов высшей геодезии для решения научно-технических задач. Это объективный процесс, который требует соответствующей корректировки образовательных программ по направлению «Геодезия».

Однако есть теоретические основы высшей геодезии, не теряющие своего значения. Очень хорошо они представлены во многих учебниках. При написании данного учебника использована учебная литература по высшей геодезии, изданная за последние шестьдесят лет.

Содержание материала определено с учетом возможности его использования для различных профилей направления «Геодезия и дистанционное зондирование», а также профиля «Маркшейдерское дело». Было учтено, что при существующем учебном плане и в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом в течение одного семестра нужно сделать достаточно широкий обзор основ и методов высшей геодезии. Поэтому обзорный (широкий по тематике), не очень глубокий вариант не будет лишним при подготовке студентов. Расширение рассмотренных вопросов касается описания некоторых разделов дисциплин, тесно связанных с высшей геодезией, – астрономии, математической картографии, гравиметрии.

1. ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ – ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ, ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ

1.1. Предмет и задачи высшей геодезии

Высшая геодезия – наука, занимающаяся определением формы, размеров Земли и окружающего ее гравитационного поля, созданием государственных опорных геодезических сетей, изучением геодинамических явлений, решением геодезических задач на поверхности земного эллипсоида и в пространстве.

Задачи высшей геодезии принято, по мнению великого ученого и практика в данной области Ф. Н. Красовского, подразделять на научные и научно-технические [10]. Главной научной задачей высшей геодезии и смежных с ней наук (гравиметрии и теории фигуры Земли, космической геодезии и астрономии) является определение фигуры и размеров Земли, внешнего гравитационного поля и их изменений во времени.

К числу важнейших научных задач высшей геодезии относятся такие, как определение геодезическими методами количественных характеристик деформаций земной поверхности, изучение вековых поднятий или опусканий крупных блоков земной коры, а также закономерностей перемещений литосферных плит, определение и учет движений полюсов Земли и вариаций ее угловой скорости вращения, изучение современных движений земной поверхности в сейсмически активных районах с целью поиска предвестников и последующего прогноза крупных землетрясений, изучение техногенных движений земной поверхности, обусловленных активной деятельностью человека, определение разностей уровней морей и океанов и др. [16, 21].

Основная научно-техническая задача высшей геодезии и смежных с ней наук состоит в создании глобальной (общеземной) и национальных (на территории государства) опорных геодезических сетей высокой точности. К национальным опорным сетям относятся: государственная геоде-

зическая сеть (основная, часто называемая плановой), государственная нивелирная сеть (высотная) и государственная гравиметрическая сеть.

Эти сети дополняют одна другую и при совместном использовании комплекса выполняемых в них астрономо-геодезических и гравиметрических измерений позволяют однозначно определять координаты и высоты пунктов в единой для страны системе, а также параметры Земли, характеризующие ее фигуру и гравитационное поле в пределах территории страны. Выполняя повторные измерения в этих сетях, можно уточнять координаты и высоты пунктов, а также изучать геодинамические явления.

К научно-техническим задачам также относятся работы по оптимизации создания государственных геодезических сетей и развитию методов оперативной обработки геодезических измерений с учетом метрологической специфики и возможностей как классических, так и современных ГНСС-технологий.

Научные и научно-технические задачи высшей геодезии тесно взаимосвязаны. Без знания параметров фигуры и гравитационного поля Земли невозможно математически строго совместно обработать результаты всего комплекса разнообразных измерений, выполняемых при создании опорных геодезических сетей, а следовательно, однозначно и с высокой точностью определить в единой системе координаты и высоты пунктов. И наоборот, для изучения фигуры и гравитационного поля Земли необходима сеть опорных геодезических пунктов, координаты и высоты которых определены в единой системе. Это свидетельствует о том, что научные и научно-технические задачи высшей геодезии должны решаться совместно, методом приближений, что и происходит в действительности. Высшая геодезия непрерывно развивается и совершенствуется. Она тесно взаимодействует с такими научными дисциплинами, как теория фигуры Земли, гравиметрия, геодезическая астрономия, космическая геодезия и др.

Высшая геодезия в своих исследованиях широко использует новейшие достижения таких фундаментальных наук, как физика, математика, астрономия и др., а при разработке высокоточной измерительной техники – прикладной оптики, точного приборостроения, радиоэлектроники, лазерной техники т. п. При математической обработке результатов измерений широко применяются теория вероятностей, математическая стати-

стика, метод наименьших квадратов и т. п. Все вычисления выполняются с использованием новейших компьютерных технологий и алгоритмов. К таким можно, например, отнести информационные нейронные сети, методы многофакторного анализа и др. Важно отметить, что для решения научных задач, связанных с изучением Земли как планеты, необходима тесная взаимосвязь высшей геодезии с такими науками о Земле, как геология, тектоника, геофизика, дистанционное зондирование и др.

Результаты исследований высшей геодезии имеют важное научное и народнохозяйственное значение. Например, государственные геодезические сети широко используются при освоении космического пространства, изучении природных ресурсов, картографировании территории страны в разных масштабах, промышленном и сельскохозяйственном освоении значительных по площади территорий, установлении границ, демаркации, нужд обороны и др. На основе повторных измерений, выполненных в нивелирных сетях, геодезисты составили и обновляют карты современных вертикальных движений земной коры многих регионов Земли, которые имеют важное научное и прикладное значение. Эти данные необходимы при составлении регионов сейсмической опасности и принятии соответствующих организационных решений по обеспечению безопасности жизнедеятельности населения, проживающего в данных регионах, включая меры промышленной безопасности предприятий различного направления.

1.2. Некоторые сведения об объекте изучения – Земле

Земля (рис. 1.) – третья планета по удаленности от Солнца, пятая по величине среди всех планет Солнечной системы (рис. 2).

Земля взаимодействует (притягивается гравитационными силами) с другими объектами в космосе, включая Солнце и Луну. Земля обращается вокруг Солнца и делает вокруг него полный оборот примерно за 365,26 солнечных суток – сидерический год. Ось вращения Земли наклонена на $23,44^\circ$ относительно перпендикуляра к ее орбитальной плоскости, это вызывает сезонные изменения на поверхности планеты с периодом в один тропический год – 365,24 солнечных суток. Земля имеет естественный спутник – Луну. Соотношение массы Луны к Земле $1/30$, оно является

наибольшим среди соотношений между массами планет и их спутников в Солнечной системе. Орбитальная скорость в космосе – 29,783 км/с. Афелий – 152 098 232 км, перигелий – 147 098 290 км. Площадь поверхности Земли $S = 510\,000\,000\text{ км}^2$. Из них 71 % – океан, 29 % – суша. Средняя высота Земли $H_{\text{ср}} = 875\text{ м}$. Средняя глубина океана $D_{\text{ср}} = 3800\text{ м}$. Максимальная высота – гора Эверест – 8 848 м. Самое глубокое место в океане «Бездна Челленджера» (англ. Challenger Deep) Марианской впадины. По замерам 2011 г., ее глубина составляет $10\,994 \pm 40\text{ м}$ ниже уровня моря. Удивительным является факт асимметрии рельефа, когда горам на суше диаметрально противоположными являются впадины океанического дна.



Рис. 1. Земля

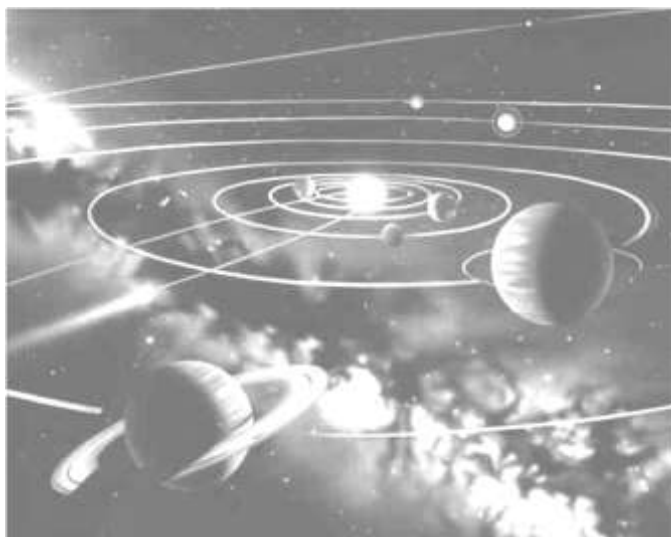


Рис. 2. Планеты Солнечной системы

Реально общеземной рельеф в значительной степени выражен рельефом дна Мирового океана. Этот рельеф по сравнению с рельефом суши более значителен, более насыщен подводными горными системами, впадинами, резкими перепадами высот.

Существует мнение ученых, что Земля образовалась из солнечной туманности около 4,54 млрд. лет назад. Строение Земли ученые обычно считают следующим. Внутренние области Земли достаточно активны и состоят из толстого, очень вязкого слоя, называемого мантией, которая по-

крывает жидкое внешнее ядро, являющееся источником магнитного поля Земли, и внутреннее твердое ядро, предположительно, состоящее из железа и никеля.

Кора Земли (все же гипотетически до настоящего времени) разделена на несколько сегментов, или так называемых тектонических плит, которые движутся по поверхности планеты со скоростями порядка нескольких сантиметров в год.

Отметим, что изучение Земли, происходящих в ней процессов является чрезвычайно сложным научным направлением. И до сих пор вынужденно многие проблемы решаются на уровне гипотез, в той или иной степени правдоподобных, в разной степени соответствующих известным научным фактам.

1.3. Первые измерения радиуса Земли. Развитие представлений о форме Земли в XVII в.

Представления людей о форме Земли менялись со временем. В те времена, когда Земля представлялась плоской, покоящейся на трех слонах, особых трудностей с отображением ее поверхности не возникало.

Основоположником учения о том, что Земля – это шар, который свободно, без всякой опоры располагается в космическом пространстве, принято считать выдающегося математика и философа Пифагора, жившего в VI в. до н. э. Греческие мореплаватели заметили, что те звезды, которые видны в южной части горизонта у берегов Африки, не видны у берегов Черного моря. Следовательно, Земля имеет изогнутую поверхность, и положение горизонта в разных ее местах различно. К тому же было замечено, что при приближении к берегу из-за горизонта сначала появляются верхушки высоких предметов (гор, мачт кораблей и т. п.), затем их средние части, и наконец они становятся видны целиком. Другой выдающийся мыслитель – Аристотель (III в. до н. э.) – сформулировал еще одно доказательство: «Так как лунное затмение происходит от земной тени, то и Земля должна иметь вид шара». Он же предположил, что «объем Земли незначителен в сравнении с небом».

Конечно же, величайшим для того времени (III век до н. э.) является результат измерения радиуса Земли Эратосфеном Киренским – первого градусного измерения. Не случайно его именем заслуженно назван один из кратеров на Луне. Идея ученого была довольно проста: измерить длину дуги земного меридиана в линейных единицах и определить, какую часть полной окружности эта дуга составляет. Получив эти данные, можно вычислить длину дуги в 1° , а затем длину окружности и величину ее радиуса, т. е. радиуса земного шара (прил. 1).

После Эратосфена греки и арабы несколько раз определяли размеры радиуса Земли. В 827 г. арабский калиф Аль-Мамун (786–833 гг.), сын известного Гарун-аль-Рашида, в Месопотамии к северу и к югу от пункта с широтой 35° измерил дуги меридиана в 1° . Угловые и линейные измерения были выполнены с высокой для того времени точностью. Радиус Земли, вычисленный по результатам этих измерений, оказался равным 6 406 км, т. е. близким к современным данным (для 35° средний радиус $R_{\text{Земли}} = 6\,371$ км). Разность равна 35 км, радиус получен с ошибкой менее 0,6 %.

Второй период изучения формы и размеров Земли связан с работами великого английского ученого И. Ньютона (1642–1727 гг.), который высказал мнение, что Земля не может иметь форму точного шара, потому что она вращается вокруг своей оси. Согласно его предположению, все частицы Земли находятся под влиянием центробежной силы (силы инерции), которая велика у экватора и отсутствует у полюсов. Центробежная сила у экватора действует против силы тяжести и ослабляет ее. Равновесие между силой тяжести и центробежной силой было достигнуто тогда, когда земной шар у экватора «раздулся», а у полюсов «сплюснулся» и постепенно приобрел форму мандарина. Предположение Ньютона подтверждалось интересным открытием, сделанным в 1672 г. одним французским астрономом, который установил, что если точные часы перевезти из Парижа в Кайенну (в Южной Америке, вблизи экватора), то они начнут отставать на 2,5 минуты в сутки. Это отставание происходит потому, что маятник часов около экватора качается медленнее. Стало очевидно, что сила тяжести, которая заставляет маятник качаться, в Кайенне меньше, чем в Париже. Ньютон объяснил это тем, что на экваторе поверхность Земли находится дальше от ее центра, чем в Париже.

Хотя теория ньютоновского «мандарина» подтверждалась сделанным открытием, она вызывала ожесточенные споры. Директор Парижской обсерватории Джованни Кассини утверждал, что Земля не сплюснута у полюсов, а вытянута подобно лимону. При помощи триангуляции им была измерена дуга в 1° на разном расстоянии от экватора – на севере и на юге Франции. Южная дуга у Джованни Кассини оказалась длиннее северной, а согласно рассуждениям Ньютона дуга должна наоборот удлиняться при приближении к полюсам. Казалось, что Ньютон не прав. Между сторонниками теории «мандарина» и «лимона» длился ученый спор в течение 50 лет. Чтобы окончательно решить этот спор, Парижская академия наук для выполнения градусных измерений организовала две экспедиции: южную в 1735 г. в экваториальную область Перу и северную в 1736 г. – в Лапландию (так до начала XX в. назывались северная часть Скандинавского и западная часть Кольского полуостровов). Южная экспедиция за 8 лет измерила дугу меридиана в $3^\circ 7'$, которая равнялась 350 км, а северная – за полгода дугу в 1° . Измерения, проведенные в различных пунктах земного шара, подтвердили, что длина 1° дуги меридиана увеличивается с возрастанием географической широты, т. е. Земля сплюснута у полюсов. Ее экваториальный радиус составляет 6 378 км, а полярный – на 21 км короче. На школьном глобусе масштаба 1 : 50 000 000 эти радиусы отличаются всего на 0,4 мм. Результаты этих экспедиций подтвердили теорию Ньютона, что Земля сплюснута у полюсов и является сфероидом, эллипсоидом вращения. У эллипсоида любое сечение плоскостью, проходящей через центр Земли, является не окружностью, а эллипсом.

1.4. Понятие о геоиде и земном эллипсоиде.

Элементы земного эллипсоида

Физическую поверхность Земли невозможно использовать для решения многих геодезических задач по причине ее топографической сложности и ряда других факторов. В результате длительного развития представлений о форме Земли как планеты сложилось понятие о геоиде (рис. 3, 4). Термин «геоид» предложил в 1873 г. немецкий физик Листинг.

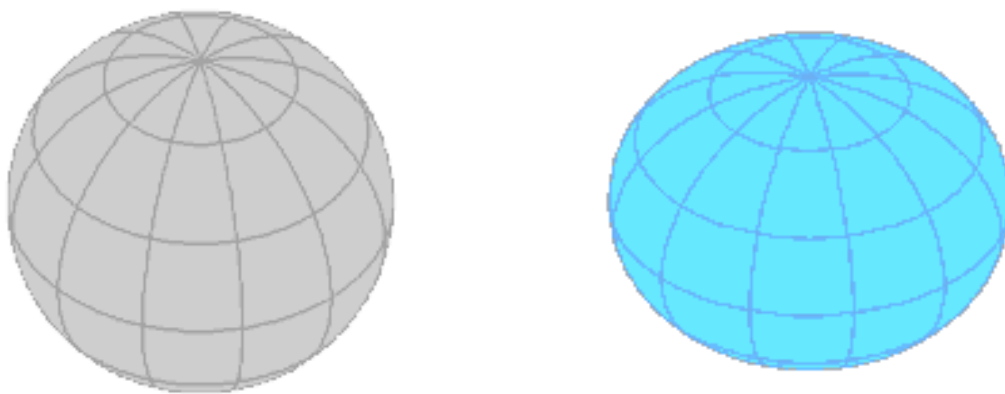


Рис. 3. Развитие модели формы Земли: сфера в античные времена (слева); эллипсоид в XVII в. (справа)

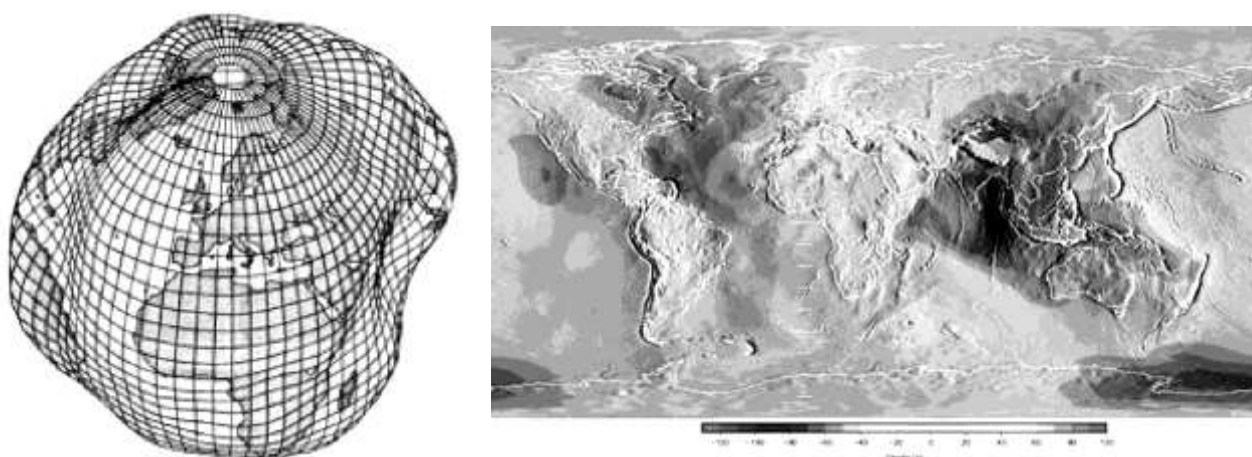


Рис. 4. Иллюстрации формы геоида (с увеличенным масштабом изображения отклонений от поверхности эллипсоида)

Для получения обобщенного представления о фигуре Земли используется понятие уровенной поверхности. Это есть поверхность во всех своих точках нормальная (перпендикулярная) к отвесной линии (направлению силы тяжести). По определению и физическому смыслу уровенных поверхностей бесчисленное множество. Но одна из них особенно выделена для задач описания Земли. Средняя уровенная поверхность, совпадающая с средним уровнем океанов, водные массы которых находятся в состоянии покоя, и есть геоид.

Поверхность геоида совпадает с поверхностью морей и океанов в их спокойном состоянии и мысленно продолжается под материки. Эта поверхность принимается за математическую поверхность Земли, или «уровень моря», от которого отсчитывают высоты точек земной поверхности (так называемые ортометрические высоты). Но форма геоида весьма сложна и зависит от распределения масс и плотностей в теле Земли. Точно установить положение геоида под материками очень сложно, поскольку измерения силы тяжести выполняются на физической поверхности Земли, а затем довольно сложными приемами редуцируются на поверхность геоида с известной долей неопределенности.

2. СИСТЕМЫ АСТРОНОМИЧЕСКИХ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

2.1. Системы координат в геодезии

Координаты в общем смысле есть числа, определяющие положение точки на плоскости, любой поверхности или в пространстве.

В геодезии под координатами понимают совокупность трех чисел, определяющих положение точки земной поверхности относительно некоторой исходной поверхности.

При определении координат точек земной поверхности в геодезии применяются следующие основные системы координат:

- система астрономических координат;
- система геодезических координат;
- система географических координат;
- система прямоугольных координат;
- зональная система координат в проекции Гаусса – Крюгера;
- система полярных координат.

2.2. Система астрономических координат

В системе астрономических координат положение точки определяется на уровенной поверхности (поверхности геоида, см. подраздел 1.4) значениями астрономических широты и долготы. Астрономические координаты точки определяются из непосредственных наблюдений небесных тел, выполненных на этой точке совершенно независимо от других точек.

За начало отсчета координат в системе астрономических координат принимают плоскость экватора, перпендикулярную к оси вращения Земли, и плоскость начального астрономического меридиана, в качестве которого принят Гринвичский меридиан G (рис. 5).

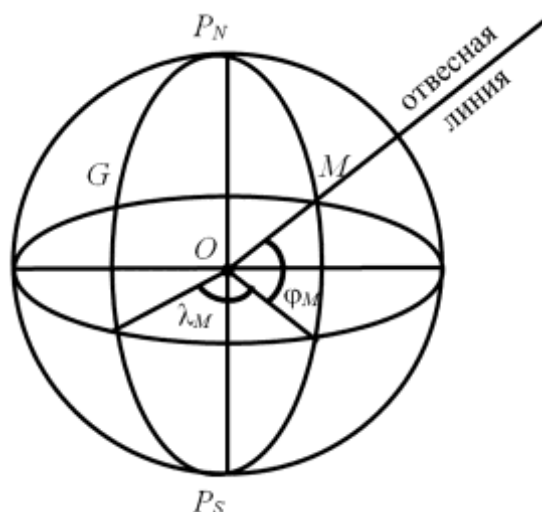


Рис. 5. Астрономическая система координат

Астрономическая широта – угол, образованный отвесной линией MO в данной точке и плоскостью экватора. Широты отсчитываются к северу и югу от экватора от 0 до 90° . Они называются южными, если точки расположены к югу от экватора, и северными, если точки расположены к северу от него.

Астрономическая долгота – двугранный угол между плоскостями астрономического меридиана данной точки P_NMP_S и начального меридиана G . Долготы отсчитывают в градусной мере от 0 до 180° или в часовой от нуля до 12 часов к востоку и западу от начального меридиана и называют восточными и западными.

Третьей координатой в этой системе координат является ортометрическая высота – высота точки физической поверхности Земли над поверхностью геоида.

Плоскость астрономического меридиана – плоскость, проходящая через отвесную линию и параллельная оси вращения Земли.

Астрономическим азимутом направления называется двугранный угол, отсчитываемый от северной части плоскости астрономического меридиана данной точки по часовой стрелке до отвесной плоскости, содержащей данное направление.

Астрономические широту, долготу и азимут принято обозначать соответственно греческими буквами φ , λ и α .

2.3. Основные понятия и определения из геодезической астрономии. Общие принципы определения широты, долготы и азимута из астрономических наблюдений

Геодезическая астрономия – раздел практической астрономии, наиболее тесно связанный с геодезией и картографией; изучает теорию и методы определения широты φ и долготы λ места, а также азимута α направления на земной предмет и местного звездного времени s из астрономических наблюдений при геодезических и картографических работах. Так как эти наблюдения производятся в полевых условиях, то геодезическая астрономия часто называется полевой астрономией. Точка земной поверхности, в которой широта, долгота и азимут определены из астрономических наблюдений, называется астрономическим пунктом. Предмет геодезической астрономии состоит в изучении:

- а) переносных астрономических инструментов;
- б) теорий наблюдения небесных светил и методов определения φ , λ , α и s ;
- в) методов обработки результатов астрономических наблюдений.

Применяются малые, или переносные, астрономические инструменты, позволяющие измерять зенитные расстояния и направления на небесные светила, а также горизонтальные углы между различными направлениями. Основными инструментами служат: универсальный инструмент, полевой хронометр и радиоприемник для приема сигналов времени.

В геодезической астрономии разработан ряд способов астрономических наблюдений, различающихся в зависимости от того, какие величины определяются (время, широта, долгота или азимут), какие светила для этого наблюдаются (звезды или Солнце) и как и какие величины непосредственно измеряются при наблюдениях небесного светила. Выбор этих способов зависит от поставленной задачи, точности ее решения, наличия инструментов и т. д. При этом небесные координаты наблюдаемого светила, а именно его прямое восхождение и склонение, считаются известными; они приводятся в астрономических ежегодниках и каталогах звезд.

Все способы астрономических определений основаны на решении параллактического треугольника после измерения его некоторых элементов.

Так, измерив зенитное расстояние z светила в момент T по хронометру и зная широту φ места, можно определить часовой угол t светила (рис. 6).

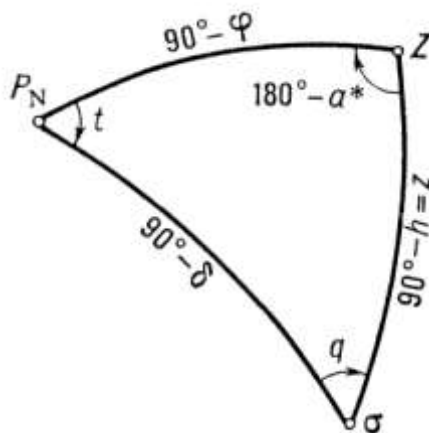


Рис. 6. Параллактический треугольник

Наиболее применяемы для астрономических определений способы Талькотта, Цингера, Мазаева. В основу измерения времени астрономия положила движение небесных тел, которое отражает три фактора: вращение Земли вокруг своей оси, обращение Луны вокруг Земли и движение Земли вокруг Солнца. От того, на каком из этих явлений основывается измерение времени, зависят и разные понятия времени. Астрономия знает звездное время, солнечное время (истинное и среднесолнечное), местное время, всемирное время, поясное время, декретное время, атомное время и др.

2.4. Звездное и солнечное время, время на различных меридианах, всемирное, поясное и декретное время

Сутки – период одного обращения Земли вокруг своей оси – приняты за основную единицу измерения времени. Однако в астрономии существуют две единицы времени под названием «сутки»: звездные сутки и солнечные сутки. Один полный оборот вокруг своей оси Земля совершает относительно звезд за меньший промежуток времени, чем относительно Солнца, так как Солнце движется по эклиптике в том же направлении,

в каком вращается Земля. Звездные сутки определяются периодом вращения Земли вокруг своей оси по отношению к любой звезде.

Звездные сутки на 3 мин 56 с короче средних солнечных суток; следовательно, их продолжительность равна 23 ч 56 мин 4 с среднего времени. Звездные сутки, подобно средним, делятся на 24 ч, затем на минуты и секунды. За начало звездных суток принимается момент верхней кульминации точки весеннего равноденствия. То время, которым мы пользуемся в обыденной жизни, есть время солнечное. Существует два вида солнечного времени – истинное и среднее солнечное время. Истинное солнечное время значительно сложнее звездного, так как Солнце не сохраняет неизменного положения относительно звезд. Истинные солнечные сутки длиннее звездных суток почти на 4 мин, а точнее, на 3 мин 56 с. Измерение солнечного времени основано на видимом суточном движении Солнца. За точку, определяющую своим движением течение истинного солнечного времени, принимается центр диска Солнца.

Время в любом измерении – звездное, истинное, солнечное или среднее солнечное – на различных меридианах различно. Но все точки, лежащие на одном и том же меридиане, в один и тот же момент имеют одинаковое время, которое носит название местного времени. Земля, вращаясь вокруг своей оси, последовательно поворачивает к Солнцу разные части своей поверхности. Поэтому день наступает, или, как говорят, Солнце восходит, не во всех местах земного шара одновременно.

Если, вооружившись часами, мы передвигаемся на север или на юг по меридиану, то на часах будет значиться одно и то же местное время в любой географической точке, расположенной на данном меридиане. Но если перемещаться на запад или на восток по одной и той же параллели, время на часах в исходной точке пути не будет соответствовать местному времени всех других географических точек, расположенных на данной параллели. Чтобы в какой-то степени устранить этот недостаток, канадец С. Флешинг предложил ввести поясное время, т. е. систему счета часового времени, основанную на разделении поверхности Земли на 24 часовых пояса. Часовым поясам соответствуют меридианы, каждый из которых отстоит от соседнего на 15° (1 час) по долготе. Таким образом, Флешинг нанес на карту мира 24 основных меридиана. Приблизительно на $7,5^{\circ}$ к вос-

току и западу от каждого из этих 24 основных меридианов условно были нанесены границы часового времени данного пояса. Причем время одного и того же часового пояса в каждый момент для всех его пунктов считалось одинаковым.

Линия перемены даты начинается на меридиане 180° в. д. и тянется по морям и океанам от Северного полюса до Южного полюса. Вначале ее путь проходит с севера на юг строго по указанному меридиану до северо-восточной оконечности Азии. Здесь, в районе Северного полярного круга, она удаляется на восток от меридиана с долготой 180° , огибая Чукотский полуостров в XIII часовом поясе, проходит Берингов пролив, после чего меняет юго-восточное направление на юго-западное, входит в XI часовой пояс, оставляя остров Святого Лаврентия и Алеутские острова в Западном полушарии. Затем из XI часового пояса она резко возвращается к меридиану с долготой 180° , пересекает экватор, огибает с востока острова Фиджи и Новую Зеландию. Затем вновь возвращается к меридиану и дальше, совпадая с меридианом, доходит до Южного полюса. «Линия перемены даты» пролегает вблизи северо-восточной границы РФ, поэтому каждый новый календарный день, в том числе и день нового года, раньше всего начинается на крайнем северо-востоке нашей страны.

Декретное время – порядок исчисления времени «поясное время плюс один час». Введено в СССР в 1930–1931 гг., отменено в 1991 г., восстановлено в РФ и в некоторых странах бывшего СССР в 1992 г. Официально такой порядок исчисления времени действовал до 2011 г., но фактически он продолжает действовать во многих регионах и после этого.

2.5. Системы координат, используемые в высшей геодезии.

Классификация систем координат

Системы координат можно классифицировать по ряду признаков. Перечислим некоторые из них.

1. По расположению начал. Если начало отсчета совпадает с центром масс Земли, то такая система называется геоцентрической. Если начало отсчета системы располагается вблизи центра масс Земли (в пределах нескольких сотен метров), то это квазигеоцентрическая система. При распо-

ложении начала отсчета на поверхности Земли получим топоцентрическую систему.

2. По виду координатных линий. Прямоугольные: X, Y, Z – в пространстве, x, y – на плоскости; криволинейные: сферические φ, λ, H – на шаре, эллипсоидальные (геодезические) B, L, H – на эллипсоиде.

3. По назначению. Для описания положения небесных объектов используются звездные системы. Для объектов, участвующих в суточном вращении Земли, используются земные системы координат.

Среди звездных (астрономических) систем координат на практике наиболее часто используется средняя экваториальная система координат, фиксированная на определенную эпоху T_0 данными фундаментальных звездных каталогов. Располагая значениями постоянных прецессии, можно воспроизводить эту систему для любой другой эпохи T_i .

Данную систему часто называют фундаментальной. Ее начало располагается в центре масс Земли. Ось x направлена к средней точке весеннего равноденствия в эпоху T_0 , ось z перпендикулярна к среднему экватору эпохи T_0 . В этой системе определяются не только координаты небесных объектов. Если рассматривать точку астрономического зенита (точка пересечения отвесной линии с небесной сферой) как некоторую фиктивную звезду, то можно определить астрономические координаты и точки земной поверхности.

Земные системы жестко фиксируются в теле Земли и участвуют в ее суточном вращении.

В геодезии наибольшее распространение получили следующие системы:

1) система прямоугольных координат x, y , отнесенных к плоскости меридиана данной точки (координаты меридианного эллипса);

2) система прямоугольных декартовых пространственных координат X, Y, Z . По форме координатных линий она является наиболее универсальной;

3) система геодезических пространственных координат B, L, H ;

4) полярная система координат A, S, Z ;

5) система плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера x, y .

2.6. Система прямоугольных координат x, y , отнесенных к плоскости меридиана

Сечение плоскостью, проходящей через ось вращения эллипсоида и точку M , есть меридианный эллипс (рис. 7).

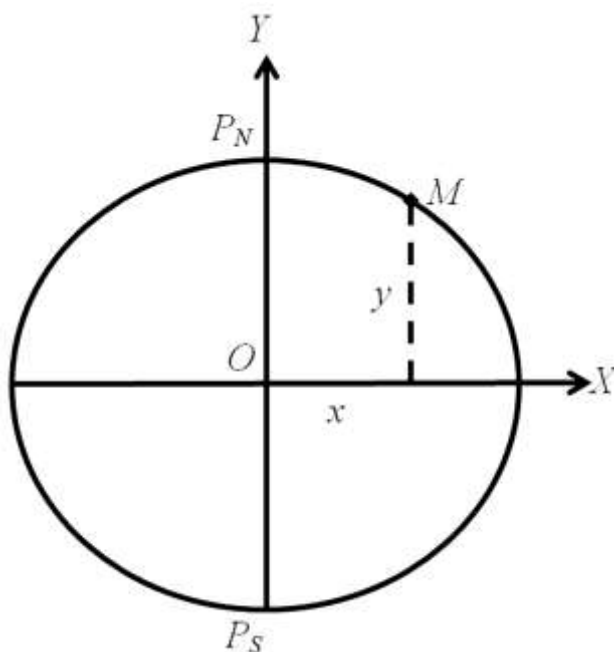


Рис. 7. Меридианный эллипс

Положение точки на меридианном эллипсе определяется координатами x и y . Эта система применяется для некоторых теоретических выводов.

2.7. Система прямоугольных декартовых пространственных координат

Очень часто полезным является использование пространственной прямоугольной системы координат (рис. 8). Эта система имеет некоторые преимущества по причине большой наглядности и универсальности использования очень понятной математической основы декартовой геометрии.

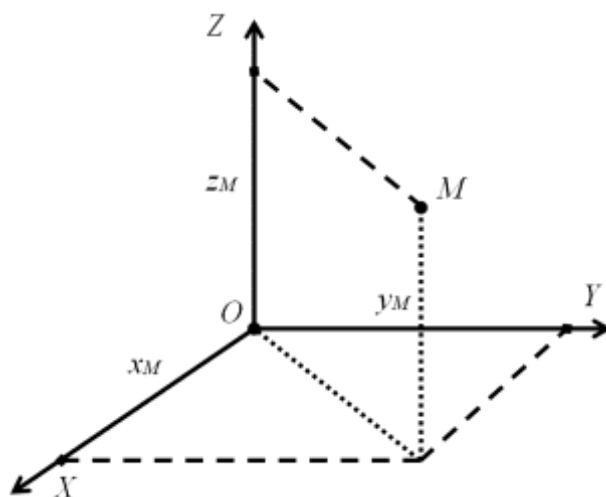


Рис. 8. Система пространственных прямоугольных координат

Начало системы находится в центре O эллипсоида (в геоцентре). Оси, соответствующие положительным значениям координат, располагаются следующим образом. Ось X совпадает с линией пересечения плоскостей меридиана Гринвича и экватора, а перпендикулярная ей ось Y – располагается в восточной полуплоскости экватора. Ось Z направлена вдоль малой полуоси эллипсоида к Северному полюсу. Положение точки T в описанной системе определяется тремя координатами: X_T , Y_T , Z_T , которые являются проекциями радиуса-вектора OT на соответствующие оси.

Пространственные координаты X , Y , Z до 60-х г. XX в. имели небольшое применение как в теоретических выводах, так и в практических вычислениях. Это объясняется тем, что как сами измерения, так и вычисления производились на поверхности Земли и заключались в вычислении координат ее точек, расстояний между этими точками и т. п.

В этом случае наиболее удобной была система координат, непосредственно связанная с поверхностью Земли. Однако в связи с космическими исследованиями возникли геодезические задачи по определению координат точек во внешнем пространстве Земли. При этом система поверхностных координат становится неудобной. Наоборот, система прямоугольных пространственных координат, позволяющая выражать положение точек независимо от поверхности земного эллипсоида, оказывается наиболее целесообразной для решения возникающих задач. Поэтому

эта система координат X, Y, Z в настоящее время приобретает большое теоретическое и практическое значение. Метод решения геодезических задач при помощи этой системы координат получил наименование «трехмерной геодезии».

2.8. Система геодезических пространственных координат

Система геодезических пространственных координат B, L, H (рис. 9) основана на использовании эллипсоида вращения и находит широкое применение в теоретических выводах и вычислениях как научного, так и практического характера.

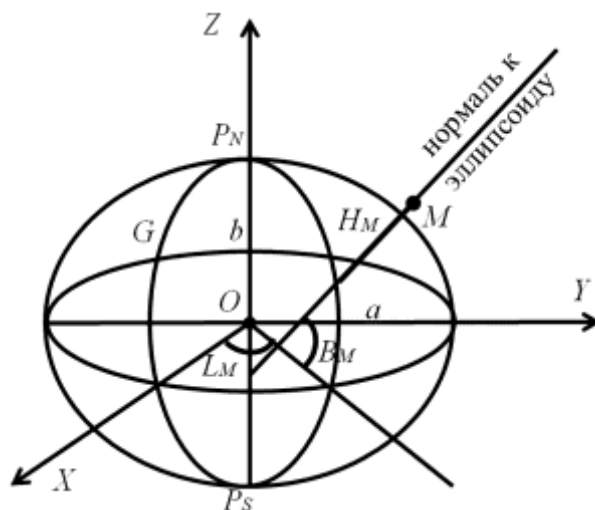


Рис. 9. Система геодезических пространственных координат

Геодезической широтой B называется угол, отсчитываемый от плоскости экватора в плоскости геодезического меридиана до нормали проведенной точки, или дуга геодезического меридиана от экватора до точки. Широта отсчитывается от экватора к полюсам от 0 до 90° и называется северной или южной в зависимости от того, в Северном или Южном полушарии находится данная точка.

Геодезической долготой L называется двугранный угол, отсчитываемый до плоскости геодезического меридиана точки от плоскости геодезического меридиана, принятого за начальный, или дуга экватора между

этими меридианами. В мире преимущественно принято, что начальным меридианом является Гринвичский (G на рис. 9), проходящий через центр зала обсерватории в Гринвиче (вблизи Лондона). Долготы отсчитываются от 0 до 180° к востоку и западу от начального меридиана и в зависимости от этого называются восточными или западными.

Геодезическая высота H – расстояние до точки по нормали от поверхности эллипсоида.

Геодезическим азимутом направления называется двугранный угол, отсчитываемый от северной части плоскости геодезического меридиана точки по часовой стрелке до нормальной плоскости, содержащей данное направление.

Таким образом геодезические широта B и долгота L определяют положение нормали, проведенной через точку, а высота H – положение точки на нормали.

Координатными линиями геодезической системы на поверхности эллипсоида служат параллели $B = \text{const}$, и меридианы $L = \text{const}$.

Эта система имеет следующие преимущества:

а) едина для всей поверхности эллипсоида и, таким образом, объединяет в общей для всей земной поверхности координатной системе геодезические, съемочные и картографические материалы;

б) не требует каких-либо дополнительных и вспомогательных построений; координатные линии в этой системе – меридианы и параллели – непосредственно относятся к поверхности эллипсоида, и их использование для составления карт и объединения всех картографических и съемочных материалов в единое целое удобно даже в том случае, если территории этих съемок не представляют собой сплошного массива;

в) определяет положение нормалей к поверхности принятого референц-эллипсоида, что весьма важно и удобно при исследовании фигуры Земли, определении уклонов отвесных линий и проведении других исследований научного и практического характера.

Геодезические координаты относятся к математически правильной поверхности эллипсоида вращения, принимаемого при геодезических вычислениях, в отличие от астрономических широт и долгот, которые относятся к уровенной поверхности. Если геодезическую широту определяют

как угол между нормалью к поверхности эллипсоида в данной точке и плоскостью экватора, то астрономическую широту определяют как угол между отвесной линией в данной точке и плоскостью экватора; соответственно астрономической долготой называется двугранный угол, образованный между плоскостью начального меридиана и плоскостью астрономического меридиана данной точки (плоскость астрономического меридиана – плоскость, проходящая через отвесную линию в этой точке и параллельная оси мира).

В геодезических работах различиями между астрономическими и геодезическими координатами никогда не пренебрегают; более того, эти различия, вызываемые отклонениями отвесных линий, выбором размеров референц-эллипсоида и ориентировки, являются предметом особого изучения.

В мелкомасштабных картографических работах различиями между астрономическими и геодезическими координатами при известных условиях можно пренебречь и употреблять широты и долготы как координаты общей системы географических координат.

Геодезические широты и долготы определяют положение проекций точек земной поверхности на эллипсоид по нормали к последнему. Для определения координат точек земной поверхности в геодезической системе координат необходимо знать еще геодезическую высоту H – отрезок нормали к референц-эллипсоиду от данной точки Земли M до референц-эллипсоида. Иначе говоря, предварительно редуцируя результаты измерений на поверхность референц-эллипсоида, мы приводим их к нулевой высоте ($H = 0$). Этим существенно упрощается решение геодезических задач: от вычисления трех координат (B, L, H) , определяющих положение точки, в пространстве, переходят к вычислению двух (B, L) . Это целесообразно для точек земной поверхности, для которых H всегда мало, а следовательно, малы и редукции. При значительных высотах H указанное редуцирование измеренных величин становится нецелесообразным, чем и вызывается необходимость перехода в этом случае к системе пространственных прямоугольных координат.

В практике построения геодезических сетей в некоторых пунктах выполняют астрономические измерения. Они заключаются в измерении го-

горизонтальных направлений и зенитных расстояний на небесные светила в определенные моменты времени с помощью специальных теодолитов. По результатам этих измерений определяются астрономические координаты и азимуты. Так как в процессе астрономических измерений главная ось теодолита располагается по отвесной линии, астрономические координаты и азимуты отличаются от геодезических, которые по определению связаны с положением нормали к поверхности эллипсоида.

Связь между астрономическими φ , λ , α и геодезическими B , L , A координатами и азимутами определяется формулами:

$$B = \varphi - \xi; \quad (1)$$

$$L = \lambda - \frac{\eta}{\cos \varphi}; \quad (2)$$

$$A = \alpha - \eta \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad (3)$$

где ξ , η – составляющие уклонения отвесной линии от нормали к эллипсоиду.

Геодезический азимут, определяемый из астрономического по формуле (3), называют азимутом Лапласа. Из сравнения определений астрономических координат и азимута с геодезическими, а также из формул (1), (2) следует, что их отличие обусловлено уклонением отвесной линии.

2.9. Система полярных координат.

Система геодезических пространственных координат

Очень широкое распространение в практике и теории геодезических работ получили различные системы полярных координат. Системы полярных координат могут быть как двухмерные (на плоскости, сфере, эллипсоиде), так и трехмерные – пространственные.

В двухмерной полярной системе координат за полюс может быть принята любая точка поверхности эллипсоида, а в качестве полярной оси обычно принимается меридиан точки O (рис. 10). Тогда положение любой

точки Q в этой системе координат будет определяться двумя величинами: геодезическим азимутом A линии OQ и длиной S геодезической линии от полюса до точки Q .

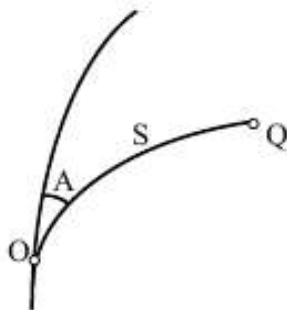


Рис. 10. Система полярных координат

Геодезическим азимутом называется двугранный угол, составленный плоскостью геодезического меридиана данной точки и нормальной плоскостью, проходящей через касательную к заданной кривой в данной точке. Геодезический азимут можно также определить и как плоский угол между касательными в данной точке к меридиану и к заданной линии.

Система полярных сфероидических координат имеет очень широкое распространение и в теории, и в практике геодезических работ. Например, решение главной геодезической задачи есть не что иное, как преобразование полярных координат в геодезические (прямая задача) и геодезических координат – в полярные (обратная задача).

2.10. Эллипсоид как вспомогательная координатная поверхность

По измеренным на земной поверхности углам и расстояниям, к сожалению, вычислить с высокой точностью координаты точек невозможно, так как неизвестен вид сложной физической поверхности Земли (форма, размеры, уравнение поверхности). Целью измерений и является определение этой поверхности. В геодезии при решении задач, связанных с математической обработкой наземных измерений, вводится некоторая вспомо-

гательная координатная поверхность. Она, с одной стороны, должна быть наиболее близкой по форме и размерам к действительной поверхности Земли, а с другой стороны – иметь достаточно простой математический вид, чтобы можно было без больших затруднений выполнять на ней математическую обработку измерений. Более кратко данная поверхность называется поверхностью относимости.

В качестве таковой в глобальном масштабе принята поверхность эллипсоида вращения с небольшим сжатием. Поверхность эллипсоида, предназначенная для вычисления координат точек, является координатной поверхностью, а сам эллипсоид называется земным эллипсоидом. Но есть еще понятие референц-эллипсоида. Это эллипсоид, ориентированный с учетом близости поверхности тела Земли и геоида в обозначенной территории, например, какой-либо страны или группы соседних стран. Переход от земного ко всем возможным референц-эллипсоидам вполне математически решаем.

Величины, определяющие размеры и форму эллипсоида, называют параметрами эллипсоида. Обычно в качестве параметров эллипсоида используют (рис. 11):

- большую полуось a , определяющую его размеры в линейных единицах;
- сжатие $\alpha = (a - b) / a$, где через b обозначена малая полуось (ось вращения).

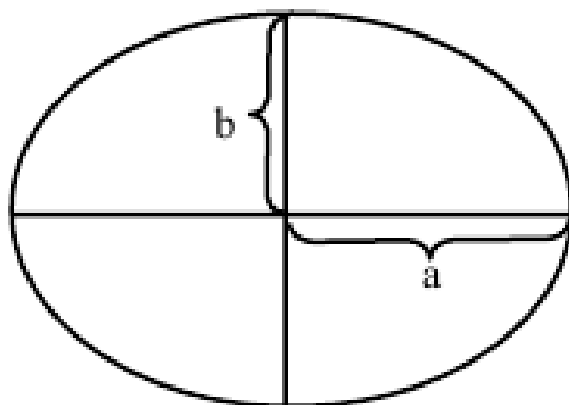


Рис. 11. Параметры земного эллипсоида

В вычислениях вместо сжатия чаще используют квадрат первого эксцентриситета

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad (4)$$

или квадрат второго эксцентриситета

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}. \quad (5)$$

Связь между сжатием и эксцентриситетами выражается следующими формулами:

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2; \quad (6)$$

$$e'^2 = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2}. \quad (7)$$

Таким образом, для задания размеров и формы эллипсоида достаточно назначить два параметра, один из которых должен быть линейной величиной. Обычно используют пары: большая полуось и сжатие; большая полуось и эксцентриситет (первый или второй). Например, для используемого в России и многих соседних с ней странах эллипсоида Красовского при точных вычислениях приняты следующие значения его элементов:

$$a = 6\,378\,245,000\,00; \quad e^2 = 0,006\,693\,421\,623;$$

$$b = 6\,356\,863,018\,77 \text{ м}; \quad e'^2 = 0,006\,738\,525\,415;$$

$$\alpha = 0,003\,352\,329\,869.$$

Для земного эллипсоида при ориентировочных подсчетах можно принимать $a \approx 6\,400$ км, $\alpha \approx 1/300$, $e^2 \approx e'^2 \approx 1/150$. Сжатие земного эллипсоида α составляет величину порядка $1/300$, что свидетельствует о малом отличии его поверхности от сферы. Это обстоятельство часто используют при решении задач, не требующих высокой точности.

Элементы эллипсоида связаны между собой простыми математическими зависимостями, позволяющими каждый из перечисленных элементов выразить в функции остальных.

3. ЗЕМНЫЕ ЭЛЛИПСОИДЫ. ПАРАМЕТРЫ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

3.1. Общий земной эллипсоид и референц-эллипсоиды

В разделе 1 отмечалось, что недостаток исходной информации, необходимой для надежного определения параметров модели Земли, обусловил неоднозначность решения этой задачи на разных исторических этапах развития геодезии. В частности, геометрические параметры модели – большая полуось a и сжатие α земного эллипсоида – в течение XIX и XX вв. неоднократно подвергались уточнению по мере накопления новых измерений.

В то же время, для практического использования эллипсоида в качестве поверхности относимости при обработке геодезических сетей, необходимо было, не дожидаясь окончательного уточнения параметров планетарной модели, принимать некоторые определенные решения, удовлетворяющие геодезическую практику. С этой целью в разное время в различных странах (или группах стран) были законодательно закреплены отличающиеся по параметрам эллипсоиды и связанные с ними «национальные» системы координат.

Несмотря на успехи в уточнении параметров глобальной модели Земли, достигнутые в последние полвека благодаря развитию методов космической геодезии, в геодезической практике ряда стран продолжается использование различных эллипсоидов (прил. 2) и обособленных «национальных» систем координат. В связи с этим принято различать понятия общего земного эллипсоида и референц-эллипсоида.

Для всей Земли за ее модель принимают эллипсоид вращения с малым полярным сжатием, называемый общим земным эллипсоидом.

Параметры земного эллипсоида a и α определяют с учетом следующих условий:

1) центр общего земного эллипсоида должен совпадать с центром масс Земли, а его малая ось – с осью вращения Земли;

2) сумма квадратов отклонений по высоте (аномалий высоты) поверхности эллипсоида от поверхности геоида (квазигеоида) должна быть наименьшей.

Референц-эллипсоидом называют эллипсоид, центр которого близок, но не совмещен с центром масс Земли, малая полуось параллельна оси вращения планеты, а параметры и ориентировка в теле Земли подобраны так, что его поверхность близка к поверхности геоида в пределах ограниченной территории, на которой он применяется в качестве поверхности относимости.

Как следует из определения, общий земной эллипсоид соответствует глобальной модели Нормальной Земли, которая будет рассмотрена подробнее в разделе 8. Условие минимального отклонения его поверхности от поверхности глобального геоида одновременно удовлетворяет отмеченному ранее условию равенства объемов эллипсоида и геоида. Теоретическая строгость определения параметров и однозначность ориентирования в теле планеты позволяют считать его наиболее совершенной геометрической моделью Земли.

В отличие от общего земного, ориентировка референц-эллипсоида в теле планеты теоретически ограничена лишь условием параллельности малой полуоси и оси вращения Земли. Поэтому для референц-эллипсоида, кроме параметров a и α , необходимо задать ряд величин, определяющих его ориентировку в теле Земли. Эти величины называют исходными геодезическими датами. В их число входят: геодезические широта B_0 , долгота L_0 и высота H_0 исходного пункта геодезической сети и азимут A_0 направления из исходного на некоторый пункт сети.

Геодезическую широту B_0 и долготу L_0 исходного пункта сети и азимут A_0 определяют по формулам (1)–(3), используя результаты астрономических измерений и данные об отклонении отвеса на этом пункте. Геодезическую высоту H_0 находят как сумму высоты исходного пункта над поверхностью геоида («над уровнем моря») и высоты геоида в исходном пункте.

Исходные геодезические даты в сочетании с параметрами референц-эллипсоида определяют «национальную» референц-систему координат, законодательно утверждаемую для использования на территории государства или группы государств.

Например, в России и странах СНГ до последнего времени использовался референц-эллипсоид Красовского. Связанная с ним система координат определена исходными геодезическими датами, заданными для центра Круглого зала Пулковской обсерватории, который является исходным пунктом сети бывшего СССР. На территории США и Канады используется референц-эллипсоид Кларка. С ним связана система координат NAD (North American Data), ориентировка которой обеспечивается исходными геодезическими датами в исходном пункте межнациональной сети Мидз Рэнч.

В настоящее время развиваются методы координатизации с использованием глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС). Существует несколько ГНСС:

- GPS (Global Position System), управление которой осуществляется правительством США;
- ГЛОНАСС (глобальная навигационная спутниковая система) – Российская спутниковая система;
- Galileo – европейская спутниковая система;
- Compass – региональная спутниковая навигационная система под управлением правительства Китая.

Вводятся также региональные ГНСС Индией и Японией.

В последние десятилетия в геодезической практике используют эллипсоиды, по параметрам и ориентировке близкие к общему земному (см. прил. 2). Например, эллипсоид и связанная с ним общеземная система координат, известная под названием WGS-84 (World Global System, 1984 г.). Она широко применяется для определения местоположения пунктов с использованием американской спутниковой навигационной системы GPS. Аналогичная общеземная система координат, связанная с глобальной моделью ПЗ-90 (Параметры Земли 1990 года), применяется для определения местоположения с использованием отечественной спутниковой навигационной системы ГЛОНАСС. При ориентировании общеземного эллипсоида

в теле Земли (в отличие от референц-эллипсоида) нет необходимости вводить исходные геодезические даты.

Таким образом, проблема изучения фигуры Земли по наземным измерениям как бы распадается на две составные части. Первая часть – определение формы, размеров земного эллипсоида и его ориентирование в теле Земли, а вторая часть – изучение отступления физической поверхности Земли от поверхности принятого эллипсоида.

Очевидно, что координаты одних и тех же пунктов на земной поверхности, определенные относительно эллипсоидов, отличающихся параметрами и ориентировкой в теле Земли, будут различными. Использование методов космической геодезии для определения местоположения в общеземной системе координат, а также возросший уровень международного сотрудничества в экономической и научной сферах, обусловили необходимость обеспечить связь между отдельными «национальными» референц-системами и общеземной системой координат.

3.2. Связь пространственных геодезических координат B, L, H с пространственными прямоугольными координатами X, Y, Z

Геодезические и геоцентрические пространственные прямоугольные координаты, отличаясь по форме, однозначно определяют положение точек как на поверхности эллипсоида, так и в окружающем его пространстве. По заданным геодезическим координатам B, L и H можно вычислить геоцентрические пространственные координаты X, Y и Z , используя следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L, \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L, \\ Z &= [N(1 - e^2) + H] \sin B, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$.

Обратное преобразование может быть выполнено по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} B &= \frac{Z}{D - e^2 N \cos B}, \\ \operatorname{tg} L &= \frac{Y}{X}, \\ H &= \frac{D}{\cos B} - N, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$ – проекция радиуса-вектора точки на плоскость экватора.

Поскольку правая часть первой из формул (9) содержит функции широты ($N, \cos B$), вычисление широты выполняют методом итерации (приближений). В первом приближении широту вычисляют по формуле

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z}{D(1 - e^2)}. \quad (10)$$

3.3. Связь двух систем прямоугольных пространственных координат

Использование ГНСС для определения местоположения в общеземной системе координат, а также возросший уровень международного сотрудничества в экономической и научной сферах обусловили необходимость обеспечить связь между отдельными «национальными» референц-системами и общеземной системой координат. Для этой цели используют известные формулы связи между двумя системами пространственных прямоугольных координат.

В качестве примера рассмотрим две системы координат, изображенные на рис. 12. Первая система X', Y', Z' имеет начало в центре O' некоторого эллипсоида и является связанной с ним геоцентрической пространственной системой координат. Вторая система X, Y, Z аналогично связана с другим эллипсоидом и имеет начало в его центре O . Предполагается, что эллипсоиды по-разному ориентированы в теле Земли и оси соответствующих систем не параллельны.

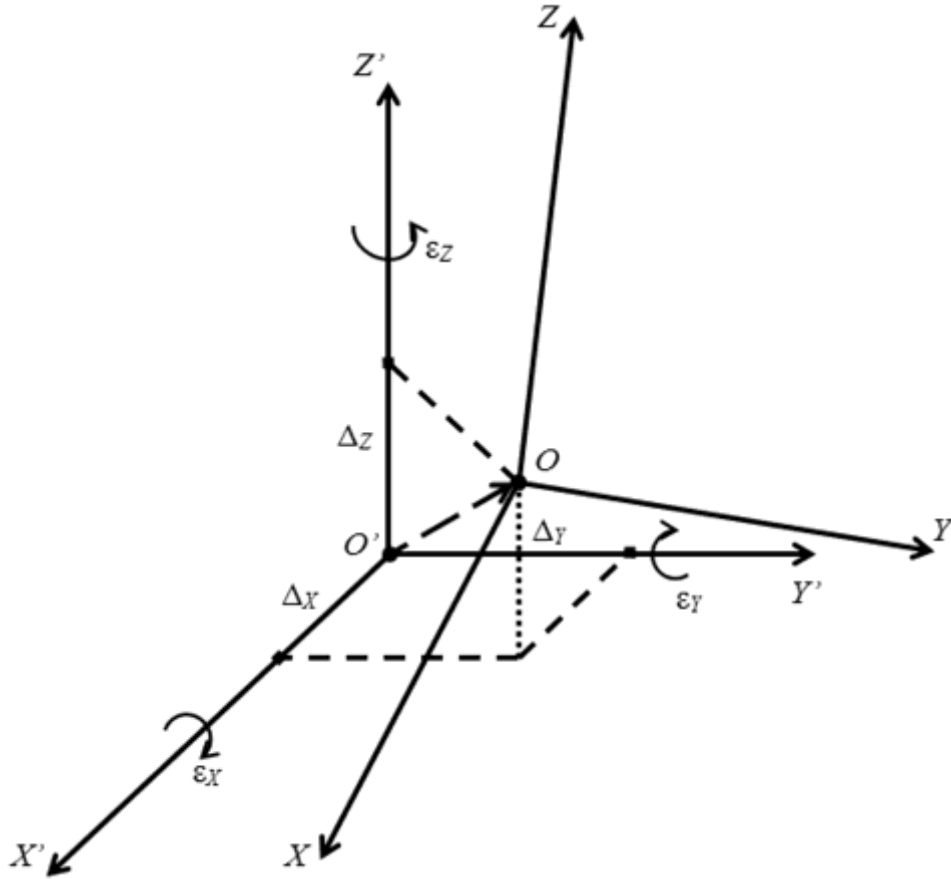


Рис. 12. Связь между двумя системами пространственных прямоугольных координат

Предположим, что заданы координаты X' , Y' , Z' некоторого пункта в первой системе. Необходимо преобразовать их в координаты X , Y , Z второй системы. Для решения этой задачи используют преобразование Гельмерта

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} (1 + \Delta m), \quad (11)$$

где ΔX , ΔY , ΔZ – координаты точки O (начала второй системы), определенные в системе координат исходной системы X' , Y' , Z' ; Δm – масштабный множитель.

Матрица R , входящая в формулу (11), является матрицей вращения системы и для малых углов поворота имеет следующий вид:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1 & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где ε_X , ε_Y , ε_Z – углы поворота исходной системы X' , Y' , Z' вокруг соответствующих осей, учитывающие непараллельность осей обеих систем. Для расчетов по формуле (12) эти углы задают в радианах.

Величины ΔX , ΔY , ΔZ , ε_X , ε_Y , ε_Z и Δm называют элементами взаимного ориентирования систем. При этом различают линейные элементы ΔX , ΔY , ΔZ , учитывающие линейный сдвиг, и угловые элементы ε_X , ε_Y , ε_Z , учитывающие непараллельность осей систем. Масштабный множитель Δm учитывает возможную разномасштабность линейного пространства систем.

Если в качестве исходных заданы геодезические координаты B' , L' , H' относительно некоторого эллипсоида и необходимо определить геодезические координаты B , L , H этого пункта относительно другого эллипсоида, можно использовать следующую последовательность преобразования:

$$B', L', H' \rightarrow (8) \rightarrow X', Y', Z' \rightarrow (11) \rightarrow X, Y, Z \rightarrow (9) \rightarrow B, L, H,$$

где цифрами в скобках обозначены номера формул, используемых для преобразования. При этом в общем случае необходимо учесть, что эллипсоиды могут отличаться по параметрам. Следовательно, на начальном этапе для преобразования координат B' , L' , H' в координаты X' , Y' , Z' по формулам (8) следует использовать параметры a' и α' исходного эллипсоида, а на заключительном этапе для преобразования координат X , Y , Z в координаты B , L , H по формулам (9) – параметры a и α второго эллипсоида.

Связь между различными «национальными» референц-системами координат обычно осуществляют, определяя элементы их ориентирования относительно общего земного эллипсоида. Для этого на некотором числе пунктов национальной сети с известными координатами X' , Y' , Z' , заданными относительно референц-эллипсоида, методом космической геодезии определяют координаты X , Y , Z , отнесенные к общему земному эл-

липсоиду. Подставляя эти данные в равенства (11), получают систему уравнений, в которую элементы ориентирования ΔX , ΔY , ΔZ , ε_X , ε_Y , ε_Z и Δm входят в качестве неизвестных. Значения элементов ориентирования, полученные из решения этой системы, используют для преобразования координат «национальной» системы в общеземную систему координат по формуле (11).

Для обратного преобразования достаточно изменить знаки элементов ориентирования на обратные.

В случае непосредственного преобразования координат из одной референц-системы в другую референц-систему в качестве элементов взаимного ориентирования можно использовать соответствующие разности элементов их ориентирования относительно общего земного эллипсоида. Например, элементы взаимного ориентирования для преобразования координат из референц-системы 1 в референц-систему 2 можно определить как разности: $\Delta X = \Delta X_2 - \Delta X_1$, $\Delta Y = \Delta Y_2 - \Delta Y_1$, $\Delta Z = \Delta Z_2 - \Delta Z_1$, $\varepsilon_X = \varepsilon_{X2} - \varepsilon_{X1}$, $\varepsilon_Y = \varepsilon_{Y2} - \varepsilon_{Y1}$, $\varepsilon_Z = \varepsilon_{Z2} - \varepsilon_{Z1}$, $\Delta m = \Delta m_2 - \Delta m_1$, где индексами обозначены элементы ориентирования референц-систем 1 и 2 относительно общего земного эллипсоида.

3.4. Государственная геодезическая система координат ГСК-2011

В Российской Федерации (РФ) развитие единых государственных систем координат регламентировалось следующими документами:

- Постановление Совета Министров СССР от 07.04.1946 г. № 760 «О введении единой системы геодезических координат»;
- Постановление Правительства РФ от 28.07.2000 г. № 568 «Об установлении единых государственных систем координат»;
- Постановление Правительства РФ от 28.12.2012 г. № 1463 «О единых государственных системах координат».

Построение первой единой государственной системы координат началось в 1928 г. и завершилось в 1942 г. Система координат получила название СК-42, введена в действие Постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г. № 760.

Внедрение спутниковых технологий привело к созданию систем координат СК-95 и ПЗ-90.

В настоящее время к единым государственным системам координат относятся:

- геодезическая система координат 2011 г. (ГСК-2011) – для использования при осуществлении геодезических и картографических работ;
- общеземная геоцентрическая система координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ 90.11) – для использования в целях геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач.

В системах СК-42, СК-95 при уравнивании принят референц-эллипсоид Ф. Н. Красовского, в системах ПЗ-90, ПЗ-90.11, ГСК-2011 – общеземной эллипсоид.

Для некоторых территорий РФ введены местные системы координат (МСК). Их использование оправдано при выполнении кадастровых съемок, межевании земельных участков, инвентаризации городских земель, производстве инженерных изысканий и других видах работ.

В [4] отмечено, что большая часть местных систем координат основана на СК-42, не являющейся однородным геодезическим построением, имеет различный уровень систематических и случайных ошибок на разных территориях.

Проблема перехода к СК-95 от местной системы координат имеет несколько аспектов:

- местные системы координат несут на себе отпечаток всех локальных деформаций СК-42 на соответствующей территории;
- необходимо обеспечить минимальные изменения МСК в целом, чтобы максимально сохранить преемственность (согласованность) результатов прежних и вновь выполняемых съемок на данной территории.

3.5. Общие сведения о государственной геодезической системе координат 2011 г.

Системы координат СК-95 и СК-42 применялись до 1 января 2017 г. Постановлением Правительства Российской Федерации от 28 декабря 2012 г. № 1463 в качестве единой государственной системы координат для

использования при осуществлении геодезических и картографических работ установлена геодезическая система координат 2011 г. (ГСК-2011). Построение системы координат ГСК-2011 осуществлялось в рамках выполнения мероприятий Федеральной целевой программы ГЛОНАСС на период 2002–2011 гг.

ГСК-2011 является геоцентрической системой координат, отсчитываемых от центра, осей и поверхности общего земного эллипсоида. Это позволит более эффективно использовать спутниковые технологии координатных определений и, как следствие, повысить точность и оперативность решения задач геодезического обеспечения, отвечающего современным требованиям экономики, науки и обороны страны. Введение системы координат ГСК-2011 повысит эффективность использования системы ГЛОНАСС и выполнения мониторинга деформаций земной поверхности, что важно при решении многих научных и научно-практических задач.

Принцип ориентировки в теле Земли ГСК-2011 идентичен Международной земной опорной системе координат ITRS, установленной в соответствии с рекомендациями Международной службы вращения Земли (International Earth Rotation and Reference Systems Service – IERS) и Международной ассоциации геодезии (International Association of Geodesy – IAG), а именно:

- начало системы координат совпадает с центром масс Земли;
- ось Z направлена к Условному земному полюсу;
- ось X направлена в точку пересечения плоскости экватора и начального (Гринвичского) меридиана, установленного Международным бюро времени;
- ось Y дополняет систему до правой.

Точность установления ГСК-2011 по отношению к центру масс Земли характеризуется средней квадратической погрешностью, не превышающей 10 см.

Основные параметры системы координат ГСК-2011 приведены в прил. 3.

Значение размеров большой полуоси принято равным 6 378 136,5 м, что соответствует принятым к настоящему времени размерам большой полуоси общего земного эллипсоида.

Неотъемлемой частью системы координат ГСК-2011 является новая отечественная глобальная модель гравитационного поля Земли ГАО-2012, которая по уровню точности и детальности не уступает современным зарубежным моделям геопотенциала EIGEN5C и EGM2008.

4. ГЕОМЕТРИЯ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

4.1. Нормальные сечения эллипсоида

Плоскости, проходящие через нормаль к поверхности, называют нормальными плоскостями, а сечения поверхности этими плоскостями – нормальными сечениями.

В любой точке поверхности через нормаль можно провести бесчисленное множество нормальных плоскостей и получить соответствующее множество нормальных сечений. Из этого множества принято выделять два взаимно перпендикулярных сечения, которые называются главными нормальными сечениями. Они отличаются тем, что кривизна поверхности в направлении этих сечений принимает экстремальные значения.

Для поверхности эллипсоида (рис. 13) главными нормальными сечениями являются:

- сечение меридиана, образованное нормальной плоскостью, проходящей через данную точку и ось вращения эллипсоида – сечение NTS по меридиану точки T (N – север, S – юг);
- сечение первого вертикала, образованное плоскостью, перпендикулярной плоскости меридиана – сечение WTE (W – запад, E – восток).

В общем случае, для указания любого нормального сечения необходимо задать его направление. Направления на поверхности эллипсоида задаются геодезическими азимутами.

Геодезическим азимутом называют двугранный угол между северной полуплоскостью меридиана и нормальной плоскостью, определяющей некоторое направление. В частности, азимут нормального сечения определяет направление нормальной плоскости, образующей это сечение. Азимут отсчитывают от северной полуплоскости меридиана по часовой стрелке в пределах от 0 до 360° . Например, на рис. 13 азимутом A сечения TK является угол NTK .

Входящая в формулы (14) и (15) величина W определяется выражением

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \quad (16)$$

Из формул (14)–(16) следует, что радиусы кривизны главных нормальных сечений M и N зависят только от широты B . В общем же случае, согласно формуле (13), радиус кривизны нормального сечения ρ_A в данной точке поверхности эллипсоида зависит как от широты B этой точки, так и от направления сечения, заданного азимутом A .

Исключение составляют точки полюсов, где нормальные сечения по любому направлению являются меридианами. Подставив в формулу (16) значение $B = 90^\circ$ (широта Северного полюса P_N) и используя формулы (14), (15), можно получить

$$M = N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = c, \quad (17)$$

где c – величина, называемая полярным радиусом. Подставив величину c в формулу (13), можно убедиться, что в точках полюса $\rho_A = c = \text{const}$, т. е. кривизна эллипсоида на полюсах не зависит от направления.

Иногда возникает необходимость характеризовать кривизну поверхности в данной точке одной величиной, вне зависимости от направления. В качестве такой величины используют средний радиус кривизны, который является средним интегральным значением из числа радиусов всех нормальных сечений, проведенных через данную точку. Этому определению соответствует радиус

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_A d\alpha. \quad (18)$$

Используя правую часть формулы (13) в качестве подынтегрального выражения в формуле (18), можно вывести следующую формулу для вычисления среднего радиуса кривизны эллипсоида:

$$R = \sqrt{MN}. \quad (19)$$

Из этой формулы следует, что средний радиус кривизны вычисляется как среднее геометрическое радиусов кривизны главных нормальных сечений. Средний радиус кривизны R является функцией широты B . Минимальное значение он имеет на экваторе, а на полюсе приобретает максимальное значение $R = c$.

Рассмотрим свойства нормальных сечений, проходящих через пару точек. В общем случае, нормали к поверхности эллипсоида, проведенные через две точки, не лежат в одной плоскости, т. е. не пересекаются между собой (перекрещивающиеся прямые). Отмечаем, что на рис. 14 нормали n_1 и n_2 , проведенные через точки T_1 и T_2 , пересекают малую полуось эллипсоида в разных точках и не лежат в одной плоскости. Из этого свойства нормалей пары точек вытекает два следующих следствия.

Первое следствие заключается в том, что сечение, образованное нормальной плоскостью, проходящей через нормаль в одной точке и другую точку, не совпадает с сечением, аналогичным образом построенным из другой точки. Например, на рис. 14 нормальная плоскость, проходящая через нормаль n_1 в точке T_1 и точку T_2 , образует сечение T_1T_2 , а нормальная плоскость, проходящая через нормаль n_2 в точке T_2 и точку T_1 , – сечение T_2T_1 (направления сечений показаны стрелками).

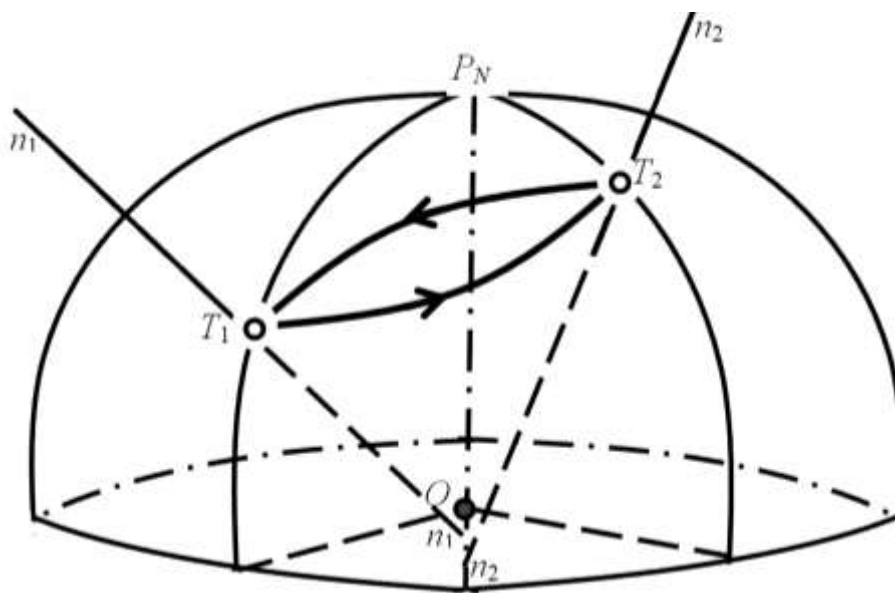


Рис. 14. Прямое и обратное сечение

Сечение называют прямым или обратным относительно какой-либо точки из пары точек. Например, относительно точки T_1 сечение T_1T_2 будет прямым, а сечение T_2T_1 – обратным. Пару нормальных сечений, проходящих через две точки, принято называть взаимными нормальными сечениями, а рассматриваемое свойство – двойственностью нормальных сечений. Двойственность нормальных сечений приводит к неоднозначности направления с пункта на пункт в геодезических сетях. Поэтому от нормальных сечений переходят к геодезическим линиям.

Вторым следствием того, что нормали к поверхности эллипсоида, проведенные в паре точек, в общем случае, не лежат в одной плоскости, является зависимость азимута нормального сечения от высоты «наблюдаемой» точки (визирной цели) над поверхностью эллипсоида. Она выражается в том, что плоскость, проведенная через нормаль в одной точке, будучи направлена на другую («наблюдаемую») точку, находящуюся на некоторой высоте над поверхностью эллипсоида, не пройдет через проекцию этой точки на эллипсоид. В результате образованное этой плоскостью нормальное сечение будет иметь направление, отличное от прямого нормального сечения на поверхности эллипсоида. Перечисленные свойства нормальных сечений учитываются в процессе обработки результатов геодезических измерений.

4.2. Наклонные сечения эллипсоида.

Сечение по параллели

Кроме рассмотренных нормальных сечений, любые другие плоские сечения поверхности эллипсоида принято называть наклонными сечениями. Такое название связано с тем, что направление нормали к поверхности эллипсоида мало отличается от направления отвесной линии. Если не учитывать это малое отличие, то нормальные плоскости, проходящие через точку, расположенную на поверхности эллипсоида, можно считать вертикальными. Тогда любые другие плоскости, проходящие через эту точку, справедливо называть наклонными.

Из наклонных сечений в задачах геодезии и картографии особо выделяют параллель – след сечения поверхности эллипсоида плоскостью, па-

параллельной плоскости экватора. Параллель является координатной линией геодезической широты $B = \text{const}$. Она имеет форму окружности.

На рис. 15 радиусу параллели точки T соответствует отрезок CT . Внутренний конец радиуса кривизны первого вертикала всегда находится на малой полуоси эллипсоида. Следовательно, отрезок T_0T нормали точки T равен радиусу кривизны N первого вертикала. Таким образом, из прямоугольного треугольника T_0CT получим

$$r = N \cos B. \quad (20)$$

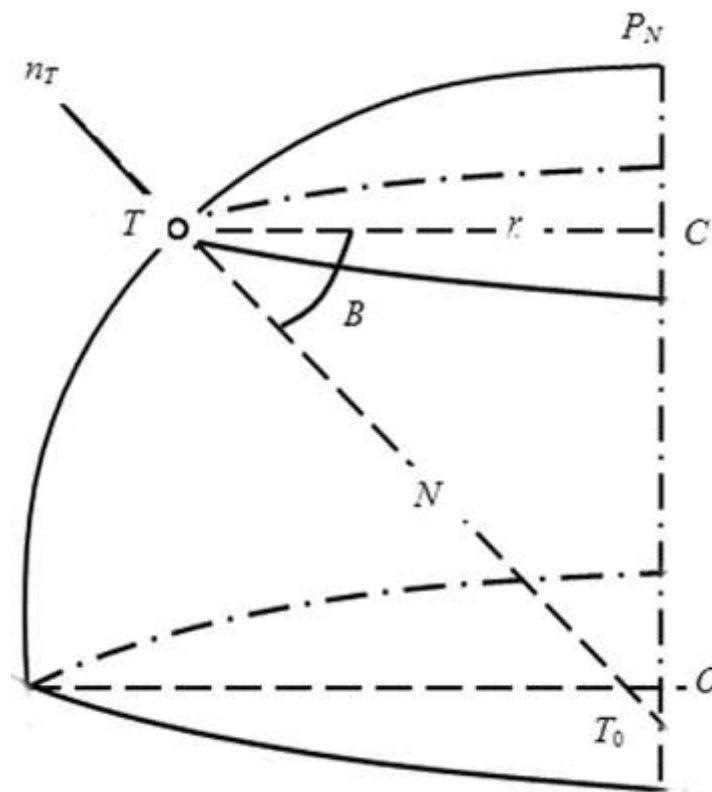


Рис. 15. Радиус параллели

Из формулы (20) следует, что радиус параллели убывает от экватора к полюсам в пределах от $r = a$ до $r = 0$.

4.3. Геодезическая линия и ее свойства

Двойственность взаимно-обратных нормальных сечений (рис. 16) затрудняет их практическое использование. Так, например, если измеренные углы плоского треугольника будем проектировать на поверхность эллипсоида нормальными плоскостями, то контур треугольника из-за двойственности взаимно-обратных нормальных сечений окажется незамкнутым. Для устранения этой неопределенности точки на поверхности эллипсоида соединяют особыми кривыми, называемыми геодезическими линиями.

Геодезической линией называют линию на поверхности, в каждой точке которой ее главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности.

Геодезической линией на поверхности сферы является дуга большого круга – след сечения сферы плоскостью, проходящей через центр. В отличие от дуги большого круга сферы, геодезическая линия на поверхности эллипсоида в общем случае является пространственной (не плоской) кривой. Она, будучи проведена из некоторой точки поверхности эллипсоида в некотором направлении, не возвращается в нее, а совершает многократное, спиралеобразное обращение.

Исключение составляют меридианы и экватор, которые одновременно являются геодезическими линиями и нормальными сечениями (т. е. плоскими кривыми).

Геодезическая линия обладает следующими свойствами:

- является кратчайшим расстоянием между двумя точками;
- геодезическая линия делит угол между взаимными нормальными сечениями пары точек в отношении 1 : 2, располагаясь ближе к прямому нормальному сечению;
- для текущей точки геодезической линии произведение радиуса параллели на синус широты постоянно, что выражается формулой Клеро

$$r \sin B = \text{const} . \quad (21)$$

Второе из перечисленных свойств справедливо для общего случая расположения пары точек, когда $B_1 \neq B_2$ или $L_1 \neq L_2$. В частном случае, ес-

ли $B_1 = B_2$ или $L_1 = L_2$, прямые и обратные сечения совпадают. При $L_1 = L_2$ геодезической линией является меридиан.

Первые два из перечисленных свойств учитываются при изображении на поверхности эллипсоида элементов геодезических сетей (линий, направлений или углов). Например, в качестве сторон треугольника, изображенного на рис. 16, используются геодезические линии, соответствующие кратчайшим расстояниям между его вершинами (пунктами). При этом направления геодезических линий и прямых нормальных сечений не совпадают и отличаются на величину $\delta_n = \Delta/3$, где Δ – угол между соответствующими нормальными сечениями.

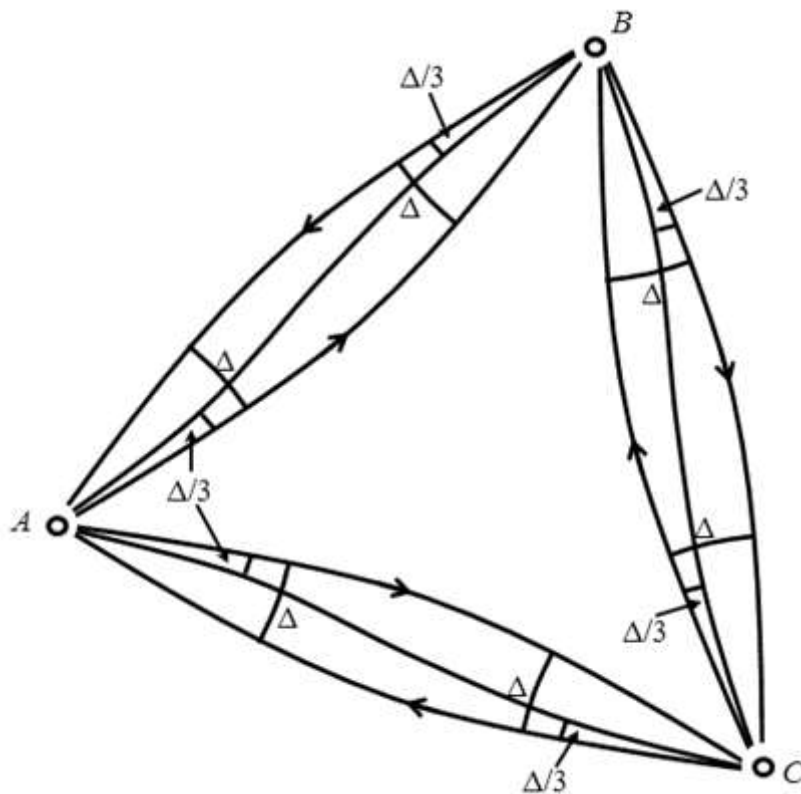


Рис. 16. Геодезические линии как стороны треугольника

Данное свойство учитывают при обработке угловых измерений, вводя поправки $-\delta_n$ в измеренные направления за переход от нормальных сечений к геодезическим линиям.

Так как геодезические линии используются в качестве сторон геодезических построений, вдоль которых осуществляется передача координат от пункта к пункту, важное значение имеют зависимости, отражающие изменения координат и азимута при перемещении вдоль геодезической линии. Эти зависимости выражаются дифференциальными уравнениями геодезической линии:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{dS} &= \frac{\cos A}{M}, \\ \frac{dL}{dS} &= \frac{\sin A}{N \cos B}, \\ \frac{dA}{dS} &= \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B = \frac{dL}{dS} \sin B. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Выражения (22) представляют собой систему дифференциальных уравнений геодезической линии. Эти уравнения определяют производные, описывающие характер изменения широт, долгот и азимутов при перемещении точки вдоль геодезической линии.

4.4. Главные геодезические задачи на поверхности эллипсоида и методы их решения

Главными геодезическими задачами называют задачи, связанные с передачей координат от пункта к пункту по геодезическим линиям. Различают прямую и обратную геодезические задачи.

Прямая геодезическая задача заключается в определении геодезических координат пункта по заданным координатам исходного пункта, длине геодезической линии, соединяющей исходный пункт с определяемым, и азимуту этой линии, заданному в исходном пункте. При этом, кроме координат определяемого пункта, часто требуется определить обратный азимут, соответствующий направлению геодезической линии с определяемого пункта на исходный.

Например, если заданы координаты B_1 и L_1 пункта T_1 (рис. 17), длина S_{12} и азимут A_{12} геодезической линии $T_1 T_2$, то решение прямой задачи бу-

дет заключаться в определении координат B_2 , L_2 пункта T_2 и обратного азимута A_{21} .

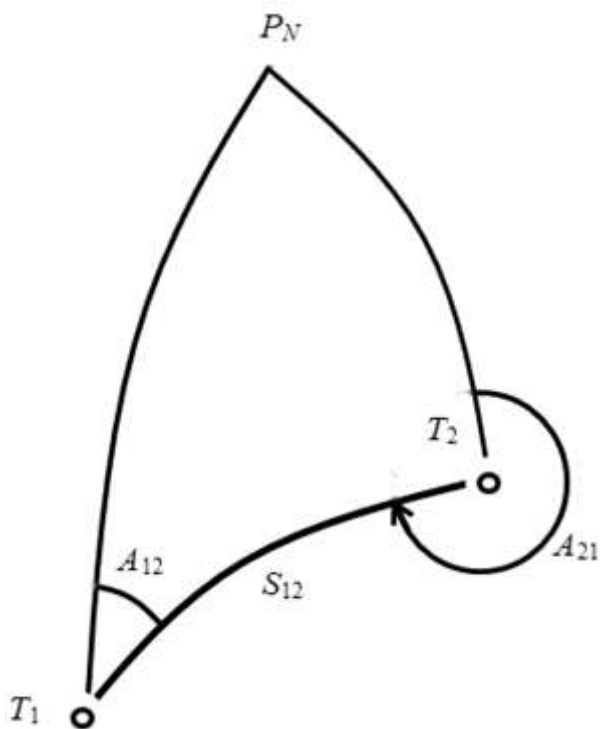


Рис. 17. Полярный треугольник

Обратная геодезическая задача заключается в определении длины, прямого и обратного азимутов геодезической линии, проходящей через два пункта с известными геодезическими координатами. Так, если заданы координаты B_1 , L_1 и B_2 , L_2 пунктов T_1 и T_2 (см. рис. 17), то, решая обратную задачу, определяют длину S_{12} , прямой – A_{12} и обратный A_{21} азимуты геодезической линии T_1T_2 .

Принято различать два подхода к решению главных геодезических задач на поверхности эллипсоида: прямой и косвенный.

Идея прямого подхода заключается в решении сфероидического треугольника, образованного геодезической линией, соединяющей два пункта, и меридианами этих пунктов. Рассмотрим треугольник $T_1P_NT_2$, изображенный на рис. 18, который образован геодезической линией T_1T_2 и меридианами T_1P_N и T_2P_N пунктов T_1 и T_2 соответственно.

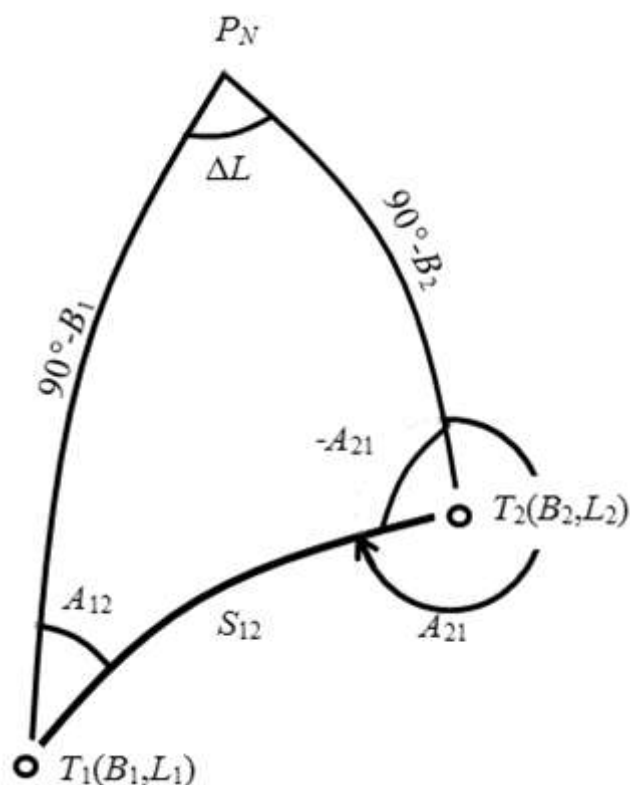


Рис. 18. Элементы сфероидического треугольника

Сторона этого треугольника равна длине геодезической линии. Известны две стороны $T_1 P_N = 90^\circ - B_1$, $T_1 T_2 = S_{12}$ и угол между ними A_{12} . Из решения треугольника можно непосредственно определить три остальных искомых элемента $T_2 P_N = 90^\circ - B_2$, $360^\circ - A_{21}$, а, значит и сам обратный азимут A_{21} и разность долгот $\Delta L = L_2 - L_1$ пунктов T_1 и T_2 . И тогда находится долгота $L_2 = L_1 + \Delta L$. При решении обратной геодезической задачи известны $B_1, B_2, \Delta L$. Из решения треугольника находят углы $A_{12}, 360^\circ - A_{21}$ и сторону $T_1 T_2 = S_{12}$ – расстояние между пунктами T_1 и T_2 .

Процесс определения неизвестных элементов треугольника по известным принято называть решением треугольника. Существует математический аппарат для решения треугольников на поверхности сферы, известный под названием сферической тригонометрии. Однако подобный аппарат для поверхности эллипсоида оказывается очень сложным. Поэтому, при решении геодезических задач прямым методом используют малое

отличие земного эллипсоида от сферы и применяют следующий алгоритм решения сфероидического полярного треугольника:

- исходные элементы треугольника проектируют на сферу, внося в них поправки;
- решают треугольник как сферический, используя формулы сферической тригонометрии, и определяют искомые элементы;
- найденные элементы проектируют обратно на эллипсоид, внося в них поправки.

Известны несколько способов решения главных геодезических задач прямым методом. Они отличаются между собой лишь деталями реализации описанной общей идеи. Наиболее распространенный из них – способ Бесселя.

Косвенный подход к решению главных геодезических задач основан на определении приращений широт, долгот и азимутов между двумя пунктами, путем решения системы дифференциальных уравнений геодезической линии. Интегрируя дифференциальные уравнения (22), можно найти следующее общее решение прямой геодезической задачи:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B &= \int_0^S \frac{\cos A}{M} dS, \\ \Delta L &= \int_0^S \frac{\sin A}{N \cos B} dS, \\ \Delta A &= \int_0^S \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B dS, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где $\Delta B = B_2 - B_1$, $\Delta L = L_2 - L_1$, $\Delta A = A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ$ – приращения широты, долготы и азимута между исходным пунктом T_1 и определяемым пунктом T_2 .

Интегралы (23) не могут быть раскрыты в виде замкнутых выражений. Поэтому при выводе формул для вычисления приращений приходится прибегать к численным решениям в виде рядов. При этом число членов ряда, необходимых для обеспечения заданной точности, возрастает с увеличением расстояния между пунктами. Поэтому методы, осно-

ванные на косвенном подходе, используются для расстояний между пунктами, не превышающих несколько десятков километров. Точность методов, основанных на прямом подходе, мало зависит от расстояния между пунктами. Поэтому их обычно используют для решения задач на большие расстояния.

4.5. Решение главных геодезических задач по формулам со средними аргументами (формулы Гаусса)

Данный способ представляет собой одну из реализаций косвенного подхода к решению геодезических задач. Он основан на численном методе решения интегралов (23) с использованием ряда Тейлора:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B = B_2 - B_1 &= \left(\frac{dB}{dS} \right)_0 S + \frac{1}{24} \left(\frac{d^3 B}{dS^3} \right)_0 S^3 + \dots, \\ \Delta L = L_2 - L_1 &= \left(\frac{dL}{dS} \right)_0 S + \frac{1}{24} \left(\frac{d^3 L}{dS^3} \right)_0 S^3 + \dots, \\ \Delta A = A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ &= \left(\frac{dA}{dS} \right)_0 S + \frac{1}{24} \left(\frac{d^3 A}{dS^3} \right)_0 S^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Выражения для первых производных, входящих в формулы (24), известны из дифференциальных уравнений (22). Выражения для производных более высоких порядков находятся путем последовательного дифференцирования.

Индекс «0», которым отмечены производные в формулах (24), означают, что значения этих производных должны вычисляться по значениям широты B_0 и азимута A_0 для средней точки геодезической линии. Так как значения широты и азимута в середине геодезической линии не равны средним значениям широты B_m и азимута A_m , формулы (24) дополняют поправочными членами, учитывающими отличия $B_m - B_0$ и $A_m - A_0$.

В результате перечисленных преобразований формул (24) получают следующее численное решение прямой геодезической задачи:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B &= b \left(1 + \frac{a^2 + 2l^2}{24} \right) \rho, \\ \Delta L &= l \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{24} \right) \rho, \\ \Delta A &= a \left(1 + \frac{3b^2 + 2l^2 - 2a^2}{24} \right) \rho, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{S_{12} \cos A_m}{M_m}, \\ l &= \frac{S_{12} \sin A_m}{N_m \cos B_m}, \\ a &= l \sin B_m. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Индекс « m » в формулах (26) означает, что значения помеченных им величин должны вычисляться по средним значениям широты $B_m = (B_1 + B_2)/2$ и азимута $A_m = (A_{12} + A_{21} \pm 180^\circ)/2$. Однако при решении прямой задачи значения B_2 и A_{21} неизвестны. Поэтому задачу приходится решать методом итерации (последовательных приближений). На первом шаге итерации принимают: $B_m \approx B_1$, $A_m \approx A_1$. На очередном шаге итерации i значения средних аргументов находят, используя приращения, полученные по формулам (25) на предыдущем $(i-1)$ -м шаге:

$$\begin{aligned} B_{mi} &= B_1 + \Delta B_{i-1} / 2; \\ A_{mi} &= A_{12} + \Delta A_{i-1} / 2. \end{aligned}$$

Процесс итерации прерывают, когда разности приращений координат и азимута, полученные на очередном и предыдущем шагах, станут по модулю меньше заданной точности их вычисления.

Необходимо отметить, что в процессе итерации достигается приближение не к истинным значениям приращений, а к некоторым значениям,

точность которых зависит от числа членов рядов (24), использовавшихся при выводе формул (25), и от расстояния S_{12} . Формулы (25) позволяют определять приращения координат и азимута с точностью 0,000 2'' для расстояний менее 50 км. При этом обычно бывает достаточно выполнить 2–3 приближения.

Окончательное решение прямой геодезической задачи завершается вычислением координат и обратного азимута по формулам:

$$\begin{aligned} B_2 &= B_1 + \Delta B; \\ L_2 &= L_1 + \Delta L; \\ A_{21} &= A_{12} + \Delta A \pm 180^\circ. \end{aligned}$$

Формулы для решения обратной геодезической задачи выводятся путем обращения формул (25) для прямой задачи. При этом входящие в эти формулы величины b и l , которые при решении прямой задачи представляют приближенные значения приращений координат, можно заменить на известные приращения ΔB , ΔL , а величину a , входящую в третью формулу (25), заменить на $\Delta A = \Delta L \cdot \sin B_m$.

В результате формулы для решения обратной задачи получают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} Q &= S_{12} \cos A_m = \frac{\Delta B M_m}{\rho} \left(1 - \frac{\Delta L^2 \sin^2 B_m + 2\Delta L^2}{24\rho^2} \right), \\ P &= S_{12} \sin A_m = \frac{\Delta L N_m \cos B_m}{\rho} \left(1 - \frac{\Delta L^2 \sin^2 B_m - \Delta B^2}{24\rho^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Величины Q и P позволяют вычислить главное значение среднего азимута A_m и искомую длину геодезической линии S_{12} по формулам:

$$A_m = \arctg\left(\frac{P}{Q}\right); \quad (28)$$

$$S_{12} = \sqrt{Q^2 + P^2}. \quad (29)$$

Окончательное значение среднего азимута A_m вычисляют по найденному главному значению с учетом четверти, которую определяют по знакам приращений ΔB и ΔL .

Приращение азимута ΔA вычисляется по формуле

$$\Delta A = \Delta L \sin B_m \left(1 + \frac{3\Delta B^2 + 2\Delta L^2 + 2\Delta L^2 \sin^2 B_m}{24} \right). \quad (30)$$

В заключение определяются прямой и обратный азимуты по формулам:

$$\left. \begin{aligned} A_{12} &= A_m - \Delta A / 2, \\ A_{21} &= A_m + \Delta A / 2 \pm 180^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

В отличие от формул (25) и (26), в формулах (27) и (30) все величины, входящие в правые части, определяются непосредственно из условия задачи. Поэтому для решения обратной задачи процесс приближений не требуется.

5. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА НА ПЛОСКОСТЬ. ПЛОСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ. ПРОЕКЦИЯ ГАУССА – КРЮГЕРА

5.1. Важнейшие картографические проекции, порядок применения системы координат Гаусса – Крюгера в топографо-геодезических и маркшейдерских работах

По назначению проекции принято делить на картографические и геодезические.

Картографические проекции предназначены для создания географических, топографических, навигационных, геологических и других специальных карт. Известно множество картографических проекций. Классификация нормальных картографических проекций по виду изображений меридианов и параллелей, являющаяся результатом исторического развития теории картографических проекций, охватывает большинство известных проекций. В ней сохранились наименования, связанные с геометрическим методом получения проекций, однако рассматриваемые их группы теперь определяют аналитически.

Виды картографических проекций:

- конические проекции;
- цилиндрические проекции;
- азимутальные проекции;
- псевдоконические проекции;
- псевдоцилиндрические проекции;
- поликонические проекции.

Конические проекции – проекции, в которых параллели изображаются концентрическими окружностями, меридианы – ортогональными им прямыми (рис. 19). В этих проекциях искажения не зависят от долготы. Особо пригодны для территорий, вытянутых вдоль параллелей. Карты

всей территории СНГ часто составляются в равноугольных и равнопромежуточных конических проекциях. Используются также как геодезические проекции.

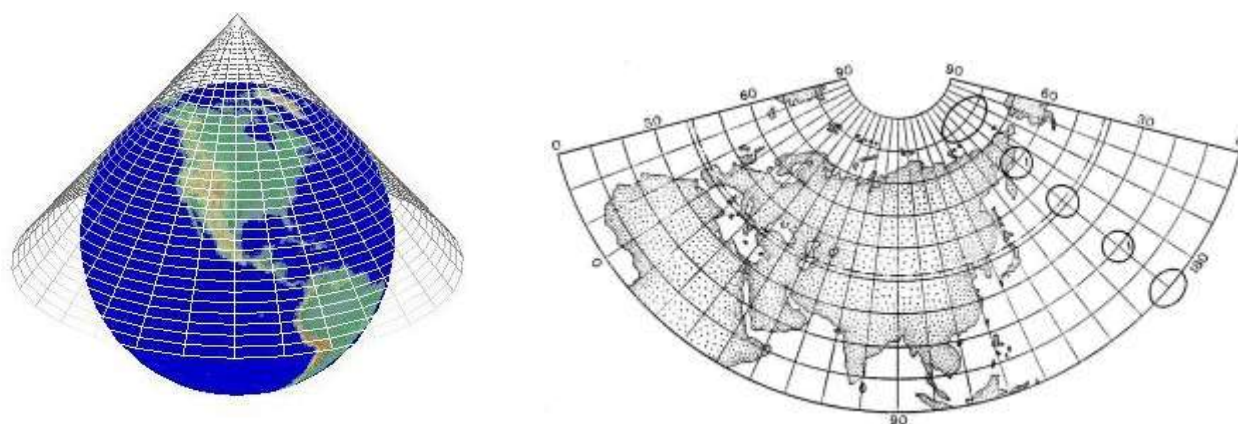


Рис. 19. Коническая проекция

Цилиндрические проекции – проекции, в которых меридианы изображаются равноотстоящими параллельными прямыми, а параллели – прямыми, перпендикулярными к изображениям меридианов (рис. 20). Такие проекции выгодны для изображения территорий, вытянутых вдоль экватора, или какой-нибудь параллели. В навигации используется проекция Меркатора – равноугольная цилиндрическая проекция (рис. 21).

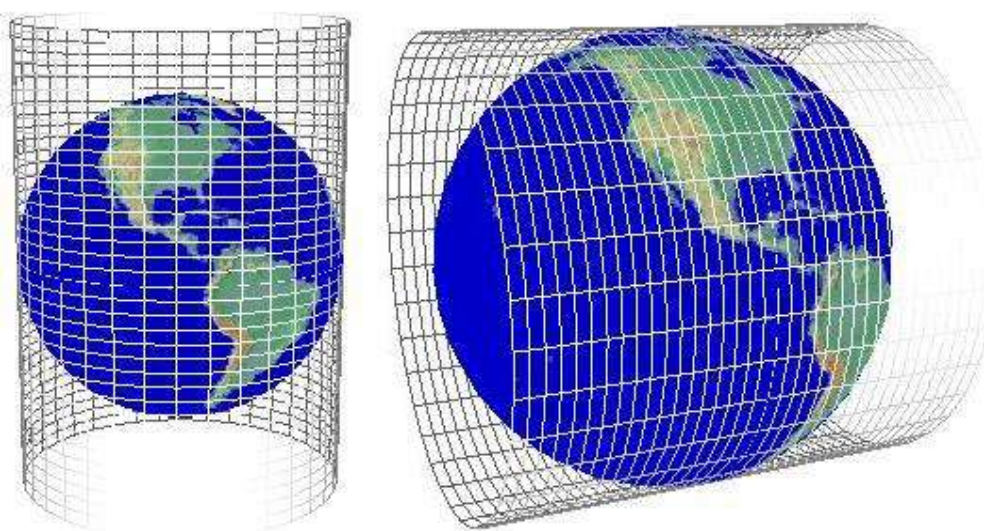


Рис. 20. Цилиндрическая проекция

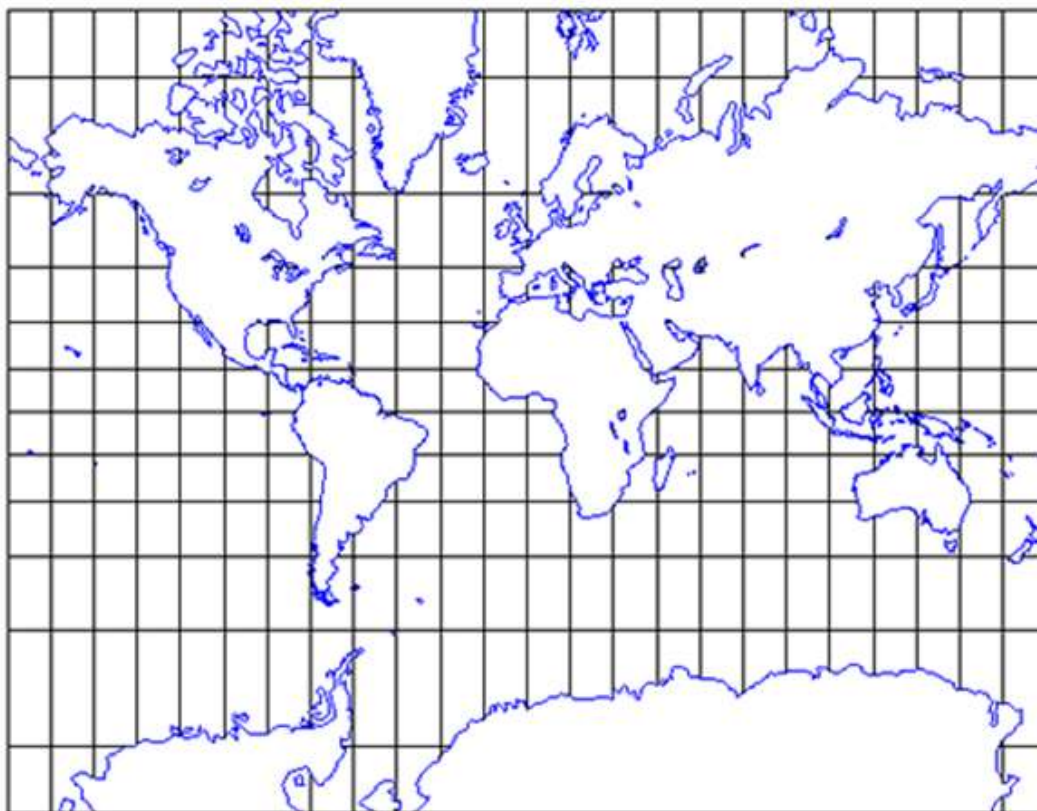


Рис. 21. Равноугольная цилиндрическая проекция Меркатора

Геодезические проекции составляют более узкий класс проекций, предназначенных для математической обработки геодезических сетей. Практический эффект от использования этих проекций заключается в том, что при переходе с поверхности эллипсоида на плоскость значительно упрощается решение задач, связанных с обработкой сетей (решение треугольников, уравнивание, решение главных геодезических задач). Однако эффект от перехода на плоскость может быть реализован лишь в том случае, если преобразования, необходимые для проектирования элементов геодезических сетей (направлений, углов, линий) с эллипсоида на плоскость, будут достаточно простыми. Последнее требование является основным критерием при выборе геодезической проекции.

С точки зрения искажений для геодезии наиболее приемлемы равноугольные (конформные) проекции. Достоинство конформной проекции состоит в том, что масштаб изображения в данной точке не зависит от направления, а это влечет за собой сохранение подобия бесконечно малых

фигур и, следовательно, и равноугольность, т. е. углы переносятся на плоскость без искажений.

Для мелкомасштабного картографирования Земли удобно использовать систему координат, в которой положение точки определяется геодезическими широтами и долготами. Широты и долготы позволяют отображать географическое положение в разных наиболее соответствующих конкретным задачам картографических проекциях.

Для получения топографических, тематических карт более востребованы плоские прямоугольные координаты. Они позволяют значительно упростить математическую обработку вследствие использования простых формул. Если координаты пунктов даны в плоскости выбранной проекции, их можно использовать непосредственно в геодезической сети. При этом отсутствует требование введения поправок. Территория съемки будет сразу же изображена в данной проекции. Математическая обработка измерений, выполненных на больших территориях с целью изучения фигуры Земли, осуществляется на эллипсоиде в единой геодезической системе координат. Однако, при построении на небольших территориях геодезических сетей, предназначенных для производства топографических съемок, для обеспечения строительства крупных инженерно-технических сооружений, железных и шоссейных дорог и т. д. более удобной является система плоских прямоугольных координат. На практике необходимо иметь координаты пунктов геодезической сети в прямоугольной плоской системе прямолинейных координат для того, чтобы можно было легко использовать геодезические данные при выполнении различного рода проектных работ, например, при землеустройстве и т. д. Это вызывает необходимость введения проекции поверхности эллипсоида на плоскость, т. е. изображения частей земной поверхности на плоскости по определенному закону.

В настоящее время в России принята проекция Гаусса – Крюгера или система прямоугольных плоских прямолинейных координат в конформной проекции Гаусса, в которой производят вычисления всех пунктов опорной геодезической сети.

Основным преимуществом системы плоских прямоугольных координат является простота и удобство формул плоской тригонометрии, ис-

пользуемых при математической обработке геодезических измерений и решении различных геодезических задач.

5.2. Плоские прямоугольные координаты.

Проекция Гаусса – Крюгера

5.2.1. Общие сведения о проекциях эллипсоида на плоскость

Известно, что поверхность эллипсоида не может быть развернута на плоскость без искажений. Поэтому и не может быть предложена система плоских координат, в которой взаимное положение точек будет выражено без искажений. При любом способе отображения эллипсоида на плоскость мы будем иметь дело с искажениями, но какими? Это зависит от выбора проекции и условий ее отображения. Так, при проектировании на плоскость сфероидического треугольника, в зависимости от типа проекции, могут быть искажены только стороны, а углы спроектированы без искажений, либо углы исказятся, а стороны будут теми же, что и на эллипсоиде, либо будут искажены и углы, и стороны и т. д.

Для геодезии очень важно, чтобы величина искажений угловых и линейных элементов была небольшой, тогда их можно будет легко учесть. С теоретической точки зрения при любом изображении эллипсоида на плоскость можно вычислить все искажения с требуемой степенью точности, как бы велики они не были. Но тогда был бы потерян практический смысл перехода на плоскость, так как вычисление больших искажений выполнялось бы по таким же сложным формулам, как и решение геодезических задач на эллипсоиде.

Геодезической (картографической) проекцией называют отображение поверхности эллипсоида на плоскости, выполненное по определенному математическому закону. Это означает, что существуют некоторые функции:

$$x = f_x(B, L); \quad y = f_y(B, L),$$

согласно которым каждой точке на поверхности эллипсоида с геодезическими координатами B и L соответствует точка на плоскости с прямоугольными координатами x и y .

Различные проекции отличаются между собой видом функций $f_x(B, L)$ и $f_y(B, L)$. Очевидно, что существует множество таких функций, следовательно, множество способов отобразить поверхность эллипсоида на плоскости в различных проекциях. Вид функций $f_x(B, L)$ и $f_y(B, L)$ определяет ряд свойств проекции. Важнейшим из них является масштаб изображения (или частный масштаб длин), который для каждой точки проекции определяется как предел отношения бесконечно малого отрезка dD на плоскости к отображаемому им бесконечно малому отрезку dS на поверхности эллипсоида $m = \frac{dD}{dS}$.

Изображение не искажается, если масштаб изображения $m = 1$. В противном случае происходит искажение изображения. Величину $m - 1$ принято называть масштабом искажений.

Для конкретной проекции масштаб изображения в некоторой точке является функцией геодезических координат этой точки, т. е. $m = f_m(B, L)$. Следовательно, функция $f_m(B, L)$, так же как и функции $f_x(B, L)$ и $f_y(B, L)$, определяет вид проекции. Они взаимосвязаны и представляют собой разные формы задания проекции. Так как функция $f_m(B, L)$ определяет вид проекции через ее основное свойство – масштаб изображения – ее обычно используют в качестве исходной для вывода функций $f_x(B, L)$ и $f_y(B, L)$.

Известно, что поверхность эллипсоида не разворачивается на плоскость без искажений. Это означает, что принципиально невозможно подобрать такие функции $f_x(B, L)$ и $f_y(B, L)$ или $f_m(B, L)$, при которых в каждой точке проекции обеспечивалось бы равенство $m = 1$ ($m - 1 = 0$). Это равенство может иметь место только в отдельных точках или на отдельных линиях проекции. В остальных точках будут наблюдаться искажения, характер которых зависит от вида проекции.

Характер искажений играет важную роль при выборе проекции. Можно подобрать такие функции $f_x(B, L)$ и $f_y(B, L)$, что в проекции не будут искажаться отдельные элементы изображения. При этом непре-

менно будут искажаться другие элементы. Например, существуют проекции, не искажающие углы (равноугольные), но искажающие длины линий и площади. Есть проекции, не искажающие площади (равновеликие), но искажающие углы.

Так как избежать искажений полностью невозможно, выбор той или иной проекции всегда носит характер компромиссного решения: какие элементы изображения важно сохранить не искаженными и насколько сложным будет учет искажений остальных элементов. Решение будет зависеть от практического назначения проекции.

Традиционно во многих странах мира для производства и математической обработки топографо-геодезических работ используется равноугольная (конформная) проекция эллипсоида на плоскость. Теоретические основы этой проекции разработаны К. Ф. Гауссом в начале XIX в., а доведена она до стадии практического применения Крюгером в начале XX в. Поэтому эту проекцию геодезисты называют сокращенно проекцией Гаусса – Крюгера.

Поверхность земного эллипсоида в ней разделяется меридианами на зоны, которые простираются от Северного до Южного полюсов. Средний меридиан каждой зоны называется осевым, а крайние – граничными меридианами. Ширина зоны выбирается произвольно в зависимости от величины искажений на краю зоны. В РФ и в Республике Казахстан приняты две системы координатных зон – шестиградусные и трехградусные. Шестиградусные зоны являются основными в том смысле, что все материалы математической обработки геодезических сетей и каталоги координат оформляются в системе шестиградусных зон. Трехградусные зоны используются только для производства крупномасштабных топографических съемок.

Счет шестиградусных зон ведется от Гринвичского меридиана на восток, при этом западный граничный меридиан первой шестиградусной зоны совпадает с Гринвичским меридианом. Поверхность земного эллипсоида меридианами, проведенными через 6° , делится на 60 зон (рис. 22). Граничные меридианы зон поочередно совпадают с западными и восточными рамками карт масштаба $1 : 1\,000\,000$, а номер зоны n и долгота осевого меридиана L_0 вычисляются по формулам:

$$n = N - 30 = \text{целое} \left(\frac{L^\circ}{6^\circ} \right) + 1; \quad L_0 = 6^\circ n - 3^\circ,$$

где N – номер колонны листа карты масштаба 1 : 1 000 000.

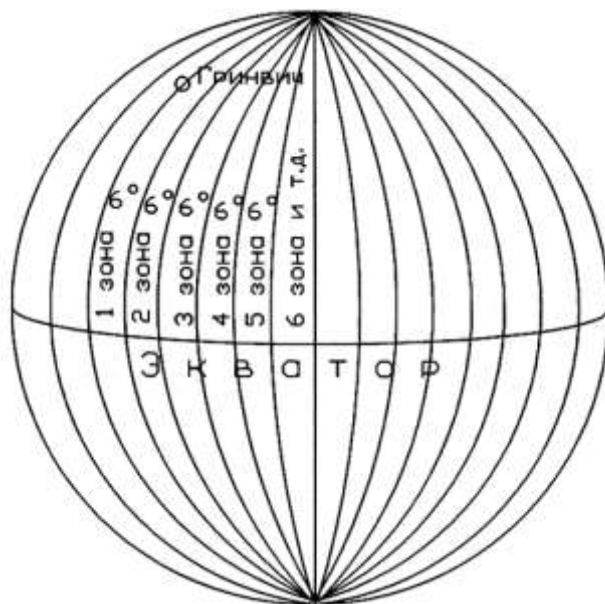


Рис. 22. Деление земного шара на зоны

К центральному (осевому) меридиану каждой зоны проводится перпендикулярно по отношению к оси вращения Земли касательный цилиндр так (рис. 23), чтобы его ось лежала в плоскости экватора.

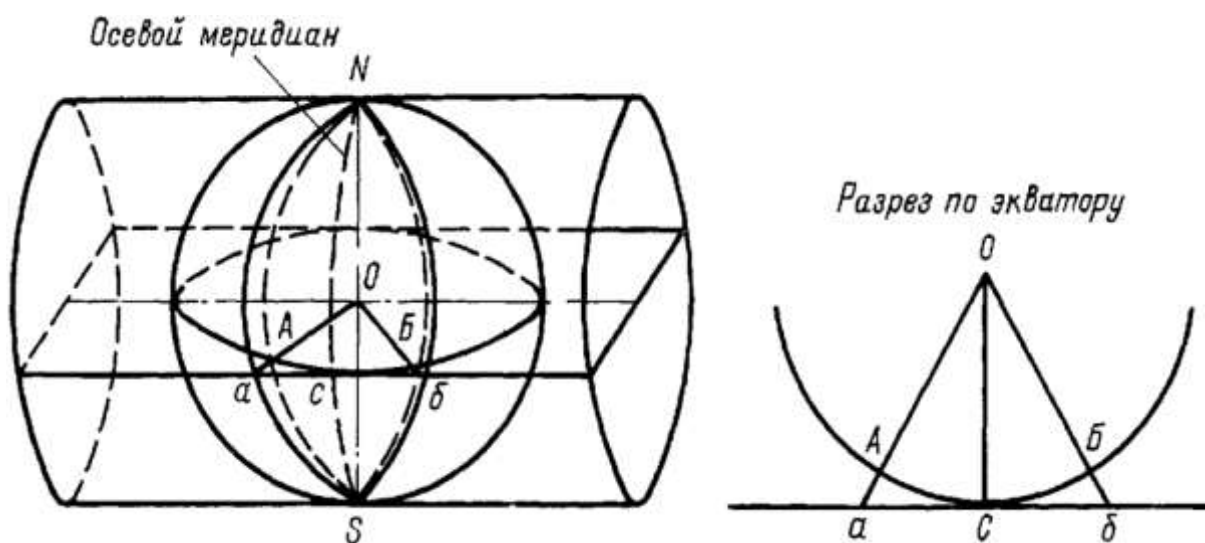


Рис. 23. Проекция Гаусса – Крюгера

Начальный меридиан проходит через центр главного зала Гринвичской обсерватории, расположенной вблизи Лондона. Долготы изменяются от 0 до 180° , к западу от Гринвича – западные и к востоку – восточные. Все точки одного меридиана имеют одинаковую долготу. На поверхность цилиндра соответствующим образом производится проектирование поверхности сфероид в пределах данной зоны (рис. 24), т. е. при проектировании поставлено условие, чтобы изображение малого участка вокруг каждой точки на цилиндре было подобно изображению соответствующего участка на эллипсоиде.

Прямоугольные координаты (плоские) – линейные величины: абсцисса x и ордината y , определяющие положение точек на плоскости (на карте) относительно двух взаимно перпендикулярных осей x и y . Абсцисса x и ордината y точки A – расстояния от начала координат до оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на соответствующие оси, с указанием знака. Ширина каждой такой зоны по экватору около 666 км, а длина с севера на юг около 20 000 км. Номера зон отсчитываются на восток от Гринвичского меридиана. Зоны 1–30 находятся в Восточном полушарии, а зоны 31–60 – в Западном.

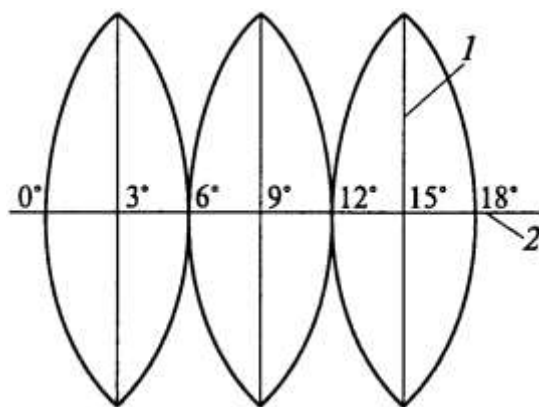


Рис. 24. Зоны в проекции Гаусса – Крюгера
(1 – проекция осевого меридиана, 2 – проекция экватора)

В системе трехградусных зон осевые меридианы располагаются через 3° по долготе и совпадают поочередно с граничными и осевыми меридианами шестиградусных зон (рис. 25). Причем осевые меридианы первых

шестиградусной и трехградусной зон совпадают. Долготы осевых меридианов трехградусных зон определяются по формуле $L_0 = 3^\circ n'$, номер соответствующей трехградусной зоны $n' = \text{целое}[(L^\circ - 1,5^\circ)/3^\circ] + 1$. Всего шестиградусных зон – 60, а трехградусных – 120.

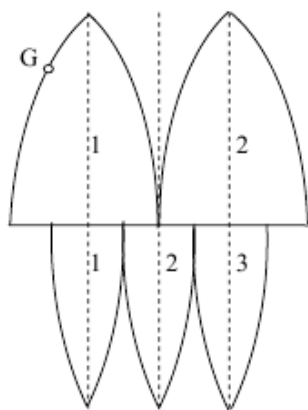


Рис. 25. Взаимное расположение и счет шестиградусных и трехградусных зон

Каждая зона в проекции Гаусса – Крюгера изображается на плоскости независимо от других зон в своей системе плоских прямоугольных координат.

В проекции Гаусса – Крюгера выводятся следующие условия.

1. Проекция равноугольна (конформна).
2. Осевой меридиан и экватор каждой зоны изображаются на плоскости прямыми линиями.
3. Масштаб изображения на осевом меридиане равен единице.

Исходя из второго условия, изображение осевого меридиана принимается за ось абсцисс, а изображение экватора – за ось ординат.

Системы плоских координат в каждой зоне проекции Гаусса совершенно однообразны, и поэтому формулы преобразования координат, углов, линий при проектировании их на плоскость будут одинаковыми для всех зон, независимо от их местоположения на эллипсоиде. Это одно из достоинств проекции Гаусса. Недостаток же – неоднозначность определения положения точки, так как одни и те же числовые значения координат могут быть в разных зонах.

На территории России абсциссы пунктов геодезических сетей всегда положительные, а ординаты – положительны к востоку от осевого меридиана и отрицательны к западу (рис. 26).

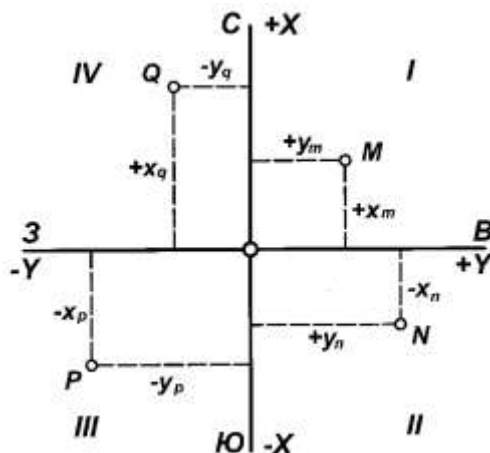


Рис. 26. Знаки координат по четвертям

Чтобы исключить отрицательные ординаты и неоднозначность, т. е. иметь возможность по значениям плоских прямоугольных координат судить о местоположении зоны, вводятся условные ординаты (рис. 27). Переход к ним осуществляется по формуле:

$$y' = n \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + y,$$

где y' – условная ордината; n – номер зоны.

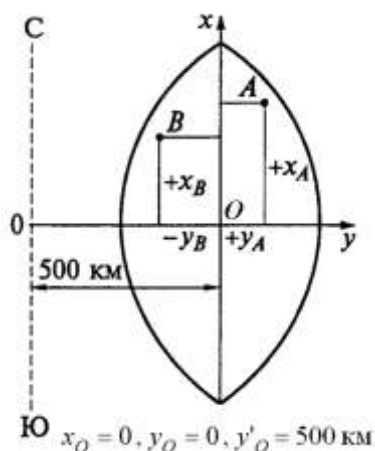


Рис. 27. Система прямоугольных координат в зоне

Таким образом, изложенные общие геометрические сведения о проекции Гаусса – Крюгера позволяют установить, в общем виде, порядок действий при переходе с эллипсоида на плоскость при математической обработке геодезических измерений в этой проекции.

1. Переход от геодезических координат (B, L) исходных пунктов к плоским прямоугольным координатам (x, y) .

2. Определение длины исходной стороны (хорды) и ее дирекционного угла на плоскости.

3. Вычисление поправок δ_{ij} за кривизну изображения геодезической линии на плоскости и введение их в непосредственно измеренные горизонтальные направления.

4. Обработка геодезической сети на плоскости.

Для математического обеспечения выполнения вышеперечисленных этапов необходимо располагать следующими формулами:

1) преобразования геодезических координат B, L в плоские прямоугольные координаты x, y и обратно;

2) вычисления сближения меридианов γ на плоскости и масштаба изображения m ;

3) редуцирования сторон с эллипсоида на плоскость (т. е. перехода от S к S');

4) перехода от длины S' изображения геодезической линии на плоскости к длине хорды d ;

5) вычисления поправок за кривизну изображения геодезической линии δ_{ij} .

Кроме стандартных зон в ряде случаев используют зоны с частным началом координат. Начало координат такой зоны определяется осевым меридианом, проходящим посередине территории, на которой ведутся топографо-геодезические работы, что обеспечивает минимум искажений на восточных и западных границах территории. Зоны с частным началом координат обычно используются для назначения так называемых местных систем координат, предназначенных для ведения съемочных и инженерно-геодезических работ на сравнительно небольших территориях (планы городов, объекты строительства и т. п.).

5.2.2. Понятие о зоне проекции Гаусса – Крюгера

В любой проекции условие $m = 1$ выполняется лишь в отдельных точках или на отдельных линиях. По мере удаления от этих особых точек или линий искажения растут. При значительных размерах отображаемой территории нарушается основное требование, предъявляемое к геодезическим проекциям, – простота преобразования величин при переходе с эллипсоида на плоскость. При этом формулы, используемые для вычисления поправок в проектируемые элементы сетей, становятся столь сложными, что эффект от перехода на плоскость становится мал. Поэтому геодезические проекции, как правило, используются для отображения ограниченных участков поверхности эллипсоида.

Положение точки T на поверхности эллипсоида в пределах зоны определяется широтой B и разностью долгот $l = L - L_0$ между долготой L точки и долготой L_0 осевого меридиана. Величину l можно назвать долготой относительно осевого меридиана, так как осевой меридиан в данном случае играет роль начала отсчета долгот. Для точек, расположенных к востоку от осевого меридиана, $l > 0$, а для точек, находящихся западнее, $l < 0$.

5.2.3. Свойства проекции Гаусса – Крюгера

Проекция Гаусса – Крюгера принадлежит к классу конформных проекций.

Конформной проекцией называют проекцию, для которой масштаб изображения $m = dD / dS$ в любой точке зависит только от координат этой точки, но не зависит от направления отрезков dD или dS . По характеру искажений конформные проекции являются равноугольными, т. е. не искажают углы и сохраняют подобие бесконечно малых фигур.

Существует много равноугольных проекций. Отличительное свойство проекции Гаусса – Крюгера заключается в условии: масштаб изображения $m = 1$ на оси x . Это означает, что осевой меридиан зоны изображается без искажений.

Следовательно, проекцию Гаусса – Крюгера можно кратко характеризовать как равноугольную проекцию, построенную под условием неискаженного изображения осевого меридиана зоны.

Из перечисленных основных свойств проекции Гаусса – Крюгера вытекают следующие особенности отображения, присущие этой проекции:

- все геодезические линии, кроме осевого меридиана и экватора, изображаются кривыми, изогнутыми в сторону от оси x (эту особенность иногда образно называют «правилом паруса», имея в виду, что изображения геодезических линий изгибается подобно парусу под действием «ветра», дующего со стороны оси x);

- длины линий искажаются тем больше, чем далее эти линии расположены от осевого меридиана.

Рассмотрим свойства проекции при проектировании элементов геодезических сетей с поверхности эллипсоида на плоскость. На рис. 28а изображен треугольник триангуляции на поверхности эллипсоида. В его вершинах расположены пункты A , B и C . Треугольник находится в зоне, начало координат которой определяет осевой меридиан с долготой L_0 . Пункт A с координатами B_A и $l = L_A - L_0$ является исходным.

Известны также:

- азимут A_{AB} геодезической линии AB , соответствующий углу $P_N AB$ между северным направлением меридиана пункта A и геодезической линией AB ;

- длина S_{AB} геодезической линии AB (исходная сторона треугольника);

- углы сфероидического треугольника β_A , β_B и β_C при вершинах A , B и C соответственно.

Рис. 28б изображает проекцию треугольника ABC на плоскость. Точки a , b и c являются проекциями пунктов A , B и C соответственно. Согласно описанным ранее свойствам проекции, геодезические линии, соединяющие пункты A , B и C (стороны треугольника), изобразятся кривыми, изогнутыми в сторону от оси x (по «правилу паруса»). Меридиан $P_N A$ пункта A также изобразится в виде аналогично изогнутой кривой $P_N a$.

Так как проекция равноугольна, азимут линии AB при переходе на плоскость не исказится и угол при точке a между кривыми aP_N и ab будет равен A_{AB} . По этой же причине углы криволинейного треугольника abc на плоскости окажутся равными углам β_A , β_B , β_C сфероидического треугольника.

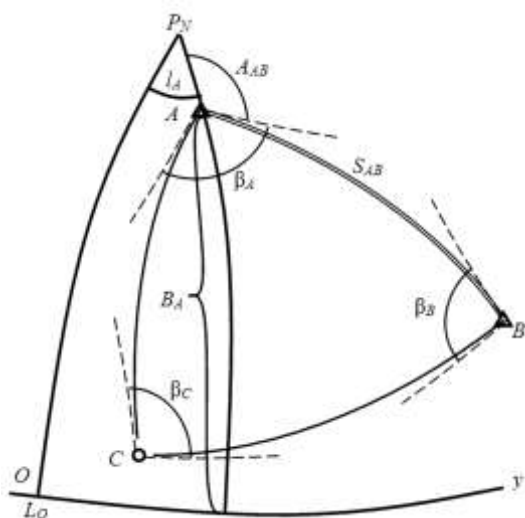


Рис. 28а. Треугольник
на эллипсоиде

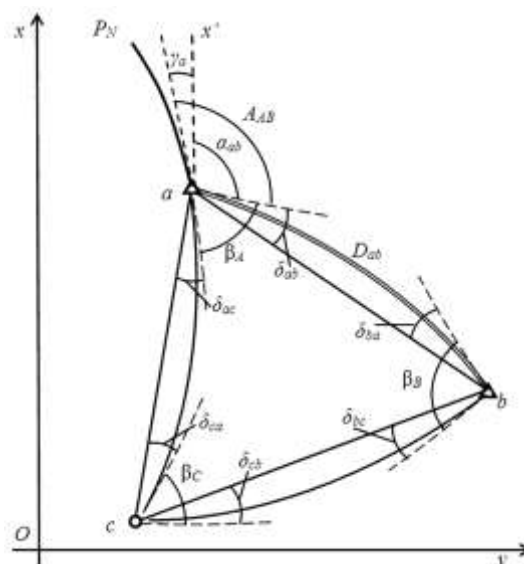


Рис. 28б. Проекция
на плоскость

Длина S_{AB} исходной стороны треугольника исказится и длина ее проекции ab на плоскости станет равной $D_{ab} = S_{AB} + \Delta S$, где ΔS – поправка за масштаб изображения. Аналогичным искажениям подвергнутся пока неизвестные нам длины других сторон треугольника.

Анализируя полученное на плоскости изображение в виде криволинейного треугольника, можно прийти к выводу, что результат проектирования оказался неудобным для практического использования, так как к нему невозможно применить математический аппарат обычной плоской геометрии и тригонометрии.

Для того, чтобы это стало возможным, при проектировании (редуцировании) геодезических сетей на плоскость проекции Гаусса – Крюгера выполняют следующие дополнительные преобразования:

- кривые, изображающие геодезические линии, заменяют прямыми (хордами), стягивающими концы этих кривых;
- от азимутов переходят к дирекционным углам.

Особенности первого из перечисленных преобразований рассмотрим на примере треугольника abc (см. рис. 28б), соединив его вершины прямыми. Направления этих прямых будут отличаться от направлений соот-

ветствующих кривых. Для перехода от направлений кривых, изображающих геодезические линии, к направлениям прямых вводят поправки, которые называют поправками за кривизну изображения геодезических линий.

Например, для перехода от направления кривой ab , изображающей геодезическую линию AB , к направлению прямой ab в направлении кривой необходимо внести поправку δ_{ab} , величина которой соответствует углу между кривой ab и стягивающей ее хордой. Аналогичные поправки вводятся в другие 5 направлений (на рис. 28б они обозначены буквами δ и снабжены индексами соответствующих направлений).

Поправки за кривизну изображения геодезических линий имеют знак в зависимости от того, в каком направлении осуществляется вращение при переходе от кривых к стягивающим их хордам. Если при переходе от кривой к хорде осуществляется вращение по часовой стрелке, поправка положительна, если против часовой – отрицательна. Например, поправка $\delta_{ab} < 0$, так как переход от кривой ab к хорде ab осуществляется вращением против часовой стрелки. Формулы для вычисления этих поправок, которые будут рассмотрены далее, автоматически определяют их знак, однако описанное правило бывает полезным для анализа и контроля вычислений.

Дирекционным углом называют угол между прямой, проведенной через точку параллельно оси x , и прямой, проведенной через нее в определенном направлении. Например (см. рис. 28б), дирекционным углом направления ab является угол α_{ab} между прямой ax' , параллельной оси x , и хордой ab , стягивающей концы кривой ab . Дирекционный угол отсчитывается от положительного направления оси x по часовой стрелке от 0 до 360°.

Сближением меридианов называют угол между изображением меридиана точки и прямой, проведенной через нее параллельно оси x . Например, на рис. 28б сближение меридианов γ_A в точке a определяется углом между изображением меридиана aP_N этой точки и прямой ax' . Сближение меридианов отсчитывается от северного направления меридиана до прямой и имеет знак, зависящий от направления отсчета. Для точек, расположенных восточнее оси x , сближение меридианов отсчитывается по часо-

вой стрелке и имеет знак «плюс», а для точек, расположенных западнее оси x , – против часовой и имеет отрицательное значение. Следовательно, знак сближения меридианов всегда совпадает со знаком координаты y точки. Например, в точке a , для которой $y > 0$, сближение меридиана $\gamma_A > 0$.

Данные определения дирекционного угла и сближения меридианов отличаются от аналогичных определений, известных из курса топографии, тем, что в последних вместо прямой, параллельной оси x , используются линии $y = \text{const}$ координатной сетки. Но они параллельны оси x и, следовательно, оба вида определений отличаются лишь по форме.

Из рис. 28б следует, что дирекционный угол $\alpha_{ab} = A_{AB} - \gamma_A + \delta_{ab}$. Обобщая этот частный случай и учитывая, что поправка $\delta_{ab} < 0$ (вращение от кривой к хорде против часовой стрелки), можно вывести следующую формулу для перехода от азимута к дирекционному углу направления с пункта i на пункт k :

$$\alpha_{ik} = A_{ik} - \gamma_i + \delta_{ik}. \quad (32)$$

При расчетах по формуле (32) необходимо учитывать собственные знаки величин γ_A и δ_{ab} .

Отметим существенно различную роль, которую выполняют поправки ΔS в длины линий и поправки δ_{ik} в направления за кривизну изображения геодезических линий. Поправки ΔS учитывают изменения длин линий в соответствии со свойствами проекции, т. е. реализуют закон отображения. Поправки δ_{ik} осуществляют дополнительное преобразование, связанное с необходимостью перехода от кривых, изображающих геодезические линии, к прямым. При этом углы изменяются, что, на первый взгляд, противоречит утверждению о том, что проекция Гаусса – Крюгера равноугольная. Однако это противоречие мнимое, так как полученные в результате дополнительных преобразований прямолинейные геометрические построения, строго говоря, уже нельзя рассматривать, как проекцию сети на плоскость, но лишь как вспомогательное построение, облегчающее последующую обработку измерений.

5.2.4. Вычисление прямоугольных координат Гаусса – Крюгера по заданным геодезическим координатам и обратное преобразование

Функции $x = f_x(B, l)$ и $y = f_y(B, l)$, определяющие закон отображения поверхности эллипсоида на плоскости проекции Гаусса – Крюгера, конкретно раскрываются в виде формул, для вычисления прямоугольных координат x и y на плоскости по геодезическим координатам B и $l = L - L_0$. Эти формулы с учетом членов разложения, содержащих l не более, чем во второй степени, имеют следующий вид:

$$x = X + \frac{Nl^2}{2\rho^2} \sin B \cos B + \dots; \quad (33)$$

$$y = \frac{l}{\rho} N \cos B + \dots, \quad (34)$$

где $X = \int_0^B M dB$ – длина дуги меридиана от экватора до параллели с широтой B .

Геометрический смысл главных членов формул (33) и (34) поясняется на рис. 29а и 29б. Точке A на эллипсоиде с координатами B_A и l_A (рис. 29а) соответствует точка a на плоскости с координатами x_a и y_a (рис. 29б).

Дуга осевого меридиана от экватора до параллели точки A , длина которой равна X , изобразится на плоскости без искажений в виде отрезка оси x длиной X . Из рис. 29б следует, что абсцисса $x_a = X + \delta_x$, где δ_x – малый отрезок оси x , величина которого определяется суммой второго и последующих членов формулы (33). Величина δ_x играет роль поправки к главному члену X . Она возрастает по мере удаления точки от осевого меридиана (с увеличением l).

Главный член формулы (34) есть не что иное, как длина дуги параллели точки A , соответствующая разности долгот $l_A = L_A - L_0$. Проекция этой дуги на плоскость (см. рис. 29б) при малых значениях l остается достаточно близкой к ординате y_a . Эти малые отличия между длиной дуги

параллели и ординатой y_a учитывают второй и последующие поправочные члены формулы (34).

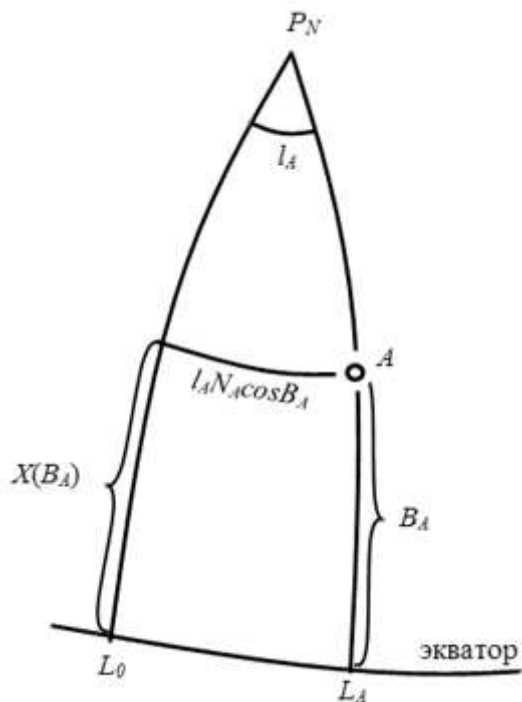


Рис. 29а. Точка A на эллипсоиде

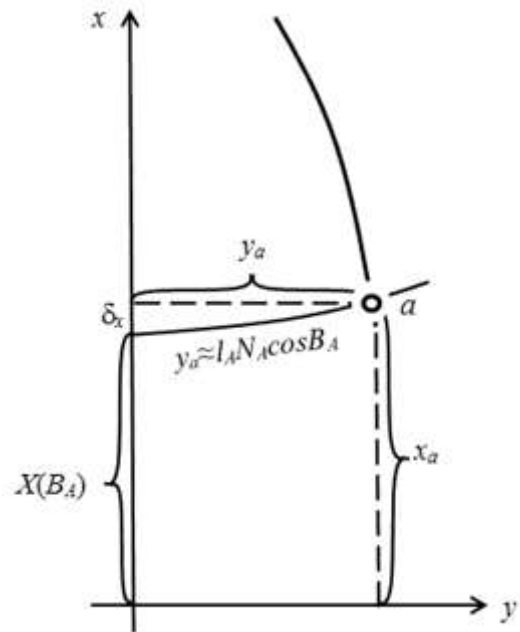


Рис. 29б. Точка a на плоскости

Для обратного преобразования – прямоугольных координат Гаусса – Крюгера в геодезические – используются следующие формулы:

$$B = B_0 - \frac{y^2 \rho}{2M_0 N_0} \operatorname{tg} B_0 - \dots; \quad (35)$$

$$l = \frac{y \rho}{N_0 \cos B_0} + \dots, \quad (36)$$

где $B_0 = \int_0^x \frac{dx}{M}$ – широта конца дуги осевого меридиана, отложенной от экватора, длина которой равна абсциссе x точки на плоскости.

Геометрическая интерпретация главных членов формул (35) и (36) дана на рис. 30а и 30б. Точке a на плоскости с координатами x_a и y_a

(рис. 30а) соответствует точка A на эллипсоиде с координатами B_A и l_A (рис. 30б).

Абсцисса x_a точки a , будучи отложена от экватора вдоль осевого меридиана, не исказится, а дуга длиной x_a в угловой мере будет равна B_0 . Из рис. 30б следует, что $B_A = B_0 - \delta_B$, где δ_B – малая дуга, величина которой определяется суммой второго и последующих членов формулы (35). Величина δ_B играет роль поправки к главному члену B_0 и увеличивается по мере удаления от оси x (с возрастанием y).

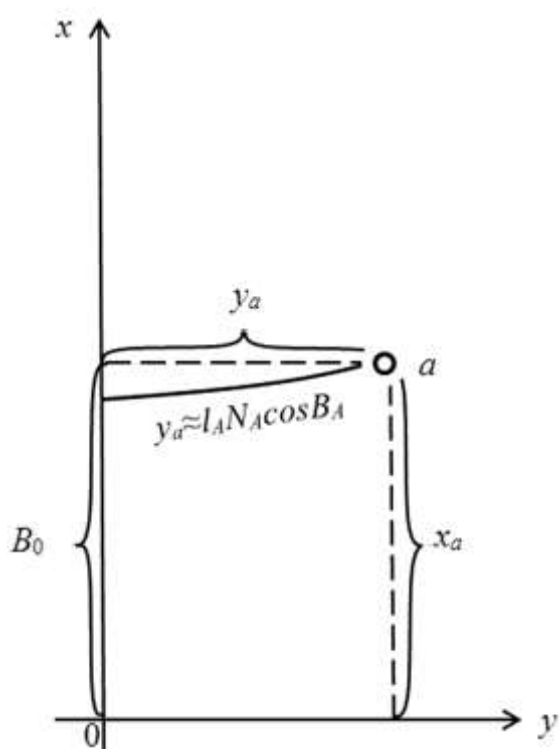


Рис. 30а. Координаты a на плоскости

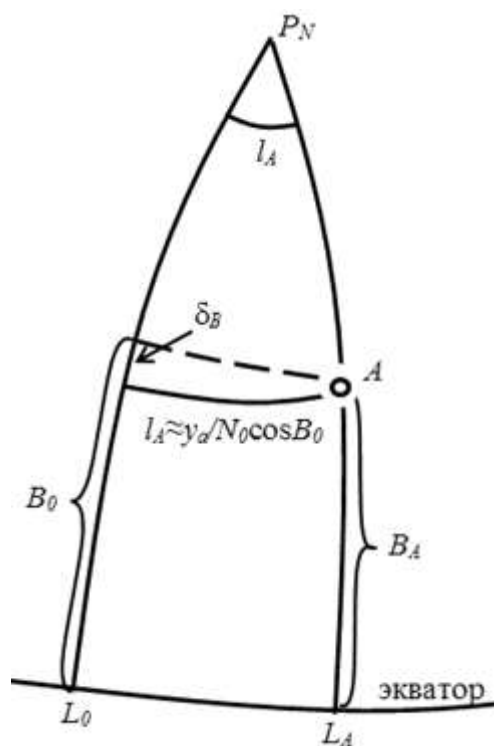


Рис. 30б. Координаты A на эллипсоиде

Главный член формулы (36) равен разности долгот, которая соответствует дуге параллели длиной y_a на широте B_0 . Последующие члены этой формулы учитывают отличие длин ординаты y_a и кривой, изображающей параллель на плоскости, а также искажение масштаба этого изображения.

Приведенные здесь формулы (33)–(36) содержат ограниченное число членов, достаточное для общего представления о характере преобразований или для приближенных вычислений. В практике топографо-геодезического производства возникает необходимость вычисления прямоугольных координат x , y с точностью до 0,005 м. Это соответствует точности геодезических координат B , l порядка 0,000 2".

Для достижения такой точности при вычислении главных членов X формулы (33) и B_0 формулы (35) используют разложения соответствующих интегралов в ряды, содержащие до четырех членов и обеспечивающие определение этих интегралов при длине дуги меридиана в несколько тысяч километров.

При этом, кроме главных членов формул (33)–(36), удерживают несколько поправочных. В формуле (33) удерживают члены, содержащие l_2 , l_4 и l_6 , а в формуле (34) – члены, содержащие l_3 и l_5 . Для обратного преобразования в формуле (35) удерживают члены, содержащие y_2 , y_4 и y_6 , а в формуле (36) – члены, содержащие y_3 и y_5 .

5.2.5. Вычисление сближения меридианов

В топографо-геодезической практике возникает необходимость вычисления сближения меридианов как по заданным геодезическим координатам, так и по плоским прямоугольным координатам.

Формула для вычисления сближения меридианов, как функции геодезических координат, имеет вид

$$\gamma = l \sin B + \dots \quad (37)$$

Формулу для вычисления сближения меридианов в функции прямоугольных координат можно получить, если в формулу (37) вместо l подставить правую часть формулы (36)

$$\gamma = \frac{y}{N_0} \operatorname{tg} B_0 \rho, \quad (38)$$

где B_0 определяется через интеграл, зависящий от x , смысл которого дан в пояснении к формуле (36).

Для вычисления сближения меридианов с точностью $0,01''$ достаточно в формуле (37) учитывать два члена, включая член, содержащий l_3 , а в формуле (38) – член, содержащий y_3 .

5.2.6. Вычисление масштаба изображения и поправок в длины линий за масштаб изображения

Если в качестве исходных используются геодезические координаты, масштаб изображения в точке с координатами B и L вычисляют по формуле

$$m = 1 + \frac{l^2}{2\rho^2} \cos^2 B (1 + e'^2 \cos^2 B) + \dots, \quad (39)$$

где e'^2 – квадрат второго эксцентриситета земного эллипсоида (5).

Для вывода формулы масштаба изображения в функции прямоугольных координат подставим в формулу (39) вместо величины l ее выражение согласно формуле (36). Учитывая при этом, что $1 + e'^2 \cos^2 B = \frac{N^2}{R^2}$, где R – средний радиус кривизны поверхности эллипсоида, получим

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \dots \quad (40)$$

Вторые члены формул (39) и (40) отражают характер изменения масштаба изображения по мере удаления от осевого меридиана. С увеличением l или y масштаб увеличивается пропорционально квадрату расстояния от осевого меридиана. Непостоянство масштаба изображения приводит к тому, что геодезические линии в результате проектирования их на плоскость изменяют свою длину, что приходится учитывать в процессе обработки геодезических сетей.

Для вывода формулы, учитывающей эти изменения, обратимся к определению масштаба изображения, согласно которому справедливо следующее равенство $dD = m dS$, где dD и dS – дифференциалы длин линий

на плоскости и на эллипсоиде соответственно. Решая это дифференциальное уравнение, для линии конечной длины D на плоскости получим общий вид решения

$$D = \int_0^S m dS, \quad (41)$$

где m – значение масштаба изображения в текущих точках линии.

Подставив в интеграл (41) выражение для масштаба, определяемое формулой (40), получим равенство

$$D = \int_0^S \left(1 + \frac{y^2}{R^2} + \dots \right) dS = S + \int_0^S \left(\frac{y^2}{2R^2} + \dots \right) dS = S + \Delta S, \quad (42)$$

в котором последний член ΔS по смыслу является поправкой в длину S линии на эллипсоиде. Для сравнительно небольших линий (порядка 10–15 км) допустимо принять масштаб искажения постоянным, равным масштабу в середине линии, что соответствует средней ординате y_m и радиусу R_m

для средней широты B_m . Тогда, вынося постоянную дробь $\frac{y_m^2}{2R_m^2}$ за знак

интеграла, получим следующую формулу для вычисления поправки в длину линии за масштаб изображения

$$\Delta S = \frac{y_m^2}{2R_m^2} S + \dots \quad (43)$$

Для линий большей длины используют более подробную формулу, содержащую кроме главного члена, входящего в формулу (43) еще один поправочный член.

Для удобства вычислений по формуле (43) имеются таблицы величин $f' = \frac{1}{2R_m^2}$, в которых аргументом служит средняя широта B_m или средняя абсцисса x_m линии. Величина f' имеет размерность $1/\text{км}^2$. Поэтому для

вычисления ΔS в метрах необходимо выражать среднюю ординату y_m в километрах, а S – в метрах.

5.2.7. Вычисление поправок в направления за кривизну изображения геодезических линий

При проектировании геодезических сетей на плоскость проекции Гаусса – Крюгера кривые, изображающие геодезические линии, заменяют хордами, стягивающими концы изображения этих линий. Так как направления кривых и хорд не совпадают, в исходные направления вводят поправки за кривизну изображения геодезических линий. Для линий, не превышающих 10–15 км, формула для вычисления этих поправок имеет вид

$$\delta_{ik} = \frac{\rho}{6R_m^2} (x_i - x_k)(2y_i + y_k), \quad (44)$$

где δ_{ik} – поправка в направление с пункта i на пункт k ; R_m – средний радиус кривизны эллипсоида для средней широты линии; x_i, y_i, x_k, y_k – прямоугольные координаты пунктов i и k соответственно.

Для удобства вычислений по формуле (44) имеются таблицы величин $f = \frac{1}{2R_m^2}$, в которых аргументом служит средняя широта B_m или средняя абсцисса x_m линии. Величины f имеет размерность с/км². Поэтому для вычисления поправок δ_{ik} в секундах необходимо выражать координаты x_i, x_k, y_i, y_k в километрах.

5.3. Последовательность редуцирования геодезической сети на плоскость проекции Гаусса – Крюгера

Основной целью редуцирования сети с поверхности эллипсоида на плоскость является упрощение процесса ее последующей математической обработки, включая и вычисление поправок, обеспечивающих проектирование измеряемых элементов сети на плоскость. Поэтому при вычислении этих поправок в качестве аргументов целесообразно использовать прямо-

угольные координаты пунктов. Однако в сети, подлежащей редуцированию на плоскость, обычно известны лишь геодезические координаты исходных пунктов. Это обстоятельство вынуждает решать задачу методом приближений в следующей последовательности:

- вычисление приближенных прямоугольных координат пунктов;
- вычисление поправок, обеспечивающих проектирование элементов сети на плоскость с использованием приближенных прямоугольных координат пунктов, найденных на первом этапе;
- вычисление элементов сети, редуцированных на плоскость.

При расстояниях между пунктами менее 15 км для вычисления поправок ΔS и δ_{ik} по формулам (43) и (44) достаточно знать прямоугольные координаты пунктов с точностью до сотен метров. Для достижения такой точности допустимо, пренебрегая кривизной поверхности эллипсоида, считать элементы сети заданными на плоскости и использовать для вычисления приближенных прямоугольных координат формулы плоской тригонометрии.

В качестве примера рассмотрим последовательность редуцирования треугольника триангуляции, изображенного на рис. 28а.

В первую очередь по известным геодезическим координатам B_A, L_A исходного пункта A вычислим его плоские прямоугольные координаты x_a, y_a по формулам (33), (34), сближение меридианов γ_a – по формуле (38) и масштаб изображения m_a – по формуле (39).

Далее, используя первые два члена формулы (32), вычислим приближенный дирекционный угол исходной стороны ab

$$\alpha_{ab} \approx A_{AB} - \gamma_a$$

и ее приближенную длину на плоскости

$$D_{ab} \approx S_{AB} m_a,$$

принимая масштаб изображения вдоль линии ab неизменным, равным масштабу m_a в точке a .

Для определения приближенных длин двух других сторон треугольника abc на плоскости выполним решение этого треугольника как плоского. При этом необходимо учесть, что сумма углов сферического треугольника больше 180° на величину $\varepsilon + w$, где ε – сферический избыток, а w – невязка. Поэтому перед решением треугольника как плоского необходимо предварительно уменьшить исходные сферические углы на величину $(\varepsilon + w) / 3$, определив приближенные плоские углы $\beta_{пл} \approx \beta_{сф} - (\varepsilon + w) / 3$.

После этого приближенные длины сторон ac и bc определим из решения треугольника, используя теорему синусов:

$$D_{ac} \approx \frac{D_{ab} \sin \beta_b}{\sin \beta_c}; \quad D_{bc} \approx \frac{D_{ab} \sin \beta_a}{\sin \beta_c}.$$

Приближенные дирекционные углы сторон ac и bc найдем, используя углы β_a и β_b как углы поворота:

$$\alpha_{ac} \approx \alpha_{ab} + \beta_a; \quad \alpha_{bc} \approx \alpha_{ba} - \beta_b = \alpha_{ba} \pm 180^\circ - \beta_b.$$

Используя полученные данные, вычислим приближенные прямоугольные координаты пунктов b и c путем решения прямых геодезических задач на плоскости по известным формулам:

$$x_b \approx x_a + \Delta x_{ab} \approx x_a + D_{ab} \cos \alpha_{ab};$$

$$y_b \approx y_a + \Delta y_{ab} \approx y_a + D_{ab} \sin \alpha_{ab};$$

$$x_c \approx x_a + \Delta x_{ac} \approx x_a + D_{ac} \cos \alpha_{ac};$$

$$y_c \approx y_a + \Delta y_{ac} \approx y_a + D_{ac} \sin \alpha_{ac}.$$

Для контроля вычисляются приближенные координаты пункта c вторично, решая прямую задачу по стороне bc :

$$x_c \approx x_b + \Delta x_{bc} \approx x_b + D_{bc} \cos \alpha_{bc};$$

$$y_c \approx y_b + \Delta y_{bc} \approx y_b + D_{bc} \sin \alpha_{bc}.$$

Полученные на первом этапе приближенные координаты используются для вычисления поправок, обеспечивающих редуцирование сети на плоскость.

По формуле (44) вычислим шесть поправок в направления за кривизну изображения геодезических линий: δ_{ab} , δ_{ba} , δ_{ac} , δ_{ca} , δ_{bc} , δ_{cb} . Вычисление поправок в направления, образующие замкнутую фигуру, можно контролировать. Контроль основан на том, что введение поправок за кривизну изображения геодезических линий обеспечивает преобразование криволинейной фигуры, образованной изображениями геодезических линий на плоскости, в фигуру, составленную прямыми (хордами, стягивающими концы изображений геодезических линий). При этом сумма углов криволинейной фигуры, которая в силу равноугольности проекции равна сумме сферических углов на поверхности эллипсоида, уменьшается на величину сферического избытка ε . Следовательно, сумма поправок в углы замкнутой фигуры должна равняться сферическому избытку этой фигуры с обратным знаком.

Поправки в углы можно вычислить как разности поправок в направления, образующие этот угол. В частности, для треугольника abc на рис. 28б поправки в углы δ_a , δ_b , δ_c определяются как разности:

$$\delta_a = \delta_{ac} - \delta_{ab};$$

$$\delta_b = \delta_{ba} - \delta_{bc};$$

$$\delta_c = \delta_{cb} - \delta_{ca}.$$

Необходимый для контроля сферический избыток треугольника ABC определяется по формуле

$$\varepsilon = f \frac{S_{AB}^2 \sin \beta_A \sin \beta_B}{\sin \beta_C}.$$

Здесь, как и для формулы (44), могут быть использованы таблицы величин f , имеющие размерность с/км^2 . Поэтому для вычисления ε в секундах длину стороны S_{AB} следует выражать в километрах.

Контрольные вычисления завершаются проверкой равенства $\Sigma\delta = \delta_a + \delta_b + \delta_c = -\varepsilon$.

Далее вычисляется поправка ΔS_{ab} в длину стороны AB за масштаб изображения по формуле (43).

На заключительном этапе определим: длину стороны ab на плоскости $D_{ab} = S_{AB} + \Delta S_{ab}$, ее дирекционный угол по формуле (32) и редуцированные на плоскость направления, введя в их исходные значения соответствующие поправки δ_{ik} за кривизну изображения геодезических линий.

При длине сторон сети более 15 км (например, при обработке сетей I класса, в которых длины сторон составляют 25–30 км) для достижения необходимой точности редуцирования описанную последовательность приходится выполнять дважды. В этом случае окончательные значения поправок вычисляют по более сложным формулам с использованием прямоугольных координат, полученных во втором приближении.

5.4. Связь между системами координат различных зон проекции Гаусса – Крюгера

Когда территория, на которой ведутся топографо-геодезические работы, располагается на границе зон, пункты, находящиеся в смежных зонах, имеют координаты, заданные относительно разных систем прямоугольных координат.

Для того, чтобы обеспечить единую систему координат для таких территорий, в практике построения государственных опорных геодезических сетей и составления топографических карт используются зоны перекрытия шириной 30' по долготе, расположенные вдоль границ шестиградусных зон. Для пунктов, расположенных в зонах перекрытия, в каталогах координат наряду с координатами, определенными в системе координат зоны, в которой они расположены, даются их координаты в системе координат смежной зоны. На рамках трапеций топографических карт, попадающих в зоны перекрытия, кроме координатной сетки основной зоны, наносятся выходы координатной сетки соседней зоны. В процессе составления каталогов пунктов и топографических карт, расположенных в зонах

перекрытия, возникает задача преобразования координат, заданных в системе координат одной зоны, в систему координат соседней зоны.

Аналогичная задача возникает, если необходимо перейти от системы координат шестиградусной зоны в систему трехградусной или в систему с частным началом координат. Возможны и другие варианты преобразования.

В общем случае задачу преобразования координат, заданных в системе координат одной зоны, в систему координат другой зоны принято кратко называть перевычислением координат из зоны в зону. Она формулируется следующим образом:

- известны координаты x_I, y_I некоторого пункта в системе координат I зоны и долгота L_{0I} осевого меридиана, определяющего начало координат этой зоны;

- известна также долгота L_{0II} осевого меридиана II зоны, в систему которой намечается перейти;

- требуется определить координаты x_{II}, y_{II} пункта в системе координат II зоны.

Для преобразования координат из одной стандартной зоны в другую стандартную зону существуют специальные таблицы. Однако, учитывая возможности современных компьютеров, целесообразно использовать следующий универсальный алгоритм преобразования:

- по заданным прямоугольным координатам x_I, y_I пункта вычисляют его геодезическую широту B по формуле (35) и долготу l_I относительно осевого меридиана I зоны по формуле (36);

- вычисляют долготу от Гринвича по формуле $L = L_{0I} + l_I$;

- вычисляют долготу $l_{II} = L - L_{0II}$ относительно осевого меридиана II зоны и искомые прямоугольные координаты x_{II} и y_{II} по формулам (33) и (34).

Данный алгоритм позволяет осуществлять преобразование координат как для стандартных зон, так и для зон с частным началом координат.

6. ГОСУДАРСТВЕННЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СЕТИ

6.1. Общие сведения о государственных геодезических сетях

Государственные геодезические сети (ГГС) – система закрепленных на местности пунктов, положение которых определено в единой системе координат и высот.

Все геодезические сети можно разделить по следующим признакам.

По территориальному признаку:

- 1) глобальная;
- 2) национальные (ГГС);
- 3) сети специального назначения (ГССН);
- 4) съемочные сети.

По геометрической сущности:

- 1) плановые;
- 2) высотные;
- 3) пространственные.

Глобальные сети создаются на всю поверхность Земли спутниковыми методами и являются пространственными с началом координат в центре масс Земли (ПЗ-90).

Национальные сети делятся на ГГС с определением координат в СК-95 в проекции Гаусса – Крюгера на плоскости и на государственные нивелирные сети (ГНС) с определением нормальных высот в Балтийской системе, т. е. от нуля Кронштадтского футштока.

ГССН создаются в тех случаях, когда дальнейшее сгущение пунктов ГГС экономически нецелесообразно или когда требуется особо высокая точность геодезической сети. В зависимости от назначения эти сети могут быть плановыми, высотными, планово-высотными и даже пространственными и создаваться в любой системе координат.

Съемочные сети являются обоснованием для выполнения топоъемок и создаются обычно как планово-высотные сети.

ГГС включает в себя геодезические построения различных классов точности: фундаментальную астрономо-геодезическую сеть (ФАГС), высокоточную геодезическую сеть (ВГС) и спутниковую геодезическую сеть 1-го класса (СГС-1).

Расположение (плотность) пунктов ГГС на местности отражено в табл. 1.

Таблица 1

Плотность пунктов ГГС

Масштаб	Один пункт на	Среднее расстояние
1 : 25 000	50–60 км ²	7–8 км
1 : 10 000	50–60 км ²	7–8 км
1 : 5 000	20–30 км ²	5–6 км
1 : 2 000	5–15 км ²	2–4 км

6.2. Современное состояние обеспечения РФ государственной системой координат ГСК-2011

Основой системы координат ГСК-2011 является государственная спутниковая геодезическая сеть трехуровневой структуры, включающая фундаментальную астрономо-геодезическую сеть (ФАГС); высокоточную геодезическую сеть (ВГС); спутниковую геодезическую сеть 1-го класса (СГС-1). В государственную геодезическую сеть также включены созданные в советский период сети триангуляции, полигонометрии и трилатерации 1–4-го классов ($\approx 283\,000$ пунктов). Их уравнивание выполнено с опорой на пункты ФАГС, ВГС и СГС-1. Тем самым обеспечивается возможность использования в системе координат ГСК-2011 огромного количества геодезических и картографических материалов, созданных ранее на основе традиционных методов и технологий.

Верхний уровень иерархии государственной спутниковой сети представляет фундаментальная астрономо-геодезическая сеть. Она служит исходной геодезической основой для построения заполняющих спутниковых сетей и практически реализует геоцентрическую систему координат для решения задач координатно-временного обеспечения.

Пространственное положение пунктов ФАГС определяется методами космической геодезии в общеземной системе координат относительно центра масс Земли с ошибкой не более 10–15 см, а ошибка взаимного положения любых пунктов ФАГС не превышает 1–2 см по плановому положению и 2–3 см по высоте с учетом скоростей их изменений во времени [5].

Количество и расположение постоянно действующих пунктов, а также состав аппаратуры и программы наблюдений определяются научно-технической программой построения и функционирования ФАГС с учетом проектов международного сотрудничества. Все пункты ФАГС фундаментально закреплены с обеспечением долговременной стабильности их положения как в плане, так и по высоте.

На эпоху установления системы координат ГСК-2011 (1 января 2011 г.) координаты пунктов ФАГС определялись по результатам общего уравнивания сети с опорой на пункты Международной геодинимической службы IGS, находящиеся как на территории Российской Федерации, так и на территории сопредельных стран. Зарубежные пункты IGS были использованы с целью придания сети ФАГС большей жесткости и достоверности координатных определений, поскольку количество и географическое распределение пунктов IGS на территории России далеко не оптимально. При подборе зарубежных пунктов учитывалось не только их географическое положение, но и регулярность и точность наблюдений.

Состав пунктов, включенных в уравнивание ФАГС:

- общее число пунктов – 46 (российских – 38, зарубежных – 8);
- число опорных пунктов – 21 (российских – 13, зарубежных – 8).

Исходные данные для уравнивания включали в себя:

- файлы суточных спутниковых наблюдений на пунктах ФАГС на интервале 2 лет (2010–2011 гг.);
- файлы координат спутников;
- файлы моделированных ионосферных задержек;
- файл сведений о сбоях в работе аппаратуры спутников GPS/ГЛОНАСС;
- параметры вращения Земли.

Средние квадратические погрешности уравнированных координат пунктов ФАГС составили 0,1–1,0 см в плане (пункт ФАГС «Владивосток» – 1,9 см) и 0,2–1,5 см по высоте (пункт ФАГС «Владивосток» – 2,14 см).

По состоянию на 1 января 2015 г. ФАГС состоит из 54 пунктов, из которых 45 – постоянно действующие и 9 – периодически определяемые. В состав пунктов ФАГС входят 13 пунктов РАН, 5 пунктов Росстандарта и 36 пунктов Росреестра, 3 пункта совмещены с пунктами РСБД, 8 пунктов совмещены с пунктами СДКМ.

В перспективе в рамках реализации мероприятий ФЦП «Развитие единой государственной системы регистрации прав и кадастрового учета недвижимости (2014–2019 годы)» количество пунктов ФАГС планируется довести к 2020 г. до 80 (рис. 31), что будет способствовать более широкому внедрению метода PPP (Precise Point Positioning). Кратко основу точности этого метода можно описать фразой: «Скажи мне точное положение навигационных спутников, и я скажу тебе точное положение твоего мобильного приемника». Для RTK (Real Time Kinematic) соответственно это будет звучать так: «Скажи мне точное положение твоей базовой станции, и я скажу тебе точное положение твоего мобильного приемника».



Рис. 31. Расположение пунктов ФАГС к 2020 г.

Вторым уровнем иерархии является высокоточная геодезическая сеть. Она опирается на пункты ФАГС, состоит из системы пунктов на расстоянии 150–300 км. Средняя квадратическая погрешность взаимного положения пунктов ВГС – 1–2 см.

Каждый пункт ВГС связан измерениями со смежными пунктами ВГС и не менее чем с тремя ближайшими пунктами ФАГС. По состоянию на 1 января 2015 г. сеть ВГС насчитывает 326 пунктов (рис. 32).

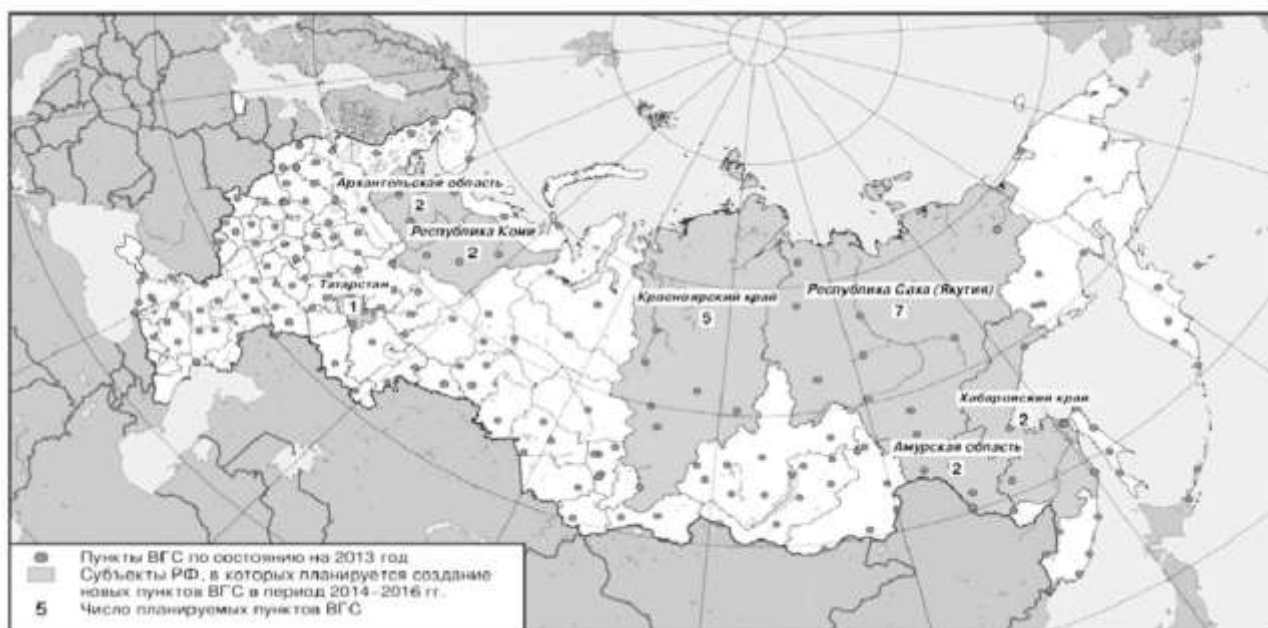


Рис. 32. Сеть пунктов ВГС с перспективой развития до 2016 г.

Следующим (третьим) уровнем иерархии является спутниковая геодезическая сеть 1-го класса. Она представляет собой пространственные геодезические построения, опирающиеся на пункты ФАГС и ВГС с плотностью, достаточной для эффективного использования всех возможностей спутниковых определений потребителями. Среднее расстояние между пунктами СГС-1 составляет 25–35 км с уменьшением расстояния для населенных территорий и с увеличением расстояния в необжитых районах.

Средние квадратические погрешности определения положения пунктов СГС-1 относительно ближайших пунктов ВГС и ФАГС не превышают 2–3 см.

По состоянию на 1 января 2015 г. сеть СГС-1 насчитывает 4 244 пункта.

После обработки измерительной информации с пунктов ФАГС, ВГС и СГС-1 в 2014 г. точностные характеристики системы координат ГСК-2011 составили:

- погрешность взаимного положения пунктов ФАГС – 2 см;
- погрешность геоцентричности системы координат ГСК-2011 – 10 см;
- погрешность распространения системы координат ГСК-2011 на территории Российской Федерации, реализуемая системой ГЛОНАСС, – 10 см;
- погрешность цифровой модели высот квазигеоида – 20 см.

В перспективе в рамках реализации мероприятий ФЦП «Поддержка, развитие и использование системы ГЛОНАСС на 2012–2020 годы» и ФЦП «Развитие единой государственной системы регистрации прав и кадастрового учета недвижимости (2014–2019 годы)» предусмотрено достижение следующих количественных показателей пунктов государственной спутниковой сети к 2020 г.:

- 80 пунктов ФАГС;
- 350 пунктов ВГС;
- 6 000 пунктов СГС-1.

Это позволит достичь к 2020 г. следующих точностных характеристик системы координат ГСК-2011:

- погрешность взаимного положения пунктов ФАГС – 0,5 см;
- погрешность геоцентричности системы координат ГСК-2011 – 1 см;
- погрешность распространения системы координат ГСК-2011 на территории Российской Федерации, реализуемая системой ГЛОНАСС, – 2 см;
- погрешность цифровой модели высот квазигеоида – 5 см.

Связь системы координат ГСК-2011 через элементы трансформирования с системами координат, в которых ведутся работы на территории Российской Федерации в настоящее время, показана в прил. 4.

Определение параметров связи системы координат ГСК-2011 с другими системами координат выполнялось путем сравнения координат пунктов государственной геодезической сети, известных в других системах координат и полученных по результатам спутниковых определений координат этих же пунктов в геоцентрической системе координат ГСК-2011. Вычисление геодезических высот пунктов в других системах

координат выполнялось по известным нормальным высотам с использованием высот квазигеоида, полученных по моделям EGM-96 и ГАО-2012.

Определялись параметры связи для параметрического преобразования, выражаемого формулами (11), (12).

В 2015 г. «Российские космические системы» (РКС), входящие в Объединенную ракетно-космическую корпорацию (ОРКК), приступили к созданию Национальной спутниковой сети высокоточного позиционирования (НСВП). Основная цель проекта – формирование навигационного поля высокой точности на территории России. НСВП сможет объединить более 600 спутниковых референцных станций ГЛОНАСС, на базе которых построены отдельные региональные сети высокоточного позиционирования и сети крупных государственных и коммерческих собственников.

Предполагается, что реализация проекта обеспечит дециметровую и сантиметровую точность определения координат объектов в режиме реального времени. НСВП обеспечит пользователей набором гарантированных сервисов позиционирования, доступных 24 часа в сутки и семь дней в неделю. Полученные измерения можно будет пересчитывать в разные системы координат. Предоставляемые НСВП уникальные возможности могут применяться для решения сложных технологических задач в строительстве, управлении всеми видами транспорта, содержании объектов инфраструктуры, земельного комплекса и других областях.

Увеличение зоны навигационного покрытия будет достигаться путем строительства новых и оптимизации существующих сетей, соответственно, возможности конечных потребителей в границах создаваемой сети будут значительно расширены, а определение координат объектов в режиме реального времени достигнет дециметровой и сантиметровой точности.

В использовании потенциала НСВП уже заинтересованы многие российские регионы: Новосибирская, Красноярская, Ярославская, Вологодская, Курская, Омская, Тюменская области, Ямало-Ненецкий автономный округ и Татарстан. Подтверждена готовность координации и консолидации ресурсов для совместной реализации сегмента НСВП в Сибирском федеральном округе под эгидой полномочного представителя Президента РФ.

6.3. Астрономо-геодезическая сеть

6.3.1. Принцип построения и точностные характеристики астрономо-геодезической сети, методы создания

Астрономо-геодезическая сеть (АГС) высшего уровня (АГС-1) построена в виде полигонов периметром ≈ 800 км, образованных звеньями триангуляции или в редких случаях полигонометрии, длиной < 200 км, расположенных вдоль меридианов и параллелей. Число пунктов примерно 164 тысячи.

Главный принцип построения опорных плановых и высотных сетей «от общего к частному» отражает развитие планово-высотной системы как системы от каркасного построения плановой и высотной сети (рис. 33) до детального обоснования (например, теодолитные ходы) для целей топоъемки, инженерных работ и т. д. – развитие с изменением структуры и состава.

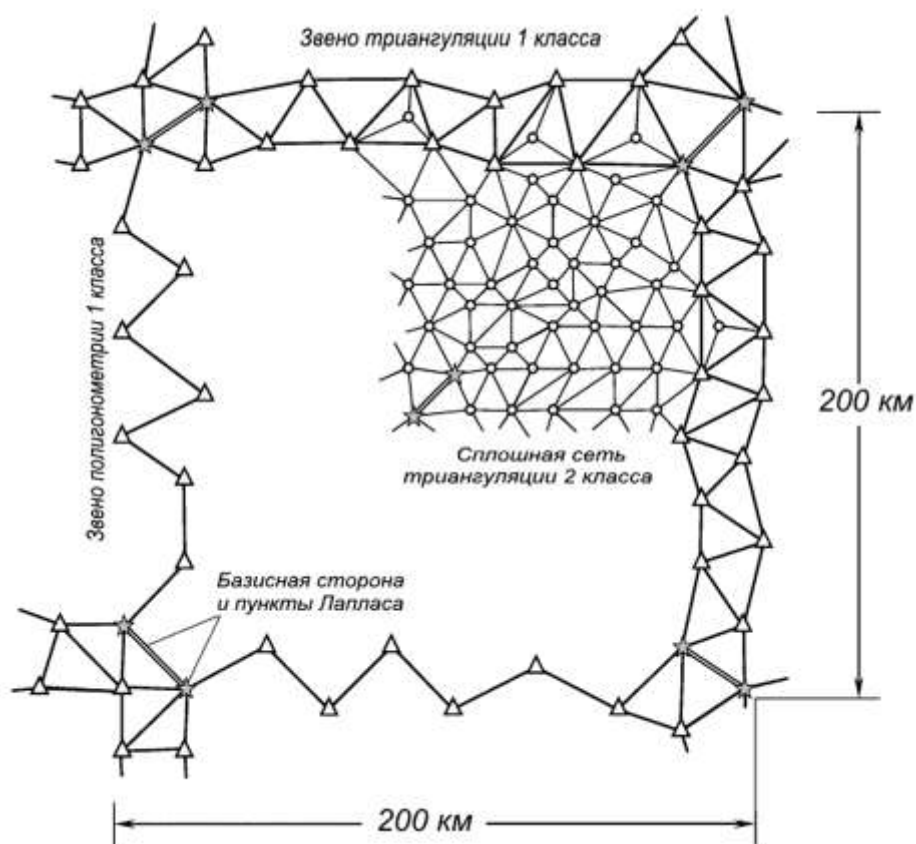


Рис. 33. Пример структуры плановой сети 1-го и 2-го классов

Звено триангуляции состоит из ряда смежных треугольников, близких к равносторонним, с углами $> 40^\circ$ и сторонами > 20 км. Для малонаселенных и труднодоступных районов как, например Чукотка и Камчатка, длины сторон сети триангуляции доходили до 50–70 км.

Также определялись базисные стороны – стороны между углами полигонов, длиной 170–200 км, измеряемые для масштабирования сети, и астропункты Лапласа – пункты на концах базисных сторон, на которых были измерены астрономические широты, долготы для координирования и азимуты для ориентирования.

Звенья полигонометрии АГС-1 заменяют ряды триангуляции в случае технической необходимости и экономической целесообразности и представляют собой вытянутые ходы не более чем из 10 сторон, длиной 20–25 км.

АГС-2 построена в основном методом триангуляции в виде сплошных сетей треугольников, заполняющих полигоны АГС-1, с углами $> 30^\circ$ и средней длиной сторон от 7 до 20 км. В АГС-2 базисные стороны должны быть не реже, чем через 25 треугольников, и обязательно в центре полигона 1-го класса.

АГС-2, созданная методом полигонометрии, имеет вид ходов, опирающихся на пункты 1-го класса и образующих в пересечении сплошную сеть из 3–5 треугольников. Проектная точность измерений отражена в табл. 2.

Таблица 2

Точность измерений в АГС-1 и АГС-2

Среднеквадратические ошибки	АГС-1	АГС-2
СКО измеренного угла, m_β	$\leq 0,7''$	$\leq 1,0''$
СКО базисной стороны, $\frac{m_\beta}{b}$	$\leq \frac{1}{400\,000}$	$\leq \frac{1}{300\,000}$
СКО линейных измерений, $\frac{m_s}{s}$	$\leq \frac{1}{300\,000}$	$\leq \frac{1}{250\,000}$
СКО астрономической широты, m_φ	$\leq 0,3''$	$\leq 0,3''$
СКО астрономической долготы, m_λ	$\leq 0,043^s$	$\leq 0,043^s$
СКО астрономического азимута, m_α	$\leq 0,5''$	$\leq 0,5''$

Геодезические сети сгущения 3-го и 4-го классов включают в себя около 300 тысяч пунктов. Они служат для сгущения 2-го класса и могут создаваться, в зависимости от местных условий, методами триангуляции, полигонометрии и трилатерации. В триангуляции пункты 3-го и 4-го классов определяются путем «вставки» отдельных пунктов или систем в треугольнике 2-го класса (рис. 34). Треугольники 3-го или 4-го класса имеют углы не менее 20° и стороны 5–8 км и 2–5 км соответственно.

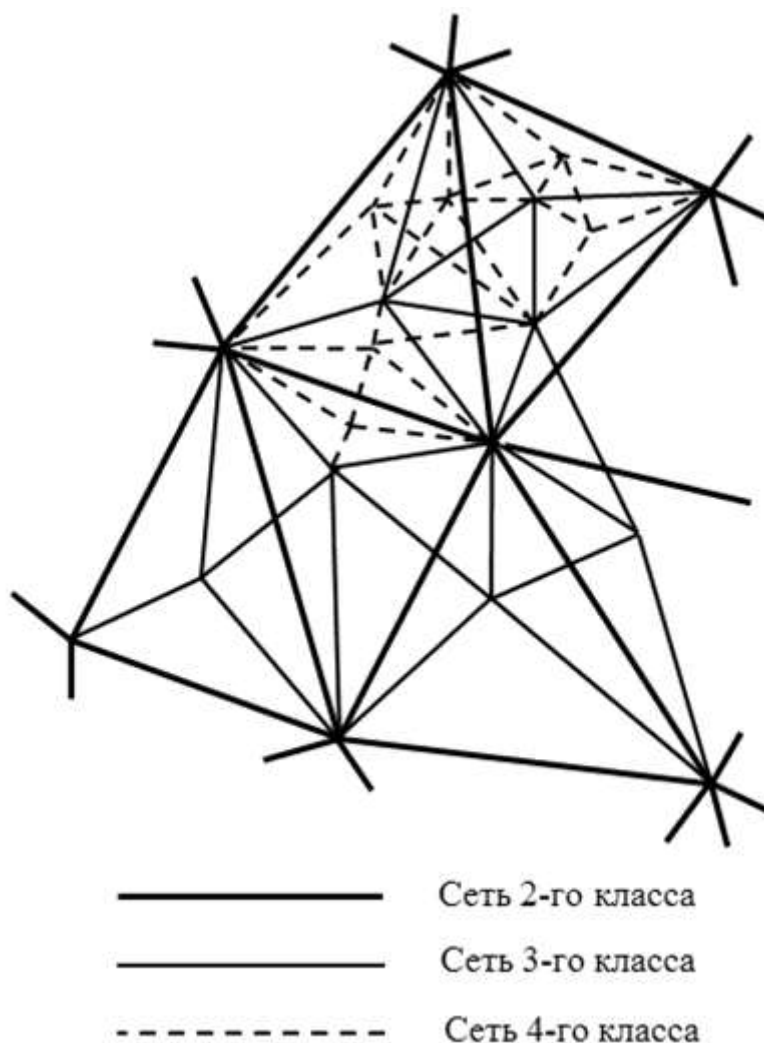


Рис. 34. Вставка пунктов 3-го и 4-го классов

Полигонометрия строится проложением ходов, опирающихся на пункты высших классов со звеньями не более чем из трех сторон, каждая из них длиной не менее 3 км в 3-м классе и не менее 2 км в 4-м классе.

Для повышения жесткости сетей сгущения пункты или системы пунктов в триангуляции, а также ходы в полигонометрии связаны между собой сторонами, если расстояние между ними менее 4 км в 3-м классе и 3 км в 4-м классе. Точность измерений представлена в табл. 3.

Таблица 3

СКО точности измерений

Среднеквадратические ошибки	3-й класс	4-й класс
СКО измеренного угла, m_β	$\leq 1,5''$	$\leq 2,0''$
СКО линейных измерений, $\frac{m_s}{s}$	$\leq \frac{1}{200\,000}$	$\leq \frac{1}{150\,000}$

На каждом пункте существующей ГГС установлены два ориентирных пункта (ОРП), пронумерованные от направления на север по часовой стрелке, на расстоянии от центра пункта не менее 500 м в открытой и 250 м в залесенной (закрытой) местности, с обеспечением видимости на них непосредственно с центра. В качестве одного из ОРП может использоваться вертикальный местный предмет, видимый до основания на расстоянии не более 3 км. Основное назначение ОРП – это азимутальная, т. е. угловая привязка полигонометрии и других построений без подъема на знак.

В условиях равнинной и слегка холмистой местности высоты пунктов определялись методом геометрического нивелирования. В сильно пересеченной местности и горных районах используется метод тригонометрического нивелирования. Этим методом определяются разности высот пунктов по длинам сторон между ними и измеренными зенитными расстояниями или углами наклона наблюдаемых целей (тригонометрическое нивелирование).

Наиболее используемым методом построения ГГС до последнего времени являлся метод триангуляции, который заключается в построении сети, состоящей из треугольников со смежными сторонами. Пункты сети располагаются в вершинах треугольников. Пример такой сети (на плоскости) показан на рис. 35. Пункты А и В являются исходными. Координаты остальных пунктов подлежат определению.

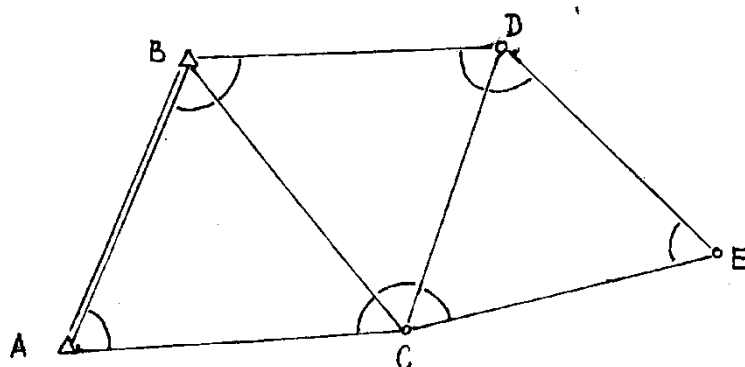


Рис. 35. Сеть триангуляции

Для этого на всех пунктах сети измеряют углы треугольников, что дает возможность, последовательно продвигаясь от исходной стороны и используя теорему синусов, определить все другие стороны сети. Зная все углы и длины сторон треугольников, можно передать координаты от исходного пункта на все остальные пункты. Например, координаты определяемых пунктов сети, изображенной на рис. 36, можно вычислить путем последовательного решения прямых задач вдоль ходовой линии, как это делается при вычислении координат точек теодолитного хода.

Одним из достоинств метода триангуляции является то, что в нем сведены к минимуму линейные измерения, которые значительно сложнее угловых. Для построения сети триангуляции теоретически достаточно иметь длину одной исходной стороны. Практически, для контроля и повышения точности в сетях триангуляции используют длины нескольких сторон. Основной объем измерений составляют угловые измерения.

Другое достоинство метода триангуляции заключается в большом числе геометрических связей, что способствует надежному контролю измерений и повышает точность передачи координат.

Однако большое число связей требует обеспечения видимости по многим направлениям, что снижает возможности использования метода триангуляции в закрытой местности.

В закрытой местности вместо триангуляции используют метод полигонометрии, который заключается в проложении теодолитных ходов высокой точности. При этом измеряют углы поворота на пунктах хода

и длины линий. Передача координат от исходных пунктов осуществляется путем решения прямых задач вдоль линий хода.

Метод полигонометрии требует выполнения как угловых, так и линейных измерений, что усложняло некоторое время назад организацию работ. Существующие сейчас высокоточные тахеометры эти сложности снимают. Число геометрических связей в сетях полигонометрии минимально. Поэтому точность передачи координат в полигонометрии меньше, чем в триангуляции. В силу перечисленных недостатков метод полигонометрии применяют там, где нет условий для применения метода триангуляции. И в случае обеспечения проектирования, строительства линейных сооружений (дорог, газо- и нефтепроводов, линий связи и др.) метод полигонометрии также в большинстве случаев предпочтителен по сравнению с триангуляцией.

Кроме описанных основных методов, в 1960-х гг. был предложен метод трилатерации. По конфигурации сети он является аналогом триангуляции. Различие заключается в том, что вместо углов треугольников измеряются длины сторон с помощью электронных дальномеров. Он имеет преимущество перед методом триангуляции только при условии полной автоматизации линейных измерений. Этот метод имеет ограниченное применение в сетях специального назначения.

6.3.2. Центры пунктов. Геодезические знаки

Закрепление пунктов опорных геодезических сетей (ОГС) на местности осуществляется с помощью центров. Центром пункта называют конструкцию, которая состоит из марки и несущего ее основания.

Маркой называют металлическую деталь, в верхней части которой отмечена точка (рис. 36). Эта точка является собственно центром пункта, от чего происходит название всей конструкции. Координаты именно этой точки являются координатами пункта. Для четкой фиксации высоты пункта, эта точка нанесена в верхней части полусферы. Касательная к полусфере горизонтальная плоскость, проходящая через точку центра, определяет высоту пункта. Нижней частью марка крепится в основании.

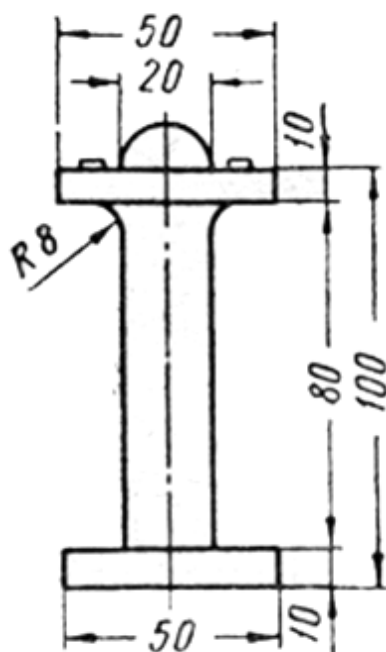


Рис. 36. Марка

Конструкция основания зависит от условий закладки центра. В ненаселенной местности центры обычно закладывают в грунт. Для разных грунтов используют различные конструкции центров пунктов (для обычных грунтов, для болот, для сыпучих песков, для районов вечной мерзлоты и др.). Учитывается также глубина сезонного промерзания грунта.

В большинстве случаев основание грунтового центра представляет собой погруженный в грунт бетонный монолит, в верхней части которого крепится марка (рис. 36). В качестве примера на рис. 37 изображена типичная конструкция грунтового центра. Центры закладывают в грунт на глубину не менее 1,5–2 м, а в отдельных районах – не менее 6 м. В населенных пунктах в качестве основания пункта обычно используют части зданий.

Особую конструкцию имеют центры, предназначенные специально для закрепления высотной геодезической сети, которые называют реперами. Они закладываются на большую глубину и в их устройстве предусмотрены меры для исключения вертикальных перемещений марки, которые могут возникать из-за сезонных изменений в грунтах.

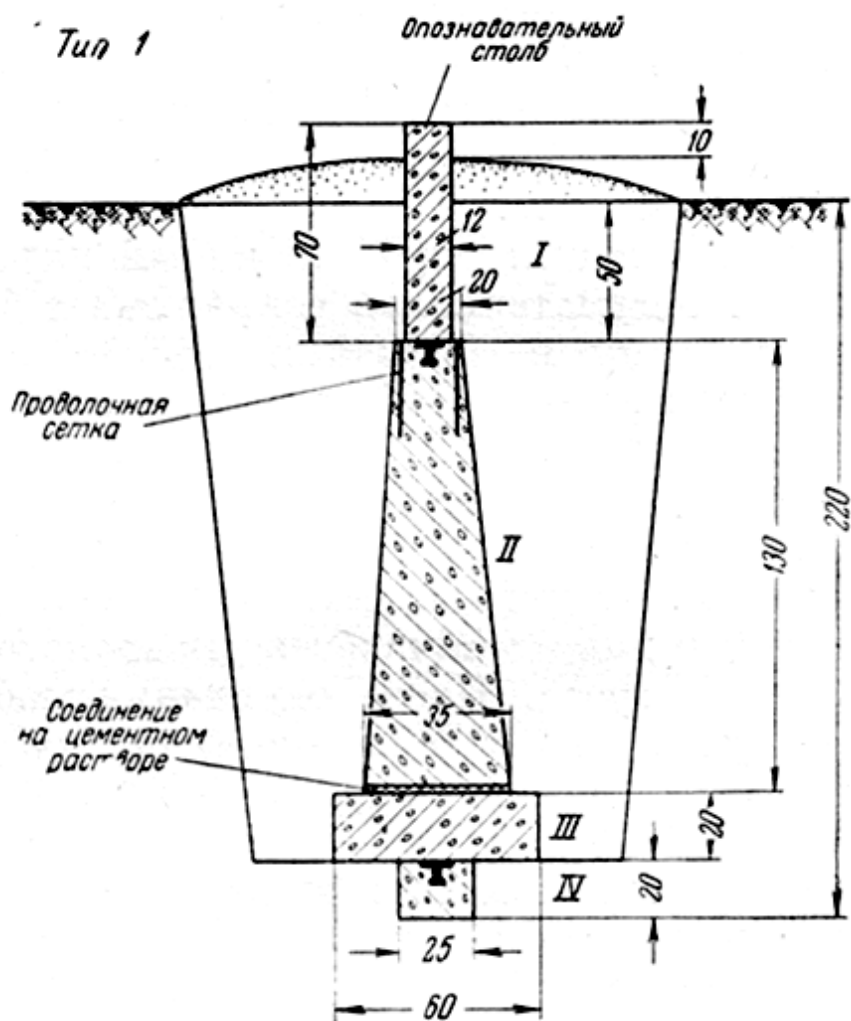


Рис. 37. Грунтовый центр

В настоящее время при использовании спутниковых методов построения геодезических сетей нет необходимости в построении наружных знаков. Они были необходимы на пунктах плановых ОГС, создаваемых методами триангуляции, трилатерации и полигонометрии, для обеспечения видимости между соседними пунктами. Наружные знаки представляют собой деревянные или металлические конструкции, несущие столик для установки инструмента (теодолита, дальномера, отражателя), и визирную цель, на которую наводят трубу теодолита при угловых измерениях с других пунктов. Высота знаков зависит от условий видимости и изменяется в пределах от 3 до 30 м. Простейшие знаки высотой до 7 м обычно строят в виде пирамид (рис. 38а, 38б).

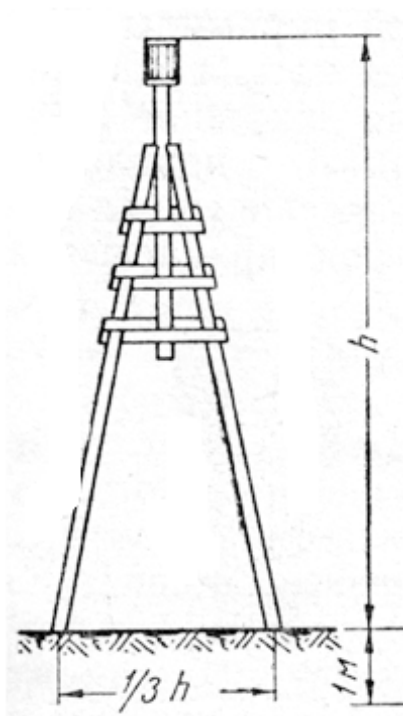


Рис. 38а. Пирамида простая

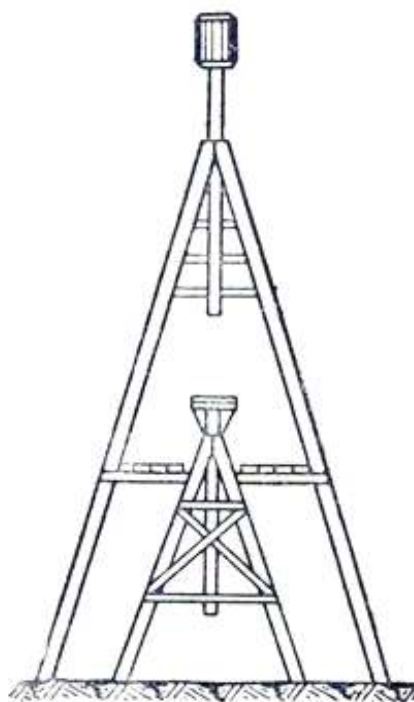


Рис. 38б. Пирамида сложная

Более высокие наружные знаки представляют собой конструкции, называемые сигналами (см. рис. 39а, 39б).

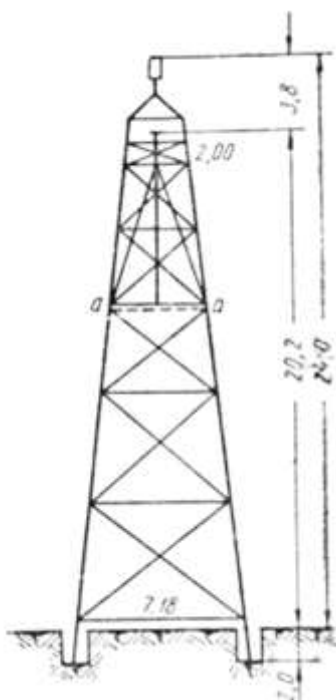


Рис. 39а. Сложный сигнал. Размеры

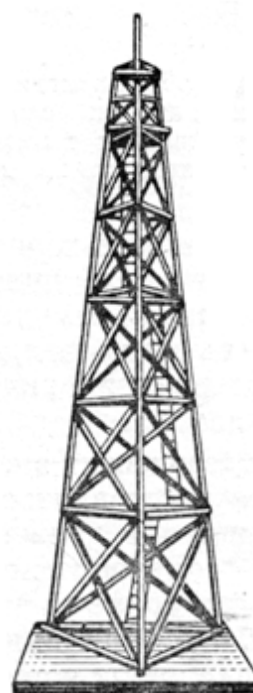


Рис. 39б. Внешний вид

Верхней частью конструкции является визирный цилиндр. Главное его назначение и особенность – быть отчетливо видимым в поле зрения геодезического прибора на расстояниях до 20 км и даже более. И также предусмотрено должно быть уменьшение влияния фазности – так как более освещенная солнцем часть цилиндра «сливается» с фоном неба на горизонте (рис. 40а). И тем самым в наблюдениях присутствуют систематические ошибки визирования. Одним из вариантов уменьшения подобного влияния является изготовление визирного цилиндра в виде сочетания нескольких (шестнадцати) радиально расположенных планок, скрепленных снизу и сверху деревянными кругами – самозатененный цилиндр Шишкина (рис. 40б).

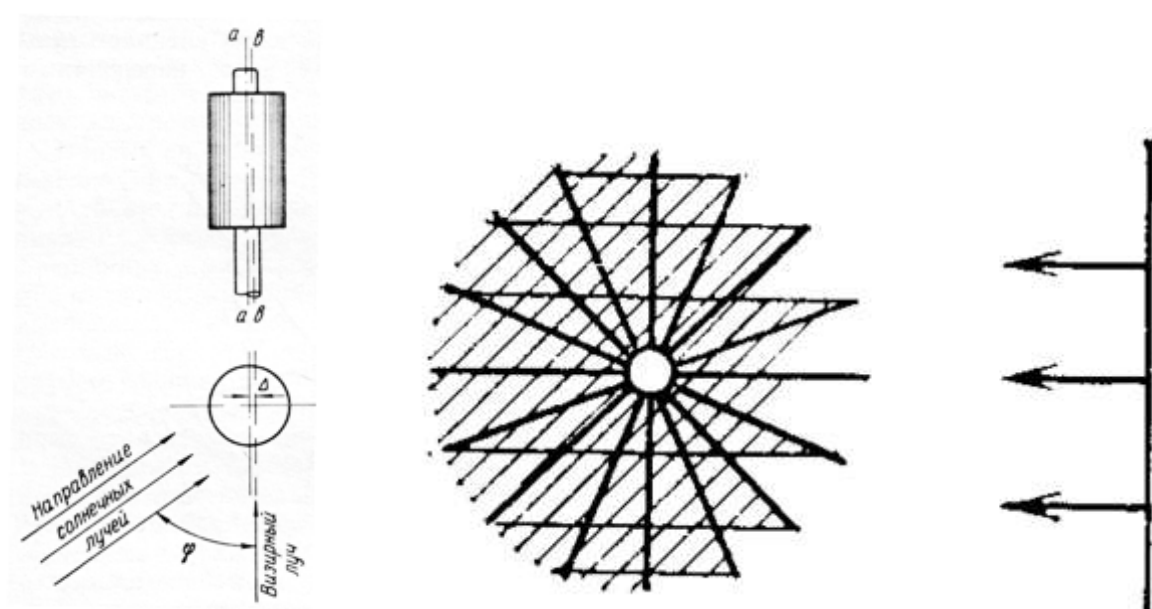


Рис. 40а. Визирный цилиндр Рис. 40б. Визирный цилиндр Шишкина

Основной целью создания ГГС СССР на протяжении многих десятилетий XX в. было создание координатной основы страны для разнообразного использования во многих отраслях экономики и надежного обеспечения некоторых функций государства. В настоящее время значительная часть наружных знаков на территории России утеряна, в основном по причине физического износа и отсутствия в них потребности для большинства геодезических работ. Однако сами геодезические центры практи-

чески полностью сохранились и используются как носители координат государственной сети. Их число в РФ составляет более сотни тысяч.

Пункты ОГС используются в качестве исходных для построения съемочного обоснования топографических съемок, а также для определения местоположения (привязки) различных инженерных объектов гражданского и военного назначения.

Различают государственные ОГС, обеспечивающие использование общегосударственной системы координат и высот, и ОГС специального назначения, которые используются в качестве основы для определения взаимного положения частей сложных инженерных сооружений или отдельных природных объектов (например, гидроузлов или геодинамических полигонов, предназначенных для выявления тектонических движений земной коры).

В настоящее время для создания и эксплуатации государственных и других геодезических сетей преимущественно используются ГНСС-технологии. Подробное изложение принципов ГНСС, особенностей использования преподается в рамках изучения многих дисциплин учебного плана. Имеется большое количество научной и учебно-методической литературы по данной тематике (в библиотеке СГУГиТ это, например [1]).

6.3.3. Высокоточные угловые измерения

Традиционные методы измерения углов, линий, зенитных расстояний и превышений не потеряли свое значение в условиях использования современных ГНСС-технологий. Эти методы востребованы для построения сетей сгущения в городах и на объектах специального назначения. Для реализации высокоточного дифференциального режима измерений спутниковыми системами необходимо иметь точные координаты нескольких пунктов, определенных обычными геодезическими методами. Также известно, что спутниковые методы не дают высокой точности определения нормальных высот определяемых пунктов и пока не могут заменить традиционное высокоточное геометрическое нивелирование.

Рассмотрим теоретическое обоснование, достоинства и недостатки способов высокоточного измерения горизонтальных направлений и углов.

Выполнение высокоточных угловых измерений, выполняемых на пунктах геодезических сетей с целью определения их планового положения, предусматривает:

- выбор способа измерений и их производство;
- обработку результатов измерений и оценка их качества;
- определение элементов центрировки в случае несовпадения проекции центра инструмента и центра пункта.

Для выполнения координатизации традиционным образом отметим два классических способа измерения горизонтальных направлений и углов. Это способ круговых приемов и способ измерения отдельных углов во всех комбинациях. Выбор того или иного способа обусловлен точностью конечных результатов измерений, числом измеряемых направлений на пунктах сети, простотой и удобством измерений и их обработки.

Отметим, что получение точных и надежных результатов измерений возможно при соблюдении следующих правил.

1. Перед началом измерений на объекте необходимо выполнить исследование теодолита, а перед началом работ на пункте – поверки теодолита.

2. Следует использовать для наведения сетки нитей на визирные цели среднюю часть наводящих винтов, работая ими только на «завинчивание».

3. Для исключения влияния люфта подъемных винтов вращение алидады в каждом полуприеме должно быть в одну сторону, при случайном пропуске направления делается дополнительный оборот в том же направлении.

4. Нельзя изменять фокусировку зрительной трубы в процессе измерений на данном пункте.

5. Следует равномерно распределять приемы измерений на утреннюю и вечернюю видимость.

6. При наблюдении визирных целей, зенитные расстояния на которые с наблюдаемого пункта отличаются более чем на $\pm 1^\circ$ для 1-го класса и $\pm 2^\circ$ для 2-го класса, необходимо дополнительно брать отсчеты по концам пузырька уровня при алидаде горизонтального круга.

7. Следует соблюдать методику измерений в соответствии с требованиями инструкции [9].

Рассмотрим теоретические основы двух известных способов, упомянутых выше.

6.3.4. Способ круговых приемов

Данный метод был предложен в 1816 г. русским геодезистом и астрономом В. Я. Струве (первым директором Пулковской обсерватории). В 1820 г. он принимал участие в геодезических работах вместе с К. Ф. Гауссом. Сущность способа круговых приемов заключается в следующем. Каждый прием измерений состоит из двух полуприемов. В первом полуприеме, после установки лимба на определяемый программой наблюдений отсчет, вращают алидаду по часовой стрелке, последовательно наводя зрительную трубу на визирные цели пунктов, и берут отсчеты по лимбу.

Начальное направление выбирается наблюдателем как наиболее хорошо видимое. Желательным является учет для выбора меридионального направления (север или юг). Именно на начальное направление делается установка лимба, первое наведение и завершение наблюдений в полуприеме (замыкание горизонта). Теоретически замыкание должно быть равно нулю. Но влияние различных по своей природе (личных, приборных и внешней среды) случайных и систематических ошибок при выполнении измерений отражается в «незамыкании». «Незамыкание» $\Delta = l' - l$ может быть как положительным (рис. 41), так и отрицательным.

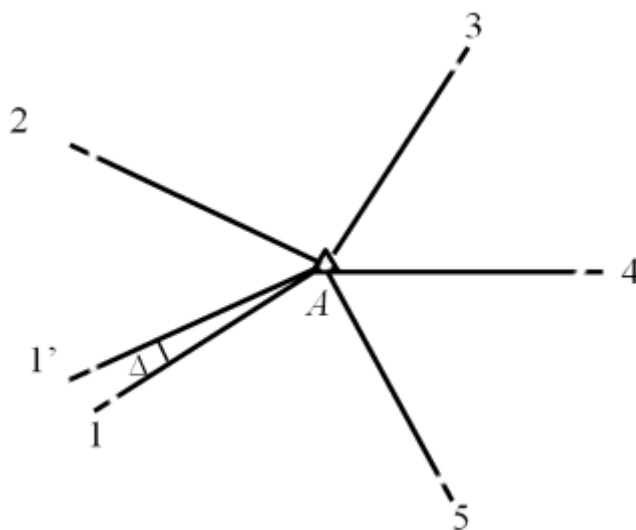


Рис. 41. Способ круговых приемов (угол Δ – «незамыкание» горизонта)

Во втором полуприеме, после перевода зрительной трубы через зенит, вращают алидаду в обратном направлении от начального и также берут отсчеты по лимбу при наведении трубы на каждый наблюдаемый пункт. В обработку берутся средние значения отсчетов по лимбу при круге лево (КЛ) и круге право (КП).

Для исключения ошибок нанесения штрихов лимба перестановку лимба между приемами, от начальной установки $0^{\circ}00'$ делают на величину σ , определяемую следующей формулой:

$$\sigma = \frac{180^{\circ}}{m} + i,$$

где m – число приемов;

i – цена деления лимба.

Определение по результатам измерений наиболее надежных значений углов, отсчитываемых от начального направления, выполняют, используя параметрический способ метода наименьших квадратов. Основным достоинством способа круговых приемов является экономичность, простота производства наблюдений и их математической обработки, а также быстрое оценивание результатов измерений на их соответствие требуемым допускам инструкции [9]. Недостатком способа является требование наличия хорошей одновременной видимости по всем направлениям.

6.3.5. Способ измерения горизонтальных углов во всех комбинациях

Соответствующим по точности способу круговых приемов при высокоточных измерениях в геодезических сетях (особенно с большим числом измеряемых направлений) является способ измерения углов во всех комбинациях (способ Шрейбера). На каждом пункте измеряются все углы, составленные парами направлений на наблюдаемые пункты. Их число определяется формулой числа сочетаний из n элементов по два

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

В общем виде измеряемые углы следующие:

1.2	1.3	1.4	...	1. <i>n</i>
	2.3.	2.4	...	2. <i>n</i>
		3.4	...	3. <i>n</i>

				<i>n</i> -1. <i>n</i>

Например, при измерений пяти направлений на пункте *A* (рис. 42), измеряемые углы таковы:

1.2	1.3	1.4	1.5
	2.3.	2.4	2.5
		3.4	3.5
			4.5

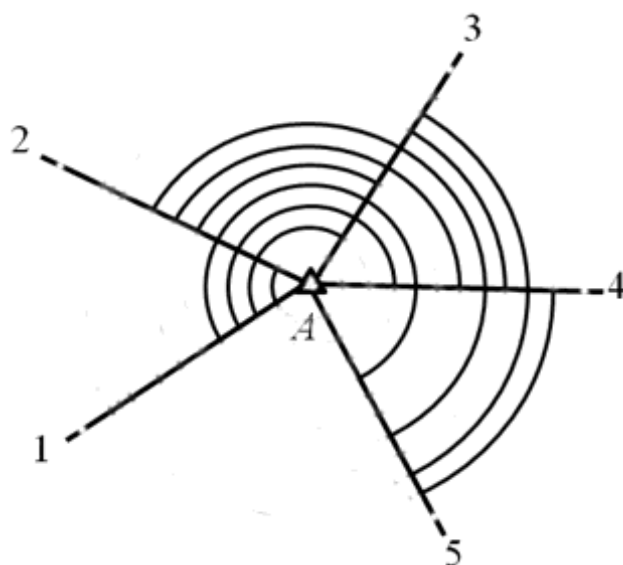


Рис. 42. Измеряемые углы для пяти направлений

При увеличении числа измеряемых направлений объем измерительных операций на пункте резко возрастает. Например, если $n = 8$, то число сочетаний из n элементов по два будет $C_8^2 = \frac{8(8-1)}{2} = 28$, если $n = 9$, то число сочетаний из n элементов по два будет $C_9^2 = \frac{9(9-1)}{2} = 36$.

Но отметим одну из положительных особенностей этого метода – измерять углы можно в любой последовательности.

Для получения равноточных измерений на пункте каждый угол измеряется одним и тем же числом приемов. В то же время при использовании в одной сети разных способов измерений углов их веса должны быть одинаковыми. Каждый прием измерений состоит из двух полуприемов. С целью исключения систематических погрешностей штрихов диаметров лимба измерения углов выполняются на разных частях лимба. В связи с этим перед началом измерений составляется рабочая программа, обеспечивающая независимость и удобство измерений отдельных углов.

Основными достоинствами этого способа являются:

- небольшая продолжительность времени измерений отдельного угла, что позволяет исключить или приуменьшить влияние внешних факторов на результаты измерений (кручение знака, ветровые и температурные воздействия, рефракция и т. п.);

- не требуется одновременной видимости по всем направлениям.

К недостаткам способа относятся:

- при заданном значении веса с увеличением числа направлений уменьшается число приемов измерения непосредственного угла, что снижает надежность его получения, в результате очень трудно выдержать допуск на его отклонение от значений данного угла, полученного из комбинаций других углов;

- является более сложной, чем в способе круговых приемов, обработка результатов измерений при составлении сводок.

При выполнении измерений в геодезических сетях наблюдателями могут быть использованы оба рассмотренных способа, но при условии равенства их весов с целью получения равноточных результатов измерений.

В программу наблюдений на пункте входит также тригонометрическое нивелирование с целью определения превышений между пунктами ОГС. Ввиду большой удаленности пунктов, возможностей теодолита и влияния вертикальной рефракции точность определения превышений составляет несколько десятков сантиметров. Иллюстрация тригонометрического нивелирования на больших расстояниях приведена в прил. 3.

6.4. Предварительная обработка измерений в ГГС

Целью построения ГГС является определение координат и высот пунктов. Исходным материалом для этого служат измерения, выполняемые на пунктах сети. На результаты измерений оказывает влияние ряд факторов, связанных с условиями их выполнения. Кроме того, они неизбежно содержат случайные ошибки. Поэтому вычислению координат и высот пунктов предшествует ряд преобразований измеренных величин, совокупность которых называют математической обработкой измерений.

В процессе математической обработки принято выделять два этапа: предварительную обработку и уравнивание.

Предварительная обработка имеет цель подготовить измерения к последующему уравниванию и состоит из проверки первичных материалов, введения в измерения поправок, исключая систематические влияния различных факторов, связанных с условиями измерений.

Предварительная обработка измерений в плановых ОГС, создаваемых с использованием традиционных технологий, заключается в первичной обработке угловых и линейных измерений и состоит из следующих основных операций:

- проверка первичных материалов;
- уравнивание результатов многократных измерений на пунктах;
- приведение измерений к центрам пунктов;
- редуцирование измерений на поверхность эллипсоида;
- редуцирование измерений на плоскость;
- вычисление и оценка допустимости невязок (свободных членов условных уравнений) и предварительная оценка точности.

Проверка первичных материалов заключается в тщательном контроле вычислений в журналах, ведомостях и других документах, содержащих результаты измерений.

Необходимость уравнивания многократных измерений связана с тем, что высокоточные измерения одних и тех же величин (углов или линий) всегда выполняются неоднократно, в несколько приемов. Например, угловые измерения на пункте выполняются определенным количеством приемов (в зависимости от класса сети). В результате в журнале измерений

имеется множество значений одних и тех же углов, отличающихся между собой за счет ошибок измерений. Анализ этих отличий позволяет оперативно отбраковать грубые измерения и выполнить неудачные приемы заново. Для последующей обработки необходимо иметь единственное значение каждого угла. С этой целью выполняется уравнивание результатов измерений на пункте. В результате каждый угол получает единственное значение, которое используется в процессе дальнейшей обработки в качестве «измеренного» значения.

Аналогичная процедура имеет место в процессе обработки линейных измерений. При этом, обычно первичный материал содержит результаты измерения линии несколькими приемами, выполненными в прямом и обратном направлениях. В данном случае уравнивание обычно сводится к нахождению среднего значения длины линии.

6.5. Определение элементов приведения. Вычисление поправок за центрировку и редукцию

Приведение измерений к центрам пунктов необходимо потому, что в процессе угловых или линейных измерений для обеспечения видимости между пунктами инструменты (тахеометры, теодолиты или дальномеры) располагаются на столиках сигналов I и не могут быть точно отцентрированы над центрами пунктов C (рис. 43а). Наблюдаемые цели (визирные цилиндры или отражатели) V по этой же причине не центрируются над центрами наблюдаемых пунктов. Внецентренность инструментов и наблюдаемых целей приводит к искажению измеряемых углов или линий. Для устранения этих искажений в процессе измерений на пунктах определяют величины, характеризующие внецентренность инструментов и наблюдаемых целей, которые называют элементами приведения e и Θ (рис. 43б).

Они используются для вычисления поправок в измеряемые углы или линии. В результате учета этих поправок углы или линии оказываются приведенными к центрам пунктов.

Аналогично может быть получена формула поправки r'' за редукцию визирной цели

$$r'' = \rho \frac{e_1 \sin(M + \Theta_1)}{S}. \quad (46)$$

Элементы приведения e , e_1 , Θ и Θ_1 чаще всего определяются графическим способом. Над центром пункта устанавливается центрировочный столик, на нем прикрепляют лист бумаги. С трех установок теодолита (малого тридцатисекундного) на этот лист переносятся следы проектирующих плоскостей, в пересечении которых находятся точки C , I и V (рис. 44).

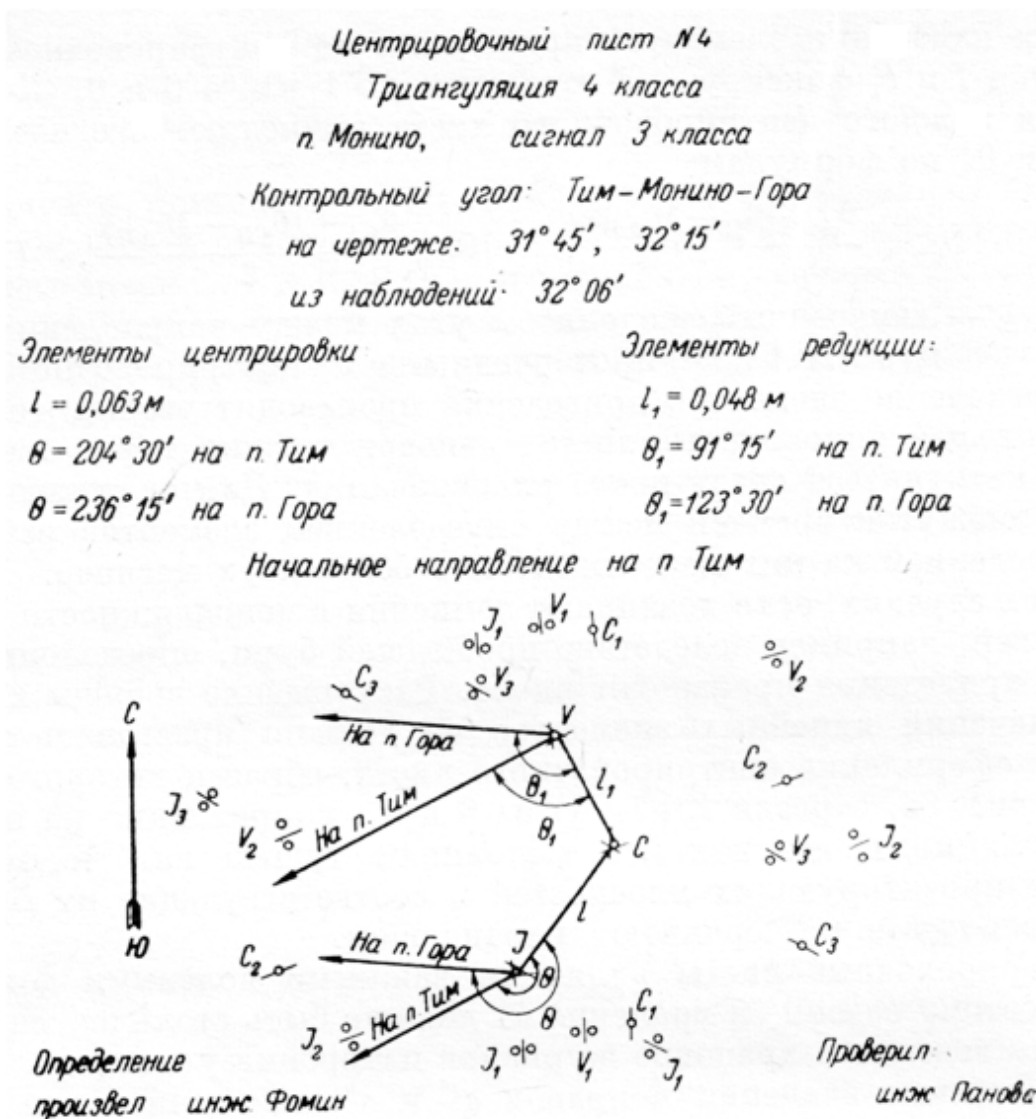


Рис. 44. Пример центрировочного листа

Для последующего затем определения элементов приведения используются линейка и транспортир. При дальнейших вычислениях приведенных направлений необходимо помнить о том, поправки за центрировку вводятся в направления на том пункте, где определялись элементы центрировки. А поправки за редукцию вводятся в обратные направления. Отметим, что вопрос приведения наблюдений к центрам пунктов актуален и при использовании ГНСС.

6.6. Редуцирование угловых и линейных измерений на поверхность эллипсоида

В процессе построения плановых геодезических сетей выполняют угловые и линейные измерения. К угловым измерениям относятся измерения горизонтальных направлений (углов), к линейным – измерение длин линий между пунктами.

Для математической обработки этих измерений, выполненных на физической поверхности Земли в аномальном поле силы тяжести, необходимо спроектировать их на поверхность эллипсоида. Процесс перехода от измеренных величин к их проекциям на поверхности эллипсоида принято называть редуцированием измерений на эллипсоид.

В процессе измерения горизонтальных направлений ось теодолита располагается по отвесной линии, а коллимационная плоскость, определяющая направление на наблюдаемый пункт, является вертикальной плоскостью. Между тем, для определения соответствующего направления на поверхности эллипсоида необходимо использовать нормальную плоскость. Следовательно, для редуцирования горизонтального направления на эллипсоид необходимо учесть несовпадение отвесной линии и нормали, что осуществляется введением в горизонтальное направление поправки за уклонение отвесной линии.

Поправка за уклонение отвеса $\delta_{u_{ik}}$ в направления с пункта i на пункт k вычисляется по формуле

$$\delta_{u_{ik}} = (\eta_i \cos A_{ik} - \xi_i \sin A_{ik}) \operatorname{ctg} z_{ik}, \quad (47)$$

где ξ_i, η_i – составляющие уклонения отвеса в пункте наблюдения;

A_{ik} – азимут направления ik ;

z_{ik} – зенитное расстояние на наблюдаемый пункт k .

Поправки за уклонения отвесных линий обеспечивают переход к нормальным сечениям на поверхности эллипсоида. Как известно (см. раздел 4), нормальные сечения обладают двойственностью, а их направления зависят от высоты наблюдаемого пункта. Для учета этих особенностей в измеренные горизонтальные направления, кроме поправок за уклонение отвеса, вводят поправки $\delta_{n_{ik}}$ за переход от нормальных сечений к геодезическим линиям и поправки δH_{ik} за высоту наблюдаемого пункта над поверхностью эллипсоида.

Поправки $\delta_{n_{ik}}$ и δH_{ik} для направления с пункта i на пункт k вычисляют по формулам:

$$\delta_{n_{ik}} = -\rho \frac{e^2}{12N_m^2} S_{ik}^2 \cos^2 B_m \sin 2A_{ik}; \quad (48)$$

$$\delta H_{ik} = \rho \frac{e^2}{2M_m} H_k \cos^2 B_k \sin 2A_{ik}, \quad (49)$$

где M_m, N_m – радиусы кривизны главных нормальных сечений для средней широты B_m пунктов i и k ;

H_k – высота наблюдаемого пункта над поверхностью эллипсоида;

B_k – широта наблюдаемого пункта;

S_{ik} – расстояние между пунктами i и k .

Зенитные расстояния на наблюдаемые пункты геодезических сетей в равнинной местности обычно близки к 90° . Если учесть, что составляющие уклонения отвеса не превышают $10''$, то значения поправок $\delta_{u_{ik}}$ составляют доли секунд. Однако влияние уклонения отвесных линий на горизонтальные направления имеет систематический характер. Поэтому при обработке высокоточных угловых измерений поправки $\delta_{u_{ik}}$ обязательно вводятся в горизонтальные направления сетей 1-го и 2-го класса даже

в равнинной местности. В горной местности, где зенитные расстояния значительно отличаются от 90° , эти поправки вносятся в направления сетей всех классов.

Поправки $\delta_{H_{ik}}$ даже при высотах наблюдаемых визирных целей порядка 1 000 м выражаются в сотых долях секунды. Поэтому эти поправки используют при обработке сетей 1-го и 2-го класса в горной местности.

Поправки $\delta_{n_{ik}}$ зависят от расстояний между пунктами. При расстояниях порядка 30 км они выражаются в тысячных долях секунды. Поэтому их используют только при обработке сетей 1-го класса.

В настоящее время задачи взаимных координатных определений на значительных расстояниях решаются с использованием ГНСС-технологий. И многие трудности по созданию геодезических сетей исчезли. Очень подробно разработанные теоретические основы и технологии редуцирования измеренных направлений и наклонных дальностей изложены во многих учебниках, учебных пособиях, инструкциях. Библиотека СГУГиТ имеет хороший фонд такой литературы, доступный для преподавателей и студентов. Регулярно выполняется обновление фонда учебной литературы, например [2, 8, 14–17, 19–21].

6.7. Вычисление невязок

Вычисление невязок, возникающих из-за наличия в сети избыточных измерений и неизбежных ошибок, позволяет предварительно оценить точность выполненных измерений. В первую очередь полученные невязки сравниваются с допустимыми, которые для сетей каждого класса, вида измерений и геометрического условия имеют строго регламентированные значения. Например, для допустимой невязки треугольника используют формулу

$$W_{\text{доп}} = 2,5m_{\beta}\sqrt{3}, \quad (50)$$

где m_{β} – средняя квадратическая ошибка измерения углов в данном классе сети. Невязки, превышающие допустимые, свидетельствуют о низком качестве измерений. Такие измерения бракуют и выполняют заново. Сово-

купность невязок, возникающих в сети, позволяет выполнить оценку точности измерений в целом. Например, используя значения невязок w_i , полученных в сети триангуляции, состоящей из n треугольников ($i = 1, 2, \dots, n$), можно оценить точность угловых измерений в сети по формуле Ферреро

$$m_{\beta} = \sqrt{\frac{\sum w_i^2}{3n}}. \quad (51)$$

Кроме того, невязки могут быть использованы в качестве свободных членов условных уравнений при последующем уравнивании сети коррелятным методом.

6.8. Предварительная обработка измерений в высотных геодезических сетях

Предварительная обработка измерений в высотных ГС заключается в подготовке результатов нивелирования к уравниванию и состоит из следующих процессов:

- проверка первичных материалов;
- вычисление превышений между реперами;
- вычисление превышений нормальных высот;
- вычисление невязок в полигонах и предварительная оценка точности.

Проверка первичных материалов нивелирования состоит из постраничного и посекционного контроля вычислений в журналах.

Вычисление превышений между реперами по линиям нивелирования I класса выполняется сначала отдельно для прямого и обратного ходов нивелирования по двум линиям (т. е. определяется четырем значениям превышения). По линиям нивелирования II и III классов вычисляют превышения из прямого и обратного ходов. При этом в превышения вводятся необходимые поправки, учитывающие систематические ошибки измерений (например, поправки за разность нулей пары реек, метрологические поправки за среднюю длину метра реек и др.). Проверяется допустимость расхождений между превышениями, полученными из многократного ни-

велирования. В случае недопустимых расхождений выполняют дополнительное нивелирование. Окончательное значение превышений между реперами определяют путем осреднения результатов многократного нивелирования.

В линиях нивелирования IV класса превышения определяются непосредственно из результатов нивелирования в одном направлении.

Вычисление превышений нормальных высот выполняется в процессе обработки результатов нивелирования I, II, а в горах – III класса.

Переход к системе нормальных высот осуществляется путем введения в измеренные превышения поправок, вычисляемых с использованием данных об аномалиях силы тяжести вдоль линии нивелирования.

Вычисление невязок в полигонах на заключительном этапе предварительной обработки позволяет выполнить оценку точности нивелирования в целом по сети. Например, среднюю квадратическую ошибку m_h нивелирования на 1 км хода можно определить по формуле

$$m_h = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{w_i^2}{P_i}}, \quad (52)$$

где w_i – невязка полигона;

P_i – его периметр в километрах;

n – число полигонов.

7. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

7.1. Общие положения

Согласно действующему определению государственной системы обеспечения единства измерений, действительное значение физической величины – это значение физической величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него. Автор [20] отмечает, что такое «определение действительного значения ... уместно использовать параллельно с давно утвердившимся в русскоязычной геодезической литературе термином уравненных значений результатов измерений».

Набор измерительных данных о многих объектах бывает очень значительный. И ради быстроты получения результата или для упрощения этого получения совершенно было бы неправильно и даже неразумно отказываться от какой-либо части измерительной информации. Таким образом, совершенно объективно возникла и существует задача математической обработки экспериментальных данных. Недооценка важности математической обработки может привести к значительным искажениям результатов измерений.

Геодезия – одна из тех наук, видов человеческой деятельности, в которой ее конечные результаты основаны на выполнении измерений. Измеряются геометрические параметры поверхности Земли, расположенных на ней объектов, некоторых физических полей (силы тяжести). Геодезические исследования распространяются и на околоземное пространство, Луну. Измерения повторяются с определенной частотой, чтобы оценить динамику, изменение изучаемых параметров. Вопрос корректной математической обработки геодезических измерений всегда актуален и научные исследования в этом направлении, их алгоритмическая и практическая реализация продолжают.

7.2. Задача уравнивания геодезических измерений

7.2.1. Необходимые и избыточные измерения

Определение координат и высот пунктов в геодезических сетях осуществляется путем последовательной их передачи от исходных пунктов.

Плановое положение какого-либо пункта относительно исходного определяется двумя величинами (в двумерном пространстве). На поверхности эллипсоида это приращения геодезических координат ΔB и ΔL , на плоскости – приращения Δx и Δy прямоугольных координат или полярные координаты в виде дирекционного угла α и расстояния D до определяемого пункта. Во всех случаях теоретически для определения положения пункта относительно исходного в двумерном пространстве достаточно измерить две величины.

В качестве примера рассмотрим варианты передачи координат (на плоскости) в треугольнике, изображенном на рис. 45.

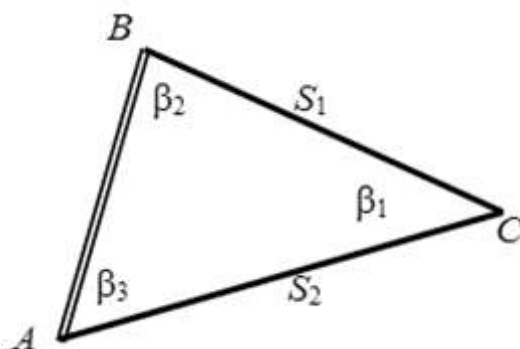


Рис. 45. Треугольник с пятью измеренными величинами

Исходные пункты с известными координатами A и B . Пункт C – определяемый. Измерено пять величин: три внутренних угла β_1 , β_2 , β_3 и две стороны треугольника S_1 и S_2 .

Так как нам нужно определить две координаты пункта, число необходимых измерений также должно быть два. А, следовательно, число избыточных измерений – три.

Для однозначного получения координат определяемого пункта возможно использование любого сочетания двух измеренных величин из пяти. Общее число таких сочетаний для нашего примера – десять. И, конечно, необходимо привлечение некоторых формул плоской тригонометрии, например, синусов или косинусов и др.

Мы не можем выделить какое-либо одно сочетание из двух элементов. Во всех пяти измерениях содержится полезная информация. Таким образом, должна быть выполнена математическая обработка всех измерений для получения искоемых координат.

Аналогичные примеры можно привести и для нивелирных ходов или сетей, в которых также существует необходимость выполнения математической обработки результатов измерений.

Минимальное число измерений, необходимых для определения координат или высот в сети, принято называть числом необходимых измерений.

Число необходимых измерений в плановой сети равно удвоенному числу определяемых пунктов, а в высотной сети – числу определяемых пунктов.

Число измерений в геодезических сетях, как правило, больше числа необходимых измерений. Измерения, выполняемые сверх необходимого числа измерений, называют избыточными. Избыточные измерения создают в сети ряд геометрических условий, что позволяет выполнять оперативный контроль качества измерений. Образующие при этом дополнительные связи повышают точность передачи координат или высот (повышается «жесткость» сети).

Если в сети содержится p определяемых пунктов и выполнено n измерений, то число избыточных измерений r в плановой сети можно определить как разность $r = n - 2p$, а в высотной сети соответственно как разность $r = n - p$.

Наличие в сети избыточных измерений приводит к возникновению ряда геометрических условий. При этом число независимых условий, возникающих в сети, равно числу избыточных измерений.

Математические выражения, определяющие условия, возникающие в сетях, называют уравнениями связи.

Так как измерения неизбежно содержат ошибки, условия, возникающие в сети, как правило, не выполняются. Если в уравнение связи подставить значения измеренных величин, то равенство не будет выполнено. Разность между значением, полученным при подстановке в уравнение связи измеренных величин, и значением, требуемым по условию, называют невязкой.

Например, вычисление невязки в треугольнике (см. рис. 45):

$$w_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^\circ. \quad (53)$$

Невязки используют для оперативного контроля качества измерений и предварительной оценки их точности.

Выводы:

- для оперативного контроля качества измерений и обеспечения дополнительных связей, повышающих точность передачи координат или высот, в сетях, как правило, выполняют избыточные измерения;
- избыточные измерения приводят к возникновению в сети геометрических условий;
- число независимых условий, возникающих в сети, равно числу избыточных измерений;
- так как измерения неизбежно содержат ошибки, геометрические условия в сети не выполняются, что выражается в наличии невязок и неоднозначности определения координат или высот пунктов.

Последнее обстоятельство приводит к необходимости уравнивания измерений.

Задача уравнивания возникает при наличии в сети избыточных измерений и преследует две цели:

- устранение неоднозначности (невязок), возникающих в сети из-за наличия ошибок измерений;
- использование дополнительных связей, образованных избыточными измерениями, для повышения точности определения координат или высот.

7.2.2. Математический аппарат уравнивания

Математический аппарат уравнивания измерений основан на применении метода наименьших квадратов (МНК).

До некоторого времени считалось, что независимо друг от друга этот метод описали и применили выдающиеся ученые – французский математик Лежандр в 1806 г. и немецкий математик, астроном, геодезист и физик Карл Фридрих Гаусс в 1795 г., который считается одним из величайших математиков всех времен, «королем математиков».

Характеризуя личность Лежандра, приведем следующий факт: в годы Французской революции Лежандр, вместе с Лагранжем и Лапласом, активно участвовал в Комиссии по введению метрической системы, в частности, в измерении длины одного градуса между Дюнкерком и Барселонной для установления эталона метра.

По поводу авторства метода наименьших квадратов, которым Лежандр особенно гордился, он имел приоритетный спор с Гауссом, который открыл этот метод независимо и раньше Лежандра, но опубликовал позже.

Этот способ далее был распространен и усовершенствован изысканиями Лапласа, Энке, Бесселя, Ганзена и др. Название способа «метод наименьших квадратов» означает, что после подстановки в начальные уравнения неизвестных величин, выведенных этим способом, в правых частях уравнений получаются если не нули, то небольшие величины. Сумма квадратов этих величин оказывается меньше, чем сумма квадратов подобных же остатков, после подстановки каких бы то ни было других значений неизвестных. Иногда этот случай называют «наилучшее квадратичное приближение». Помимо этого, решение уравнений по способу наименьших квадратов дает возможность выводить вероятные ошибки неизвестных, т. е. дает величины, по которым судят о степени точности выводов.

Как правило, измерения содержат не только случайные, но и систематические погрешности. Природа многих из систематических погрешностей известна. Традиционно, их разделяют на три группы – приборные, личные и за влияние внешней среды. Они почти не изучены в количественном отношении.

В результате уравнивания по методу наименьших квадратов может быть найдена математическая модель, максимально правдоподобная реальному объекту в том случае, если результаты измерений не содержат систематических погрешностей, а случайные погрешности измерений имеют вероятностные характеристики, не противоречащие условиям теоремы Гаусса – Маркова. Наиболее употребляемым в технических приложениях в этом контексте является нормальное распределение. В [11] показано, что «в случае уравнивания измерений ... закон нормального распределения является весьма правдоподобной и наиболее обоснованной моделью поведения ошибок».

Наличие значительных систематических погрешностей в результатах измерений снижает эффективность метода наименьших квадратов. И поэтому необходимо применять меры для их ослабления. К таким мерам можно отнести оптимизацию схем геодезических построений, методику измерений, строгие математические теории обработки. Одной из самых сложных для преодоления влияния на погрешности измерений является группа факторов внешней среды, среди которых менее предсказуемой является рефракция.

Так как не удастся полностью исключить систематические погрешности из измерений, строгое уравнивание является важной научно-технической проблемой. Она включает разработку рекомендаций по технологии измерений, учет условий работ, математический анализ измерений с целью изучения характера систематических и случайных погрешностей.

В геодезической практике используется два основных способа уравнивания: коррелятный и параметрический. В основе их различия лежат математические модели. Для коррелятного способа это условные уравнения связи – неявные функции истинных значений измеряемых величин и координат опорных точек, для параметрического способа – параметрические уравнения связи – явные функции истинных значений измеряемых величин от параметров и координат опорных точек.

При правильном применении коррелятный и параметрический способы дают тождественные результаты. Объем вычислительного труда будет различаться в зависимости от схемы построения и числа исходных данных. Но в настоящее время этот фактор не важен. Для параметрического

способа более простой является подготовка уравнений поправок по сравнению с подготовкой уравнений связей в коррелятном. Однако коррелятный способ через вычисления невязок условных уравнений позволяет оценивать качество измерений.

7.3. Коррелятный способ

7.3.1. Виды условных уравнений

Рассматриваем здесь виды условных уравнений применительно к случаю, когда уравниваются измеренные углы и длины сторон, редуцированные на плоскость.

7.3.1.1. Условие фигур

В замкнутой фигуре, у которой углы измерены при всех вершинах, сумма уравненных значений этих углов должна быть равна теоретической. Несоответствие этих величин есть невязка.

Общая формула теоретической суммы n углов замкнутого многоугольника из школьного курса геометрии

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 180^\circ(n-2). \quad (54)$$

Для треугольника это 180° , для четырехугольника – 360° и т. д. Например, для треугольника ABC (см. рис. 45) формулу невязки можно записать как в формуле (49), но изменив обозначение измеренных углов на их номер с верхним индексом (штрих)

$$w = 1' + 2' + 3' - 180^\circ. \quad (55)$$

После линеаризации соответствующее условное уравнение треугольника будет следующее:

$$V_1 + V_2 + V_3 + w = 0. \quad (56)$$

7.3.1.2. Условие горизонта

Условие горизонта возникает, если на пункте измерены углы с замыканием горизонта (рис. 46). И, конечно же, сумма этих углов теоретически должна быть равна 360° .

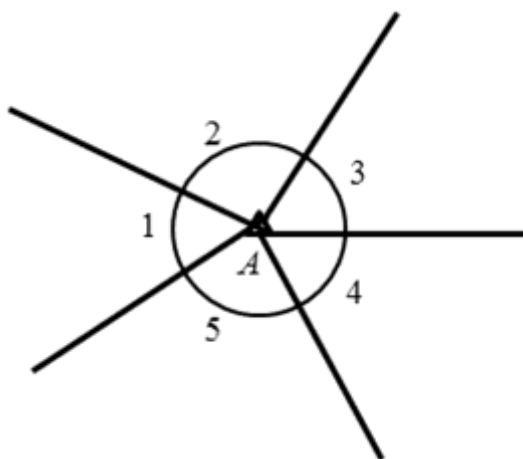


Рис. 46. Измерение на пункте с замыканием горизонта

По аналогии с условием для треугольника получаем условие горизонта

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + w = 0. \quad (57)$$

Формула вычисления невязки

$$w = 1' + 2' + 3' + 4' + 5' - 360^\circ. \quad (58)$$

7.3.1.3. Полюсное условие

Полюсное условие возникает в геодезических четырехугольниках, центральных системах и во всех случаях, когда в сети есть диагональные стороны. Длина некоторой стороны, вычисленная двумя независимыми путями из решения треугольников сети, должна иметь одно и то же значение. Рассмотрим математическое описание полюсного условия на примере геодезического четырехугольника (рис. 47).

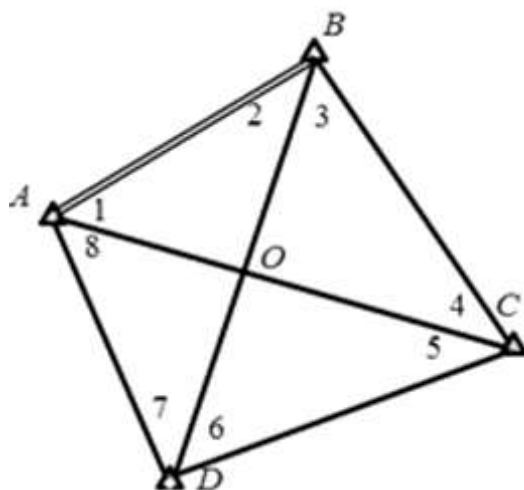


Рис. 47. Геодезический четырехугольник

Так называемый полюс может быть выбран как любая из вершин четырехугольника или как точка пересечения диагоналей (не обязательно реально закрепленная на местности). Иначе мы будем иметь случай центральной системы, в которой также возникает условие полюса.

Выбираем в качестве полюса т. O – пересечение диагоналей.

Для облегчения составления условного уравнения воспользуемся рис. 47. Двигаясь по часовой стрелке от виртуальной стороны OA , составляем уравнение, которое, конечно, алгебраически верно. Деление длин сторон треугольников, записанных в числителе, на длины сторон, которые записаны в знаменателе, однозначно дает единицу

$$\frac{OA}{OB} \frac{OB}{OC} \frac{OC}{OD} \frac{OD}{OA} = 1. \quad (59)$$

И если вспомнить теорему синусов, то мы имеем право заменить длины сторон на синусы углов, противолежащих сторонам в тех использованных нами треугольниках

$$\frac{\sin 2}{\sin 1} \frac{\sin 4}{\sin 3} \frac{\sin 6}{\sin 5} \frac{\sin 8}{\sin 7} = 1. \quad (60)$$

По причине появления синусов в формуле связи условие полюса, а также условие базиса называют синусными.

Используя стандартную процедуру нахождения частных производных для линеаризации уравнения (60), мы получаем в качестве коэффициентов при поправках в измеренные углы котангенсы. Для тех углов, синусы которых в числителе, в формуле (60) – коэффициенты (котангенсы) со знаком «плюс», а для тех, которые в знаменателе, – со знаком «минус». В итоге условное уравнение полюса записываем следующим образом:

$$-\operatorname{ctg} 1V_1 + \operatorname{ctg} 2V_2 - \operatorname{ctg} 3V_3 + \operatorname{ctg} 4V_4 - \operatorname{ctg} 5V_5 + \\ + \operatorname{ctg} 6V_6 - \operatorname{ctg} 7V_7 + \operatorname{ctg} 8V_8 + w'' = 0. \quad (61)$$

Свободный член полюсного условия определяется как

$$w'' = \left(\frac{\sin 2 \sin 4 \sin 6 \sin 8}{\sin 1 \sin 3 \sin 5 \sin 7} - 1 \right) \rho''. \quad (62)$$

7.3.1.4. Условие жесткого дирекционного угла

Данные условия возникают в том случае, если две стороны сети или более имеют значения дирекционных углов (исходных), не подлежащие изменению при уравнивании.

Чтобы составить это условное уравнение, в сети выделяется простая цепь треугольников, соединяющая стороны с твердыми дирекционными углами (рис. 48).

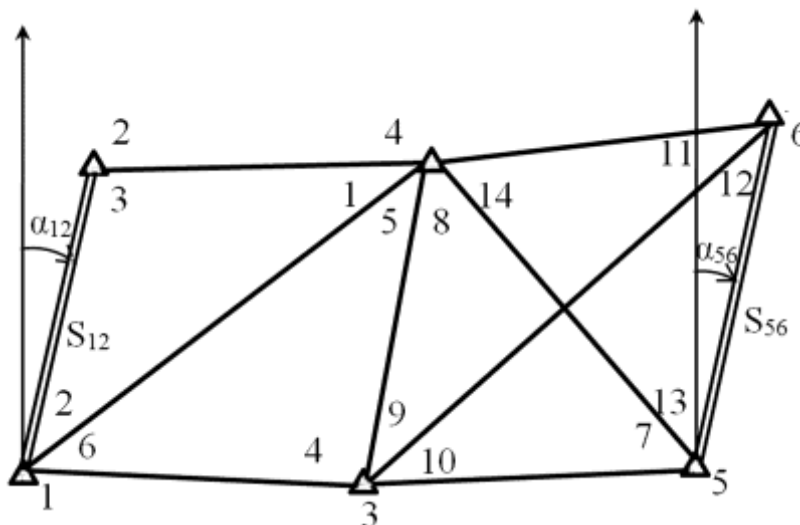


Рис. 48. Простая цепь треугольников между исходными сторонами

Дирекционный угол α_{56} может быть вычислен от дирекционного угла α_{12} , например, с использованием измеренных углов $2', 5', 9', 12'$

$$\alpha'_{56} = \alpha_{12} + 2' - 5' + 9' - 12'. \quad (63)$$

Так как измеренные углы содержат погрешности, в общем случае не будет соблюдаться равенство твердого дирекционного угла α_{56} и вычисленного по измеренным углам α'_{56} . Их разность есть невязка условия дирекционных углов, которая будет использована далее как свободный член условного уравнения твердого дирекционного угла. После обычной процедуры линеаризации будем иметь данное условное уравнение

$$V_2 - V_5 + V_9 - V_{12} + w = 0. \quad (64)$$

Формула вычисления невязки

$$w = \alpha'_{56} - \alpha_{56} = \alpha_{12} + 2' - 5' + 9' - 12' - \alpha_{56}. \quad (65)$$

7.3.1.5. Условие базиса

Условие базиса возникает, когда в сети имеются две или более стороны, длины которых не подлежат изменению в процессе уравнивания. Это могут быть длины сторон между твердыми пунктами или измеренные линии.

Условие базиса отражает требование того, чтобы длина одной исходной стороны, полученная от другой исходной стороны посредством решения треугольников, совпадала с заданным ее значением. Для рассмотрения данного условия в качестве примера выберем сеть, изображенную на рис. 48.

Последовательно решая треугольники с использованием теоремы синусов, вычисляем по измеренным углам $1', 3', 4', 6', 11', 8', 14', 7', 13', 10'$ длину стороны 56

$$S'_{56} = S_{12} \frac{\sin 3'}{\sin 1'} \frac{\sin 6'}{\sin 4'} \frac{\sin(8' + 14')}{\sin 11'} \frac{\sin 10'}{\sin(7' + 13')}. \quad (66)$$

Измеренные углы содержат погрешности и по этой причине не будет соблюдаться равенство твердой длины стороны S_{56} и вычисленной по из-

меренным углам S'_{56} . Их разность есть невязка условия базиса, которая будет использована далее как свободный член условного.

Приведение этого уравнения к линейному виду выполняется аналогично тому, как делалось для условия полюса. Используя стандартную процедуру нахождения частных производных для линеаризации уравнения (66), мы получаем в качестве коэффициентов при поправках в измеренные углы котангенсы. Для тех углов, синусы которых в числителе, в формуле (66) коэффициенты (котангенсы) со знаком «плюс», а для тех, которые в знаменателе, – со знаком «минус». В итоге условное уравнение базиса записываем следующим образом:

$$-\operatorname{ctg} 1V_1 + \operatorname{ctg} 3V_3 - \operatorname{ctg} 4V_4 + \operatorname{ctg} 6V_6 - \operatorname{ctg}(7+13)V_7 + \operatorname{ctg}(8+14)V_8 + \\ + \operatorname{ctg} 10V_{10} - \operatorname{ctg} 11V_{11} - \operatorname{ctg}(7+13)V_{13} + \operatorname{ctg}(8+14)V_{14} + w'' = 0. \quad (67)$$

Свободный член условия базиса определяется как

$$w'' = \left(S_{12} \frac{\sin 3' \sin 6' \sin(8'+14') \sin 10'}{\sin 1' \sin 4' \sin 11' \sin(7'+13')} - S_{56} \right) \frac{\rho''}{S_{56}}. \quad (68)$$

7.3.1.6. Условия координат

Условия координат возникают при наличии в сети как минимум двух разобщенных между собой исходных пунктов с координатами, не подлежащими изменению при уравнивании. В этом случае возникает условие, чтобы координаты одного из исходных пунктов, вычисленные по координатам другого исходного пункта и уравненным углам сети, были равны заданным значениям координат этого пункта.

Вновь для пояснения составления уравнений координат воспользуемся сетью на рис. 48. Выберем ходовую линию (аналог теодолитного хода) от исходного пункта 1 до пункта 6. Ходовая линия будет следующая 1–4–3–6. Для того, чтобы используя формулы прямой геодезической задачи, сделать передачу координат от пункта 1 до пункта 6, понадобятся длины и дирекционные углы сторон 1–4, 4–3, 3–6. Эти величины не измерялись, но возможно их вычисление как функций от измеренных углов. Выше при рассмотрении условия дирекционных углов и базисов нами были рас-

смотрены такие возможности. Выполним последовательно эти действия. Запишем условия абсцисс и ординат через приращения по ходовой линии

$$\begin{cases} x_6 = x_1 + \Delta x_{14} + \Delta x_{43} + \Delta x_{36}; \\ y_6 = y_1 + \Delta y_{14} + \Delta y_{43} + \Delta y_{36}. \end{cases} \quad (69)$$

Каждое приращение координат может быть вычислено так:

$$\Delta x_{ik} = S_{ik} \cos \alpha_{ik}; \Delta y_{ik} = S_{ik} \sin \alpha_{ik}. \quad (70)$$

Распишем составляющие формул (70) через измеренные углы:

$$\begin{cases} S_{14} = S_{12} \frac{\sin 3'}{\sin 1'}; \\ S_{43} = S_{12} \frac{\sin 3' \sin 6'}{\sin 1' \sin 4'}; \\ S_{36} = S_{12} \frac{\sin 3' \sin 6' \sin(8' + 14')}{\sin 1' \sin 4' \sin 11'}. \end{cases} \quad (71)$$

$$\begin{cases} \alpha_{14} = \alpha_{12} + 2'; \\ \alpha_{43} = \alpha_{12} + 2' - 5' \pm 180^\circ; \\ \alpha_{36} = \alpha_{12} + 2' - 5' + 9'. \end{cases} \quad (72)$$

После линеаризации и с учетом некоторых технологических упрощений условное уравнение абсцисс и ординат для выбранной нами сети (см. рис. 48) будут

$$\begin{aligned} & (x_6 - x_1)(\text{ctg } 3'V_3 - \text{ctg } 1'V_1) - (y_6 - y_1)V_2 + (x_6 - x_4) \times \\ & \times (\text{ctg } 6'V_6 - \text{ctg } 4'V_4) + (y_6 - y_3)V_5 + (x_6 - x_3)(\text{ctg}(8' + 14')V_8 + \\ & + \text{ctg}(8' + 14')V_{14} - \text{ctg } 11'V_{11}) - (y_6 - y_4)V_9 + w_x = 0; \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} & (y_6 - y_1)(\text{ctg } 3'V_3 - \text{ctg } 1'V_1) + (x_6 - x_1)V_2 + (y_6 - y_4) \times \\ & \times (\text{ctg } 6'V_6 - \text{ctg } 4'V_4) + (x_6 - x_3)V_5 + (y_6 - y_3)(\text{ctg}(8' + 14'')V_8 + \\ & + \text{ctg}(8' + 14')V_{14} - \text{ctg } 11'V_{11}) - (x_6 - x_4)V_9 + w_y = 0. \end{aligned} \quad (74)$$

Отметим, что коэффициенты для связующих углов, использованных для выражений длин сторон, имеют знак «плюс» или «минус» в зависимости от того, в числителе или знаменателе в выражениях (71), (72) они расположены. А коэффициенты для поправок в углы, участвующие в передаче дирекционного угла по ходовой линии, соответствуют их расположению справа или слева. Это подтверждают исходные выражения (73), (74). В уравнении абсцисс для углов слева будет «минус», справа – «плюс», как следствие знаков полученных производных от тригонометрических функций \sin и \cos при линеаризации. В уравнении ординат знаки меняются для того и другого случая расположения углов относительно ходовой линии. Используемые в формулах (73), (74) коэффициенты при поправках в измеренные углы, кроме котангенсов, содержат координаты x и y всех пунктов ходовой линии. Для вычисления коэффициентов достаточно знания приближенных значений координат, например, определенных по измеренным углам. Наша задача – получить поправки в измеренные углы, в секундах.

Поэтому, при вычислении свободных членов (невязок) условных уравнений поправок (73), (74) это учитывается

$$w_x = \rho''(x'_6 - x_6); \quad w_y = \rho''(y'_6 - y_6), \quad (75)$$

где x'_6, y'_6 – координаты пункта 6, определенные по измеренным углам;

x_6, y_6 – исходные (твердые) координаты.

Подробное математическое описание формул получения условных уравнений абсцисс и ординат в общем виде и с другими примерами дано, например, в [18].

7.3.2. Выбор необходимых и независимых условных уравнений

В общем случае в геодезической сети число измеренных величин больше числа необходимых. В зависимости от конфигурации можно составить условий (фигур и полюсов) больше, чем их следует учесть при уравнивании. Рассмотрим геодезический четырехугольник (см. рис. 47).

Мы имеем число измеренных величин (углов) $n = 8$. Необходимо определить по ним координаты двух пунктов C и D . Таким образом, число необходимых измерений $t = 4$. Число избыточных измерений $r = n - t = 4$.

Составим возможные геометрические условия фигур

$$1 + 2 + 3 + 4 - 180^\circ = 0;$$

$$5 + 6 + 7 + 8 - 180^\circ = 0;$$

$$1 + 2 + 7 + 8 - 180^\circ = 0;$$

$$3 + 4 + 5 + 6 - 180^\circ = 0;$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 360^\circ = 0.$$

Из этих пяти уравнений два (любые) лишние. Каждое уравнение может быть получено из остальных в результате линейной комбинации (сложением или вычитанием левых и правых частей). То есть система из пяти и даже из четырех уравнений будет линейно зависима. Для условия полюса также можно составить пять уравнений, аналогичных (60). Кроме полюса в месте пересечения диагоналей O , полюсные уравнения можно составить для каждой из четырех вершин A, B, C, D . И в этом случае уже нужно выбирать одно уравнение (любое). Оно и будет независимым. Итого, для данного четырехугольника для дальнейшей обработки по методу наименьших квадратов должны быть выбраны три условия фигур и одно условие полюса. Если не учесть этот фактор, решить систему всех уравнений, возникающих в сети, будет невозможно по причине вырожденности матрицы коэффициентов нормальных уравнений коррелат такой системы. Нельзя будет вычислить обратную матрицу системы коэффициентов нормальных уравнений.

Условные уравнения дирекционных углов, базисов и координат могут быть составлены также в нескольких вариантах. Логично из них выбирать наиболее простые, наглядные на схеме сети. Например, те, которые включают наименьшее число измеренных углов и имеют наиболее просто выражаемые алгебраически коэффициенты при их поправках.

7.3.3. Допустимые величины свободных членов условных уравнений

Для контроля и оценки качества полевых измерений вычисляют свободные члены условных уравнений (см. подраздел 7.3.1), которые являются линейными функциями истинных погрешностей измерений.

В угловых измерениях предполагается их равноточность. Таким образом, итоговая погрешность для n измеренных углов в условии фигур

$$m_w = m_\beta \sqrt{n}. \quad (76)$$

Предельное значение свободного члена

$$w_{\text{доп}} = tm_\beta \sqrt{n}. \quad (77)$$

Параметр t в зависимости от количества измеренных величин в сетях триангуляции теоретически находится в диапазоне 2,0–3,0. Для контроля измерений углов на практике принимается значение $t = 2,5$.

В условиях фигур и горизонта допустимое значение вычисляется

$$w_{\text{доп}} = 2,5m_\beta \sqrt{n}. \quad (78)$$

В условном уравнении дирекционных углов

$$w_{\text{доп}} = 2,5m_\beta \sqrt{nm_\beta^2 + m_{\alpha_1}^2 + m_{\alpha_2}^2}, \quad (79)$$

где $m_{\alpha_1}, m_{\alpha_2}$ – среднеквадратические погрешности дирекционных углов;

n – число углов, входящих в условное уравнение.

В полюсном условии допустимое значение

$$w_{\text{доп}} = 2,5m_\beta \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{ctg}^2 \beta_i}, \quad (80)$$

где n – число горизонтальных углов в условном уравнении.

Допустимое значение свободных членов в базисном условном уравнении (в метрах)

$$w_{\text{доп}} = 2,5 \sqrt{\left(\frac{m_{\beta}}{\rho''} b_2\right)^2 \sum_{i=1}^n \operatorname{ctg}^2 \beta_i + m_{b_1}^2 + m_{b_2}^2}. \quad (81)$$

Для условий абсцисс и ординат

$$w_{x(\text{доп})} = 2,5 \sqrt{\left(\frac{m_{\beta}}{\rho''}\right)^2 \sum a_x^2 + m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2}; \quad (82)$$

$$w_{y(\text{доп})} = 2,5 \sqrt{\left(\frac{m_{\beta}}{\rho''}\right)^2 \sum a_y^2 + m_{y_1}^2 + m_{y_2}^2}. \quad (83)$$

В формулах $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{y_1}, m_{y_2}$ – среднеквадратические ошибки абсцисс и ординат исходных пунктов; a_x, a_y – коэффициенты при поправках в измеренные углы из условных уравнений.

7.3.4. Алгоритм коррелятного способа уравнивания геодезических измерений в плановой сети

Системы условных уравнений (см. подраздел 7.3.1) в общем случае являются нелинейными и недоопределенными. Для их решения после линеаризации используется метод наименьших квадратов (см. подраздел 7.2.2). Для коррелятного способа алгоритм уравнивания следующий.

Имеем n измеренных величин (углов). Число необходимых измерений – t . Число избыточных измерений $r = n - t$. Составляется система условных уравнений поправок. В матричной форме она записывается следующим образом:

$$AV + W = 0. \quad (84)$$

В этой записи матрица коэффициентов условных уравнений поправок

$$A_{r \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ L & L & L & L \\ a_{r1} & a_{r2} & L & a_{rn} \end{bmatrix}; \quad (85)$$

вектор поправок в результаты измерений (искомый)

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ L \\ v_n \end{bmatrix}; \quad (86)$$

вектор свободных членов (невязок) условных уравнений

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ L \\ w_r \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Для оценки точности уравненных величин составляется весовая функция. Выполняется линеаризация математического выражения оцениваемой величины как функции уравненных результатов измерений. Например, могут оцениваться координаты, отметки.

Получается вектор коэффициентов выбранной функции

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ L \\ f_n \end{bmatrix}. \quad (88)$$

Систему (84) условных уравнений поправок нужно решать с учетом условия используемого нами метода наименьших квадратов

$$[pv^2] = V^T P V = \min, \quad (89)$$

где матрица весов результатов измерений

$$P_{n \times n} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & L & 0 \\ 0 & p_2 & L & 0 \\ L & L & L & L \\ 0 & 0 & L & p_n \end{bmatrix}. \quad (90)$$

Диагональный вид этой матрицы отражает принимаемую при обработке измерений гипотезу независимости измерений.

Далее выполняется переход от системы условных уравнений (84) к системе нормальных уравнений коррелат

$$ACA^T K + W = 0, \quad (91)$$

где C – диагональная матрица обратных весов измеренных величин:

$$C_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1/p_1 & 0 & L & 0 \\ 0 & 1/p_2 & L & 0 \\ L & L & L & L \\ 0 & 0 & L & 1/p_n \end{bmatrix}; \quad (92)$$

K – вектор-столбец коррелат нормальных уравнений:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ L \\ k_r \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Соответственно, коррелатное уравнение поправок как функций от коррелат

$$V = CA^T K. \quad (94)$$

Систему нормальных уравнений поправок записывают обычно более кратко

$$NK + W = 0, \quad (95)$$

где $N = ACA^T$ – матрица коэффициентов нормальных уравнений поправок.

Систему уравнений можно решить способом обращения. Выражение (95) умножим слева на обратную матрицу N^{-1}

$$N^{-1}NK + N^{-1}W = 0. \quad (96)$$

Перемножение матриц N^{-1} и N дает единичную матрицу. После переноса в правую часть второго слагаемого в формуле (96) получаем выражение для нахождения вектора коррелат

$$K = -N^{-1}W. \quad (97)$$

Если использовать формулы (84) и (94), получаем формулу контроля $[pv^2]$

$$V^T P V = V^T P C A^T K = (A V)^T K = -W K. \quad (98)$$

Далее выполняется оценка точности. Средняя квадратическая ошибка любой уравненной величины вычисляется как

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}. \quad (99)$$

где μ – средняя квадратическая ошибка единицы веса, которая является характеристикой точности измерений;

$\frac{1}{P_F}$ – обратный вес функции.

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}; \quad (100)$$

$$\frac{1}{P_F} = F^T C F - F^T C A^T N^{-1} A C F. \quad (101)$$

7.4. Параметрический способ

7.4.1. Последовательность уравнительных вычислений

Параметрический способ уравнивания по методу наименьших квадратов заключается в решении системы параметрических уравнений, в которых измеренные величины представляются как функции некоторых независимых величин – параметров. Решение выполняется под тем же условием, что и в коррелятном способе $[pv^2] = \min$.

Типичная последовательность уравнительных вычислений для плановых сетей в параметрическом способе следующая.

Для сетей триангуляции, используя измеренные углы, решают треугольники сети. Двигаясь от исходной стороны, последовательно применяя формулу синусов для треугольника, находят длины сторон, которые не являются измеренными величинами. Для сетей трилатерации решают треугольники, но уже находя по измеренным длинам сторон углы треугольников. Полученные данные используют для определения приближенных значений координат всех определяемых пунктов. Именно координаты являются параметрами, уточнение которых будет выполняться в процессе уравнивания. Чтобы избежать грубых ошибок, координаты вычисляют дважды от разных элементов сети. Варианты нахождения координат могут быть различными, например, с последовательным использованием формул прямой геодезической задачи или формул котангенсов (формулы Юнга).

Далее, решая обратные геодезические задачи, по приближенным координатам и координатам исходных пунктов находят длины и дирекционные углы всех сторон сети (кроме исходных).

Затем составляют уравнения поправок для всех непосредственно измеренных величин. Это могут быть направления, углы, азимуты (дирекционные углы), расстояния между пунктами. Так как в общем случае в сети могут быть измерены разнородные измерения (углы, азимуты, стороны и т. д.), возникает вопрос учета весов всех измеренных величин. Ведь чаще всего предполагается их совместная математическая обработка по алгоритмам метода наименьших квадратов. В настоящее время к измерен-

ным величинам относятся элементы сети, измеренные по технологии ГНСС. Тем не менее, задача учета весов разнородных измерений не теряет свою актуальность.

Не существует однозначно верного варианта установления весов. Даже есть работы [20, 21], в которых предлагается «обход» понятия веса. Мы здесь опишем классический подход, наиболее часто используемый.

В общем случае вес измеренной величины вычисляется по формуле

$$p = \frac{c}{m_i^2} = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \quad (102)$$

где μ – средняя квадратическая ошибка единицы веса;

m_i – средняя квадратическая ошибка измерения i -й величины.

Величина c может быть произвольной. Для удобства вычислений, например, мы примем здесь

$$\mu^2 = m_N^2 = \text{const}, \quad (103)$$

где m_N – средняя квадратическая ошибка измеренного направления.

Для вычисления весов измеренных направлений N , азимутов α , длин сторон s формулы будут следующие:

$$p_N = 1; \quad p_\alpha = \frac{m_N^2}{m_\alpha^2}; \quad p_s = \frac{m_N^2}{m_s^2}. \quad (104)$$

Качество результатов будет зависеть от степени достоверности установленного соотношения весов разнородных измерений.

Затем после установления весов переходят к системе нормальных уравнений, решая которые, получают поправки к параметрам (приближенным координатам). Их суммирование дает уравненные значения параметров. Аналогично исправляют измеренные величины, получая уравненные измерения и контролируют их, вычисляя, например, невязки в треугольниках, которые должны быть равны нулю. Выполняют оценку точности.

7.4.2. Уравнения поправок измеренных величин

7.4.2.1. Уравнения поправок направлений

Самым распространенным видом измерения при создании плановых опорных геодезических сетей в XX в. являлось так называемое направление. Во многом это было определено способами выполнения угловых измерений – способом круговых приемов и во всех комбинациях и их технологической реализацией в условиях больших по площади территорий (государства).

Для геометрического понимания понятия направления и пояснения вида соответствующего ему уравнения поправок рассмотрим рис. (49).

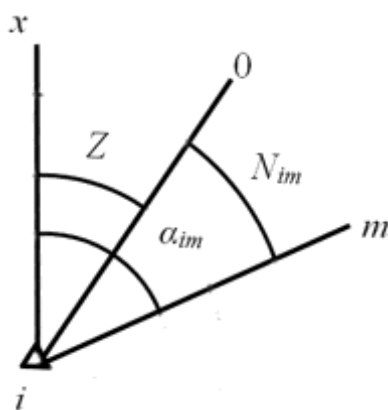


Рис. 49. Ориентирование направлений относительно осевого меридиана зоны

На рис. 49:

ix – направление с пункта i , параллельное осевому меридиану зоны проекции Гаусса – Крюгера, от которого идет отсчет дирекционных углов;

α_{im} – один из таких дирекционных углов, имеющих для измеренных направлений на пункте, а конкретно направления im ;

N_{im} – измеренное направление, уже приведенное к нулевому диаметру лимба;

Z – угол между направлением ix и $i0$ нулевого диаметра лимба (не измеряемое в нашем случае).

После выполнения некоторых несложных алгебраических действий и с учетом нашего выбора в качестве параметров координат определяемых пунктов и собственно имеющихся координат исходных пунктов, уравнение поправок измеренного направления im будет иметь следующий вид:

$$v_{im} = -\delta Z + \rho'' \frac{\sin \alpha_{im}}{S_{im}} \delta x_i - \rho'' \frac{\cos \alpha_{im}}{S_{im}} \delta y_i - \rho'' \frac{\sin \alpha_{im}}{S_{im}} \delta x_m + \\ + \rho'' \frac{\cos \alpha_{im}}{S_{im}} \delta y_m + l_{im}. \quad (105)$$

В ходе уравнительных действий будут вычисляться пять величин правой части этого уравнения

- δZ – поправка в ориентирующий угол Z ;
- $\delta x_i, \delta y_i, \delta x_m, \delta y_m$ – поправки в приближенные координаты пунктов i и m .

l_{im} – свободный член уравнения поправок направления, находимый как разность дирекционного угла, вычисленного по приближенным координатам и приближенно ориентированному направлению.

Поправка в измеренное направление будет вычислена опять же по формуле (105) после подстановки полученных после уравнивания вышеперечисленных величин. Остальные элементы формулы имеют смысл коэффициентов. Они вычисляются после составления уравнений поправок по приближенным значениям параметров (приближенным значениям дирекционных углов и длин сторон) и подставляются в уравнения. И в этом случае уравнение (105) обычно записывается следующим образом:

$$v_{im} = -\delta Z + a_{im} \delta x_i + b_{im} \delta y_i - a_{im} \delta x_m - b_{im} \delta y_m + l_{im}. \quad (106)$$

Коэффициенты вычисляют по формулам

$$a_{im} = -a_{mi} = 20,6265 \frac{\sin \alpha_{im}}{S_{im}}; \quad b_{im} = -b_{mi} = -20,6265 \frac{\cos \alpha_{im}}{S_{im}}, \quad (107)$$

где α_{im} – дирекционный угол;

S_{im} – длина стороны im , км.

7.4.2.2. Уравнение поправок дирекционного угла

Непосредственно измерить дирекционные углы нельзя. Их принимают за независимо измеренные величины при переходе от измеренных азимутов Лапласа. Дирекционные углы также включаются в общий объем уравнивания измерений. В параметрическом способе для них составляется уравнение поправок дирекционного угла. Отличие уравнения дирекционных углов от уравнения направлений состоит в том, что отсутствует поправка в ориентирующий угол

$$v_{im} = a_{im} \delta x_i + b_{im} \delta y_i - a_{im} \delta x_m - b_{im} \delta y_m + l_{im}. \quad (108)$$

Используем формулы для коэффициентов (107), а свободный член вычисляется

$$l_{im} = \alpha_{im}^0 - \alpha'_{im}, \quad (109)$$

где α_{im}^0 – значение дирекционного угла, вычисленное по приближенным координатам;

α'_{im} – измеренное значение дирекционного угла.

7.4.2.3. Уравнения поправок измеренных углов

Измеренный угол β_i будем рассматривать как разность двух направлений: правого ik по ходу часовой стрелки и левого im (рис. 50).

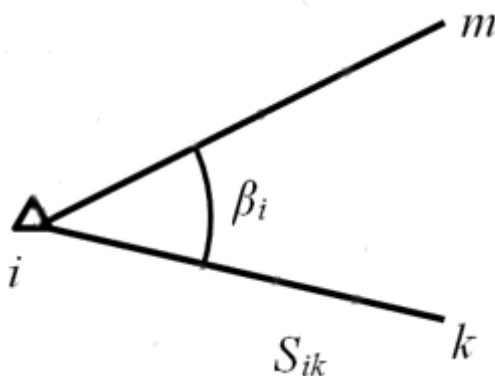


Рис. 50. Измеренный угол и сторона

Если составить уравнения поправок для правого направления и левого по формуле (106), а затем найти алгебраическую разность этих уравнений, мы получим уравнение поправок измеренного угла

$$v_{\beta_i} = (a_{ik} - a_{im})\delta x_i + (b_{ik} - b_{im})\delta y_i - a_{ik}\delta x_k - b_{ik}\delta y_k + \\ + a_{im}\delta x_m + b_{im}\delta y_m + l_{\beta_i}. \quad (110)$$

Коэффициенты приведены в формуле (107), а свободный член находится как разность вычисленного по приближенным координатам угла β_i^o и его измеренного значения β'_i

$$l_{\beta_i} = \beta_i^o - \beta'_i. \quad (111)$$

7.4.2.4. Уравнения поправок измеренных сторон

В геодезической сети могут быть измерены длины сторон. В настоящее время прибором для этого является тахеометр. В редуцированные на плоскость измеренные длины сторон необходимо также вводить поправки после уравнивания сети. Параметрическое уравнение поправок для измеренной стороны S_{ik} имеет вид

$$v_{S_{ik}} = c_{ik}\delta x_i + d_{ik}\delta y_i - c_{ik}\delta x_k - d_{ik}\delta y_k + l_{S_{ik}}. \quad (112)$$

Коэффициенты при поправках в параметры есть значения косинусов и синусов дирекционных углов

$$c_{ik} = -c_{ki} = -\cos \alpha_{ik}^o; \quad (113)$$

$$d_{ik} = -d_{ki} = -\sin \alpha_{ik}^o. \quad (114)$$

Свободные члены параметрических уравнений поправок для измеренных расстояний равны разностям вычисленных S^o и измеренных значений S'

$$l_{S_{ik}} = S_{ik}^o - S'_{ik}. \quad (115)$$

Все приведенные выше параметрические уравнения (направлений, дирекционных углов, измеренных углов, расстояний) имеют общий вид, когда предполагается геометрическая связь только между определяемыми пунктами. Если в элементах геодезической сети (углах, сторонах) задействованы исходные пункты, часть соответствующих им слагаемых в уравнениях становится лишней. Уравнения сокращаются.

7.4.3. Алгоритм параметрического способа уравнивания геодезических измерений в плановой сети

Последовательность вычислительных действий кратко изложена в подразделе 7.4.1. В матричном виде алгоритм уравнивания параметрическим способом представим следующим образом.

Для n измеренных величин и t необходимых имеем r избыточных

$$r = n - t. \quad (116)$$

При самом удобном выборе в качестве параметров координат определяемых пунктов в плановой сети число необходимых измерений равно удвоенному числу этих пунктов k

$$t = 2k. \quad (117)$$

Таким образом, вектор-столбец поправок в приближенные координаты будет следующий:

$$X = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ L \\ \delta x_t \\ \delta y_t \end{bmatrix}. \quad (118)$$

Согласно составу измерений и их видов составляются параметрические уравнения поправок (см. подраздел 7.4.2). Коэффициенты этих уравнений являются элементами матрицы коэффициентов параметрических уравнений поправок

$$A_{n \times t} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2t} \\ L & L & L & L \\ a_{n1} & a_{n2} & L & a_{nt} \end{bmatrix}; \quad (119)$$

а вектор поправок в результаты измерений

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ L \\ v_n \end{bmatrix}; \quad (120)$$

вектор свободных членов параметрических уравнений поправок

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ L \\ l_n \end{bmatrix}. \quad (121)$$

Теперь запишем уравнения поправок в матричном виде

$$AX + l = V. \quad (122)$$

Далее от уравнений поправок (122) делаем переход к системе нормальных уравнений, учитывая их веса. Матрица весов измерений в предположении их независимости тождественна той, которая была записана и в коррелятном способе. Повторяем ее вид

$$P_{n \times n} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & L & 0 \\ 0 & p_2 & L & 0 \\ L & L & L & L \\ 0 & 0 & L & p_n \end{bmatrix}.$$

Матрица коэффициентов нормальных уравнений (симметричная)

$$N_{t \times t} = A^T P A. \quad (123)$$

Вектор-столбец свободных членов нормальных уравнений

$$L_{t \times 1} = A^T P l. \quad (124)$$

В матричном виде система нормальных уравнений

$$NX + L = 0. \quad (125)$$

Система (125) решается таким же образом, как и в коррелятном способе – через обращение матрицы N и последующим умножением на обратную матрицу уравнения (123)

$$X = -N^{-1}L. \quad (126)$$

Обратная матрица N^{-1} также имеет название матрицы весовых коэффициентов Q . Элементы матрицы весовых коэффициентов являются необходимыми элементами детального исследования точности полученных уравненных значений.

Найденные из уравнивания поправки при суммировании их с приближенными значениями параметров дают их уравненные значения

$$x_i^{yp.} = x_i^o + \delta x_i; \quad (127)$$

$$y_i^{yp.} = y_i^o + \delta y_i. \quad (128)$$

Для контроля полученных уравненных значений поправки, найденные из решения системы нормальных уравнений, подставляют в соответствующие уравнения поправок (122). Таким образом находятся поправки в сами измеренные величины. Добавляя эти поправки в измеренные значения, получают их уравненные значения.

Контроль правильности уравнивания можно выполнить двумя способами. Первый способ – по уравненным значениям измеренных величин вычислить невязки всех возникающих в сети геометрических условий см. подраздел 7.3.3. О правильности уравненных результатов будет говорить факт нулевых невязок. Второй способ заключается в вычислении ко-

ординат определяемых пунктов от разных исходных пунктов различными путями. Результаты определений координат должны совпадать.

7.4.4. Оценка точности результатов уравнивания

Среднюю квадратическую ошибку единицы веса вычисляют так же, как и в коррелятном способе (100)

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}.$$

Повторяется и формула вычисления средней квадратической ошибки m_F любого элемента геодезической сети

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}.$$

В параметрическом обратный вес этого элемента вычисляется по формуле

$$\frac{1}{P_F} = F^T Q F, \quad (129)$$

где F – вектор-столбец коэффициентов весовой функции (весовых коэффициентов)

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \mathbf{L} \\ f_n \end{bmatrix}; \quad (130)$$

$Q = N^{-1}$ – матрица весовых коэффициентов.

Оцениваемый элемент сети F представляется как функция вектора параметров (координат определяемых пунктов). Коэффициенты весовой функции (130) есть частные производные функции F по параметрам X .

Для плановых сетей формулы для вычисления весовых коэффициентов дирекционных углов или длины стороны будут такие же, как и при определении коэффициентов уравнений поправок (107), (113), (114).

Рассмотрим случай оценки точности собственно самих уравненных параметров. Он является частным случаем, так как необходимо использовать только конкретные диагональные элементы матрицы весовых коэффициентов. Средние квадратические ошибки координат пунктов находятся следующим образом:

$$m_{x_i} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{x_i}}} = \mu \sqrt{Q_{x_i x_i}}; \quad (131)$$

$$m_{y_i} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{y_i}}} = \mu \sqrt{Q_{y_i y_i}}. \quad (132)$$

Ошибка положения определяемого пункта

$$M_i = \sqrt{m_{x_i}^2 + m_{y_i}^2}. \quad (133)$$

7.5. Уравнивание линейно-угловой сети параметрическим способом

Рассмотрим пример использования параметрического способа уравнивания в линейно-угловой сети (рис. 51). Эта же конфигурация сети и нумерация углов были использованы при изложении некоторых условных уравнений в подразделе 7.4.2. В этом примере в состав измерений, кроме 14 углов, включены 8 измерений длин линий. Общее число измеренных величин $n = 22$.

Имеем четыре исходных пункта (1, 2, 5, 6) и два определяемых пункта (3, 4). Следовательно, число необходимых измерений $t = 4$. Число избыточных измерений $r = n - t = 18$.

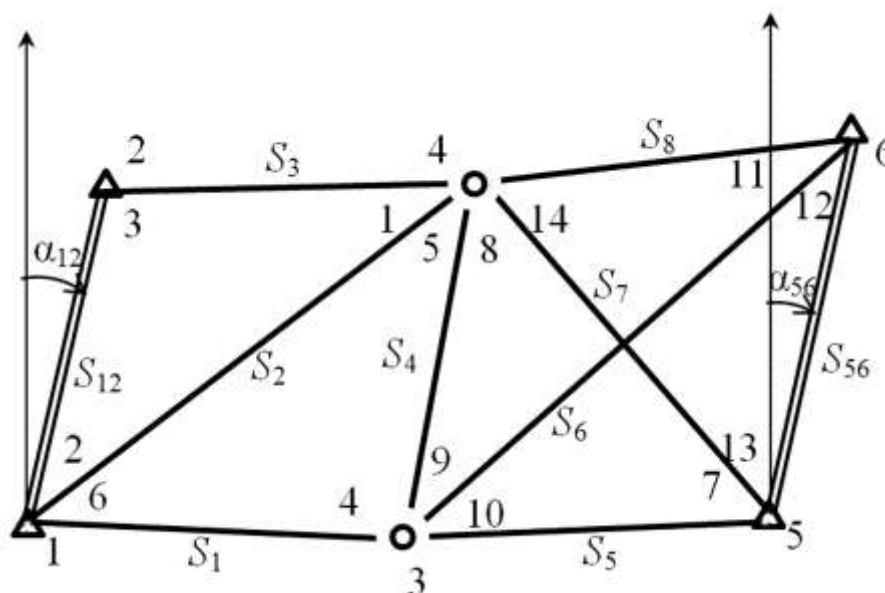


Рис. 51. Линейно-угловая сеть

Решаем треугольники, находя длины сторон по измеренным углам. Сверяем эти значения с измеренными длинами сторон. В треугольниках находим невязки. В дальнейшем они могут участвовать в контроле некоторых вычислений – свободных членов параметрических уравнений поправок. Контролируем значения невязок, сравнивая с допустимыми (см. подраздел 7.3.3).

Имеем значения всех элементов сети, по которым находятся приближенные значения координат определяемых пунктов – $x_3^0, y_3^0, x_4^0, y_4^0$. Способы их определения упомянуты в подразделе 7.4.1.

Используя найденные приближенные координаты пунктов 3, 4 и координаты исходных пунктов 1, 2, 5, 6, по формулам обратной геодезической задачи вычисляем приближенные значения дирекционных углов и длин сторон всей сети. Они будут использованы при нахождении коэффициентов уравнений поправок.

Число параметров определяется числом координат определяемых пунктов. В результате уравнивания должны быть получены поправки в приближенные значения параметров. Для данной сети вектор-столбец этих поправок в параметры следующий:

$$X = \begin{bmatrix} \delta x_3 \\ \delta y_3 \\ \delta x_4 \\ \delta y_4 \end{bmatrix}.$$

Используем параметрические уравнения поправок в измеренные углы и в расстояния в общем виде (110), (112). С учетом номеров пунктов сети, номеров измеренных углов и длин сторон мы должны составить 22 параметрических уравнения поправок. Для углов их число 14 и 8 для длин сторон. Кроме схемы сети (см. рис. 51) поможет рис. 50. Также учтем наличие в сети исходных пунктов. Приведем по два примера уравнений для каждого вида измерений

$$v_{\beta_1} = (a_{42} - a_{41})\delta x_4 + (b_{42} - b_{41})\delta y_4 + l_{\beta_1};$$

$$v_{\beta_6} = -a_{13}\delta x_3 - b_{13}\delta y_3 + a_{14}\delta x_4 + b_{14}\delta y_4 + l_{\beta_6};$$

$$v_{S_1} = -c_{13}\delta x_3 - d_{13}\delta y_3 + l_{S_1};$$

$$v_{S_4} = c_{34}\delta x_3 + d_{34}\delta y_3 - c_{34}\delta x_4 - d_{34}\delta y_4 + l_{S_4}.$$

Коэффициенты этих уравнений вычисляются по формулам (107), (113), (114), используя найденные дирекционные углы и длины сторон сети.

Для свободных членов этих уравнений формулы будут следующие:

$$l_{\beta_1} = \beta_1^0 - \beta_1; \quad l_{\beta_6} = \beta_6^0 - \beta_6;$$

$$l_{S_1} = S_1^0 - S_1; \quad l_{S_4} = S_4^0 - S_4.$$

Сумма свободных членов, образующих замкнутую фигуру (треугольник), равна невязке этого условия, взятой с обратным знаком. Это является контролем вычислений свободных членов.

Ранее упоминалась важность формирования матрицы весов измерений. Здесь мы имеем пример разнородных по виду измерений, уравнивать

которые предполагается совместно. Для установления весов воспользуемся классическим подходом (см. подраздел 7.4.1).

Как правило, в линейно-угловых построениях предполагается, что точность измерения всех углов одинакова, а средняя квадратическая ошибка измеренного угла принимается за ошибку единицы веса. Поэтому веса всех измеренных углов равны единице.

Веса измеренных расстояний можно определить по формуле

$$\rho_S = \frac{\mu^2}{m_S^2},$$

где μ , m_S – средние квадратические ошибки единицы веса и измеренных расстояний, соответственно. В линейно-угловых построениях за ошибку единицы веса принимается, как правило, средняя квадратическая ошибка измеренного угла m_β . Получаем

$$p_S = \frac{m_\beta^2}{m_S^2}.$$

В геодезических сетях 2-го класса горизонтальные углы измеряются со средней квадратической ошибкой, не превышающей одной секунды ($m_\beta = 1''$). Поэтому, вес измеренной стороны будет вычисляться

$$p_S = \frac{1}{m_S^2}.$$

Точность линейных измерений зависит от многих факторов, в том числе и от типа светодальномера, тахеометра. Как правило, априорная средняя квадратическая ошибка измеренного расстояния приводится в паспортных данных прибора. Например, это может выглядеть следующим образом:

$$m_S = 0,1 \text{ дм} + 0,05 \text{ дм } S_{\text{км}}.$$

Матрица весов будет составлена следующим образом:

$$P_{22 \times 22} = \begin{bmatrix} p_{\beta_1} & 0 & L & 0 \\ 0 & p_{\beta_2} & L & 0 \\ L & L & L & L \\ 0 & 0 & L & p_{s_8} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты параметрических уравнений поправок углов и длин сторон являются элементами матрицы коэффициентов параметрических уравнений поправок

$$A_{22 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{24} \\ L & L & L & L \\ a_{22.1} & a_{22.2} & L & a_{22.4} \end{bmatrix};$$

а вектор поправок в результаты измерений

$$V_{22 \times 1} = \begin{bmatrix} v_{\beta_1} \\ v_{\beta_2} \\ L \\ v_{s_8} \end{bmatrix};$$

вектор свободных членов параметрических уравнений поправок

$$l_{22 \times 1} = \begin{bmatrix} l_{\beta_1} \\ l_{\beta_2} \\ L \\ l_{s_8} \end{bmatrix}.$$

Последующие действия соответствуют формулам (123)–(126). В результате находятся поправки в параметры. Находим уравненные значения параметров

$$x_3^{yp.} = x_3^o + \delta x_3; \quad y_3^{yp.} = y_3^o + \delta y_3;$$

$$x_4^{yp.} = x_4^o + \delta x_4; \quad y_4^{yp.} = y_4^o + \delta y_4.$$

Выполняем контроль и оценку точности в соответствии с общим алгоритмом (см. подраздел 7.4.4). В качестве оцениваемых функций в рассматриваемой сети возьмем длину и дирекционный угол стороны 3–4. Векторы коэффициентов этих функций будут составлены из ранее вычисленных коэффициентов параметрических уравнений поправок, а именно

$$F_{S_{34}}^T = [c_{34} \quad d_{34} \quad -c_{34} \quad -d_{34}];$$

$$F_{\beta_{34}}^T = [a_{34} \quad b_{34} \quad -a_{34} \quad -b_{34}].$$

В итоге результаты оценки точности будут представлены следующими величинами:

μ ;

m_{x_3}, m_{y_3}, M_3 ;

m_{x_4}, m_{y_4}, M_4 ;

$m_{S_{34}}, \frac{m_{S_{34}}}{S_{34}}$;

$m_{\alpha_{34}}$.

8. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ. СИСТЕМЫ ВЫСОТ

8.1. Общие сведения из гравиметрии

Гравиметрия (от латинского *gravis* – тяжелый и греческого *μετροω* – измеряю) – это наука об измерении силы тяжести (напряженности гравитационного поля), т.е. абсолютной величины ускорения силы тяжести на поверхности Земли, а также других небесных тел.

В системе СИ единица ускорения силы тяжести имеет размерность м/с^2 . В геодезии и геофизике используют внесистемные единицы

$$1 \text{ мГал} = 10^{-5} \text{ м/с}^2 \text{ и } 1 \text{ мкГал} = 10^{-8} \text{ м/с}^2.$$

Для более четкого определения задачи гравиметрии рассмотрим создаваемое Землей поле силы тяжести. Любая масса, участвующая во вращении Земли вокруг своей оси, испытывает ускорение под действием сил тяготения (притяжения) масс Земли и других небесных тел, а также центробежное ускорение. Результирующим является ускорение силы тяжести g (рис. 52).

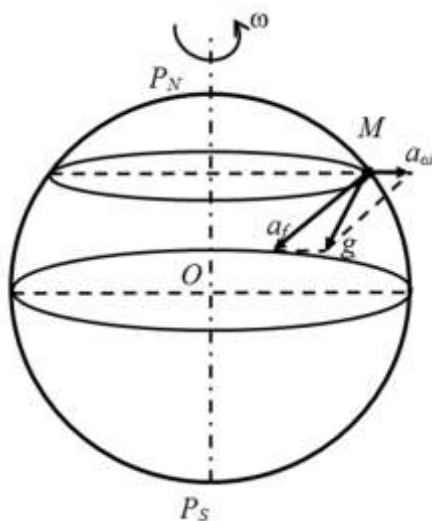


Рис. 52. Вектор силы тяжести

Таким образом, абсолютная величина ускорения силы тяжести g зависит от распределения масс в Земле и во внешнем пространстве, а также от скорости вращения Земли. Заметим, что распределение масс и вращение меняются во времени. Средняя величина g на поверхности Земли равна $9,80 \text{ м/с}^2$.

Различия в местоположении (от экватора до полюса) и высоте вызывают изменения силы тяжести не более чем $5 \cdot 10^{-3} g$. Возмущающие массы (неоднородность строения Земли), расположенные в коре или в мантии или ближе к поверхности, дают изменения соответственно на $5 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-5} g$. Влияние приливов достигает $3 \cdot 10^{-7} g$.

Итак, задачей гравиметрии является определение гравитационного поля Земли и других небесных тел как функции местоположения и времени по измерениям силы тяжести и гравитационных градиентов на поверхности тела или вблизи нее.

Для более детального изучения гравитационного поля используют наземные измерения силы тяжести, которые выполняются специальными приборами – гравиметрами. При этом измеряемые значения силы тяжести g сравнивают с вычисленными значениями нормальной силы тяжести γ и определяют аномалии силы тяжести $\Delta g = g - \gamma$.

Полученные таким образом аномалии Δg во множестве точек некоторой территории используют для составления гравиметрических карт, на которых поле аномалий изображают в виде семейства изолиний $\Delta g = \text{const}$. Процесс наземных измерений силы тяжести с целью составления гравиметрических карт называют гравиметрической съемкой. Результаты гравиметрических съемок широко используются геофизиками для выявления неоднородностей распределения масс в земной коре. В геодезии результаты гравиметрических съемок используют для определения высот геоида и уклонов отвеса.

8.2. Ускорение силы тяжести и потенциал силы тяжести

Оценивать характеристики поля и анализировать гравиметрические данные нам позволяет теория поля силы тяжести. Рассмотрим наиболее важные понятия этой теории, а именно, ускорение силы тяжести и потен-

циал силы тяжести как скалярную функцию местоположения (имеющую аргументами пространственные координаты).

Ускорение силы тяжести g , действующее на единичную массу, является суммой ускорения притяжения a_f и центробежного ускорения a_w (см. рис. 52). Притяжение Земли определяется законом тяготения Ньютона:

$$a_f = G \iiint_{\substack{\text{масса} \\ \text{Земли}}} \frac{r' - r}{|r' - r|^3} dm, \quad (134)$$

где r' и r – геоцентрические векторы положения точки P' (элементарная притягивающая масса dm) и притягиваемой массы P (единичная масса, $m = 1$). Гравитационная постоянная

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}. \quad (135)$$

Центробежное ускорение определяется вектором ω угловой скорости вращения Земли и расстоянием d от оси вращения

$$a_w = \omega^2 d. \quad (136)$$

Угловая скорость вращения Земли $\omega = 7,292 \ 115 \cdot 10^{-5}$ рад/с.

Для упрощения описания поля сила тяжести и соответствующих вычислений вместо векторной величины ускорения силы тяжести введено понятие потенциала. Это абстрактно (неосвязаемо) существующее в пространстве поле W скалярных величин (чисел). Потенциал представляет собой работу, необходимую для перемещения единичной массы в поле силы тяжести.

Вектор силы тяжести и ее потенциал связаны соотношением

$$G = \text{grad } W. \quad (137)$$

Составляющие вектора силы тяжести по заданным направлениям будут частными производными от функции W . Например, в геоцентрической системе координат X, Y, Z вектор силы тяжести будет

$$g^T = (W_X, W_Y, W_Z), \quad (138)$$

где $W_X = \frac{\partial W}{\partial X}$; $W_Y = \frac{\partial W}{\partial Y}$; $W_Z = \frac{\partial W}{\partial Z}$.

Кроме составляющих вектора силы тяжести, поле потенциала силы тяжести позволяет достаточно легко вычислять другие характеристики гравитационного поля (трансформанты), а именно, составляющие уклонения отвесной линии, аномалию высоты (расстояние от поверхности эллипсоида до квазигеоида (геоида)).

8.3. Геометрия поля силы тяжести

Поле силы тяжести обычно геометрически представляют поверхностями постоянного потенциала. Эти поверхности называют эквипотенциальными, или уровнем. Также в геометрическом представлении используют силовые линии, пересекающие под прямым углом уровенные поверхности (рис. 53).

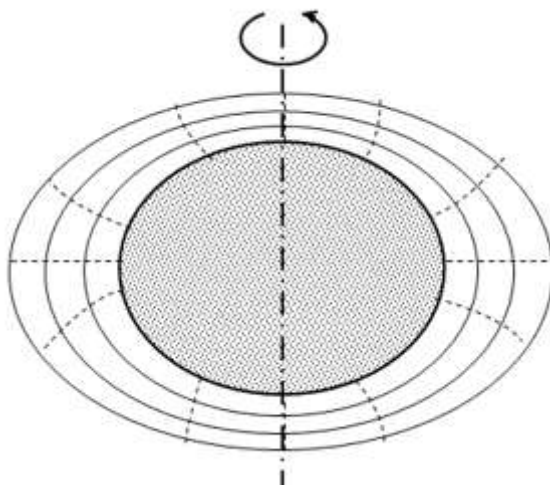


Рис. 53. Силовые линии поля нормальной силы тяжести
(показаны штриховыми линиями)

8.4. Уровенный эллипсоид

Реальное поле силы тяжести удобно описывать моделями, достаточно близкими для решения многих задач. Существуют оптимальные, гармонические модели. Достаточно простыми являются стандартные модели.

Стандартные модели позволяют сравнительно легко находить величины силы тяжести на поверхности Земли по координатам пунктов. Создающее поле тело должно быть простой формы и соответствовать геометрической модели Земли. Поле силы тяжести этой модели называется нормальным. Оно должно настолько приближаться к реальному, чтобы их различие (аномалия) описывалось линейными функциями. При этом, нормальное поле силы тяжести должно соответствовать принятым в геофизике моделям распределения плотности в теле Земли, иначе станет невозможной геофизическая интерпретация аномальных величин. В настоящее время таким полем является поле уровня эллипсоида.

Уровненный эллипсоид – это эллипсоид вращения (см. раздел 3) с массой Земли M и угловой скоростью ω . Поверхность эллипсоида – уровенная поверхность нормального поля силы тяжести. Поле эллипсоида симметрично относительно оси вращения и плоскости экватора. Предположения о распределении масс внутри эллипсоида не требуется.

Сила тяжести γ , соответствующая нормальному потенциалу U , получила название нормальной силы тяжести. Для вычисления нормальной силы тяжести γ_0 на поверхности земного эллипсоида используют формулу вида

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B), \quad (139)$$

где γ_e – нормальная сила тяжести на экваторе;

$\beta = (\gamma_p - \gamma_e) / \gamma_e$ – коэффициент, зависящий от разности силы тяжести на полюсе γ_p и на экваторе γ_e и называемый гравиметрическим сжатием (по аналогии с геометрическим сжатием α).

Формулу (139) принято называть формулой нормальной силы тяжести. Она отражает глобальную закономерность изменения силы тяжести в зависимости от широты.

Для вычисления нормальной силы тяжести γ в точке, расположенной на высоте H над поверхностью эллипсоида, используют формулу

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{d\gamma}{dH} H, \quad (140)$$

где $d\gamma/dH = 0,308$ мгл/м – вертикальный градиент нормальной силы тяжести, определяющий ее уменьшение с высотой.

Формулы (139) и (140) позволяют вычислять значения нормальной силы тяжести в любой точке по ее широте и приближенной высоте над поверхностью эллипсоида.

Величины γ_e , β и $d\gamma/dH$, входящие в формулы (139) и (140), являются параметрами модели силы тяжести Земли. Они связаны с параметрами M и ω модели нормального потенциала U . Значения параметров γ_e и β определяют эмпирически, путем обработки большого числа гравиметрических измерений.

Значения силы тяжести на поверхности эллипсоида просто вычисляются по значению геодезической широты точки. На экваторе сила тяжести $9,780\,327\text{ м/с}^2$, а на полюсе $9,832\,186\text{ м/с}^2$.

Потенциал U , описывающий нормальное поле силы тяжести, соответственно и называется нормальным потенциалом. На поверхности эллипсоида он принят как $62\,636\,860,849\,7\text{ м}^2/\text{с}^2$.

Нормальный потенциал может быть представлен в виде модели

$$U = \frac{GM}{r} \cdot \left[1 - \frac{a_o^2}{r^2} \cdot J_2 \cdot P_2(\sin \Phi) \right] + \frac{\omega^2 r^2}{2} \cdot \cos^2 \Phi, \quad (141)$$

где GM – геоцентрическая гравитационная постоянная, равная произведению гравитационной постоянной притяжения G на массу Земли M ;

J_2 – второй зональный гармонический коэффициент разложения потенциала в ряд по сферическим функциям;

a_o – вспомогательный нормирующий множитель (обычно принимают равным большой полуоси земного эллипсоида);

r и Φ – радиус вектор и геоцентрическая широта точки пространства соответственно;

$P_2(\sin \Phi) = 1/2(3\sin^2 \Phi - 1)$ – полином Лежандра 2-й степени.

Первые два слагаемых формулы (141) представляют собой модель гравитационного притяжения Земли, а последнее слагаемое – модель потенциала центробежного ускорения. Величины GM и J_2 являются параметрами модели.

Постоянная GM задает потенциал шарообразной планеты, имеющей массу M . Коэффициент J_2 определяет отличие нормального потенциала от потенциала шара и связан со сжатием α земного эллипсоида равенством

$$\alpha = \frac{3}{2} \cdot J_2 + \frac{\omega^2 a_o^2}{2fM}. \quad (142)$$

Теперь действительный потенциал силы тяжести можно представить как сумму нормального U и аномального (возмущающего) T потенциалов

$$W = U + T. \quad (143)$$

T – аномальный, или возмущающий, потенциал – малая величина по сравнению с U . Отношение значений T с нормальным U на реальной физической поверхности Земли составляет примерно десятки миллионов раз и более. И данное обстоятельство во многом облегчает задачу описания поля силы тяжести на поверхности Земли, используя геодезические, астрономические и гравиметрические наблюдения. Кроме удобств вычислительного плана, есть возможность детального изучения гравитационного влияния как глобальных, региональных, так и локальных природных объектов, при этом меняющихся во времени.

8.5. Трансформанты потенциала (характеристики) уклонения отвесной линии и аномалия высоты

Уклонением отвесной линии называется угол u , образованный при несовпадении отвесной линии, проведенной в точке на земной поверхности перпендикулярно геоиду, с проведенной в этой же точке перпендикулярно к эллипсоиду нормалью. Различают два основных фактора такого несовпадения. Даже для эллипсоида, представляющего собой правильное математическое тело, заполненное абсолютно однородной по плотности массой (нормальный эллипсоид), вследствие его сжатости с полюсов и различий влияния центробежной силы (см. рис. 52) возникает непараллельность уровенных (эквипотенциальных) поверхностей (см. рис. 53).

Второй причиной является наличие рельефа, различий плотности масс, распределенных в теле Земли (рис. 54). Иначе можно говорить, что

где-то есть дефицит масс, а где-то – избыток. В линейной мере несовпадение поверхности эллипсоида и геоида называется аномалией высоты. Соответственно, для силы тяжести существуют отрицательные или положительные аномалии. Если для плотности масс твердой оболочки в среднем по Земле принята плотность $2,63 \text{ г/см}^3$, то плотность соленой воды морей и океанов $1,1 \text{ г/см}^3$ (рис. 55).



Рис. 54. Влияние распределения масс на форму уровенных поверхностей

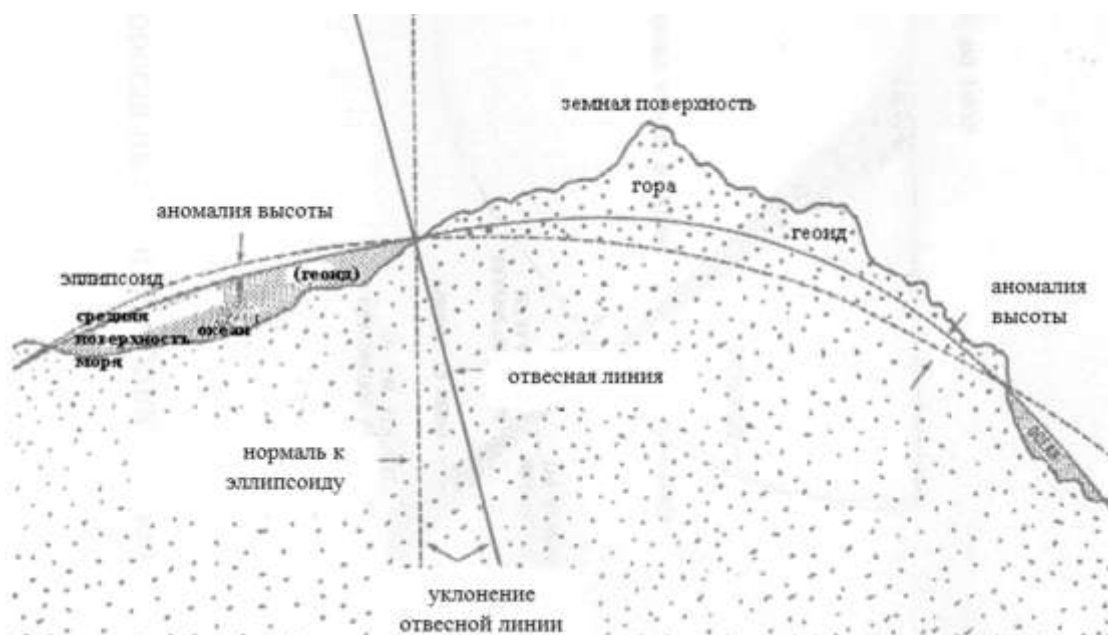


Рис. 55. Влияние рельефа и различной плотности суши и воды

Иллюстрация влияния аномальных масс на глубине приповерхностного слоя земной коры показана рис. 56.

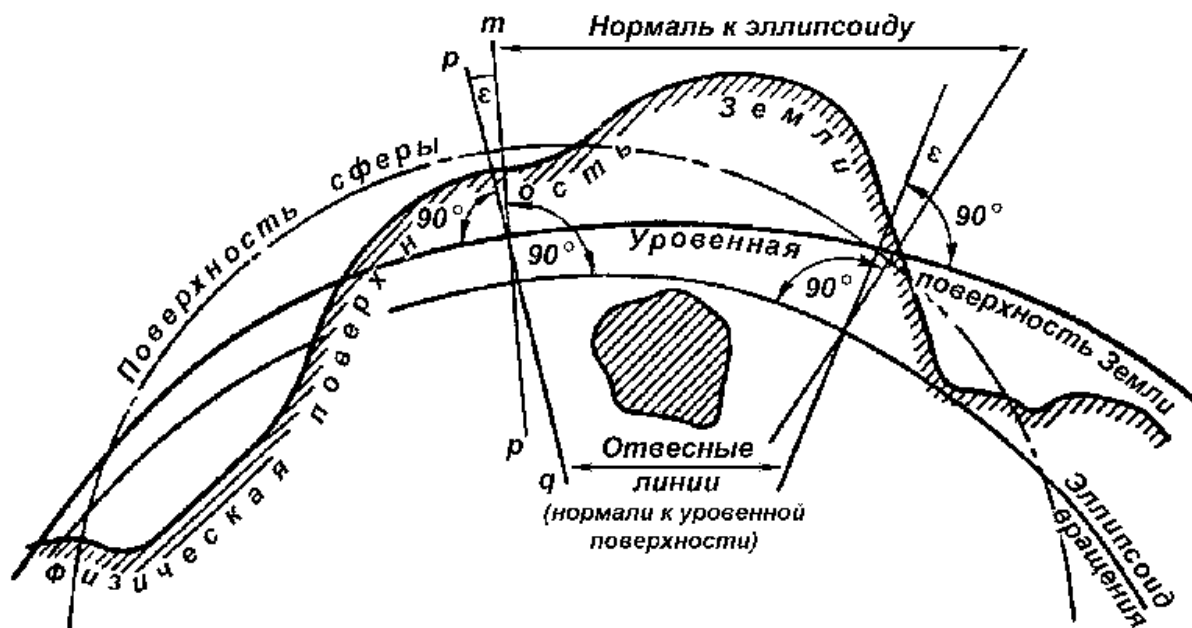


Рис. 56. Влияние рельефа и аномальных масс в приповерхностном слое

Уклонение отвесной линии от нормали к общеземному эллипсоиду называется абсолютным, а от нормали к референц-эллипсоиду – относительным.

Уклонение отвесных линий u в любой точке для практических целей обычно рассматривают не целиком, а в проекции на плоскость меридиана ξ и на плоскость 1-го вертикала η .

В процессе измерения горизонтальных направлений ось теодолита располагается по отвесной линии, а коллимационная плоскость, определяющая направление на наблюдаемый пункт, является вертикальной плоскостью. Между тем, для определения соответствующего направления на поверхности эллипсоида необходимо использовать нормальную плоскость. Следовательно, для редуцирования горизонтального направления на эллипсоид необходимо учесть несовпадение отвесной линии и нормали, что осуществляется введением в горизонтальное направление поправки за уклонение отвесной линии.

Поправка за уклонение отвеса δu_{ik} в направления с пункта i на пункт k вычисляется по формуле

$$\delta u_{ik} = (\eta_i \cos A_{ik} - \xi_i \sin A_{ik}) \operatorname{ctg} z_{ik}, \quad (144)$$

где ξ_i , η_i – составляющие уклонения отвеса в пункте наблюдения;

A_{ik} – азимут направления ik ;

z_{ik} – зенитное расстояние на наблюдаемый пункт k .

Зенитные расстояния на наблюдаемые пункты геодезических сетей в равнинной местности обычно близки к 90° . Если учесть, что составляющие уклонения отвеса не превышают $10''$, то значения поправок δu_{ik} составляют доли секунд. Однако влияние уклонения отвесных линий на горизонтальные направления имеет систематический характер. Поэтому при обработке высокоточных угловых измерений поправки δu_{ik} обязательно вводятся в горизонтальные направления сетей 1-го и 2-го класса даже в равнинной местности. В горной местности, где зенитные расстояния значительно отличаются от 90° , эти поправки вносятся в направления сетей всех классов.

Поправки δH_{ik} даже при высотах наблюдаемых визирных целей порядка 1 000 м выражаются в сотых долях секунды. Поэтому эти поправки используют при обработке сетей 1-го и 2-го классов в горной местности.

8.6. Теория высот

Геодезические высоты, характеризующие отступления земной поверхности от поверхности эллипсоида, используются для изучения фигуры Земли и для редуционных задач. Непосредственное их определение стало возможным лишь сравнительно недавно с появлением методов космической геодезии.

Традиционный метод определения геодезических высот предполагает их разделение на две части: гипсометрическую и геоидальную.

Гипсометрическими высотами называют высоты точек земной поверхности, определяемые методом нивелирования над некоторой опорной

поверхностью, проходящей через начало счета высот. Обычно в качестве такой поверхности принимают геоид или близкую к нему поверхность. Эти высоты часто называют высотами «над уровнем моря».

Геоида́льная часть геодезической высоты определяет высоты поверхности, принятой в качестве опорной, над поверхностью эллипсоида, т. е. это высоты геоида или близкой к нему поверхности над эллипсоидом.

Гипсометрические высоты, кроме их использования в качестве составной части геодезических высот, широко применяются в геодезии и картографии для описания рельефа земной поверхности.

При определении гипсометрических высот возникает ряд проблем, связанных с неоднородной структурой гравитационного поля. Существует несколько подходов к решению этих проблем, что привело к возникновению разновидностей гипсометрических высот, имеющих специальные названия. Для этих разновидностей высот термин «гипсометрические высоты» следует считать объединяющим.

Основной проблемой, возникающей в процессе определения гипсометрических высот, является зависимость суммы измеренных нивелирных превышений от пути нивелирования. Для уяснения причин этой зависимости обратимся к рис. 57.

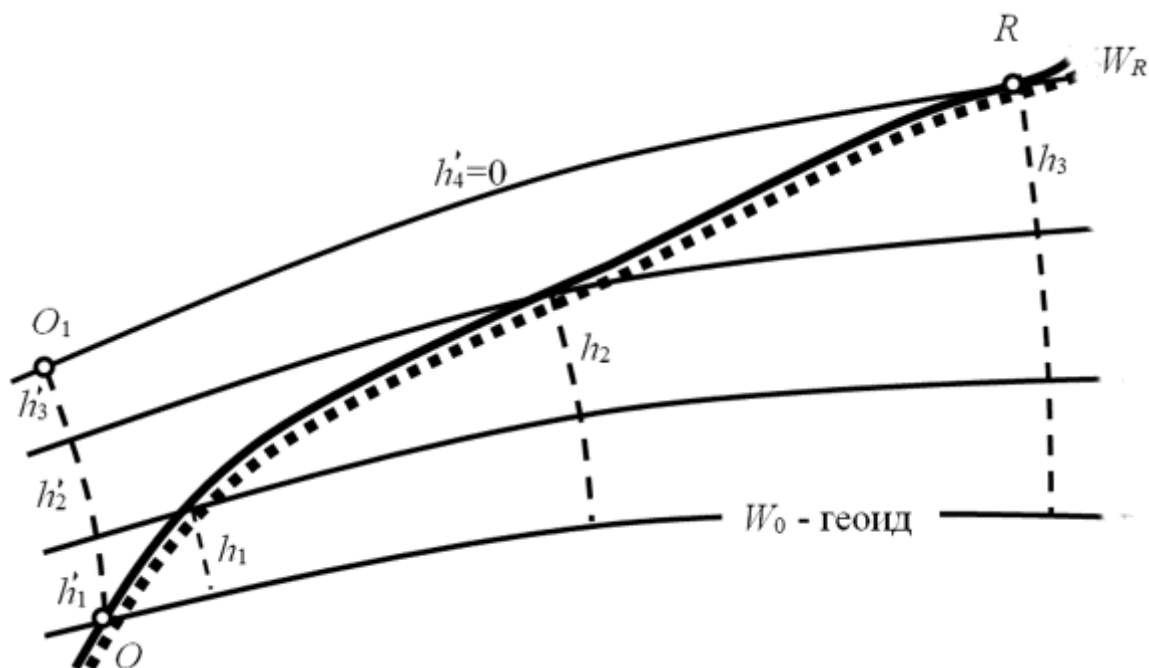


Рис. 57. Зависимость превышения от пути нивелирования

На нем точка O изображает начало счета высот. Она находится на поверхности геоида, имеющей потенциал W_O . Точка R изображает репер, высоту которого над поверхностью геоида необходимо определить. Через него проходит уровенная поверхность W_R .

Уровенные поверхности W_O и W_R не параллельны и их расположение свидетельствует о том, что сила тяжести уменьшается от точки O к точке R (согласно лемме Брунса).

Предположим, что высота репера R определяется путем суммирования превышений вдоль нивелирного хода, проложенного по линии OR . При этом на каждой станции нивелирования определяется расстояние между уровенными поверхностями, проходящими через пятки пары реек. Так как при высокоточном нивелировании расстояния между рейками не превышают 150 м, можно считать, что измеренное превышение определяет некоторое среднее расстояние между уровенными поверхностями на станции нивелирования.

На рис. 57 показаны 3 превышения h_1 , h_2 и h_3 , измеренные по линии OR , и проведены соответствующие промежуточные уровенные поверхности.

Однако возможен другой путь нивелирования, например, по линии OO_1R , где будут измерены превышения h'_1 , h'_2 , h'_3 и $h'_4 = 0$ (так как точки O_1 и R расположены на одной уровенной поверхности).

Рис. 57 наглядно подтверждает, что из-за непараллельности уровенных поверхностей сумма превышения $\sum h_i$, измеренных по линии OR , не равна сумме превышений $\sum h'_i$, измеренных по линии OO_1R . Следовательно, высота репера R , определенная как сумма измеренных превышений по ходу нивелирования от начала счета высот, зависит от пути нивелирования.

Опираясь на этот простейший пример, можно прийти к выводу, что передача высот путем суммирования превышений, измеренных по ходу нивелирования, приводит к неоднозначным результатам. Например, высота некоторого репера в Новосибирске относительно нуля Кронштадского футштока (водомерной рейки), который принят в России и СНГ за начало

счета высот, будет зависеть от выбора трассы нивелирного хода. Проложив нивелирный ход от Санкт-Петербурга до Новосибирска вдоль железной дороги, получим одну высоту, а проложив нивелирный ход по берегу Ледовитого океана и подойдя к Новосибирску, двигаясь вверх по течению р. Оби, получим другую высоту.

Важно подчеркнуть, что речь идет об отличии высот не за счет случайных ошибок измерений (которые, конечно, влияют на результаты), но о систематическом влиянии непараллельности уровенных поверхностей вдоль линии нивелирования. Вдоль разных трасс встречаются различные неоднородности гравитационного поля, по-разному влияющие на результаты измерений.

Очевидно, что чисто геометрический подход к определению высот путем простого суммирования превышений не может быть положен в основу системы высот. Поэтому был разработан метод определения высот, обеспечивающий учет неоднородностей гравитационного поля на результаты нивелирования, в основу которого положено понятие геопотенциала.

Геопотенциалом репера называют разность потенциалов между потенциалом уровенной поверхности, проходящей через начало счета высот, и потенциалом уровенной поверхности, на которой находится данный репер.

Например, геопотенциалом репера R , изображенного на рис. 58, является разность потенциалов $\Delta W_R = W_O - W_R$ между потенциалом геоида W_O , на котором располагается точка O (начало счета высот) и потенциалом W_R уровенной поверхности, проходящей через репер R .

Разность потенциалов ΔW_R численно равна работе по преодолению силы тяжести, необходимой для перемещения единицы массы с поверхности W_O на поверхность W_R . Она не зависит от пути перемещения массы и определяется криволинейным интегралом

$$\Delta W_R = \int_{ik} g \cdot dh, \quad (145)$$

где ik – любая кривая, соединяющая любую пару точек i и k , находящихся на поверхностях W_O и W_R соответственно;

g – значение силы тяжести в текущей точке интегрирования;

dh – элементарное расстояние между уровнями поверхностями в текущей точке.

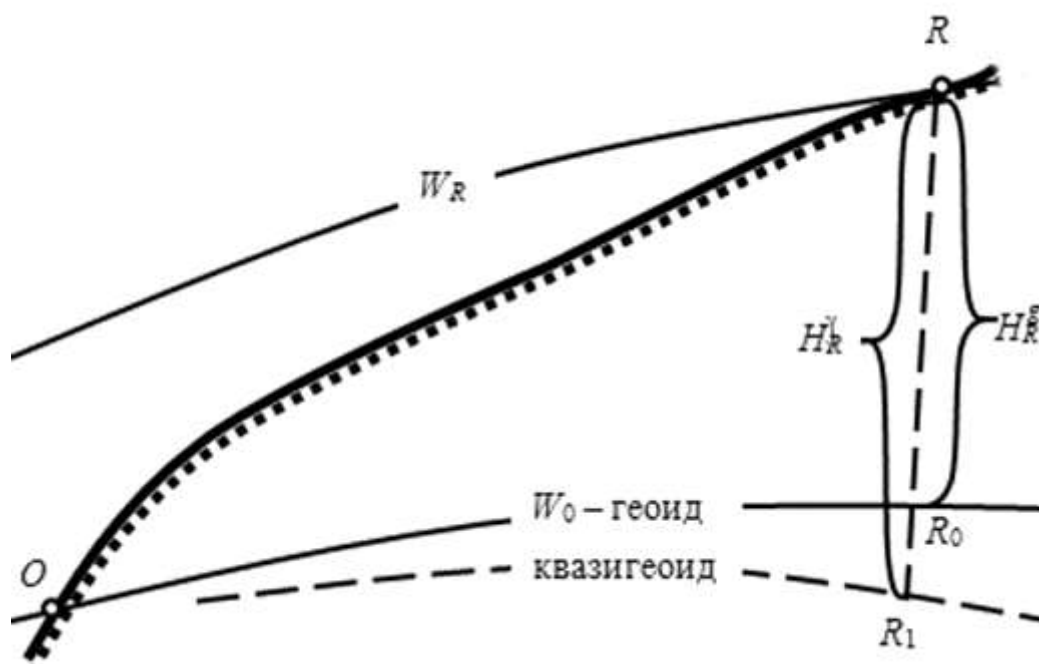


Рис. 58. Геопотенциал $\Delta W_R = W_O - W_R$

В частности, для линии нивелирования OR , изображенной на рис. 58, геопотенциал ΔW_R репера R можно представить в виде

$$\Delta W_R = \int_{OR} g \cdot dh, \quad (146)$$

где g – значения силы тяжести в точках нивелирного хода;

dh – элементарное превышение.

Частное от деления работы на действующую силу равно пройденному расстоянию. Следовательно, поделив значение геопотенциала ΔW_R репера R на среднее значение g_m силы тяжести на отрезке RR_O силовой линии, проходящей через этот репер, получим расстояние RR_O , т. е. высоту H_R^g репера R над поверхностью геоида

$$H_R^g = \frac{\Delta W_R}{g_m}. \quad (147)$$

Высоты над поверхностью геоида, определяемые через геопотенциал согласно выражению (147), получили название ортометрических высот.

Так как геопотенциал ΔW_R не зависит от пути нивелирования, ортометрические высоты также не зависят от него. Однако определение ортометрических высот встречает трудности, связанные с необходимостью знать среднее значение g_m силы тяжести на отрезке силовой линии от поверхности геоида до репера, т. е. под земной поверхностью. Эта величина сложным образом зависит от плотности масс в земной коре, которую можно определить лишь приближенно, руководствуясь данными геологических или геофизических исследований.

Так как проводить такие исследования на каждом репере затруднительно, практически используют некоторые усредненные значения вертикального градиента dg/dH , характеризующего изменения силы тяжести с высотой внутри масс, который определяют, исходя из геологических и геофизических данных о плотности масс для отдельных регионов. При этом необходимое среднее значение силы тяжести на отрезке силовой линии от репера до геоида определяют как $g_m = g + 1/2(dg/dH) \cdot H$, где g – значение силы тяжести на репере; H – приближенное значение высоты.

В результате ортометрические высоты зависят от гипотетического значения градиента dg/dH , принятого для данного региона, что нарушает однозначность их определения на территории в целом.

Несмотря на этот недостаток, система ортометрических высот используется во многих странах. Для небольших стран недостатки этой системы сказываются незначительно.

В России и соседних странах используется система высот, лишенная недостатка, присущего ортометрическим высотам. Эту систему разработал в 1940-х гг. М. С. Молоденский. Он предложил при определении высоты через геопотенциал вместо среднего значения g_m действительной силы тяжести, входящего в формулу (147), использовать аналогичное среднее значение γ_m нормальной силы тяжести.

Тогда высота репера R , выраженная через его геопотенциал, определится следующим равенством:

$$H_R = \frac{\Delta W_R}{\gamma_m}, \quad (148)$$

где $\gamma_m = \gamma_0 + 1/2(d\gamma/dH) \cdot H$ – среднее значение нормальной силы тяжести на отрезке силовой линии длиной H .

Для определения значения γ_m достаточно воспользоваться формулой нормальной силы тяжести (139) и значением ее вертикального градиента $d\gamma/dH = -0,308$ мгл/м.

Высоты, определяемые через геопотенциал согласно формуле (148), получили название нормальных высот. Такое название связано с тем, что для перехода от геопотенциала к высоте используется нормальная сила тяжести. Этот же смысл заложен в принятом обозначении этих высот с использованием верхнего индекса γ .

Так как нормальные высоты определяются через геопотенциал, они, так же как ортометрические, не зависят от пути нивелирования. Главное их преимущество перед ортометрическими заключается в том, что для их определения вместо региональных гипотетических значений вертикального градиента dg/dH , характеризующего изменение силы тяжести с высотой внутри масс, используется глобальное значение $d\gamma/dH$. Это обеспечивает однозначность определения высот на всей территории государства или группы государств, где используется система нормальных высот.

Своего рода платой за это единообразие является тот факт, что нормальные высоты нельзя считать измеренными над поверхностью геоида. Это очевидно из сравнения формул (147) и (148). В числителях этих формул фигурирует неизменное значение геопотенциала ΔW_R , тогда как используемые в знаменателях значения g_m и γ_m отличаются за счет наличия аномалий. Например, нормальной высоте H_R репера R на рис. 58 будет соответствовать отрезок RR_1 , конец которого (точка R_1) не будет находиться на поверхности геоида.

Если от точек земной поверхности по направлению силовых линий отложить нормальные высоты, то получится поверхность, близкая к поверхности геоида, которую М. С. Молоденский предложил называть квазигеоидом (по латыни приставка «квази» означает «почти»). На рис. 58 квазигеоид показан штриховой линией, проходящей через точку R_1 .

На акватории морей и океанов квазигеоид совпадает с поверхностью геоида, а под сушей отклоняется от нее на величину, не превышающую 2 м. Это максимальное отклонение характерно для горных областей. В равнинных районах оно составляет величину менее одного метра. Под поверхностью суши квазигеоид не является уровенной поверхностью.

Если нормальные высоты используются в качестве гипсометрической части геодезических высот, то геоидальную часть называют высотой квазигеоида, или аномалией высоты. При этом геодезическая высота определяется как сумма $H = H^\gamma + \zeta_{\text{кг}}$, где $\zeta_{\text{кг}}$ – высота квазигеоида над эллипсоидом.

Формула (148) отражает теоретический подход к определению нормальных высот. Практическое определение нормальных высот осуществляется путем учета особенностей гравитационного поля вдоль линий высокоточного нивелирования. Для этого необходимо от превышений, измеренных по ходу нивелирования, перейти к превышениям нормальных высот.

Превышение нормальных высот ΔH_{ik} между реперами i и k можно представить в виде

$$\Delta H_{ik} = \frac{1}{\gamma_{m\ ik}} \int g dh = \frac{1}{\gamma_{m\ ik}} \int (\gamma + \Delta g) dh, \quad (149)$$

где γ и Δg – нормальная сила тяжести и аномалия в текущей точке интегрирования, т. е. в точках трассы нивелирования.

Интеграл (149) аналогичен интегралу (146) и определяет приращение потенциала $\Delta W_{ik} = W_k - W_i$ между потенциалами уровенных поверхностей, проходящих через реперы i и k .

Расстояние между реперами обычно не превышает 6–7 км. Учитывая, что на таких расстояниях значения γ и Δg изменяются практически линей-

но, можно от непрерывных значений этих величин, стоящих под знаком интеграла (149), перейти к дискретным значениям и вывести следующую рабочую формулу для вычисления превышения нормальных высот:

$$\Delta H_{ik} = h_{ik} - \frac{1}{\gamma_m} (\gamma_0^i - \gamma_0^k) H_m + \frac{1}{\gamma_m} \Delta g_m h_{ik} = h_{ik} + f_{ik}, \quad (150)$$

где h_{ik} – измеренное превышение между реперами i и k ;

γ_0^i и γ_0^k – значения нормальной силы тяжести на эллипсоиде, рассчитанное по формуле вида (139) для широт реперов i и k ;

$H_m = (H_i + H_k) / 2$ – средняя приближенная высота реперов i и k ;

$\Delta g_m = (\Delta g_i + \Delta g_k) / 2$ – средняя аномалия;

$\gamma_m = 980\,000$ мгл.

В итоге определение превышений нормальных высот сводится к введению в измеренные превышения h_{ik} поправок f_{ik} . Их называют поправками за переход к системе нормальных высот.

Первая часть поправки f_{ik} учитывает непараллельность уровенных поверхностей нормального потенциала, обусловленную глобальным изменением силы тяжести от экватора к полюсам. Вторая часть этой поправки учитывает долю непараллельности уровенных поверхностей, связанную с аномальностью поля.

Данные об аномалиях вдоль нивелирного хода, необходимые для вычисления второй части поправок f_{ik} , обычно снимают с гравиметрических карт.

Поправки за переход к системе нормальных высот в отдельные превышения невелики и выражаются в миллиметрах. Однако они имеют систематический характер и при передаче высот с высокой точностью на большие расстояния (порядка тысяч километров) учитываются обязательно. Согласно действующей инструкции, эти поправки вводятся в превышения при обработке нивелирных сетей I и II классов, а в горной местности – также и сетей III класса.

9. НИВЕЛИРНЫЕ (ВЫСОТНЫЕ) ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СЕТИ

9.1. Структура построения нивелирных сетей

Наиболее полное описание вопросов создания государственной нивелирной сети России приведено в Инструкции по нивелированию I, II, III и IV классов [10]. Материал данного раздела во многом основан на этой инструкции.

Государственная нивелирная сеть Российской Федерации предназначена для распространения единой системы высот на территории всей страны, она является высотной основой всех топографических съемок и инженерно-геодезических работ, выполняемых для удовлетворения потребностей экономики, науки и обороны страны. По точности ГНС делится на I, II, III, IV классы (рис. 59). Классы III, IV – точные, а I, II – высокоточные.

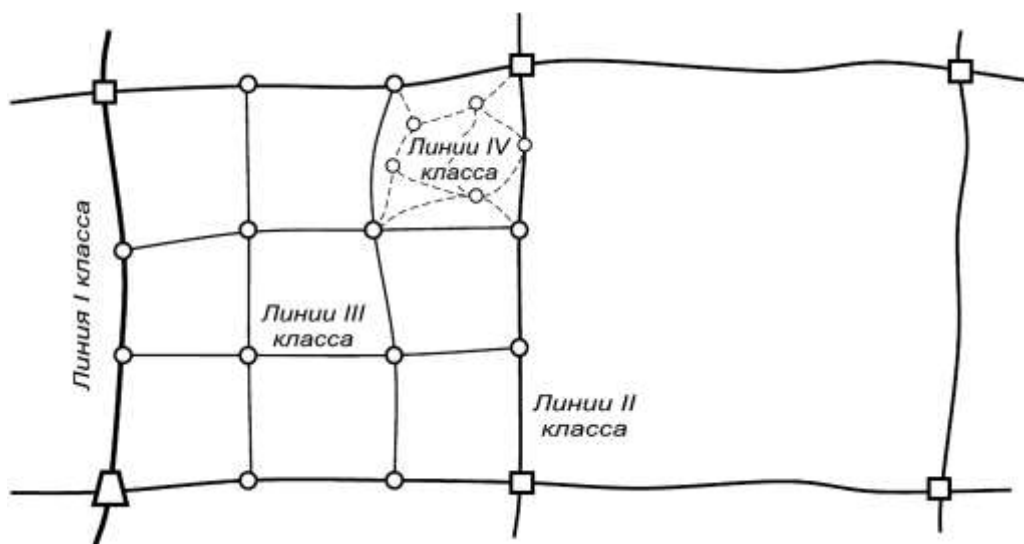


Рис. 59. Пример структуры высотной сети

На всю территорию страны устанавливают единую систему высот и связывают между собой основные водомерные посты. На всей террито-

рии России вычисление высот производится в нормальной системе высот от нуля Кронштадтского футштока. Эта система называется Балтийской. За ноль Кронштадтского футштока принята горизонтальная черта на медной пластине футштока.

Государственные нивелирные сети I и II классов – главная высотная основа России. Эти сети создаются по специально разработанным программам и схемам, предусматривающим выполнение нивелирных работ I и II классов.

Нивелирные сети I и II классов используются для решения следующих научных задач:

- изучения фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля;
- определения разностей высот и наклонов среднеуровенной поверхности морей и океанов, омывающих территорию России.

Результаты повторного нивелирования I и II классов применяют для решения следующих задач:

- поддержания высотной сети на современном уровне;
- изучения современных вертикальных движений земной поверхности;
- прогнозирования влияния производства на окружающую среду, особенно при добыче нефти, газа и других полезных ископаемых;
- сейсмического районирования территории России, выявления предвестников землетрясений.

В горных районах результаты повторного нивелирования используют для изучения строения земной коры, получения данных о скоростях и направленности движений отдельных блоков, выявления действующих разломов и разрывов в земной коре.

9.2. Рекомендации проектирования нивелирных сетей

Линии нивелирования I и II классов прокладывают преимущественно вдоль шоссейных или железных дорог, а при их отсутствии, особенно в северных труднодоступных и северо-восточных районах страны, – по берегам рек, тропам и зимникам. Во всех случаях линии нивелирования I и II классов прокладывают по трассам с наиболее благоприятными для данного района грунтовыми условиями и с наименее сложным рельефом.

Нивелирование I класса выполняют с наивысшей точностью, которую можно получить, применяя современные приборы и методы наблюдений, позволяющие наиболее полно исключать систематические ошибки нивелирования. Полученные из обработки значения случайных и систематических средних квадратических ошибок нивелирования I класса и допустимые невязки в полигонах I класса не должны превышать значений, приведенных в табл. 4. Периметры полигонов приведены в табл. 5.

Таблица 4

Точностные характеристики классов нивелирования

Класс нивелирования	Средняя квадратическая ошибка		Допустимые невязки в полигонах и по линиям f , мм
	случайная η , мм/км	систематическая σ , мм/км	
I	0,8	0,08	3 мм \sqrt{L}
II	2,0	0,20	5 мм \sqrt{L}
III	5,0	—	10 мм \sqrt{L}
IV	10,0	—	20 мм \sqrt{L}

Таблица 5

Периметры полигонов

Класс нивелирования	Периметры нивелирных полигонов, км				
	Обжитые районы России	Малообжитые районы России	Локальные и площадные геодинамические полигоны	Города	
				застроенная территория	незастроенная территория
I	1 200	2 000	40		
II	400	1 000	20	50	80
III	60–150	100–300		25	40
IV	20–60	25–80		8	12

Через каждые 25 лет, а в сейсмоактивных районах через каждые 15 лет нивелируются повторно все линии I класса и через 35 и 25 лет соответственно — линии II класса. Сейсмоактивные районы устанавливают по картам сейсмического районирования России.

Нивелирная сеть II класса создается внутри полигонов I класса как отдельными линиями, так и в виде системы линий с узловыми пунктами, образуя полигоны. Полученные из обработки значения случайных и систематических средних квадратических ошибок нивелирования II класса, допустимые невязки полигонов и их периметры не должны превышать значений, указанных в табл. 4 и 5. В линии государственного нивелирования включают или привязывают к ней пункты спутниковой геодезической сети: ФАГС, ВГС и СГС-1.

Сети I и II классов создаются по специально разработанным программам и схемам.

Сеть I класса состоит из ходов геометрического нивелирования продолженных с СКО $m_{h_{\text{км}}} \leq 0,5$ мм на 1 км хода по наиболее удобным трассам вдоль меридианов и параллелей, образующих в пересечении замкнутые полигоны периметром около 1 200 км в обжитых районах и около 2 000 км в необжитых и труднодоступных районах.

Кроме того, сеть I класса используется в научных целях – для изучения вертикальных движений земной коры. Нивелирование I класса повторяется по тем же трассам примерно каждые 25 лет, а в сейсмоактивных районах – каждые 15 лет.

Сеть II класса состоит из отдельных ходов геометрического нивелирования, опирающихся на пункты I класса и образующих в пересечении полигоны периметром 400 км в обжитых и до 1 000 км в необжитых районах. СКО превышений на 1 км хода: $m_{h_{\text{км}}} \leq 2$ мм. Сеть II класса является основой для III, IV классов. Повторяется примерно через 35 лет.

Ходы нивелирования III класса прокладывают между пунктами нивелирования I и II классов. Нивелирование IV класса и техническое применяют для сгущения нивелирной сети более высоких классов. Эти сети являются высотным обоснованием для топографических съемок при составлении карт и планов, строительно-монтажных, мелиоративных и других работах.

Ходы нивелирования более низких классов всегда опираются на пункты ходов более высоких классов. Отметки пунктов более высоких классов принимают за исходные.

После составления проекта линии высокоточного нивелирования должны быть рекогносцированы с целью уточнения на местности трассы хода мест закладки и конструкций постоянных знаков.

Наиболее общее представление о методе геометрического нивелирования дает его описание для высокоточных измерений. В этом случае необходим учет таких факторов, который не обязателен для нивелирования III, IV классов и технического. В прил. 6 на рисунке показана теоретическая основа геометрического нивелирования в условиях влияния вертикальной рефракции и сферичности Земли.

Нивелирные сети III и IV классов прокладывают внутри полигонов высшего класса как отдельными линиями, так и в виде системы линий, при этом сети и линии должны опираться не менее чем на два репера высшего класса. Допустимые невязки в полигонах III и IV классов, их периметры и полученные из обработки значения средних квадратических ошибок не должны превышать значений, приведенных в табл. 4 и 5.

При создании высотного обоснования крупномасштабных топографических съемок нивелирные сети III и IV классов прокладывают с расчетом обеспечения требуемой точности съемочного обоснования.

Линии государственной нивелирной сети I, II, III и IV классов закрепляют на местности реперами не реже чем через 5 км (по трассе).

В труднодоступных районах на отдельных участках, где выбор местоположения реперов затруднен, расстояние между ними может быть увеличено до 7 км (по трассе).

В горных районах линии нивелирования I и II классов закрепляют скальными и стенными реперами через 1–2 км, а грунтовыми – через 3–4 км. На геодинамических полигонах вблизи разломов и границ основных блоков закладывают реперы через 0,5–1,5 км. На каждой стороне блока или разлома должно быть заложено как минимум по два репера.

9.3. Нивелирование I класса

Нивелирование I класса производят в прямом и обратном направлениях по двум парам костылей (кольев), образующих две отдельные линии: правую, соответствующую ходу по правым костылям, и левую – по левым костылям (рис. 60).

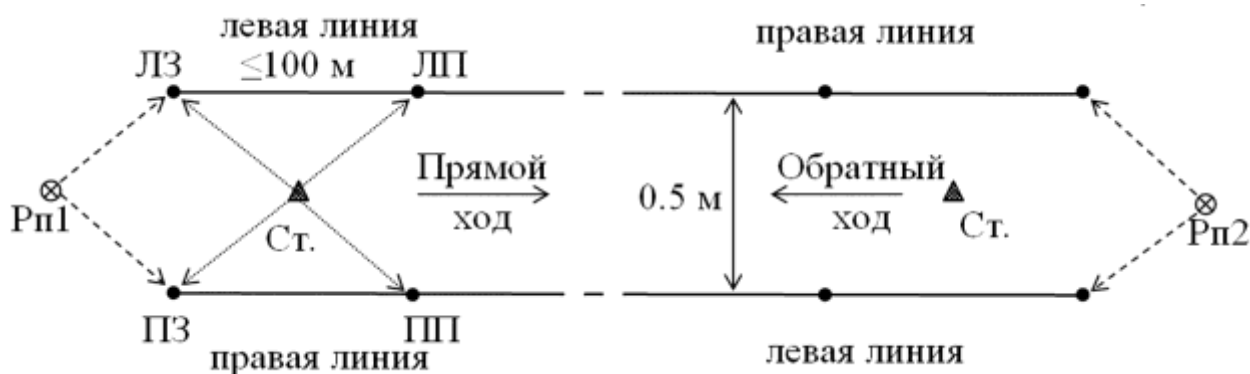


Рис. 60. Элементы геометрического нивелирования I класса:

ЛЗ – левая задняя рейка; ЛП – левая передняя рейка; ПЗ – правая задняя рейка; ПП – правая передняя рейка

Нивелирование I класса выполняют нивелирами с плоскопараллельной пластинкой, контактным уровнем или компенсатором, удовлетворяющими требованиям инструкции [10]. При нивелировании I класса применяются нивелиры Н-05, Н-1, Ni-004, Ni-002 и другие типы нивелиров, прошедшие сертификацию на соответствие требованиям инструкции.

В настоящее время очень часто используются цифровые нивелиры, которые обеспечивают более высокую производительность при обеспечении необходимой точности измерений. Однако их технологические возможности ограничены некоторыми факторами: освещенностью рейки, влиянием высоковольтных напряжений в районе проведения измерений, технологическими вибрациями места установки нивелира и др.

Применяются штриховые инварные рейки, на инварной полосе которых должны быть нанесены две шкалы, смещенные одна относительно другой. Расстояния между осями штрихов – 5 мм. Ошибки метровых интервалов и всей шкалы не должны превышать 0,10 мм. В горных районах работают инварными рейками с термодатчиками, ошибки метровых интервалов и всей шкалы в этом случае не должны превышать 0,05 мм.

Рейки должны быть снабжены круглыми уровнями с ценой деления 10'–12' на 2 мм, натяжение инварных полос – 20 + 1 кг. У реек желательно определить термические коэффициенты.

В случае привязки к стенным маркам применяют подвесную рейку с такими же шкалами, как и на основных рейках. Нуль на подвесной рейке должен быть совмещен с центром отверстия для штифта, на который подвешивают рейку к стенной марке.

При нивелировании в прямом направлении (прямой ход) порядок наблюдений на станции по правой линии следующий (табл. 6).

Таблица 6

Порядок взятия отчетов

Нечетная станция	Четная станция
Отсчет по основной шкале задней рейки	Отсчет по основной шкале передней рейки
Отсчет по основной шкале передней рейки	Отсчет по основной шкале задней рейки
Отсчет по дополнительной шкале передней рейки	Отсчет по дополнительной шкале задней рейки
Отсчет по дополнительной шкале задней рейки	Отсчет по дополнительной шкале передней рейки

По левой линии на нечетной и четной станциях отсчеты выполняются в том же порядке, что и по правой. При нивелировании в обратном направлении (обратный ход) на нечетных станциях наблюдения начинают с передней рейки, а на четных – с задней.

В прямом и обратном направлениях нивелирование выполняют по одной и той же трассе и по переходным точкам одного типа. Число станций в секции при нивелировании в прямом и обратном направлениях делают четным и по возможности одинаковым. Такая методика исключает некоторые инструментальные погрешности, например, разность высот пяток реек. При перемене направления нивелирования рейки меняют местами.

По каждой секции нивелирование в прямом и обратном направлениях выполняют, как правило, в разные половины дня. С меньшей строгостью это требование соблюдают осенью, а также в пасмурную погоду.

Нивелирование выполняют участками в 20–50 км по схеме «восьмерка», т. е. одну половину секций участка сначала проходят в прямом направлении, а другую – в обратном, затем наоборот. Если расхождения измеренных превышений по секциям из нивелирования в прямом и обрат-

ном направлениях получаются с преобладанием одного знака, то длину участков можно уменьшить.

Максимальная длина луча визирования – 50 м. Высота луча визирования над подстилающей поверхностью должна быть не менее 0,8 м. Если длина луча визирования до 25 м, то разрешается выполнять наблюдения при высоте луча не менее 0,5 м. В средних и южных широтах наблюдения выполняют в утренние и послеполуденные периоды, причем начинают их через полчаса после восхода солнца и заканчивают примерно за 30 мин до его захода. Неравенство расстояний от нивелира до реек на станции допускают не более 0,5 м. Накопление этих неравенств по секции должно быть не более 1 м.

9.4. Контроль наблюдений на станции

1. Сравнивают значения превышений из наблюдений по основным и дополнительным шкалам реек; расхождения не должны быть более 0,5 мм (10 делений отсчетного барабана). Если хотя бы одно расхождение получилось больше допустимого, то все наблюдения на станции переделывают, предварительно изменив высоту нивелира не менее чем на 3 см.

2. Сравнивают средние значения превышения заднего правого костыля над задним левым по результатам нивелирования на данной и предыдущей станциях (где эти костыли были передними); расхождения не должны быть более 0,7 мм (14 делений отсчетного барабана). Если расхождение получилось больше допустимого, то сначала повторяют наблюдения на предыдущей станции, а затем на данной; в этом случае первоначальные результаты наблюдений в обработку не принимают.

9.5. Нивелирование II класса

Нивелирование II класса производят в прямом и обратном направлениях по костылям или кольям. Наблюдения на станции выполняют способом «совмещения». Нивелирование II класса выполняют нивелирами с плоскопараллельной пластинкой, контактными уровнем или компенсатором или цифровыми нивелирами, которые удовлетворяют требованиям инструкции [10].

При нивелировании II класса применяют нивелиры Н-05, Ni-002, Ni-004, Ni-007 или им равноценные по точности приборы и штриховые инварные рейки. По указанию Роскартографии могут применяться другие типы нивелиров, прошедшие сертификацию на соответствие требованиям инструкции [10].

При нивелировании в прямом направлении (прямой ход) порядок наблюдений на станции следующий (табл. 7).

Таблица 7

Порядок взятия отчетов

Нечетная станция	Четная станция
Отсчет по основной шкале задней рейки	Отсчет по основной шкале передней рейки
Отсчет по основной шкале передней рейки	Отсчет по основной шкале задней рейки
Отсчет по дополнительной шкале передней рейки	Отсчет по дополнительной шкале задней рейки
Отсчет по дополнительной шкале задней рейки	Отсчет по дополнительной шкале передней рейки

При нивелировании в обратном направлении (обратный ход) наблюдения на нечетных станциях начинают с передней рейки, а на четных — с задней. В прямом и обратном направлениях нивелирование выполняют, как правило, по одной и той же трассе и по переходным точкам одного и того же типа; число станций в секции делают четным и одинаковым.

Высота луча визирования над подстилающей поверхностью должна быть не менее 0,5 м. В отдельных случаях при длине луча визирования до 30 м разрешается выполнять наблюдения при высоте луча визирования более 0,3 м.

Не разрешается выполнять наблюдения при колебаниях изображений, затрудняющих точное наведение биссектора на штрих рейки, и «плавающих» изображениях; сильном и порывистом ветре; сильных и скачкообразных колебаниях температуры воздуха и аномально быстрых односторонних ее изменениях. Неравенство расстояний от нивелира до реек на станции допускают не более 1 м. Накопление этих неравенств по секции разрешается не более 2 м.

9.6. Особенности нивелирования на геодинамических и техногенных полигонах

Геодинамические полигоны подразделяются на локальные полигоны, приуроченные к активным глубинным разломам и разрывам земной коры; площадные, охватывающие районы возможных эпицентров разрушительных землетрясений, районы крупных населенных пунктов и районы эксплуатируемых и строящихся гидростанций; региональные, связывающие крупные геологические структуры.

На локальных и площадных полигонах высотные сети создают в виде пересекающихся линий нивелирования I и II классов. Периметры нивелирных полигонов I и II классов указаны в табл. 5.

Высотные сети на локальных и площадных построениях привязывают к главной высотной основе России для получения высот в единой системе. Нивелирную сеть в этом случае рассматривают как свободную с опорой на один репер государственной нивелирной сети. Высотные сети региональных построений входят в сеть государственного нивелирования I и II классов.

Нивелирование I и II классов на геодинамических и техногенных полигонах – часть комплекса научных геофизических исследований, служащая для получения количественных характеристик деформаций земной поверхности. Поэтому измерения выполняют несколькими последовательными циклами. Интервал времени между повторным нивелированием устанавливают исходя из ожидаемых скоростей современных вертикальных движений земной коры.

При проектировании нивелирных сетей на техногенных полигонах расстояние между границей месторождения и реперами, считающимися неподвижными, следует принимать равным 8-кратной глубине нижнего эксплуатируемого горизонта, но во всех случаях не менее 6 км. Проектируемые линии прокладывают в виде сетей или отдельных линий. Не менее чем от четырех пунктов (реперов) периметра нивелирного полигона, совпадающего с контуром месторождения, прокладывают ходы к реперам, которые считают неподвижными.

Линии полигона, по возможности, должны совпадать с ранее проложенными линиями нивелирования. Новые линии располагают вдоль местных путевых магистралей или на местности, благоприятной для нивелирования.

Работы по повторному нивелированию на геодинамических и техногенных полигонах являются частью комплекса исследований, выполняемых с целью изучения современных движений земной коры, поиска предвестников землетрясений, выявления активных глубинных разломов и мелких поверхностных разрывов, наиболее активных участков и тектонического строения земной коры, а также деформаций земной поверхности, вызванных техногенными процессами.

Высотные построения на геодинамических полигонах делятся:

- на локальные (приуроченные к активным глубинным разломам и разрывам земной коры);
- на площадные (охватывающие районы возможных эпицентров разрушительных землетрясений, крупные населенные пункты и районы эксплуатируемых и строящихся гидростанций);
- на региональные (связывающие крупные геологические структуры).

Эти построения создаются с целью выявления движений геологических структур относительно друг друга.

На локальных и площадных построениях нивелирные сети создаются в виде отдельных пересекающихся линий или сетей нивелирования I и II классов. Периметры нивелирных полигонов I класса в этих сетях не превышают 40 км. В высотных сетях, создаваемых при сейсмическом микрорайонировании городов, периметры полигонов не должны превышать 15 км на застроенных и 20 км на незастроенных территориях.

При региональных построениях линии нивелирования I класса образуют полигоны с периметром 400–1000 км и II класса – с периметром 300–500 км.

Пункты высотных сетей на локальных и площадных построениях по возможности совмещают с пунктами плановой сети. Высотные сети на локальных и площадных построениях привязывают к главной высотной основе России только с целью получения высот в единой системе. Высотная сеть в этом случае рассматривается как свободная с опорой на один

или два пункта государственной нивелирной сети I и II классов. Исходные пункты должны находиться на расстоянии 500–1000 м друг от друга. Высотные сети при региональных построениях включаются в сеть государственного нивелирования I и II классов.

Нивелирные линии на геодинамических и техногенных полигонах закрепляют теми же знаками, что и линии государственного нивелирования I и II классов. При закреплении линий на геодинамических полигонах отдают предпочтение скальным и стенным знакам. Скальные и стенные знаки закладывают через 1–2 км, грунтовые – через 3–4 км, фундаментальные – через 30–40 км. Вблизи глубинных разломов и границ блоков земной коры скальные, стенные и грунтовые знаки закладывают чаще – через 0,5–1,5 км. Все старые знаки и неработающие скважины, находящиеся на расстоянии до 0,5 км от линии нивелирования I класса и на расстоянии до 3 км от линий нивелирования II класса, обязательно включают в ходовые линии или привязывают. Фундаментальные реперы закладывают в узлах полигонов, а также на концах радиальных линий.

Плотность нивелирной сети на полигонах при локальных и площадных построениях должна быть такой, чтобы можно было надежно выявить участки земной поверхности, имеющие различные скорости движений.

За первые 3–5 лет все линии на локальных и площадных построениях нивелируют три раза. В последующие годы сроки и объемы повторных нивелирований устанавливают исходя из обнаруженных скоростей вертикальных движений отдельных блоков земной поверхности.

Нивелирные линии I и II классов должны пересекать предполагаемые линии разломов, разрывов и блоков. По возможности следует совмещать линии повторного нивелирования на геодинамических полигонах с ранее проложенными линиями, хотя бы даже с линиями низших классов. Отличий в программе наблюдений на станции при нивелировании I и II классов на геодинамических полигонах и при государственном нивелировании нет. Нивелирование II класса выполняется с допустимой невязкой $3\text{ мм}\sqrt{L}$, где L – периметр полигона или длина секции в километрах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данный учебник является результатом авторского понимания предмета «Высшая геодезия» в рамках времени, выделенного для его преподавания в учебном плане направления «Геодезия и дистанционное зондирование». Также были учтены образовательные рекомендации по данному предмету для студентов, обучающихся по специальности «Горное дело».

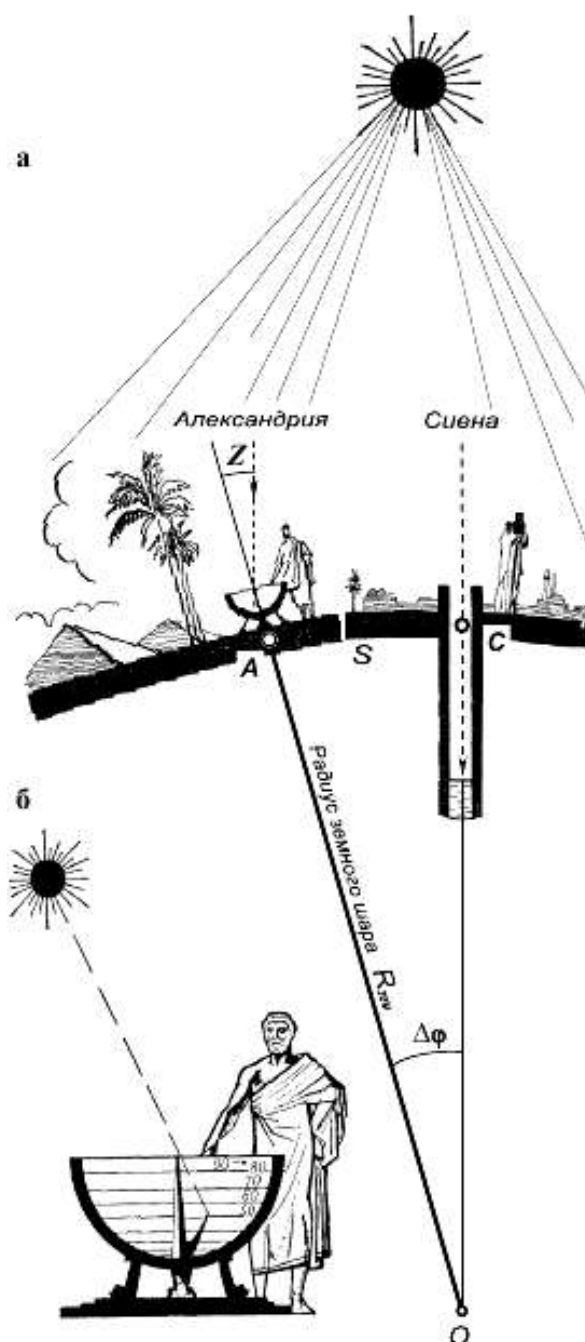
Для более углубленного изучения методов и алгоритмов высшей геодезии необходимо изучение учебников по высшей геодезии, монографий и научных публикаций в периодических изданиях России и иностранных журналах. Для России это такие журналы, как «Вестник СГУГиТ», «Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», «Геодезия и картография». В этих журналах регулярно публикуются новые достижения ученых России и других стран. Современные публикации подтверждают высокий уровень интереса к решению задач высшей геодезии и их актуальность. Поддержание с необходимой точностью координатно-высотной основы являлось, является и будет являться важнейшей функцией и обязанностью России как государства.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антонович К. М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии : монография. В 2 т. Т. 2. – М. : Картгеоцентр, 2006. – 360 с.
2. Афонин К. Ф. Технологии геодезических и картографических работ : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2007. – 100 с.
3. Герасименко М. Д. Современный метод наименьших квадратов с геодезическими приложениями. – Владивосток : Дальнаука, 1998.
4. Голякова Ю. Е., Касаткин Ю. В., Щукина В. Н. Анализ установления единых государственных систем координат // Вестник СГУГиТ. – 2015. – Вып. 2 (30). – С. 55–61.
5. Горобец В. П., Ефимов Г. Н., Столяров И. А. Опыт Российской Федерации по установлению государственной системы координат 2011 года // Вестник СГУГиТ. – 2015. – Вып. 2 (30). – С. 24–37.
6. Закатов П. С. Курс высшей геодезии. – М. : Недра, 1976.
7. Высшая геодезия / В. Г. Зданович, А. Н. Белоликов, Н. А. Гусев, К. А. Звонарев. – М. : Недра, 1970.
8. Елагин А. В. Теория фигуры Земли : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2012. – 174 с.
9. Инструкция о построении государственной геодезической сети. – М. : Недра, 1966.
10. Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов ГКИНП (ГНТА)-03-010-03. – М. : ЦНИИГАиК, 2004.
11. Коугия В. А. Избранные труды. – СПб. : Петербургский государственный университет путей сообщения, 2012.
12. Красовский Ф. Н. Руководство по высшей геодезии. Ч. 2. – М. : Геодезиздат, 1942. – 500 с.
13. Куштин И. Ф. Геодезия. – М. : Приор, 2001.
14. Малков А. Г. Высокоточные геодезические работы. Предварительная обработка измерений в плановых геодезических сетях : метод. указания. – Новосибирск : СГУГиТ, 2013. – 50 с.

15. Малков А. Г. Высшая геодезия. Высокоточные измерения : учеб.-метод. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2011. – 46 с.
16. Мазуров Б. Т. Математическое моделирование по геодезическим данным : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2013. – 126 с.
17. Мазуров Б. Т., Дорогова И. Е. Геодинамика и геодезические методы ее изучения : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2014. – 174 с.
18. Машимов М. М. Уравнивание геодезических сетей. – М. : Недра, 1970.
19. Телеганов Н. А., Елагин А. В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2004. – 238с.
20. Падве В. А. Математическая обработка и анализ результатов геодезических измерений : монография. В 2 ч. Ч. 1. – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. – 162 с.
21. Падве В. А. Элементы теории вероятностей и математической статистики. – Новосибирск : СГГА, 2013.
22. Торге В. Гравиметрия. – М. : Мир, 1999.
23. Яковлев Н. В. Высшая геодезия. – М. : Недра, 1989.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИУСА ЗЕМЛИ ЭРАТОСФЕНОМ



В день летнего солнцестояния (21 или 22 июня) в полдень Солнце в Сивне освещает дно глубоких колодцев, т. е. находится как раз над головой – в зените. Вертикально стоящие столбы в этот момент не дают тени. В Александрии же в этот день Солнце в полдень не доходит до зенита и не освещает дна колодцев, а предметы дают тень (точка А).

Эратосфен измерил, насколько полуденное Солнце в Александрии отклонено от зенита и получил величину $Z = 7^{\circ}11'$, что составляет $1/50$ окружности. Это ему удалось сделать при помощи специального прибора – скафиса. Скафис – это древний прибор для определения высоты Солнца над горизонтом, представляющий собой чашу в форме полушария. В центре чаши отвесно закреплялась игла. Тень от иглы падала на внутреннюю поверхность скафиса, на которой были проведены градусные окружности.

Построив чертеж, Эратосфен правильно заключил

$$\frac{S}{2\pi R_{\text{Земли}}} = \frac{\Delta\varphi}{360^{\circ}}, \text{ откуда } R_{\text{Земли}} = \frac{S \cdot 360^{\circ}}{\Delta\varphi 2\pi} = \frac{S}{\Delta\varphi} \rho,$$

где S – длина дуги меридиана между Александрией и Сиеной;

ρ – радиан, равный $3\,437,75$ мин.

Так как Солнце практически находится в бесконечности, то линии A и C параллельны и угол с вершиной в центре Земли O между Сиеной и Александрией будет равен углу тени в Александрии, т. е.

$$\Delta\varphi = Z = 7^{\circ}11'.$$

Оставалось измерить расстояние S . Это расстояние было определено по числу дней, которое тратили караваны верблюдов на переход между Александрией и Сиеной, и средней скорости перехода. В единицах того времени $S = 5\,000$ стадий. Стадией греки считали расстояние, равное примерно $158\text{--}185$ м, которое человек спокойным шагом мог пройти от момента появления Солнца над горизонтом до момента появления всего диска Солнца.

В переводе на наши меры

$$S = 5\,000 \frac{158+185}{2} = 857\,500 \text{ м.}$$

Таким образом, если подставить все данные в формулу, средний радиус Земли по Эратосфену равен $6\,823,8$ км. Это значение отличается от современных данных примерно на 450 км. Зная величину радиуса Земли, можно вычислить длину всей окружности Земли.

Применяемые исторически эллипсоиды вращения

Автор	Год	Большая полуось a (м)	Сжатие α
Деламбр	1800	6 375 653	1/334
Вальбек	1819	6 376 896	1/303
Бессель	1841	6 377 397,155	1/299,15
Кларк	1866	6 378 206,4	1/294,978 698 2
Кларк	1880	6 378 249,145	1/293,465
Эверест	1830	6 377 276,345	1/300,8 017
Эйри	1830	6 377 563,396	1/299,324 964 6
Хейфорд	1909	6 378 388	1/297
Красовский	1940	6 378 245	1/298,3
Австралии	1965	6 378 160	1/298,25
GRS- 67	1967	6 378 160	1/298,247 167 247
WGS-60	1960	6 378 165	1/298,3
WGS-66	1967	6 378 145	1/298,25
WGS-72	1972	6 378 135	1/298,26

Параметры современных общеземных эллипсоидов

	GRS- 80	WGS- 84	ПЗ-90.11	IERS	ГСК-2011
a	6 378 137	6 378 137	6 378 136	6 378 136,49	6 378 136,5
b	6 356 752,314 1	6 356 752,314	6 356 751,362	6 356 751,750 5	6 356 751,758 0
c	6 399 593,625 9	6 399 593,626	6 399 592,578	6 399 593,169 9	6 399 593,182 4
α	1/298,257 222 01	1/298,257 223 56	1/298,257 84	1/298,256 45	1/298,256 415 1
e^2	0,006 694 380 022	0,006 694 379 99	0,006 694 366 17	0,006 694 397 32	0,006 694 398 10
e'^2	0,006 739 496 775	0,006 739 496 74	0,006 739 482 74	0,006 739 514 31	0,006 739 515 10

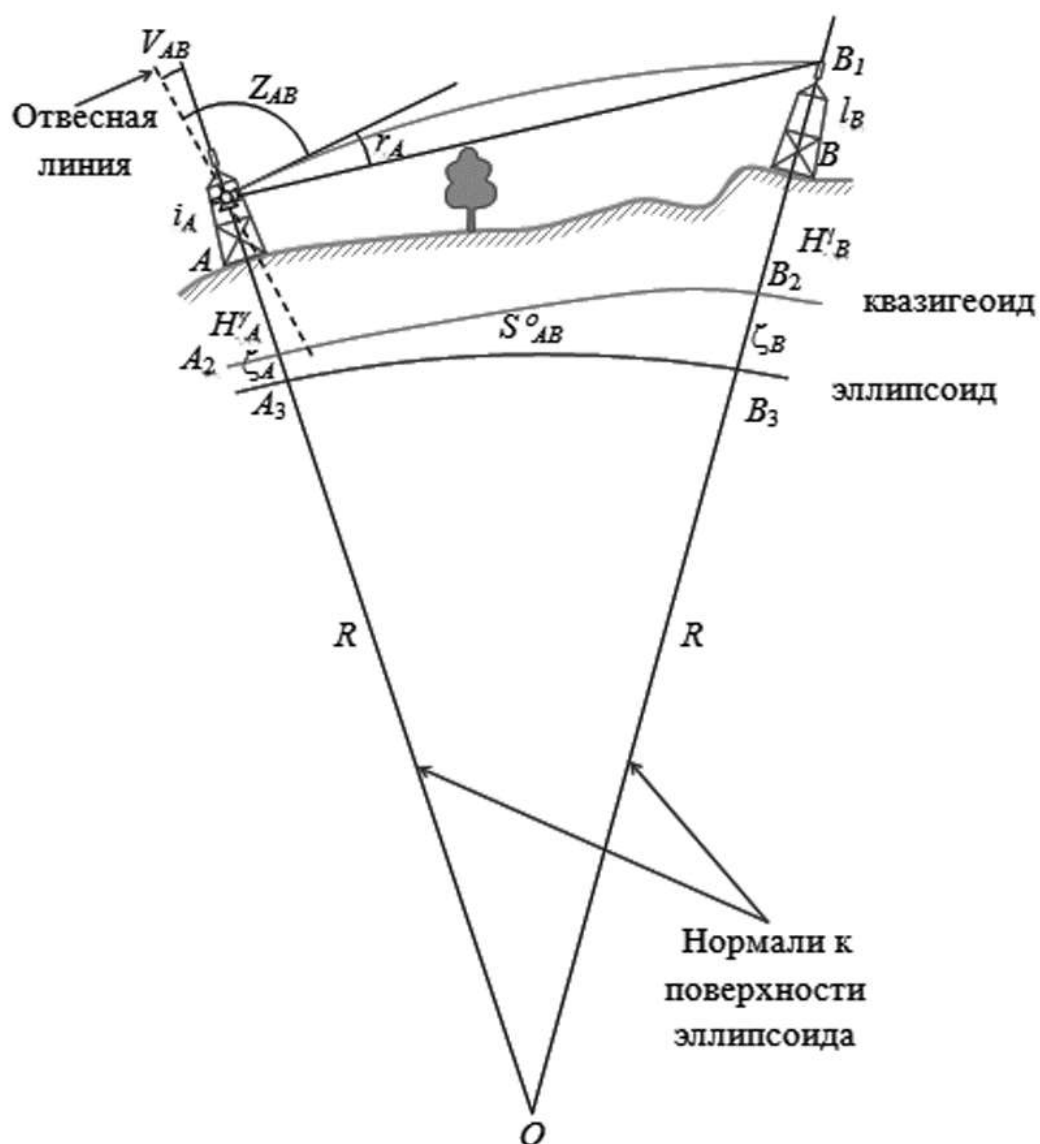
Основные параметры системы координат ГСК-2011

Параметр	Обозначение	Единица измерения	Значение
1. Универсальные физические постоянные			
Скорость света в вакууме	c	м/с	299 792 458
Гравитационная постоянная	f	м ³ /(кг·с ²)	6,672 59 · 10 ⁻¹¹
2. Фундаментальные геодезические постоянные			
Геоцентрическая гравитационная постоянная Земли (с учетом атмосферы)	fM	км ³ /с ²	398 600,441 5
Угловая скорость вращения Земли	ω	рад/с	7,292 115 · 10 ⁻⁵
Большая полуось	a	м	6 378 136,500
Сжатие	α		1/298,2 564 151
3. Геометрические постоянные			
Малая полуось	b	м	6 356 751,758
Квадрат первого эксцентриситета	e^2	—	0,006 694 398 1
Квадрат второго эксцентриситета	e'^2	—	0,006 739 515 1
4. Физические постоянные			
Нормальный потенциал на поверхности отсчетного эллипсоида	U_0	м ² /с ²	62 636 856,75
Ускорение нормальной силы тяжести на экваторе отсчетного эллипсоида	γ_a	мГал	978 032,696
Ускорение нормальной силы тяжести на полюсе отсчетного эллипсоида	γ_b	мГал	983 218,646
Коэффициенты в формуле ускорения нормальной силы тяжести	β	—	0,005 302 43
	β_1	—	0,000 005 85
Коэффициент второй зональной гармонике нормального потенциала	J_2^0	—	1 082,636 14 · 10 ⁻⁶

Элементы трансформирования в ГСК-2011

№ п/п	Исходная система	ΔX , м	ΔY , м	ΔZ , м	$\omega_x 10^3$, угл. с	$\omega_x 10^3$ угл.с.	$\omega_x 10^3$, угл. с	$m \cdot 10^6$
1	СК-42	+23,575	−140,83	−79,77	−1,738	−346,441	−794,263	−0,2274
2	СК-95	+24,65	−129,14	−83,06	−67	+4	+129	−0,175
3	ПЗ-90	−1,443	+0,170	+0,230	−1,738	+3,559	−134,263	−0,2274
4	ПЗ-90.02	−0,373	+0,2	+0,210	−1,738	+3,559	−4,263	−0,0074
5	ПЗ-90.11	0	+0,014	+0,008	+0,562	+0,019	−0,053	+0,0006
6	WGS-84	−0,343	+0,470	+1,130	−1,738	+3,559	+65,737	−0,1074
7	ITRF-2008	+0,002	−0,003	−0,003	+0,053	+0,093	−0,012	+0,0008

МЕТОД НИВЕЛИРОВАНИЯ НАКЛОННЫМ ЛУЧОМ (ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ)



Формулы:

$$h_{AB} = H_B^\gamma - H_A^\gamma = S_{AB} \operatorname{ctg} Z_{AB} + \frac{S_{AB}^2}{2R} (1 - K_A) +$$

$$+ i_A - l_B - \frac{V_{AB}}{\rho} S_{AB} - (\zeta_B - \zeta_A).$$

Одностороннее нивелирование

$$V_{AB} = \xi_A \cos A_{AB} + \eta_A \sin A_{AB}.$$

Двухстороннее нивелирование

$$(h_{AB})_{\text{ср}} = \frac{h_{AB} - h_{BA}}{2} = S_{AB} \frac{\text{ctg } Z_{AB} - \text{ctg } Z_{BA}}{2} + \frac{S_{AB}^2}{4R} (K_B - K_A) + \\ + \frac{i_A + l_A}{2} - \frac{i_B + l_B}{2} - \frac{V_{AB} - V_{BA}}{2\rho} - (\zeta_B - \zeta_A).$$

Условные обозначения:

H_A^γ, H_B^γ – нормальные высоты пунктов A и B ;

ζ_A, ζ_B – высоты квазигеоида над эллипсоидом;

i_A, i_B – высоты инструментов над центрами пунктов A и B ;

l_A, l_B – высоты визирных целей над центрами пунктов;

$\xi_A, \eta_A, V_{AB}, V_{BA}$ – составляющие уклонений отвесных линий;

Z_{AB}, Z_{BA} – измеренные зенитные расстояния;

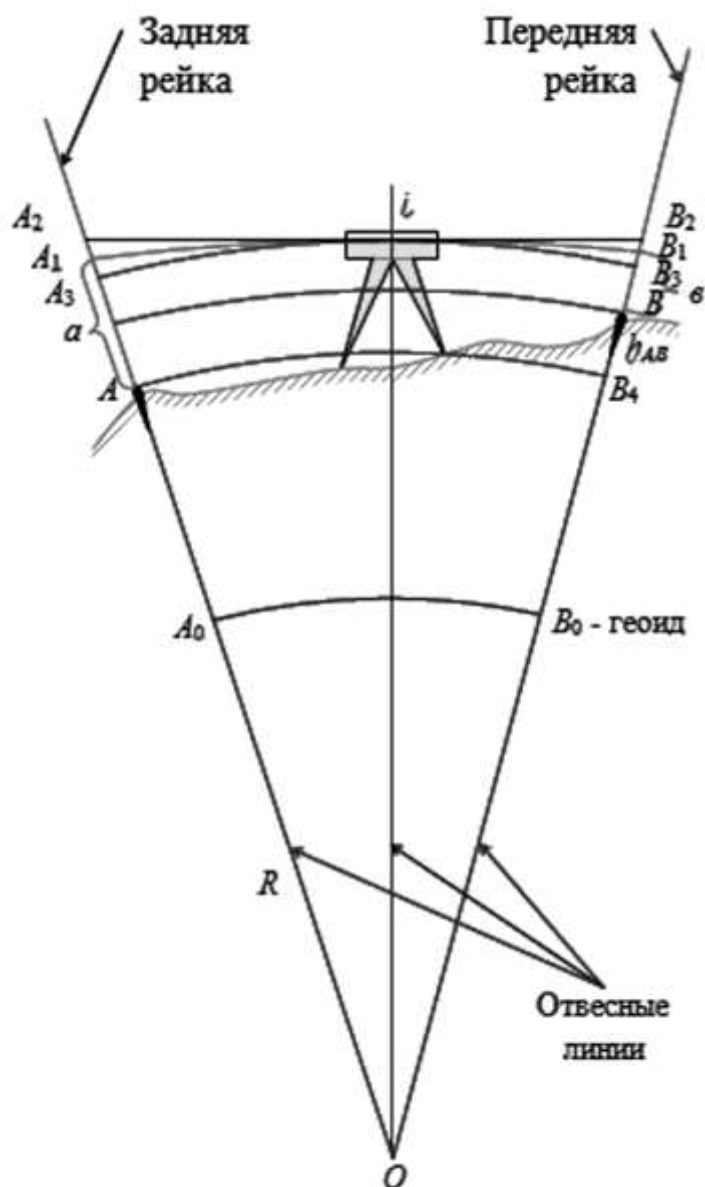
r_A – угол вертикальной рефракции;

K_A, K_B – коэффициенты вертикальной рефракции;

A_{AB} – геодезический азимут направления AB ;

S_{AB} – расстояние между пунктами A и B .

ВЫСОКОТОЧНОЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ, НАБЛЮДЕНИЕ НА СТАНЦИИ



Формулы:

$$h_{AB} = (a - b) + (P_{\Pi} - P_3) + (r_3 - r_{\Pi});$$

$$P_3 = \frac{S_3^2}{2R}; \quad P_{\Pi} = \frac{S_{\Pi}^2}{2R}; \quad r_3 = \frac{S_3^2}{2R} K_3; \quad r_{\Pi} = \frac{S_{\Pi}^2}{2R} K_{\Pi}.$$

При $S_3 \approx S_{\Pi}$ и $K_3 \approx K_{\Pi}$ имеем $(P_{\Pi} - P_3) \rightarrow 0$, $(r_3 - r_{\Pi}) \rightarrow 0$, $h_{AB} = a - b$.

Условные обозначения:

$a = AA_1$ – отсчет по задней рейке;

$b = BB_1$ – отсчет по передней рейке;

$r_3 = A_2A_3$, $r_{\Pi} = B_2B_3$ – поправки за вертикальную рефракцию в отсчеты по задней и передней рейкам;

$P_3 = A_2A_3$, $P_{\Pi} = B_2B_3$ – поправки за кривизну Земли в отсчеты по задней и передней рейкам;

K_3 , K_{Π} – коэффициенты вертикальной рефракции;

S_3 , S_{Π} – расстояния от нивелира до задней и передней реек;

h_{AB} – превышение между точками A , B .

Учебное издание

Мазуров Борис Тимофеевич

ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Редактор *Е. К. Деханова*

Компьютерная верстка *Е. М. Федяевой*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 25.11.2016. Формат 60 × 84 1/16

Усл. печ. л. 11,86. Тираж 132 экз. Заказ .

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 8.