

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Южно-Уральский государственный университет  
Филиал в г. Миассе  
Кафедра «Технология производства машин»

532.5(07)  
3-475

В.Г. Зезин

## **МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

Учебное пособие

Челябинск  
Издательский центр ЮУрГУ  
2016

УДК 532.5(075.8) + 533(075.8)  
3-475

*Одобрено  
учебно-методической комиссией филиала в г. Миассе*

*Рецензенты:  
Н.Н. Елюкин, Г.Ф. Костин*

**Зезин, В.Г.**  
3-475      Механика жидкости и газа: учебное пособие / В.Г. Зезин. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. – 250 с.

Учебное пособие предназначено для бакалавров, обучающихся по профилю подготовки «Гидравлические машины, гидроприводы и гидропневмоавтоматика», а также может быть использовано студентами других технических специальностей, для которых техническая гидромеханика и газовая динамика являются профилирующими дисциплинами.

В учебном пособии изложены основы теории механики жидкости и газа, необходимые для изучения специальных дисциплин, связанных с применением жидкостей и газов в качестве рабочих сред в различных технических устройствах и системах.

УДК 532.5(075.8) + 533(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2016

## **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящем учебном пособии изложены основы теории механики жидкости и газа, необходимые для изучения специальных дисциплин, связанных с применением жидкостей и газов в качестве рабочих сред в различных технических устройствах и системах.

В первой главе приведена вводная информация о дисциплине механика жидкости и газа. Вводится понятие «сплошная среда» и параметры, описывающие ее состояние, на которых базируется теория изучаемого предмета. Приведены основные формулы математического аппарата, используемые в дальнейшем при выводе фундаментальных уравнений МЖГ. Дается информация о физических свойствах газов и жидкостей, вводятся модели несжимаемой жидкости, идеальной жидкости и газа, калорически совершенного газа.

Во второй главе изложены основы кинематики жидкостей и газов. Вводится понятие переменных Эйлера и Лагранжа для описания поля гидродинамических параметров, понятие линии тока, траектории жидкой частицы, трубы тока, расхода жидкости. Рассмотрены закономерности деформации жидкой частицы и получены выражения для компонент тензора скоростей деформации. Отмечается возможность существования двух режимов течения: ламинарного и турбулентного.

В третьей главе освещены вопросы напряженного состояния жидкостей и газов. Вводится понятие объемных и поверхностных сил, анализируются свойства тензора напряжений поверхностных сил. Обобщенная гипотеза Ньютона о связи тензора напряжений с тензором скоростей деформаций, в целях упрощения материала пособия, детализирована только для модели несжимаемой жидкости.

В четвертой главе приведен вывод основных фундаментальных уравнений механики жидкости и газа, отражающих общефизические законы сохранения.

В пятой главе рассмотрены закономерности равновесия жидкостей и газов, включая состояние относительного покоя. Даётся вывод формул для определения силового воздействия покоящейся жидкости на ограждающие стенки.

В шестой главе изложены основы теории подобия и анализа размерностей, используемые, как при проведении экспериментальных исследований, так и при теоретическом решении задач механики жидкости и газа. Введены понятия чисел, критериев подобия и критериальных уравнений.

В седьмой главе исследуются закономерности вязких течений: течения Пуазейля, Куэтта, течения в смазочном зазоре переменной толщины с перепадом давления.

В восьмой и девятой главах приведена теория одномерных течений. Получены уравнения динамики одномерных потоков, обоснованы зависи-

ности для определения потерь механической энергии на преодоление сил трения жидкости о стенки и потерь на местных гидравлических сопротивлениях, рассмотрено явление гидравлического удара. Для газовых течений получено уравнение Гюгонио – условий перехода скорости течения через скорость звука. Введены в рассмотрение основные газодинамические изоэнтропические функции. Рассмотрены вопросы расчета трубопроводных систем, в том числе сифонного трубопровода и трубопроводной сети при работе нагнетателя, а также при течении газов.

В десятой главе рассмотрены закономерности истечения жидкостей из объемов при постоянном и переменном напоре, а также газов при докритическом и сверхкритическом перепадах давлений.

В одиннадцатой главе изложены основы теории ударных волн в газовых потоках и приведен вывод соотношений для расчета параметров потока при прохождении прямого скачка уплотнения.

В двенадцатой главе даны основы теории пограничного слоя. Приведен вывод уравнений пограничного слоя, и описываются подходы к решению этих уравнений. Описывается физическая картина процессов при отрыве пограничного слоя.

В тринадцатой главе приведены основы численного моделирования гидрогазодинамических процессов. Даётся понятие конечно-разностной аппроксимации систем дифференциальных уравнений. На примере численного решения задачи гидравлического удара поясняются вопросы устойчивости численного решения и погрешности аппроксимации.

В четырнадцатой главе рассмотрены физические закономерности и структура турбулентности при ее возникновении и развитии в свободно-сдвиговых течениях и пограничных слоях. Описывается гипотеза локальной изотропности турбулентности и следующие из нее выводы. Даётся вывод уравнений переноса энергии турбулентности и ее диссипации. Приводятся характеристика основных моделей турбулентности: от простейших алгебраических до двухзонных дифференциальных с указанием их достоинств и недостатков. Кратко охарактеризованы современные методы моделирования турбулентных течений – прямого численного моделирования, моделирования крупных вихрей и отсоединенных вихрей.

Применяемый в пособии математический аппарат основан на материале курса высшей математики для технических вузов. Студент должен владеть навыками применения аппарата дифференциального и интегрального исчисления, линейной алгебры, дифференциальных уравнений, владеть элементами векторного анализа и теории поля. Предполагается знание студентом общей физики и теоретической механики.

Текст, написанный мелким шрифтом, при первом прочтении можно опустить без существенного ущерба для понимания материала.

Содержание пособия соответствует государственному образовательному стандарту по направлению подготовки бакалавров 151000 «Технологи-

ческие машины и оборудование». Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по профилю подготовки «Гидравлические машины, гидроприводы и гидропневмоавтоматика», а также может быть использовано студентами других технических специальностей, для которых техническая гидромеханика и газовая динамика являются профилирующими дисциплинами.

При записи формул в настоящем пособии использованы следующие соглашения: переменные обозначаются, как правило, латинским шрифтом, набранные курсивом<sup>\*</sup>; математические функции и операторы обозначаются буквами латинского алфавита и набираются прямым шрифтом; векторные и матричные величины выделяются жирным шрифтом; скалярное произведение векторов обозначается точкой, например,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ , векторное – знаком  $\times$ , например,  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ .

---

<sup>\*</sup> При использовании для обозначения переменных букв русского или греческого алфавита они набираются прямым шрифтом.

## **СОКРАЩЕНИЯ И УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ**

### **Сокращения**

- ГС – гидродинамический след;  
МЖГ – механика жидкости и газа;  
MC – местное сопротивление;  
МСС – механика сплошной среды;  
ПС – пограничный слой;  
ТПС – турбулентный пограничный слой

### **Условные обозначения в формулах**

- $\alpha$  – коэффициент Кориолиса;  
 $\beta$  – коэффициент (изотермический) сжатия среды, коэффициент (теплового) расширения среды;  
 $\eta$  – коэффициент расхода;  
 $\delta$  – скорость угловой деформации жидкой частицы, толщина;  
 $\varepsilon$  – скорость относительного удлинения жидкой частицы, диссипация энергии турбулентности, газодинамическая функция;  
 $\dot{\varepsilon}$  – тензор скоростей деформаций;  
 $\Phi$  – потенциал объемных сил;  
 $\lambda$  – гидравлический коэффициент трения, скоростной коэффициент;  
 $\Delta$  – величина эквивалентной шероховатости стенки трубопровода, приращение параметра;  
 $\varphi$  – потенциал скорости, коэффициент скорости;  
 $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  
 $\vartheta$  – удельный объем;  
 $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  
 $\pi$  – число  $\pi$ , число подобия, газодинамическая функция;  
 $\rho$  – плотность;  
 $\sigma$  – напряжение, коэффициент поверхностного натяжения;  
 $\tau$  – напряжение (компонент тензора напряжений), газодинамическая функция, шаг разностной сетки;  
 $\xi$  – коэффициент гидравлических потерь на местном сопротивлении;  
 $\omega$  – угловая скорость;  
 $A$  – работа;  
 $a$  – скорость звука, ускорение;  
 $C$  – коэффициент трения, коэффициент лобового сопротивления, коэффициент подъемной силы;  
 $c$  – удельная теплоемкость, скорость распространения волны сжатия;

- $d, d$  – диаметр трубопровода, оператор дифференцирования;  
 $D$  – скорость фронта ударной волны;  
 $E$  – модуль упругости;  
 $\mathbf{E}$  – тензорная единица;  
 $e$  – удельная внутренняя энергия;  
 $\mathbf{F}$  – вектор силы;  
 $f$  – плотность распределения объемных сил;  
 $\mathbf{f}$  – вектор плотности распределения объемных сил;  
 $G$  – сила тяжести;  
 $G$  – массовый расход;  
 $g$  – ускорение свободного падения;  
 $h$  – удельная энталпия, высота, напор, шаг разностной сетки;  
 $H$  – напор, высота;  
 $J$  – момент инерции;  
 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – единичные векторы декартовой системы координат;  
 $K$  – количество движения, кинетическая энергия;  
 $k$  – показатель адиабаты, энергия турбулентности, коэффициент, клиновидность зазора, высота бугорков шероховатости;  
 $L$  – длина;  
 $l$  – периметр; длина;  
 $M$  – масса;  
 $m$  – масса;  
 $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали;  
 $P$  – сила;  
 $p$  – давление;  
 $\mathbf{p}$  – вектор напряжения поверхностных сил;  
 $Q$  – объемный расход, плотность объемного тепловыделения;  
 $q$  – плотность теплового потока;  
 $R$  – газовая постоянная, радиус трубопровода;  
 $\mathfrak{R}$  – функция давления баротропной жидкости;  
 $r$  – радиус;  
 $S$  – площадь поверхности, энтропия;  
 $s$  – площадь сечения, удельная энтропия;  
 $t$  – время;  
 $T$  – температура, интервал времени;  
 $U$  – удельная полная энергия;  
 $u$  – скорость;  
 $w$  – скорость, осредненная по сечению потока;  
 $V$  – объем;  
 $W$  – объем;  
 $v$  – скорость;  
 $Y, Z$  – инварианты Римана;  
 $\nabla^2$  – оператор Лапласа

## Числа подобия

Eu – число Эйлера;  
Fr – число Фруда;  
Ku – число Куранта;  
M – число Маха;  
Re – число Рейнольдса;  
Sh – число Струхала

# ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

## 1.1. Модель сплошной среды

В отличие от классической механики материальных точек и твердых тел механика жидкости и газа рассматривает *текущие среды*, то есть неограниченно деформируемые при их движении. При этом считается, что они являются сплошными средами, то есть такими, масса которых непрерывным образом распределена по рассматриваемому объему *без образования пустот*<sup>\*</sup>. Данное предположение носит название *гипотезы сплошности* и означает, что рассматриваются процессы в объемах, характерные размеры которых существенно превышают размеры молекул и межмолекулярные расстояния. Данное упрощение реальной дискретной системы позволяет применить для ее описания математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления. Параметры состояния среды при таком подходе непрерывно распределены по всему расчетному объему за исключением, может быть, отдельных точек, линий или поверхностей, где допускается существование разрывов<sup>\*\*</sup>. Данная гипотеза была впервые введена в науку Д'Аламбером в 1744 г. и затем Эйлером в 1753 г.

Наряду с гипотезой сплошности в механике жидкости и газа дополнительно предполагается справедливость следующих допущений.

1) Изучаемая среда подчиняется закономерностям механики Ньютона, то есть исследуются движения со скоростями существенно меньшими скорости света; рассматриваются объекты, существенно превышающие объекты микромира, изучаемые квантовой механикой. Применительно к изучаемой области сплошной среды постулируется возможность применения законов сохранения механики системы материальных точек: массы, количества движения, энергии и т. д.

2) Выполняются закономерности классической термодинамики. То есть в условиях термодинамического равновесия состояние среды можно определить с помощью нескольких макроскопических параметров (например, плотности, давления, температуры).

При математическом описании поведения жидкостей и газов используются понятия «контрольный объем», «бесконечно малый объем», «бесконечно малый промежуток времени», «элемент поверхности», «элемент объема», «элементарный интервал времени». Смысл этих понятий поясняется в следующих двух разделах.

---

<sup>\*</sup> Исключение составляют сильно разреженные газы, длина свободного пробега молекул которых соизмерима с характерным размером рассматриваемого объема.

<sup>\*\*</sup> Например, скачков уплотнения, ударных волн в газах.

### 1.1.1 Контрольный объем сплошной среды

При изучении закономерностей в механике жидкости и газа широко распространен прием, когда из всей рассматриваемой области сплошной среды выделяется некоторый конечный *контрольный объем*  $W$ , ограниченный поверхностью  $S$ , рис. 1.1, который при движении деформируется и не смешивается со средой его окружающей, либо стенки объема могут считаться проницаемыми. Этот объем рассматривается, как материальный объект, к которому применяются законы механики. Действие же окружающей среды на выделенный объем заменяется внешним силовым и тепловым воздействием. Если стенки объема считаются проницаемыми, то дополнительно учитываются переносимые через них потоки массы, энергии и других физических величин.

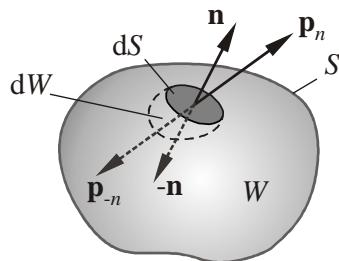


Рис. 1.1. К понятию контрольного объема

Для того чтобы определить количество некоторой физической величины  $\Theta$  (массы, количества движения и пр.), содержащейся в контрольном объеме, водится плотность ее распределения  $\theta$

$$\theta = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta \Theta}{\Delta W}, \quad (1.1)$$

где  $\Delta \Theta$  – количество физической величины в объеме  $\Delta W$ , содержащем рассматриваемую точку пространства.

С учетом (1.1) количество физической величины в объеме  $W$  найдется так

$$\Theta = \int_W \theta dW. \quad (1.2)$$

Строго говоря, из-за молекулярного строения газов и жидкостей и теплового движения молекул предельный переход  $\Delta W \rightarrow 0$  некорректен, так как при уменьшении  $\Delta W$  до размеров, соизмеримых с межмолекулярным расстоянием, величина  $\theta$  будет испытывать резкие колебания, увеличивающиеся с уменьшением объема  $\Delta W$ . В результате мы не получим требуемую по гипотезе сплошности непрерывность изменения рассматриваемой величины  $\theta$ . Поэтому в МЖГ вводится понятие *бесконечно малого объема*. Под ним понимается объем, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению со всем объемом системы, так что параметры среды в нем (плотность, скорость и пр.) можно считать постоянными, но он содержит в себе настолько много молекул, что эти параметры будут устойчивы по отношению к изменению объема. Поэтому стягивание объема в точку при предельном переходе в (1.1) следует понимать, как стремление к

бесконечно малому объему (в упомянутом выше смысле), содержащему рассматриваемую точку исследуемой области.

Необходимость существования такого же предельного перехода появляется также и при определении пространственных производных и интегралов от физических параметров сплошной среды. Аналогичная ситуация возникает и при определении производных от физических параметров среды по времени таких, как например,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}, \quad (1.3)$$

где  $\Delta \theta$  – изменение физической величины  $\theta$  в рассматриваемой точке пространства (точнее, в бесконечно малом объеме, содержащем данную точку) за интервал времени  $\Delta t$ .

Для корректности (существования) предельного перехода  $\Delta t \rightarrow 0$  вводится понятие *бесконечно малого промежутка времени*, под которым подразумевается интервал времени, существенно меньший, чем характерное время рассматриваемого переходного процесса, но значительно больший, чем характерное время молекулярного движения. И тогда стремление  $\Delta t$  к нулю понимается, как стремление к этому бесконечно малому промежутку времени.

Конкретизируя параметр  $\theta$ , в частности для плотности жидкостей (газов)  $\rho$  и вектора удельного количества движения  $\kappa$  в некоторой точке пространства, в соответствии с (1.1), будем иметь

$$\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta W}, \quad \kappa = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta W}, \quad (1.4)$$

где  $\Delta M$ ,  $\Delta \mathbf{K}$ , – масса и вектор количества движения сплошной среды в объеме  $\Delta W$ , содержащем рассматриваемую точку.

Имея в виду дискретное строение реальных газов и жидкостей, можно вести среднюю по объему  $\Delta W$  скорость  $\bar{\mathbf{w}}$ , как отношение количества движения среды в данном объеме  $\Delta \mathbf{K}$  к ее массе  $\Delta M$ :  $\bar{\mathbf{w}} = \Delta \mathbf{K} / \Delta M$ . Тогда скорость среды в точке пространства  $\mathbf{u}$  будет представлять собой предел

$$\mathbf{u} = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \bar{\mathbf{w}} = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta M}, \quad (1.5)$$

а для вектора удельного количества движения  $\kappa$  получим выражение

$$\kappa = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta W} = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta W} \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta M} = \rho \mathbf{u}. \quad (1.6)$$

Аналогично вводятся и другие *феноменологические* параметры сплошной среды: температура, удельная внутренняя энергия, энталпия т. д. В частности, аналогично (1.6) определяется удельная кинетическая энергия сплошной среды

$$k = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta M |\bar{\mathbf{w}}|^2 / 2}{\Delta W} = \rho \frac{u^2}{2}. \quad (1.7)$$

Упоминавшееся выше взаимодействие контрольного объема с окружающей средой, осуществляющее через его поверхность  $S$ , характеризуется вектором напряжения поверхностных сил  $\mathbf{p}$  и вектором удельного потока  $\chi$  переносимой через поверхность физической величины (теплоты, массы,

количества движения и пр.). Не вдаваясь в тонкости интерпретации поверхности контрольного объема с точки зрения молекулярного строения вещества, эти параметры определим следующим образом

$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S}, \quad \chi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{X}}{\Delta S}, \quad (1.8)$$

где  $\Delta \mathbf{P}$ ,  $\Delta \mathbf{X}$  – внешняя сила, приложенная к поверхности  $\Delta S$  контрольного объема  $W$ , и поток количества физической величины, переносимой через эту поверхность соответственно.

Выделим в окрестности некоторой точки элемент *поверхности*  $dS$  объема настолько малый, что как вектор поверхностных напряжений, так и вектор потока  $\chi$  в пределах него могут считаться одинаковыми. Этот элемент поверхности будем характеризовать вектором внешней нормали  $\mathbf{n}$ , то есть направленной вовне объема  $W$ , см. рис. 1.1, а для напряжения поверхностных сил будем использовать обозначение  $\mathbf{p}_n$ , где индекс «*n*» означает, что оно относится к элементу поверхности с вектором внешней нормали  $\mathbf{n}$ . Если рассмотреть внутреннюю сторону того же самого элемента поверхности, то вектор нормали к нему будет направлен противоположно  $\mathbf{n}$ , то есть будет равен  $-\mathbf{n}$ , см. рис. 1.1. И тогда напряжение, действующее с данной (внутренней) стороны поверхности, следует обозначить  $\mathbf{p}_{-n}$ . Вектор потока всегда направлен по нормали к элементу поверхности, поэтому для его обозначения дополнительного индекса не требуется.

При дальнейшем изложении материала мы будем применять термин «*жидкая частица*», под которым будем понимать выделенный в исследуемой области сплошной среды объем неизменной массы, то есть с не-проницаемыми для окружающей среды и, в общем случае, деформируемыми границами. Данным термином «*жидкая частица*» будем обозначать, как бесконечно малый жидкий объем, такой что движение его можно представить, как движение материальной точки, так и жидкий объем конечных размеров. Если точный смысл термина не следует из контекста излагаемого материала, то в первом случае будем уточнять: «*элементарная жидккая частица*». Во втором случае параметры состояния среды и гидродинамические характеристики различны в разных точках жидкой частицы. Если это требуется подчеркнуть для понимания сути изложения, то будем применять термин «*жидкая частица конечных размеров*». Если объем жидкой частицы настолько мал, что изменение параметров среды в пределах него подчиняется линейной закономерности, то будем использовать термин «*элемент объема*». Такой же термин в этом случае будем использовать для малого объема с проницаемыми стенками.

В механике жидкости и газа термин «*жидкость*» зачастую употребляется для обозначения как жидкой, так и газообразной среды. При этом, для того чтобы подчеркнуть, что под этим термином понимается газообразная среда, иногда делается уточнение – «*сжимаемая жидкость*».

## 1.2. Производная по времени от количества физической величины в деформируемом объеме. Формула Остроградского-Гаусса

С учетом введенных выше понятий скорость изменения количества некоторой физической величины  $\Theta$  в контрольном объеме с непроницаемыми границами запишется, как

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \theta dW, \quad (1.9)$$

где  $\theta$  – плотность распределения физической величины  $\Theta$ .

Рассмотрим трансформацию контрольного объема  $W$  за небольшой интервал времени  $\Delta t$ . За это время  $\theta$  в каждой точке объема изменится на  $\Delta\theta$ . Кроме того, каждый элемент площади поверхности  $\Delta s$ , ограничивающей данный объем, переместится на  $\Delta l \approx u_n \Delta t$ , где  $u_n$  – проекция вектора скорости  $\mathbf{u}$  движения элемента  $\Delta s^*$  на собственную внешнюю нормаль  $\mathbf{n}$ , рис. 1.2. Это вызовет соответствующее изменение величины объема на  $\Delta W \approx \sum_i u_{ni} \Delta t \Delta S_i$ . Тогда, пренебрегая величинами второго порядка малости, изменение количества физической величины  $\Delta\Theta$  в объеме в рассматриваемой трансформации определим по формуле

$$\Delta\Theta = \int_W \Delta\theta dW + \sum_i \theta u_{ni} \Delta t \Delta W_i. \quad (1.10)$$

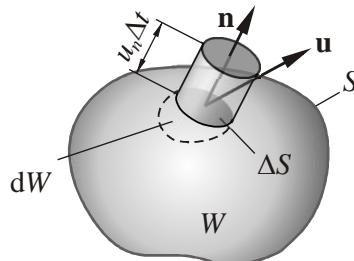


Рис. 1.2. К определению деформации контрольного объема

Разделив обе части (1.10) на  $\Delta t$  и перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  и  $\Delta S_i \rightarrow 0$ , получим

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \theta dW = \int_W \frac{\partial \theta}{\partial t} dW + \int_S \theta u_n dS. \quad (1.11)$$

Таким образом, полная производная по времени от интеграла распределенной в непроницаемом деформируемом объеме физической величины равна сумме интеграла по этому объему от частной производной рассматриваемой величины и скорости изменения количества данной величины в объеме, обусловленной перемещением его границ.

---

\* Равная скорости движения жидкости в данной точке поверхности.

Заметим, что формула (1.11) остается справедливой и в случае проницаемых стенок объема  $W$ . В этом случае второе слагаемое в формуле представляет собой поток физической величины  $\theta$  извне во внутрь объема.

Запишем в следующем виде второй интеграл в правой части (1.11), учитывая что  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_x \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}) + u_y \cos(\mathbf{j}, \mathbf{n}) + u_z \cos(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ ,

$$\int_S \theta u_n dS = \int_S \theta u_x \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}) dS + \int_S \theta u_y \cos(\mathbf{j}, \mathbf{n}) dS + \int_S \theta u_z \cos(\mathbf{k}, \mathbf{n}) dS. \quad (1.12)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (1.12). Разделим область интегрирования на две части  $S_1$  и  $S_2$ , проведя образующей, параллельной оси  $Ox$ , по поверхности контрольного объема, рис. 1.3.

$$\int_S \theta u_x \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}) dS = \int_{S_1} \theta \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}) dS + \int_{S_2} \theta \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}) dS \quad (1.13)$$

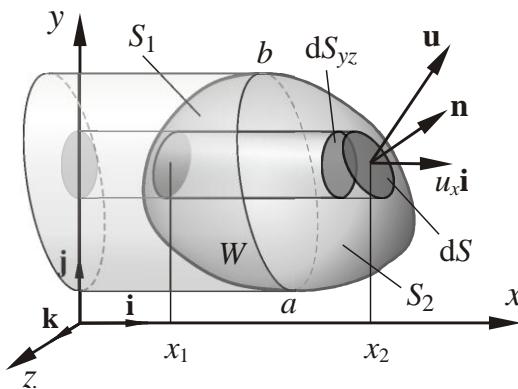


Рис. 1.3. К вычислению поверхностного интеграла

На поверхности  $S_1 \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}) < 0$ , на поверхности  $S_2$  соответствующий направляющий косинус положительный,  $\cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}) > 0$ . Поэтому формулу (1.13) можно записать в виде

$$\int_S \theta u_x \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}) dS = - \int_{S_1} \theta u_x dS_{yz} + \int_{S_2} \theta u_x dS_{yz}, \quad (1.14)$$

где  $dS_{yz}$  – проекция элемента площади поверхности  $dS$  на координатную плоскость  $yz$ , см. рис. 1.3.

Учитывая, что интеграл от производной первообразной функции есть сама первообразная, а также используя правило вычисления кратных интегралов, можем записать:

$$\begin{aligned} \int_S \theta u_x \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}) dS &= - \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{S_1} \theta u_x dS_{yz} \right) dx + \int_0^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{S_2} \theta u_x dS_{yz} \right) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_S \frac{\partial \theta u_x}{\partial x} dS_{yz} dx = \int_W \frac{\partial \theta u_x}{\partial x} dW. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Аналогично преобразуются второе и третье слагаемые в правой части (1.12), что дает

$$\int_{S_{xz}} \theta u_y dS_{xz} = \int_W \frac{\partial \theta u_y}{\partial y} dW, \quad \int_{S_{xy}} \theta u_z dS_{xy} = \int_W \frac{\partial \theta u_z}{\partial z} dW. \quad (1.16)$$

Подставляя (1.15) и (1.16) в (1.12), получаем

$$\int_S \theta u_n dS = \int_W \left( \frac{\partial \theta u_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta u_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta u_z}{\partial z} \right) dW. \quad (1.17)$$

Вообще, как следует из проведенных выше рассуждений, если в объеме  $W$ , включая его границу, задана любая непрерывно дифференцируемая векторная функция  $\mathbf{a}$ , то справедлива следующая формула преобразования интеграла по площади поверхности  $S$  в интеграл по объему  $W$ , ограниченному этой поверхностью, которая носит название *формулы Остроградского-Гаусса*

$$\int_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_S a_n dS = \int_W \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dW. \quad (1.18)$$

Комбинация производных под знаком интеграла в правой части (1.18) называется *оператором дивергенции*<sup>\*</sup> [2] и обозначается

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1.19)$$

По своему физическому смыслу дивергенция учитывает влияние сжимаемости (растяжимости) среды на скорость изменения количества физической величины, содержащейся в некотором объеме. Пояснения физического смысла дивергенции будут даны в разделе 2.5.

Распространим формулу Остроградского-Гаусса на общий случай векторной функции. Пусть в каждой точке поверхности  $S$  контрольного объема  $W$  определена векторная функция  $\mathbf{a}(t, x, y, z)$ , которая может быть представлена в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + \mathbf{c} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + \mathbf{d} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}), \quad (1.20)$$

где  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}), \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}), \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})$  – направляющие косинусы вектора внешней нормали  $\mathbf{n}$  в рассматриваемой точке поверхности  $S$ ;  $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  – непрерывно дифференцируемые в объеме векторные функции. Требуется найти поверхностный интеграл  $\int_S \mathbf{a} dS$ .

Повторяя рассуждения, аналогичные (1.12)...(1.17), приходим к формуле

$$\int_S \mathbf{a} dS = \int_W \left( \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial z} \right) dW. \quad (1.21)$$

---

\* От французского divergence – расходимость

Таким образом, с учетом формулы Остроградского-Гаусса, полная производная по времени от количества физической величины  $\Theta$ , содержащейся в деформируемом объеме  $W$ , найдется по формуле

$$\frac{d\Theta}{dt} = \int_W \frac{\partial\Theta}{\partial t} dW + \int_S \Theta u_n dS = \int_W \left( \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{\partial\Theta u_x}{\partial x} + \frac{\partial\Theta u_y}{\partial y} + \frac{\partial\Theta u_z}{\partial z} \right) dW. \quad (1.22)$$

Получим еще одну формулу, связывающую поверхностный интеграл  $\int_S a dS$  (где  $a$  – дифференцируемая скалярная функция) с объемным интегралом, которая будет использоваться в дальнейшем. Запишем этот интеграл в виде

$$\begin{aligned} \int_S a dS &= \mathbf{i} \int_S a \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) dS + \mathbf{j} \int_S a \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) dS + \mathbf{k} \int_S a \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}) dS = \\ &= \mathbf{i} \int_{S_{yz}} a dS_{yz} + \mathbf{j} \int_{S_{xz}} a dS_{xz} + \mathbf{k} \int_{S_{xy}} a dS_{xy}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

С использованием (1.15) и (1.16), считая, что в этом случае  $\Theta u_x = \Theta u_y = \Theta u_z = a$ , формулу (1.23) приведем к виду

$$\int_S a dS = \mathbf{i} \int_W \frac{\partial a}{\partial x} dW + \mathbf{j} \int_W \frac{\partial a}{\partial y} dW + \mathbf{k} \int_W \frac{\partial a}{\partial z} dW. \quad (1.24)$$

### 1.3. Основные физические свойства жидкостей и газов

При математическом описании закономерностей механики жидкостей и газов используют различные модели сплошной среды, соответствующие различным физическим свойствам этих сред: *модель несжимаемой жидкости*; *модель идеальной жидкости (газа)*, *модель совершенного газа*. Смысл этих понятий поясняется ниже в данном разделе.

#### 1.3.1 Плотность и другие объемные свойства жидкостей и газов

Плотность сплошной среды  $\rho$  в произвольной точке пространства определяется соотношением (1.4). Размерность плотности равна размерности массы, деленной на куб размерности длины, например,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Наряду с плотностью в МСС используется понятие удельного объема  $\vartheta$  – величина обратная плотности:

$$\vartheta = \frac{1}{\rho} \quad (1.25)$$

и представляющий собой объем, содержащий единицу массы.

Способность жидкости или газа под действием внешнего давления изменять свой объем (плотность) называется *сжимаемостью*. Если плотность жидкости (газа) постоянна, то такая среда называется *несжимаемой*.

Количественно сжимаемость оценивается *изотермическим коэффициентом сжимаемости*  $\beta_p$ ,  $\text{м}^2/\text{Н}$ , характеризующим относительное изменение объема жидкости при изменении давления  $p$  на 1 Па при постоянной температуре:

$$\beta_p = -\frac{1}{\vartheta} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \right)_T . \quad (1.26)$$

Или в интегральной форме

$$\beta_p = \frac{1}{W_1} \frac{W_1 - W_2}{p_2 - p_1} \Big|_{T=\text{const}} , \quad (1.27)$$

где  $W_1, W_2$  – первоначальный и конечный объемы жидкости.

Для большинства жидкостей  $\beta_p = 10^{-9} \dots 10^{-10} (\text{Н}/\text{м}^2)^{-1}$ . Для капельных жидкостей\* он уменьшается с возрастанием давления и повышением температуры. Переходя в (1.26) к плотности можем записать

$$\beta_p = -\rho \left( \frac{\partial (1/\rho)}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T , \quad (1.28)$$

или, обозначив  $1/\beta_p = E$ ,

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{E} . \quad (1.29)$$

Величину  $E$  называют модулем упругости жидкости. Соотношение (1.29) выражает закон Гука для жидкостей: *напряжения, возникающие в жидкости при ее сжатии, пропорциональны относительной объемной деформации*.

Для воды при нормальных условиях  $E = 2,25 \cdot 10^9 \text{ Н}/\text{м}^2 = 2250 \text{ МПа}$ .

В то же время в МЖГ считается, что жидкости не выдерживают напряжения растяжения. В реальных капельных жидкостях напряжения растяжения могут иметь место, но они невелики, то есть прочность жидкости на разрыв мала. В газах вообще не наблюдается напряжений растяжения.

Получим выражения для изотермического коэффициента сжатия *совершенного газа*.

**Совершенный газ.** Совершенным называется газ, удельные теплоемкости которого являются константами и, следовательно, для него справедливо уравнение состояния Клапейрона-Менделеева

$$p = \rho RT , \quad (1.30)$$

где  $R$  – газовая постоянная.

Запишем основные термодинамические соотношения, справедливые для совершенного газа, которые будут использоваться в дальнейшем. Удельная внутренняя энергия  $e$  и энтальпия  $h$  находятся по формулам

$$e = c_v T , \quad h = c_p T , \quad (1.31)$$

\* Понятие капельной жидкости см. в разделе 1.3.3.

где  $T$  – абсолютная термодинамическая температура,  $c_v, c_p$  – коэффициенты удельной теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно, которые в термодинамике определяются, как

$$c_v = \left( \frac{\partial q}{\partial T} \right)_v, \quad c_p = \left( \frac{\partial q}{\partial T} \right)_p. \quad (1.32)$$

Рассмотрим выражение для первого начала термодинамики

$$dq = c_v T + p d(1/\rho), \quad (1.33)$$

где  $q$  – удельное количество тепловой энергии, подведенное к газу.

Продифференцируем (1.33) по  $T$  при постоянном давлении и учтем уравнение состояния (1.30):

$$\left( \frac{\partial q}{\partial T} \right)_p = c_v + p \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{\rho} \right)_p = c_v + R. \quad (1.34)$$

Учитывая определения (1.32), получим

$$c_p - c_v = R. \quad (1.35)$$

Соотношение (1.35) называется формулой Майера.

Отношение коэффициентов удельных теплоемкостей

$$k = c_p / c_v \quad (1.36)$$

называется показателем адиабаты.

Если процесс изменения термодинамических параметров в совершенном газе происходит без теплообмена с окружающей средой, то такой процесс называется *адиабатическим*. В этом случае справедливо *уравнение адиабаты Пуассона*

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}. \quad (1.37)$$

Если процесс изменения термодинамических параметров в совершенном газе происходит при постоянной температуре, то такой процесс называется *изотермическим*. В изотермическом процессе

$$\frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (1.38)$$

Используя приведенные соотношения, можно получить следующие зависимости между удельной внутренней энергией и энтальпией

$$h = c_p T = (c_v + R)T = c_v T + RT = e + RT = e + \frac{p}{\rho} = \frac{c_p}{c_v} c_v T = k e. \quad (1.39)$$

С учетом (1.30) изотермический коэффициент сжатия совершенного газа найдется по формуле

$$\beta_p = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \frac{RT}{p} \left( \frac{\partial \frac{p}{RT}}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{p}. \quad (1.40)$$

Следовательно модуль упругости совершенного газа равен

$$E = p. \quad (1.41)$$

Это свидетельствует о высокой сжимаемости газа.

Изменение объема сплошной среды при изменении температуры при  $p = \text{const}$  характеризуется *коэффициентом теплового объемного расширения*  $\beta_T$

$$\beta_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p. \quad (1.42)$$

Как правило жидкости и газы расширяются при увеличении температуры, их плотность при этом уменьшается. Исключение составляет вода, плотность которой достигает максимума при  $t = 4$  °C. Такая аномалия объясняется особенностями ее молекулярного строения. Для воды при нормальных условий  $\beta_T = 1,5 \cdot 10^{-4}$  1/°C.

Для совершенного газа из уравнения состояния следует

$$\beta_T = \frac{1}{T}. \quad (1.43)$$

**Скорость звука.** Скорость звука представляет собой скорость распространения малых возмущений давления в сплошной среде и определяется, как

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}. \quad (1.44)$$

Для совершенного газа скорость звука в адиабатическом процессе найдем, подставив (1.37) в (1.44) и используя уравнение состояния (1.30):

$$a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}. \quad (1.45)$$

Данная скорость звука называется *адиабатической*. Если процесс изотермический, то соответствующая скорость звука называется *изотермической* и находится по формуле

$$a = \sqrt{RT} = \sqrt{\frac{p}{\rho}}. \quad (1.46)$$

### 1.3.2 Вязкость капельных жидкостей и газов

Опыты показывают, что частицы сплошной среды (газа, жидкости), непосредственно примыкающие к телу, прилипают к его поверхности. Если

тело покоится, то скорость прилипших частиц равна нулю\*. Если тело перемещается, то слой прилипшей среды перемещается с ним и имеет такую же скорость, как и скорость твердого тела. Эти положения позволяют следующим образом представить механизм образования вязкой силы сопротивления. Рассмотрим твердую стенку и пластинку, между которыми располагается слой жидкости. Пусть пластина перемещается параллельно стенке со скоростью  $u_0$ , рис. 1.4.

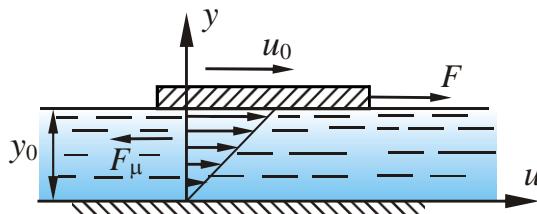


Рис. 1.4. К определению силы вязкости при слоистом движении жидкости

Слой жидкости, прилегающий к пластиинке, перемещается вместе с ней со скоростью  $u_0$ . Вследствие молекулярных связей этот слой жидкости увлекает за собой следующий и т. д. Скорость нижнего слоя равна нулю, так как стенка неподвижна. Таким образом в жидкости возникает слоистое течение с некоторым распределением скоростей по координате  $y$ . Между движущимися с разными скоростями слоями возникают силы внутреннего трения, обусловленные действием межмолекулярных связей. Величина этой силы, приходящаяся на единицу площади раздела сред, определяется *законом вязкостного трения Ньютона*

$$\tau_\mu = \frac{F_\mu}{S} = \pm \mu \frac{du}{dy}, \quad (1.47)$$

где  $\tau_\mu$  – *вязкостное (касательное) напряжение*;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $S$  – площадь соприкасающихся слоев жидкости.

Знак в формуле (1.47) выбирается таким образом, чтобы сила внутреннего трения была положительной. Эта формула в настоящее время является общепринятой при расчете напряжений трения при ламинарном (слоистом) течении жидкости и газа. Величина коэффициента динамической вязкости является основной количественной характеристикой вязкости сплошной среды. Единицами измерения коэффициента динамической вязкости  $\mu$  служат:

- в системе СИ –  $\text{Па}\cdot\text{с} = \text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2 = \text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$ ;
- в системе СГС –  $\text{г}/(\text{см}\cdot\text{с})$  или пуз (Пз);
- в технической системе –  $\text{кгс}\cdot\text{с}/\text{м}^2$ .

Информация о величине коэффициента динамической вязкости некоторых веществ приведена в табл. 1.1.

---

\* Для сильно разреженных газов, для которых гипотеза сплошности неверна, условия «прилипания» не выполняются.

Таблица 1.1  
Коэффициент динамической вязкости  $\mu$

Наименование вещества	Значение $\mu$ , Па·с при температуре			
	-50 °C	0 °C	20 °C	50 °C
Вода	-	$17,9 \cdot 10^{-4}$	$10,1 \cdot 10^{-4}$	$5,49 \cdot 10^{-4}$
Ртуть	-	$17,0 \cdot 10^{-4}$	$15,7 \cdot 10^{-4}$	-
Бензин		$7,07 \cdot 10^{-4}$	-	-
Воздух	$1,708 \cdot 10^{-5}$	$1,84 \cdot 10^{-5}$	$1,954 \cdot 10^{-5}$	$2,18 \cdot 10^{-5}$
Водяной пар	$0,883 \cdot 10^{-5}$	$0,975 \cdot 10^{-5}$	$1,065 \cdot 10^{-5}$	$1,25 \cdot 10^{-5}$

Величина коэффициента динамической вязкости газов возрастает с увеличением температуры, а жидкостей падает, что подтверждается данными табл. 1.1. Зависимость коэффициента  $\mu$  воды от температуры  $t$ , °C, описывается формулой Пуазейля

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + 0,0337t + 0,000221t^2 \right)^{-1}, \quad (1.48)$$

где  $\mu_0$  – коэффициент динамической вязкости при 0 °C.

Для расчета коэффициента  $\mu$  воздуха можно воспользоваться формулой

$$\mu = (1700 + 5,58t - 0,0117t^2) \cdot 10^{-8} \text{ Па} \cdot \text{s}. \quad (1.49)$$

Давление слабо влияет на величину  $\mu$ .

Если рассматривается модель сплошной среды, в которой  $\mu = 0$ , то такая жидкость (газ) называется *идеальной*. В идеальной среде отсутствуют силы вязкого сопротивления.

Вязкость среды кроме коэффициента динамической вязкости  $\mu$  характеризуется также коэффициентом кинематической вязкости  $\nu$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.50)$$

**Неньютоновские среды.** Напряжения вязкого трения не во всякой среде подчиняется закону Ньютона. Существуют жидкости, называемые неньютоновским, для которых закон вязкостного трения отличается от линейного. К ним относятся *дилатантные* и *вязкопластичные* жидкости, а также жидкости Бингма-Шведова (*бингамовские*). Отдельным случаем неньютоновских жидкостей являются *тиксотропные* и *реопексные* жидкости, вязкость которых изменяется с течением времени. Для дилатантных и вязкопластичных сред закон трения имеет вид

$$\tau = \pm \mu \left( \frac{du}{dy} \right)^n, \quad (1.51)$$

где  $n > 1$  – для дилатантной среды;  $n < 1$  – для вязкопластичной среды.

Движение бингамовских жидкостей начинается только тогда, когда касательные напряжения превысят предел некоторого значения  $\tau_0$ . При

меньших напряжениях они не обладают текучестью и ведут себя, как твердые тела, испытывая только упругие деформации. Закон вязкого трения для бингамовских жидкостей имеет вид

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{du}{dy}. \quad (1.52)$$

Типичными примерами дилатантных жидкостей являются концентрированные суспензии твёрдых частиц; псевдопластических – полимерные расплавы и растворы. К бингамовской среде относятся, например, глинистые, бетонные и цементные растворы, некоторые нефтепродукты.

### 1.3.3 Поверхностное натяжение жидкостей

Поверхность жидкости на границе с газовой фазой или с несмешивающейся жидкостью находится в состоянии равномерного *поверхностного натяжения*. Благодаря действию сил поверхностного натяжения объем жидкости, на который не действуют другие силы, принимает сферическую форму. Со свойством поверхностного натяжения связана способность жидкости *образовывать капли*. Поэтому обычные жидкости называют *капельными*.

Поверхностное натяжение характеризуется *коэффициентом поверхностного натяжения*  $\sigma$ , равным отношению величины силы поверхностного натяжения к длине образующей линии свободной поверхности. Коэффициент  $\sigma$  зависит от природы жидкости, состояния поверхностного слоя (наличия примесей) и ее температуры. С увеличением температуры коэффициент поверхностного натяжения падает. Для воды, находящейся в соприкосновении с воздухом, при температуре 20 °C  $\sigma = 0,0726$  Н/м. Для ртути при тех же условиях  $\sigma = 0,54$  Н/м.

На границе между жидкостью и твердым телом возникают силы взаимодействия их молекул. Соотношение этих сил и сил взаимодействия молекул самой жидкости определяет характер граничных явлений. Если на твердую поверхность поместить каплю жидкости возможны следующие случаи: *полного растекания жидкости (полное смачивание)*, когда краевой угол  $\theta = 0$ , *частичного смачивания*  $\theta < \pi/2$ ; *частичного несмачивания*  $\theta < \pi/2 < \pi$ ; *полного несмачивания*  $\theta = \pi$ , рис. 1.5.

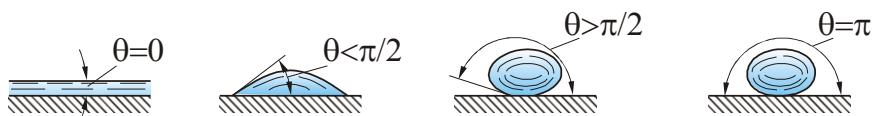


Рис. 1.5. Возможные случаи смачивания твердой поверхности вязкой жидкостью

Силы молекулярного взаимодействия между жидкостью и стенкой создают искривление свободной поверхности вблизи стенок. Искривление свободной поверхности сопровождается появлением дополнительного

давления в жидкости, которое создает подъем или опускание уровня в трубках малого диаметра, рис. 1.6.

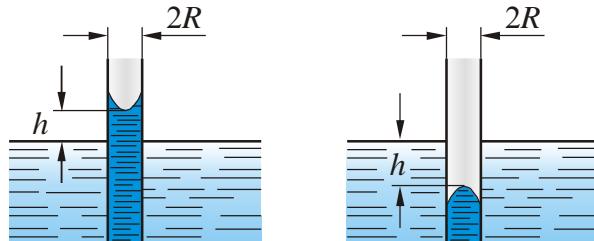


Рис. 1.6. Капиллярный подъем или понижение уровня в узких трубках

В трубке малого диаметра поверхность может быть вогнутой (смачивание), например, для воды в стеклянной трубке, или выпуклой (несмачивание) для ртути в стеклянной трубке. При смачивающей жидкости результирующая поверхностных сил направлена наружу, а при несмачивающей – внутрь жидкости.

Высота капиллярного подъема жидкости определяется по формуле

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g R}, \quad (1.53)$$

где  $\theta$  – краевой угол;  $R$  – радиус трубы;  $g$  – ускорение свободного падения.

Хотя существует несмачивание, но при движении жидкости скорости частиц, соприкасающейся с твердой поверхностью, в большинстве случаев равны скорости последней. То есть явление прилипания реальной (неидеальной) жидкости к твердой поверхности реализуется всегда.

### 1.3.4 Кипение жидкостей. Кавитация

Кипением называется процесс образования пара внутри объема жидкости, то есть испарение, сопровождающееся интенсивным образованием пузырей внутри объема жидкости, заполненных насыщенным паром. Кипение может происходить как в покоящейся, так и в движущейся жидкости в двух случаях: вследствие повышения температуры выше температуры кипения при данном давлении и в случае понижения давления до значений, меньших давления насыщенного пара при данной температуре.

Если жидкость не дегазирована, то кипение возникает почти сразу после достижения состояния насыщения. При этом жидкость испаряется внутрь пузырьков газа, они растут в объеме и прорываются наружу через свободную поверхность.

Если жидкость дегазирована, то ее температура может превышать температуру насыщения при данном давлении на 10 °С и более и процесс кипения при этом не возникает. Состояние перегретой жидкости неустойчивое и называется *метастабильным*, а жидкость в таком состоянии называется *перегретой*. Малейшее возмущение перегретой жидкости приводит к ее вскипанию, причем кипение начинается бурно, напоминает взрыв. Ана-

логичная картина наблюдается и при понижении давления дегазированной жидкости ниже давления насыщения при данной температуре.

Технические жидкости, как правило, содержат растворенный газ, поэтому они вскипают при давлениях, равных давлению насыщения.

*Кипение жидкости приводит к нарушению сплошности среды*, поэтому его необходимо обязательно учитывать при использовании расчетных соотношений МЖГ, основанных на гипотезе сплошности.

*Кипение, возникающее в движущейся среде вследствие местных понижений давления, называется кавитацией.* Кавитация может быть:

1. В виде отдельных пузырьков, возникающих в местах пониженного давления и уносимых потоком (*пузырьковая перемещающаяся кавитация*).

2. В виде протяженных, значительных по объему полостей, заполненных парами жидкости, присоединенных к поверхности обтекаемых тел (*суперкавитация*).

Кавитация сопровождается характерным шумом, а при длительном ее воздействии – эрозионным разрушением металлических стенок в местах повышения давления в потоке, что приводит к быстрой конденсации внутри паровых пузырьков, их схлопыванию с образованием микро гидроударов. Механическое воздействие гидроударов усугубляется химической кислородной коррозией и воздействием электрических полей, возникающих в кавернах.

Кавитация приводит и к увеличению гидравлического сопротивления, так как кавитационные пузырьки и каверны уменьшают живое сечение потока. Кавитация возможна как при течении жидкости в каналах, так и при внешнем обтекании тел: в полостях регулирующих клапанов, на лопастях гребных винтов, колес гидротурбин, насосов.

В качестве критерия, определяющего кавитационные свойства профилей, применяется число кавитации

$$\sigma = \frac{2(p_\infty - p_h)}{\rho u_\infty^2} = \frac{u_0^2}{u_\infty^2} - 1, \quad (1.54)$$

где  $p_\infty$ ,  $u_\infty$  – давление и скорость в набегающем потоке;  $u_0$ ,  $p_h$  – модуль скорости вблизи обтекаемого тела и давление насыщенных паров.

Примеры проявления кавитации приведены на рис. 1.7, 1.8.

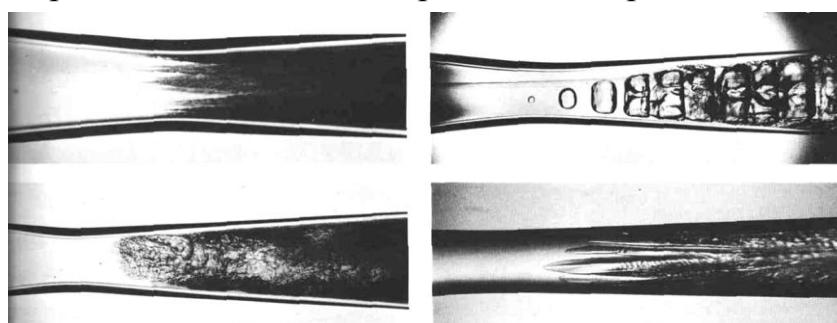
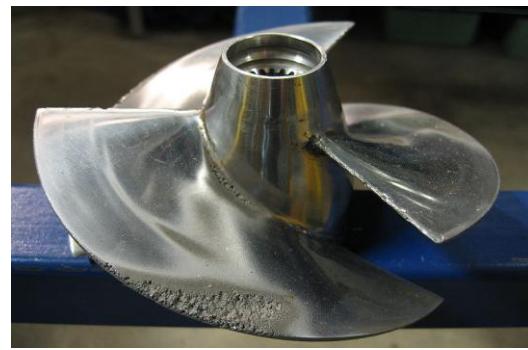


Рис. 1.7. Развитие кавитации в сопле Вентури



a)



б)

Рис. 1.8. Кавитация на гребном винте: а – кавитационные пзырьки; б – кавитационный износ винта

#### 1.4. Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятию сплошная среда.
2. Напишите формулу вычисления полной производной по времени от интеграла непрерывно распределенной физической величины в деформируемом объеме.
3. Напишите формулу Остроградского-Гаусса.
4. Напишите формулу оператора дивергенции векторного поля.
5. Какие физические свойства отличают жидкости и газы от твердых тел?
6. Перечислите основные физические свойства газов.
7. Перечислите основные физические свойства жидкостей.
8. Дайте определение скорости звука.
9. Напишите формулу закона вязкостного трения Ньютона.
10. Дайте определение понятию несжимаемая жидкость.
11. Дайте определение понятию совершенный газ.
12. Что собой представляет явление кавитации, каковы его последствия?

## ГЛАВА 2. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

### 2.1. Переменные Лагранжа и Эйлера

При решении задач кинематики и динамики в механике жидкости и газа используются подход Лагранжа и подход Эйлера. Независимые переменные, от которых зависят искомые переменные задачи в соответствующих подходах, называются *переменным Лагранжа и Эйлера* соответственно.

**Переменные Лагранжа.** При подходе Лагранжа «прослеживается» траектория движения каждой частицы жидкости. Пусть в начальный момент  $t = 0$  координаты рассматриваемой частицы были равны  $x_0 = a$ ,  $y_0 = b$ ,  $z_0 = c$ . Ее положение в момент времени  $t$  описывается координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , которые однозначно зависят от начального положения частицы. Таким образом, можем записать

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t). \quad (2.1)$$

Очевидно, что аналогичная зависимость существует и для гидродинамических параметров частицы

$$\rho = \rho(a, b, c, t), \quad p = p(a, b, c, t), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(a, b, c, t), \quad T = T(a, b, c, t). \quad (2.2)$$

Величины  $a, b, c, t$ , которые однозначно определяют текущие кинематические и динамические параметры рассматриваемой частицы, и называются *переменными Лагранжа*.

**Переменные Эйлера.** При подходе Эйлера рассматривается фиксированная точка пространства с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . В различные моменты времени через данную точку, естественно, проходят различные частицы жидкости. Но в конкретный, рассматриваемый момент  $t$  проходящая через нее частица будет иметь вполне конкретные гидродинамические характеристики. Следовательно, при данном подходе имеем

$$\rho = \rho(x, y, z, t), \quad p = p(x, y, z, t), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t), \quad T = T(x, y, z, t). \quad (2.3)$$

Таким образом, в рассматриваемом подходе величины  $x, y, z, t$  однозначно определяют поле гидродинамических параметров. Они и называются *переменными Эйлера*.

Применение того или иного подхода зависит от удобства, которое дает его использование при решении конкретной задачи. Заметим, однако, что в МЖГ переменные Эйлера находят более широкое применение.

### 2.2. Индивидуальная и местная производные

**Индивидуальная производная.** Пусть в некоторой области среды задана некоторая физическая величина  $\Theta$  (векторная или скалярная) в виде дифференцируемой по пространству и времени функции. Выделим в этой области частицу жидкости и рассмотрим ее движение. Для этой частицы данная величина будет зависеть только от времени  $\Theta(t)$ . Ее изменение по

времени характеризуется производной  $\Theta'_i$ , которая называется *индивидуальной*. Рассмотрим, как она выражается в переменных Эйлера и Лагранжа.

1) Пусть  $\Theta$  задана в переменных Эйлера, то есть  $\Theta = \Theta(x, y, z, t)$ . Для фиксированной частицы ее координаты изменяются с изменением времени

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (2.4)$$

Следовательно,  $\Theta = \Theta(x(t), y(t), z(t), t)$  и по правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$\Theta'_i = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Theta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Theta}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\Theta}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Учитывая, что (2.4) есть уравнения траектории частицы, можем записать

$$\frac{dx}{dt} = u_x; \quad \frac{dy}{dt} = u_y; \quad \frac{dz}{dt} = u_z. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5), в переменных Эйлера получим

$$\Theta'_i = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{\partial\Theta}{\partial x} u_x + \frac{\partial\Theta}{\partial y} u_y + \frac{\partial\Theta}{\partial z} u_z. \quad (2.7)$$

2) В переменных Лагранжа  $\Theta = \Theta(a, b, c, t)$ . Для выделенной частицы  $a, b, c$  постоянны, поэтому в переменных Лагранжа

$$\Theta'_i = \frac{\partial\Theta}{\partial t}. \quad (2.8)$$

**Местная производная.** Рассмотрим фиксированную точку пространства. Через нее в различные моменты времени проходят различные частицы жидкости, имеющие различные значения величины  $\Theta$ . При фиксированных координатах точки имеем  $\Theta = \Theta(t)$ . Изменение величины  $\Theta$  по времени в фиксированной точке характеризуется *местной производной*  $\Theta'_{\text{м}}$ .

1) Пусть  $\Theta$  определена в переменных Эйлера, то есть  $\Theta = \Theta(x, y, z, t)$ . Поэтому для фиксированной точки пространства в переменных Эйлера имеем

$$\Theta'_{\text{м}} = \frac{\partial\Theta}{\partial t}. \quad (2.9)$$

2) Если  $\Theta$  определена в переменных Лагранжа, то  $\Theta = \Theta(a, b, c, t)$ . А так как для различных частиц жидкости  $a, b, c$  различны, то мы должны записать

$$\Theta'_{\text{м}} = \frac{\partial\Theta}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial\Theta}{\partial b} \frac{db}{dt} + \frac{\partial\Theta}{\partial c} \frac{dc}{dt} + \frac{\partial\Theta}{\partial t}. \quad (2.10)$$

То есть, чтобы найти местную производную в переменных Лагранжа необходимо определить производные по времени от  $a, b, c$ .

### 2.3. Скорость и ускорение частицы жидкости

Скорость частицы является индивидуальной производной от радиус-вектора частицы по времени, а ускорение – индивидуальной производной от вектора скорости:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}'_i, \quad \mathbf{a} = \mathbf{u}'_i = \mathbf{r}''_i. \quad (2.11)$$

1) При использовании переменных Эйлера скорость есть функция координат и времени  $u_x = u_x(x, y, z, t)$ ,  $u_y = u_y(x, y, z, t)$ ,  $u_z = u_z(x, y, z, t)$ , тогда

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} u_z. \quad (2.12)$$

Или в проекциях на оси координат

$$\begin{cases} a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z; \\ a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z; \\ a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z. \end{cases} \quad (2.13)$$

2) При использовании переменных Лагранжа координаты частицы (проекции радиус-вектора) имеют вид

$$x = r_x = x(a, b, c, t), \quad y = r_y = y(a, b, c, t), \quad z = r_z = z(a, b, c, t), \quad (2.14)$$

тогда

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad u_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad u_z = \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (2.15)$$

Соответственно

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}, \quad a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (2.16)$$

### 2.4. Стационарные и нестационарные течения. Траектория и линия тока. Трубка тока

Течение жидкости (газа) называется *стационарным*, если поле гидродинамических параметров, определяющих данное течение, не зависит от времени. В противном случае течение называется *нестационарным*.

Если  $\Theta$  есть физическая величина, характеризующая течение, то для стационарности процесса требуется, чтобы ее местная производная была равна нулю  $\Theta'_m = 0$ . В переменных Эйлера имеем

$$\Theta'_m = \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0, \quad \Theta = \Theta(x, y, z). \quad (2.17)$$

В переменных Лагранжа формула для местной производной имеет более сложный вид, см. (2.10). Однако и в этом случае условие равенства ее нулю дает  $\Theta = \Theta(x, y, z)$  [1], что естественно. Ведь стационарность есть свойство поля гидродинамических па-

раметров данного течения, а само поле не должно зависеть от метода, который используется для его определения: Лагранжа или Эйлера – результат должен быть один и тот же.

**Траектория.** *Траекторией* называется геометрическое место точек пространства, через которые последовательно проходит рассматриваемая элементарная частица.

При использовании переменных Лагранжа координаты элементарной частицы (2.14) являются уравнением траектории.

Если используются переменные Эйлера, то для определения траектории необходимо решать дифференциальные уравнения (2.6).

**Линия тока.** *Линией тока* называется кривая, касательная к которой в каждой точке в рассматриваемый момент времени совпадает с вектором скорости. То есть линию тока «вычерчивают» различные частицы жидкости. Уравнение линии тока можно получить, если записать условие коллинеарности отрезка дуги линии тока  $ds = \{dx, dy, dz\}$  и вектора скорости  $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ , то есть условие пропорциональности соответствующих проекций векторов:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (2.18)$$

Обозначим через  $dl$  каждое из отношений (2.18), понимая под  $l$  вспомогательную независимую переменную. Тогда уравнения линии тока можно представить следующим образом

$$\frac{dx}{dl} = u_x(x, y, z, t); \quad \frac{dy}{dl} = u_y(x, y, z, t); \quad \frac{dz}{dl} = u_z(x, y, z, t). \quad (2.19)$$

В (2.19) время  $t$  представляет собой параметр. Каждому значению  $t$  соответствует своя линия тока.

При использовании переменных Эйлера проекции скорости  $u_x, u_y, u_z$  представляют собой известные функции  $x, y, z, t$ . Для того чтобы найти линию тока, проходящую через точку  $x_0, y_0, z_0$  в момент времени  $t_0$  надо решить систему (2.19) при фиксированном  $t = t_0$  и начальных условиях

$$x|_{l=l_0} = x_0, \quad y|_{l=l_0} = y_0, \quad z|_{l=l_0} = z_0. \quad (2.20)$$

В переменных Лагранжа уравнения линий тока имеют более сложный вид, так как различным точкам линии тока соответствуют различные значения  $a, b, c^*$ . Вывод уравнений линий тока в переменных Лагранжа можно найти, например в [1].

Линии тока не могут пересекаться ни в одной точке, где скорость не равна нулю или бесконечности<sup>\*\*</sup>. Действительно, предположим обратное. Пусть две линии тока пересеклись в точке  $C$ , рис. 2.1. Тогда векторы  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  следует рассматривать, как составляющие результирующего вектора  $\mathbf{u}$  в этой точке.

<sup>\*</sup> Ведь в различных точках линии тока находятся различные частицы жидкости.

<sup>\*\*</sup> Данные точки называются особыми.

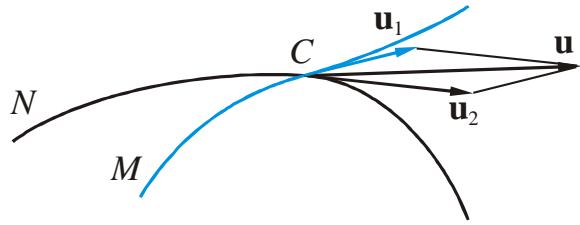


Рис. 2.1. К доказательству невозможности пересечения линий тока

Однако данный вектор  $\mathbf{u}$  не касателен ни к линии тока  $NC$ , ни к  $MC$ , а значит ни одна из них не является линией тока, что противоречит исходному условию.

В стационарных течениях линии тока и траектории частиц совпадают.

**Трубка тока.** Выберем в жидкости замкнутый контур  $l$  и проведем через каждую его точку линию тока. Получим трубчатую поверхность, рис. 2.2, которую назовем *трубкой тока*. Если контур  $l$  мал, то трубка тока называется *элементарной*. В пределах поперечного сечения элементарной трубки тока распределение скоростей принимают равномерным. Очевидно, что через боковую поверхность трубки тока жидкость не протекает, так как вектора скорости касательны к ней.

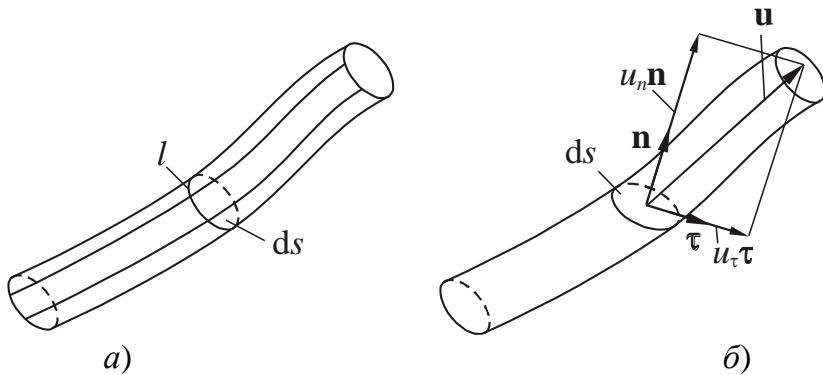


Рис. 2.2. К определению трубки тока

Совокупность частиц, ограниченных элементарной трубкой тока, называют *элементарной струйкой*, а поток конечных размеров рассматривают, как совокупность элементарных струек. Таким образом, приходим к струйной модели течения.

**Расход жидкости.** Обозначим через  $ds$  площадь произвольно ориентированного поперечного сечения элементарной трубки тока, см. рис. 2.2, б.  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к данной площадке,  $\tau$  – вектор касательной;  $\mathbf{u}$  – вектор скорости в данном сечении трубки тока. Составим скалярное произведение

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = u_n ds, \quad (2.21)$$

где  $u_n$  – проекция скорости на нормаль к площадке  $ds$ . Это произведение положительно, если вектора  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{u}$  образуют острый угол и отрицательно при тупом угле. Следовательно, модуль данного произведения представляет собой объемный расход жидкости через рассматриваемое сечение трубки тока:

$$dQ = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}| dS = |u_n| dS. \quad (2.22)$$

Если  $S$  – площадь произвольного сечения реального потока, то величина

$$Q = \int_S dQ = \int_S |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}| dS = \int_S |u_n| dS \quad (2.23)$$

представляет собой объемный расход жидкости через сечение  $S$ , а величины

$$dG = \rho dQ; \quad G = \int_S |\rho u_n| dS \quad (2.24)$$

называются массовым расходом элементарной струйки и массовым расходом через поверхность  $S$  соответственно.

## 2.5. Деформация жидкой частицы при движении

Рассмотрим деформацию элемента объема, имеющего в начальный момент времени форму параллелепипеда, рис. 2.3, за малый интервал времени  $dt$ .

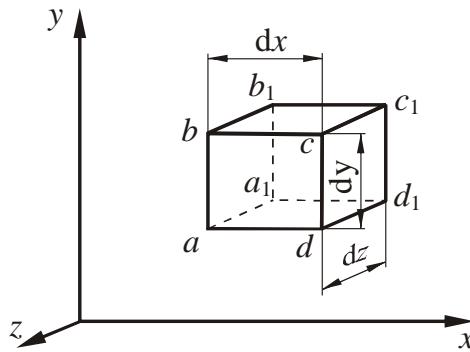


Рис. 2.3. К описанию деформации жидкой частицы

Составляющие скорости жидкости в точке  $a$  в начальный момент времени обозначим через  $u_x, u_y, u_z$ . Тогда для компонентов скорости в точке  $b$  справедливы соотношения

$$u_{bx} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy, \quad u_{by} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy, \quad u_{bz} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy. \quad (2.25)$$

Аналогичные выражения можем записать для точки  $d$

$$u_{dx} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx, \quad u_{dy} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx, \quad u_{dz} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx \quad (2.26)$$

и точки  $a_1$

$$u_{a_1 x} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz, \quad u_{a_1 y} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz, \quad u_{a_1 z} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz. \quad (2.27)$$

При деформации элемента объема деформация каждой его грани состоит из скашивания (угловая деформация) и растяжения (линейная деформация), рис. 2.4.

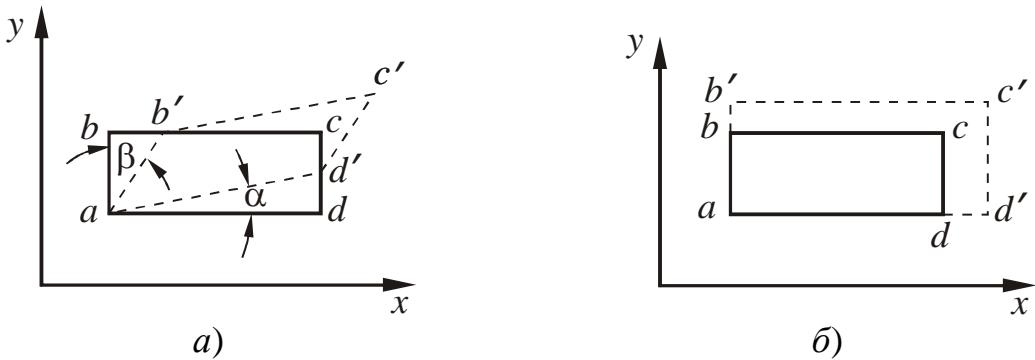


Рис. 2.4. Угловая *a* и линейная *b* деформации грани

Учитывая малость объема и интервала  $dt$ , угловую деформацию грани  $a, b, c, d$  найдем следующим образом

$$\alpha + \beta = \frac{dd'}{ad} + \frac{bb'}{ab} = \frac{dd'}{dx} + \frac{bb'}{dy}. \quad (2.28)$$

Величину отрезка  $dd'$  найдем, как разность перемещений точек  $d$  и  $a$  в направлении оси  $y$ :

$$dd' = (u_{dy} - u_{ay})dt = \left( u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx - u_y \right) dt = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx dt. \quad (2.29)$$

Аналогично выражается длина отрезка  $bb'$

$$bb' = (u_{bx} - u_{ax})dt = \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy - u_x \right) dt = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy dt. \quad (2.30)$$

С учетом этих выражений скорость угловой деформации грани  $a, b, c, d$  найдется как

$$\delta_z = \frac{\alpha + \beta}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (2.31)$$

Индекс  $z$  означает, что рассматривается угловая деформация контрольного объема в плоскости, перпендикулярной оси  $Oz$ . Угловые смещения ребер вызывают появление угловой скорости вращения всей частицы жидкости. Проекция угловой скорости на ось  $Oz$  найдется, как среднеарифметическое угловых скоростей ребер  $ab$  и  $ad$ . Так как направления вращения ребер противоположны, то получим

$$\omega_z = \frac{1}{2} \frac{\beta - \alpha}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (2.32)$$

Аналогично можно получить выражения для угловых скоростей деформации и угловых скоростей вращения для других осей

$$\delta_x = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \delta_y = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad (2.33)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (2.34)$$

Линейная деформация элемента объема приводит к удлинению ребер, см. рис. 2.4, б. Относительная скорость растяжения объема в направлении оси  $x$  найдется, как

$$\varepsilon_x = \frac{1}{dt} \frac{dd'}{ad} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt}{dx dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (2.35)$$

Аналогично находятся скорости относительного удлинения по другим осям

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (2.36)$$

Рассмотрим выражение  $\varepsilon_x dx dt dy dz = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt dy dz$ . Нетрудно заметить, что оно представляет собой изменение элемента объема, вызванное линейной деформацией в направлении оси  $x$  за промежуток времени  $dt$ . Тогда общее изменение объема за тот же промежуток времени найдется как

$$dW = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt dy dz + \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dt dy dz + \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dt dy dz. \quad (2.37)$$

Отсюда относительная скорость изменения контрольного объема определяется равенством

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (2.38)$$

Дифференциальный оператор в (2.38) есть дивергенция вектора скорости  $\mathbf{u}$ , см. формулу (1.19). То есть

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}. \quad (2.39)$$

Как видно из (2.39),  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  представляет собой относительную скорость расширения (сжатия) среды в рассматриваемой точке. Если при движении жидкой частицы ее контрольный объем не меняется, например жидкость несжимаема, то дивергенция скорости равна нулю

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (2.40)$$

Если под знаком дивергенции будет стоять не скорость, а другая векторная величина, то (1.19) будет описывать влияние на скорость изменения количества данной физической величины, содержащейся в некотором объеме, сжимаемости (растяжимости) среды.

Завершая рассмотрение закономерностей деформации движущейся жидкой частицы, отметим следующее. Подробный анализ ее кинематики показывает [1], что движение элементарного объема среды можно в каждый момент времени представить разложенным на: 1) квазиверное движение со скоростью  $\mathbf{u}_{\text{кт}}$ , равной сумме поступательной скорости  $\mathbf{u}_a$  и вращательной, соответствующей вектору угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ ; 2) деформационное движение. Деформационное движение определяется симметричным тензором второго ранга, называемым *тензором скоростей деформаций*

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  связаны с определенными выше скоростями угловых и линейных деформаций следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xx} &= \delta_x, \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \delta_y, \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \delta_z, \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= \dot{\epsilon}_{yx} = \frac{1}{2}\omega_z, \quad \dot{\epsilon}_{xz} = \dot{\epsilon}_{zx} = \frac{1}{2}\omega_y, \quad \dot{\epsilon}_{yz} = \dot{\epsilon}_{zy} = \frac{1}{2}\omega_x. \end{aligned} \quad (2.41)$$

## 2.6. Режимы течения жидкости. Понятие турбулентности

Наблюдения за поведением частиц жидкости при ее движении показывает, что характер движения потока может быть различным в зависимости от рода жидкости, скорости ее движения и состояния стенок, ограничивающих поток. При определенных условиях частицы движутся упорядоченно, образуя слоистое (или *ламинарное*<sup>\*</sup>) движение. Пример ламинарного течения при обтекании цилиндра показан на рис. 2.5, а.

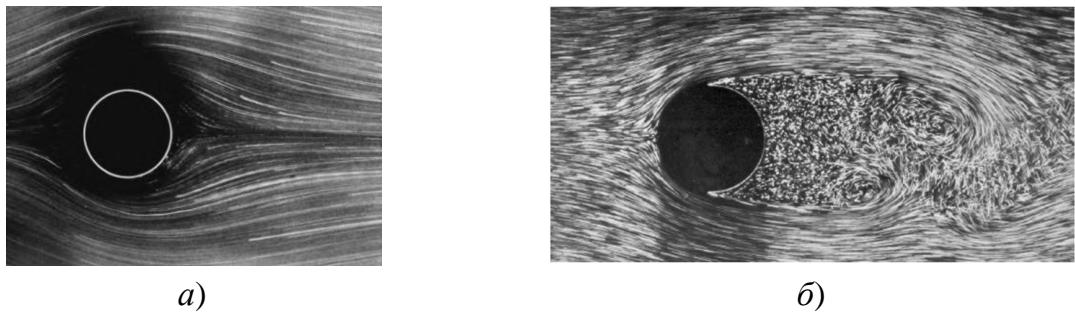


Рис.2.5. Примеры ламинарного а) и турбулентного б) обтекания цилиндра

При других условиях частицы наряду с основным ориентирующим движением беспорядочно перемещаются из слоя в слой, их мгновенные местные скорости резко изменяются по величине и направлению. Слоистая структура разрушается, образуются завихрения, вызывающие перемешивание слоев, происходит пульсация параметров течения. Такое движение

\* От лат. *lamina* – пластиинка, полоска.

называют *турбулентным*<sup>\*</sup>. Пример визуальной картины турбулентного обтекания цилиндра показан на рис. 2.5, б.

Впервые достаточно полные лабораторные исследования режимов движения выполнил английский физик Особорн Рейнольдс (1883 г.), который установил, что режим движения жидкости определяется безразмерным параметром

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{ud}{v}, \quad (2.42)$$

где  $\rho$  – плотность движущейся среды;  $u$ ,  $\mu$  ( $v$ ) – ее скорость и коэффициент динамической (кинематической) вязкости соответственно;  $d$  – характерный размер области течения. Данный параметр назван числом Рейнольдса. На рис. 2.6 проиллюстрирован опыт Рейнольдса по исследованию характера движения подкрашенной струйки жидкости в трубопроводе при увеличении скорости течения.

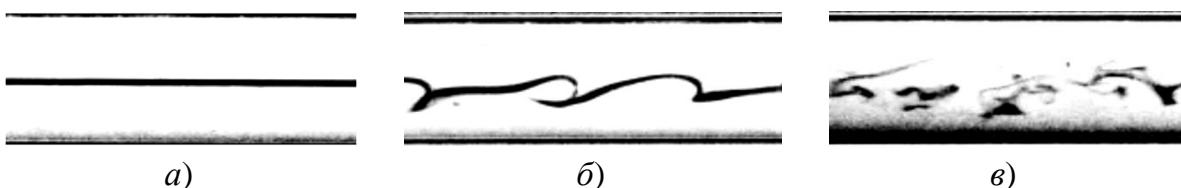


Рис. 2.6. Иллюстрация опыта Рейнольдса

При ламинарном режиме течения струйка имеет четкие очертания и движется строго параллельно стенкам трубопровода, см. рис. 2.6, а. При увеличении скорости течения (числа Re) форма струйки теряет устойчивость и затем распадается под действием турбулентных пульсаций, см. рис. 2.6, б и 2.6, в.

Еще один пример определяющего влияния числа Рейнольдса на режим движения жидкости для течения другого типа продемонстрирован на рис. 2.7.

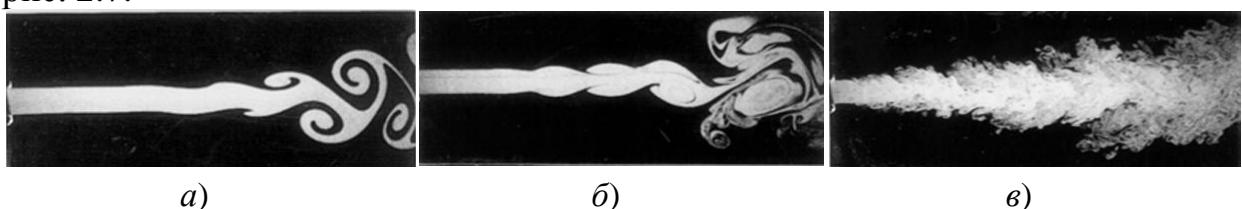


Рис. 2.7. Изменение структуры плоской затопленной струи при увеличении числа Рейнольдса: а – Re = 330; б – Re = 1450; в – Re = 3800

Здесь показано изменение формы плоской струи, истекающей в неподвижную среду при увеличении числа Рейнольдса  $Re = ud / v$ , где  $u$ ,  $d$  – средняя скорость в начальном сечении струи и ширина щели, через которую происходит истечение соответственно.

\* От лат. turbulentus – беспорядочный.

Пусть имеется турбулентный поток жидкости, расход которой неизменен. Если зарегистрировать местную скорость потока в какой либо его точке, то мы увидим, что скорость испытывает интенсивные высокочастотные пульсации, обусловленные вихревой структурой течения, рис. 2.8, а. Представим теперь местную скорость движения частиц жидкости  $\mathbf{u}$  в виде суммы осредненной  $\bar{\mathbf{u}}$  и пульсационной составляющей  $\mathbf{u}'$ :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad (2.43)$$

а осредненную скорость  $\bar{\mathbf{u}}$  определим по формуле

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \mathbf{u} d\tau, \quad (2.44)$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор местной мгновенной скорости;  $t$  – текущее время процесса;  $T$  – период осреднения (величина достаточно большая по сравнению с периодом пульсаций, но достаточно малая по сравнению с характерным временем процесса). В результате окажется, что осредненное значение скорости остается постоянным, см. рис. 2.8, а.

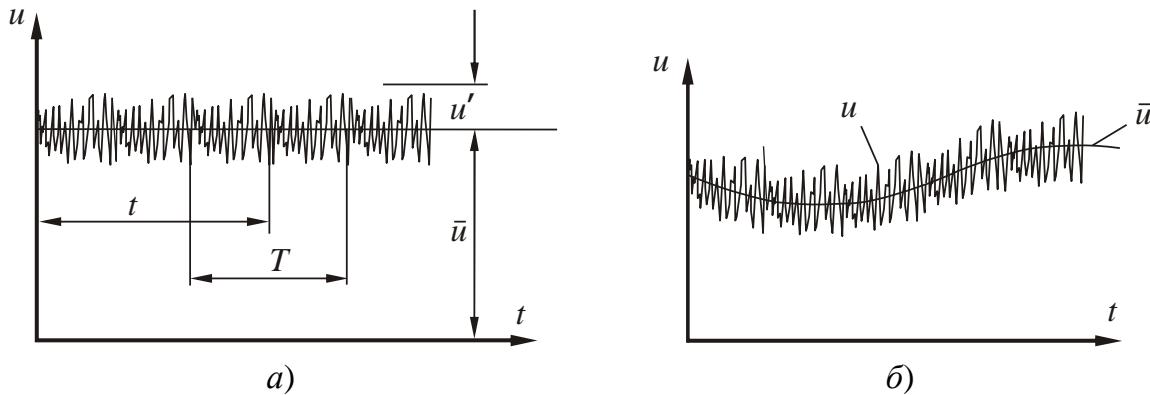


Рис. 2.8. Пульсации скорости в стационарном турбулентном потоке:  
а – стационарном; б – нестационарном

Если таким же образом представить другие гидродинамические характеристики потока, то увидим, что осредненные значения гидродинамических полей обычно оказываются весьма гладкими и медленно меняющимися; пульсации же, наоборот, характеризуются большой изменчивостью во времени и в пространстве.

Поэтому при анализе турбулентных течений чаще всего оперируют с осредненными величинами. В частности, определяются линии тока и траектории для осредненного течения и т. д.

Благодаря наличию пульсаций, строго говоря, турбулентные течения всегда нестационарны и трехмерны. Однако, если осредненные гидродинамические параметры течения не изменяются по времени, то такие турбулентные течения называют стационарными, см. рис. 2.8, а, в противном случае – нестационарными, см. рис. 2.8, б.

Разделение гидродинамических характеристик течения на осредненную и пульсационную составляющие представляет суть концепции Рейнольдса при анализе турбулентных течений. Подробнее теория турбулентных течений рассматривается в Главе 14.

## **2.7. Контрольные вопросы**

1. Дайте определение переменным Лагранжа и переменным Эйлера.
2. Как выражается ускорение частицы в переменных Эйлера?
3. Дайте определение линии тока и траектории частицы.
4. Дайте определение трубки тока.
5. Дайте определение расхода жидкости через сечение трубки тока и через сечение произвольной формы и размеров.
6. Напишите формулу для определения проекций угловой скорости деформируемой частицы.
7. Запишите выражения для составляющих тензора скоростей деформации жидкой частицы.
8. Дайте физическое толкование понятию дивергенции вектора скорости жидкости.
9. Дайте определение понятиям ламинарного и турбулентного режима движения жидкости.
10. В чем заключается суть концепции Рейнольдса при описании турбулентных режимов течения жидкости.
11. Как определяется стационарный и нестационарный режим турбулентного течения жидкости.

## ГЛАВА 3. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

### 3.1. Силы, действующие в жидкости и газе

Жидкости газы всегда подвержены действию некоторых сил. Вследствие текучести этих сред силы являются распределенными, то есть действующими во всех точках поверхности или объема.

В зависимости от области приложения силы делятся на *внешние* и *внутренние*. Внешние силы приложены к выделенному объему со стороны внешней среды, внутренние – возникают в пределах рассматриваемого объема. По характеру воздействия силы классифицируются на *поверхностные* и *объемные*.

К поверхностным силам относятся силы внутреннего трения и силы давления. Они действуют лишь на поверхность выделенного объема и обусловлены действием соседних частиц жидкости или твердых тел, соприкасающихся с рассматриваемым объемом. По третьему закону Ньютона выделенный объем жидкости действует на соприкасающиеся с ним тела с такой же силой. К объемным силам относятся силы тяжести, инерции и электромагнитные. Они пропорциональны массе выделенного элемента объема и действуют на все частицы жидкости в этом объеме.

В механике жидкости и газа рассматривают *единичные силы*, то есть силы, отнесенные к единице площади поверхности или массы, и называют *напряжением поверхностных сил* и *плотностью объемных сил* соответственно.

Вектор напряжения поверхностных сил в точке поверхности с внешней нормалью  $\mathbf{n}$  определяется, как

$$\mathbf{p}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S}, \quad (3.1)$$

где  $\Delta S$  – элемент площади в рассматриваемой точке поверхности;  $\Delta \mathbf{P}$  – внешняя поверхностная сила, приложенная к данной площадке.

Как видно из (3.1), размерность  $\mathbf{p}_n$  есть размерность давления; в системе СИ – Па = Н/м<sup>2</sup>.

Рассмотрим более подробно структуру поверхностных сил и схему их обозначений. Пусть имеется элемент площади  $\Delta S$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ . К ней приложен вектор напряжения поверхностных сил  $\mathbf{p}_n$ , рис. 3.1.

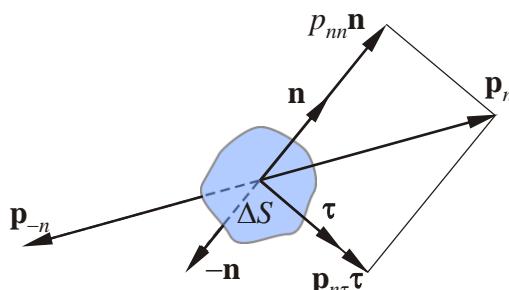


Рис. 3.1. Схема поверхностных сил, действующих на площадку с нормалью  $\mathbf{n}$

Данный вектор в общем случае содержит нормальную  $p_{nn}$  и касательную  $p_{n\tau}$  компоненты:

$$\mathbf{p}_n = p_{n\tau} \boldsymbol{\tau} + p_{nn} \mathbf{n}, \quad (3.2)$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  – единичный вектор касательной к рассматриваемой площадке.

$p_{nn}$  называется нормальным напряжением к площадке  $\Delta S$ ,  $p_{n\tau}$  – касательным напряжением. Первый индекс указывает ориентацию площадки, то есть ее нормаль, второй – ось, на которую проектируется вектор напряжений.

Напряжение  $\mathbf{p}_n$  принято считать положительным, если оно является внешним по отношению к рассматриваемому объему жидкости, то есть приложено к внешней стороне поверхности объема, ограниченного этой поверхностью. Напомним, что сторона элемента поверхности считается внешней, если вектор нормали к ней направлен наружу объема. Если рассмотреть внутреннюю сторону той же самой поверхности, то вектор нормали к ней будет направлен противоположно  $\mathbf{n}$ , то есть будет равен  $-\mathbf{n}$ , см. рис. 3.1. Напряжение, действующее с данной (внутренней) стороны поверхности, следует обозначить  $\mathbf{p}_{-n}$ . Так как рассматриваемая площадка, по условию задачи, находится в равновесии, то в соответствии с принципом равенства действия и противодействия, имеет место соотношение

$$\mathbf{p}_n = -\mathbf{p}_{-n}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим теперь объемные силы. Плотность их распределения определяется, как

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\rho \Delta W}, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{f}$  – вектор плотности распределения объемной силы;  $\Delta \mathbf{F}$  – объемная сила, действующая на элементарный объем  $\Delta W$ ;  $\rho$  – средняя плотность среды в элементарном объеме.

Как следует из (3.4), размерность  $\mathbf{f}$  есть размерность ускорения; в системе СИ –  $\text{м}/\text{с}^2$ . Проекции вектора плотности объемной силы  $\mathbf{f}$  обозначаются  $f_x, f_y, f_z$ .

Главное различие между объемными и поверхностными силами заключается в том, что вектор  $\mathbf{f}$  является однозначной функцией точки пространства и времени  $\mathbf{f} = \varphi(\mathbf{r}, t)$ , то есть образует векторное поле. Величина же вектора поверхностной силы  $\mathbf{p}_n$  в данной точке зависит от ориентации площадки рассматриваемой поверхности в пространстве. То есть, если в данной точке выделить одинаковые по площади, но различные по ориентации в пространстве площадки, то величины поверхностных сил, приложенных к этим площадкам, будут различаться. Для произвольной точки пространства и произвольного момента времени  $\mathbf{p}_n = f(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$ .

Рассмотрим более подробно свойства напряжений поверхностных сил.

### 3.2. Свойства напряжений поверхностных сил

Выделим в движущейся среде элемент объема в форме тетраэдра, три грани которого лежат в координатных плоскостях, рис. 3.2.

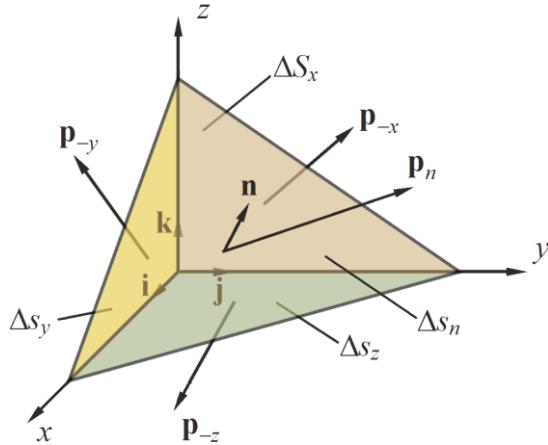


Рис. 3.2. Схема действия напряжений поверхностных сил

Векторы напряжений внешних поверхностных сил, приложенные к граням данного объема, направлены произвольно, так как в общем случае их направление не совпадает ни с нормальным, ни с касательным направлениями к рассматриваемой грани. Векторы внешних нормалей к элементам площади  $\Delta S_x$ ,  $\Delta S_y$ ,  $\Delta S_z$  равны  $-\mathbf{i}$ ,  $-\mathbf{j}$ ,  $-\mathbf{k}$  соответственно, так как направлены противоположно единичным векторам координатных осей. Поэтому напряжения, приложенные к данным площадкам, обозначены  $\mathbf{p}_{-x}$ ,  $\mathbf{p}_{-y}$ ,  $\mathbf{p}_{-z}$ , см. рис. 3.2.

Применим второй закон Ньютона к выделенному объему. При этом учтем, что в соответствии с (3.3)  $\mathbf{p}_{-x} = -\mathbf{p}_x$ ,  $\mathbf{p}_{-y} = -\mathbf{p}_y$ ,  $\mathbf{p}_{-z} = -\mathbf{p}_z$ . Тогда уравнение движения рассматриваемого тетраэдра можем записать в виде

$$\rho \Delta W \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} \rho \Delta W + \mathbf{p}_n \Delta S_n - \mathbf{p}_x \Delta S_x - \mathbf{p}_y \Delta S_y - \mathbf{p}_z \Delta S_z, \quad (3.5)$$

где  $\Delta W$  – объем выделенного тетраэдра;  $\rho$  – плотность среды, заключенной в нем;  $\mathbf{u}$  – вектор скорости центра масс тетраэдра;  $\mathbf{f}$  – вектор плотности объемных сил, действующих на выделенный объем.

Разделим обе части уравнения (3.5) на  $\Delta S_n$  и учтем, что

$$\frac{\Delta S_x}{\Delta S_n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = n_x, \quad \frac{\Delta S_y}{\Delta S_n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) = n_y, \quad \frac{\Delta S_z}{\Delta S_n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = n_z, \quad (3.6)$$

где  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  – проекции вектора нормали  $\mathbf{n}$  на оси координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно.

В результате получим

$$\rho \frac{\Delta W}{\Delta S_n} \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{F} \right) = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_x \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) - \mathbf{p}_y \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) - \mathbf{p}_z \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}). \quad (3.7)$$

Устремим объем тетраэдра к нулю, стягивая его в точку к началу координат. Так как объем тетраэдра при стремлении к нулю его линейных размеров является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем площадь грани, то

$$\lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta S_n} = 0. \quad (3.8)$$

В результате получаем следующее уравнение, связывающее напряжения поверхностных сил, действующих на выделенный объем,

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_x \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + \mathbf{p}_y \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + \mathbf{p}_z \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}). \quad (3.9)$$

Или

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_x n_x + \mathbf{p}_y n_y + \mathbf{p}_z n_z. \quad (3.10)$$

Проектируя (3.10) на оси координат, получим

$$\begin{cases} p_{nx} = p_{xx} n_x + p_{yx} n_y + p_{zx} n_z; \\ p_{ny} = p_{xy} n_x + p_{yy} n_y + p_{zy} n_z; \\ p_{nz} = p_{xz} n_x + p_{yz} n_y + p_{zz} n_z. \end{cases} \quad (3.11)$$

Первый индекс в обозначении проекций напряжений в уравнениях (3.11) означает площадку, в которой действует рассматриваемое напряжение, второй индекс – ось, на которую данное напряжение проектируется. Например,  $p_{xx}$  – проекция на ось  $x$ , напряжения  $\mathbf{p}_x$ , приложенного к площадке, перпендикулярной оси  $x$ ;  $p_{zy}$  – проекция на ось  $y$ , напряжения  $\mathbf{p}_z$ , приложенного к площадке, перпендикулярной оси  $z$ . Следовательно  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$  – это нормальные напряжения, а  $p_{xy}$ ,  $p_{zy}$ ,  $p_{zx}$  и т. д. – касательные напряжения, действующие в соответствующих площадках.

Таким образом, напряжение на любой площадке  $\Delta S_n$  может быть выражено через касательные и нормальные напряжения на трех взаимно ортогональных координатных площадках, то есть через совокупность девяти величин типа  $p_{sk}$ , которые образуют тензор второго ранга  $\mathbf{p}$ , называемый *тензором напряжений*

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Следовательно, *напряжение в движущейся точке жидкости является тензорной величиной*.

Таким образом, *поверхностные силы образуют тензорное поле* в отличие от объемных сил, которые образуют *векторное поле*.

Из механики известно свойство взаимности касательных напряжений, в соответствии с которым [2]

$$p_{xy} = p_{yx}; \quad p_{yz} = p_{zy}; \quad p_{xz} = p_{zx}. \quad (3.13)$$

Таким образом, напряженное состояние жидкости в точке определяется шестью независимыми скалярными величинами, три из которых нормальные напряжения, а три другие – касательные.

В реальных жидкостях нормальные напряжения могут создаваться как за счет давления одних частиц жидкости на другие, так и за счет действия сил вязкости. Касательные напряжения возникают при движении жидкости за счет ее вязкости и не зависят от давления<sup>\*</sup>.

Рассмотрим более подробно тензор напряжений для идеальной жидкости. В этом случае все касательные напряжения равны нулю. То есть (3.11) в этом случае принимают вид

$$p_{nx} = p_{xx}n_x; \quad p_{ny} = p_{yy}n_y; \quad p_{nz} = p_{zz}n_z. \quad (3.14)$$

Так как касательные напряжения равны нулю, то действующие напряжения направлены по нормалям к соответствующим площадкам. В частности линия действия вектора  $\mathbf{p}_n$  совпадает с линией нормали  $\mathbf{n}$ . Обозначив модуль этого вектора через  $p_n$ , можем записать

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_n &= p_n \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})\mathbf{i} + p_n \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})\mathbf{j} + p_n \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})\mathbf{k} = \\ &= p_n n_x \mathbf{i} + p_n n_y \mathbf{j} + p_n n_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Поэтому для проекций этого вектора имеем следующие выражения

$$p_{nx} = p_n n_x; \quad p_{ny} = p_n n_y; \quad p_{nz} = p_n n_z. \quad (3.16)$$

Сопоставляя (3.14) и (3.16), получаем

$$p_n = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}. \quad (3.17)$$

Отсюда следует **теорема о свойствах нормальных напряжений**: если в жидкости отсутствуют касательные напряжения, то нормальное напряжение в данной точке не зависит от ориентации площадки, к которой оно приложено.

Величина

$$p = -p_n = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz} \quad (3.18)$$

называется гидродинамическим давлением в идеальной жидкости.

Используя введенную величину  $p$ , на основании соотношений (3.16) для идеальной жидкости можем записать

$$\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}. \quad (3.19)$$

Знак минус в уравнении (3.19) показывает, что нормальное напряжение в жидкости всегда направлено противоположно внешней нормали (внутрь выделенного объема) и является сжимающим напряжением.

Из соотношений (3.18) следует, что величина давления не зависит от ориентации площадки, то есть является скалярной величиной зависящей только от координат точки и от времени  $p = f(x, y, z, t)$ .

Покажем, что соотношения (3.18) описывают напряженное состояние не только в идеальной жидкости, но также в покоящейся вязкой (реальной)

<sup>\*</sup> Если от давления не зависит коэффициент динамической вязкости среды.

жидкости. Для этого рассмотрим условия, которым должны удовлетворять поверхностные силы при равновесии жидкости. Представим некоторый объем жидкости  $W$ , находящийся в равновесии, рис. 3.3.

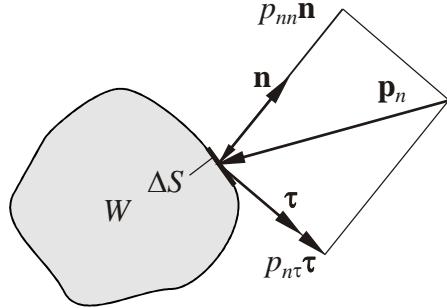


Рис. 3.3. К определению гидростатического давления

Пусть на произвольный элемент площади  $\Delta S$  поверхности покоящегося объема  $W$  действует поверхностная сила  $\mathbf{p}_n$ . Покажем, что данная сила направлена по внутренней нормали к рассматриваемой площадке. Действительно, если бы сила  $\mathbf{p}_n$  была направлена не по нормали, то эту силу можно было бы разложить на составляющие: нормальную  $p_{nn}\mathbf{n}$  и касательную  $p_{nt}\tau$ . Из-за текучести жидкости касательная составляющая привела бы жидкость в движение. Следовательно, для обеспечения равновесия жидкости необходимо выполнение условий

$$p_{nt} = 0. \quad (3.20)$$

Тогда  $\mathbf{p}_n = p_{nn}\mathbf{n}$ . Но так как капельная покоящаяся жидкость не сопротивляется растягивающим напряжениям, то  $\mathbf{p}_n$  должна быть только сжимающей. Следовательно, в покоящейся жидкости напряжение поверхности сил всегда направлено по внутренней нормали к площадке действия и является напряжением от действия сил давления, которое в данном случае называется *гидростатическим*.

Таким образом, в покоящейся жидкости касательные напряжения  $P_{xy}$ ,  $P_{xz}$ ,  $P_{yz}$  равны нулю и, следовательно, справедливо равенство (3.18).

В движущейся же реальной (вязкой) среде существует нормальная и касательная составляющие поверхностных сил.

### 3.3. Обобщенная гипотеза Ньютона о связи вязких напряжений со скоростями деформаций

В дальнейшем мы будем рассматривать только ньютоновские изотропные среды\*. Для связи компонент тензора напряжений с характеристиками течения современная механика жидкости и газа использует обобщенный закон Ньютона – линейной связи между тензором напряжений  $\mathbf{p}$  и тензором скоростей деформаций  $\dot{\epsilon}$ , являющийся обобщением закона (1.47):

---

\* Физические свойства веществ в изотропной среде одинаковы во всех направлениях в пространстве.

$$\mathbf{p} = a\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + b\mathbf{E}, \quad (3.21)$$

где  $a, b$  – скаляры;  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  – тензор скоростей деформаций, описываемый соотношениями (2.41);  $\mathbf{E}$  – тензорная единица

$$E_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.22)$$

Найдем выражения для величин  $a$  и  $b$ , входящих в формулу (3.21). При этом рассмотрим только несжимаемые жидкости. Соответствующие выражения для случая сжимаемой среды можно найти, например, в [1].

Константа  $a$  из условия совпадения выражения (3.21) со своим частным случаем (1.47)<sup>\*</sup>, должна быть положена равной  $a = 2\mu$ . Скаляр  $b$  может быть линейным образом связан с тензорами  $\mathbf{p}$  и  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ <sup>\*\*</sup>, но в силу изотропности среды, только через их линейные инварианты. Линейным инвариантом тензора напряжений является величина

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}. \quad (3.23)$$

Линейным инвариантом тензора скоростей деформаций служит сумма

$$\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (3.24)$$

равная нулю в случае несжимаемой жидкости  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  (см. (2.40)). Линейный инвариант тензорной единицы равен трем.

Чтобы найти скаляр  $b$  приравняем линейные инварианты в левой и правой части (3.21). В результате получаем

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = 3b, \quad (3.25)$$

откуда находим

$$b = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}). \quad (3.26)$$

Обобщая понятие давления, введенное в динамику идеальной жидкости, согласно системе равенств  $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$ , примем в качестве допущения, что давление в данной точке ньютоновской жидкости определяется равенством

$$\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = -p. \quad (3.27)$$

То есть в несжимаемой ньютоновской жидкости за давление в рассматриваемой точке принимается взятое с обратным знаком среднее

\* В простейшем законе трения (1.47)  $u_x = f(y)$  и, следовательно,  $\dot{\varepsilon}_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y}$ , откуда следует равенство  $a = 2\mu$ .

\*\* При этом исходная предполагаемая линейность (3.21) сохранится.

*арифметическое трех нормальных напряжений, приложенных к взаимно перпендикулярным площадкам в данной точке среды*

$$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}). \quad (3.28)$$

Сделанное допущение является дополнительной гипотезой к обобщенному закону Ньютона, так как исходя из общих гидродинамических соображений нельзя доказать, что данная величина  $p$  действительно будет той самой термодинамической характеристикой жидкости или газа, которая, например, для совершенного газа будет связана с другими термодинамическим характеристиками (плотностью и температурой) уравнением состояния Клапейрона-Менделеева. Правильность принятой гипотезы подтверждается практикой ее применения для решения реальных задач.

Таким образом, окончательно получим следующее выражение обобщенного закона Ньютона

$$\mathbf{p} = 2\mu\dot{\epsilon} - p\mathbf{E}. \quad (3.29)$$

С учетом (2.31)...(2.34), (2.41) в развернутом виде компоненты тензора напряжений для несжимаемой жидкости запишутся следующим образом

$$\begin{cases} p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, & p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}, & p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), & p_{yz} = p_{zy} = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ p_{xz} = p_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \end{cases} \quad (3.30)$$

Выражения компонент тензора напряжений вязкой сжимаемой жидкости имеют более сложный вид. Их вывод можно найти, например, в [2].

### 3.4. Контрольные вопросы

1. В чем состоит отличие поверхностных и объемных сил, действующих в жидкости.
2. Дайте определение тензора напряжений поверхностных сил, действующих в жидкости.
3. Дайте определение теоремы о свойствах нормальных напряжений.
4. Укажите свойство, которым удовлетворяют поверхностные силы в покоящейся жидкости.
5. Сформулируйте обобщенную гипотезу Ньютона о связи вязких напряжений со скоростями деформаций
6. Каким образом определяется давление в несжимаемой ньютоновской жидкости.

## ГЛАВА 4. ОСНОВНЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Уравнения движения сжимаемой жидкости представляют собой математическое выражение законов сохранения массы, количества движения, момента количества движения, энергии, содержащихся в некотором объеме жидкости. Для облегчения вывода этих уравнений и исключения повторяющихся математических преобразований получим вначале обобщенную форму уравнения сохранения, справедливого для любой физической величины: массы, энергии и т. д.

### 4.1. Общая форма уравнения сохранения количества произвольной физической величины в контрольном объеме

Выделим в движущейся сжимаемой жидкости контрольный объем  $W$ , ограниченный непроницаемой поверхностью  $S$ . Будем считать, что жидкость данного объема характеризуется некоторой физической величиной\*, плотность распределения которой по данному объему задана непрерывно дифференцируемой векторной либо скалярной функцией  $\theta(t, x, y, z)$ . Тем самым мы предполагаем, что для описания поля гидродинамических параметров среды используются переменные Эйлера.

Отвлекаясь от конкретного физического содержания рассматриваемой величины, сформулируем следующим образом закон сохранения ее количества в произвольном непроницаемом движущемся объеме сжимаемой жидкости: *скорость изменения количества величины в контрольном объеме равна сумме воздействий поверхностного и объемного внешних факторов*. Запишем это в виде уравнения

$$\frac{d}{dt} \int_W \theta dW = \int_S A dS + \int_W B dW, \quad (4.1)$$

где  $A$  – величина, характеризующая воздействие поверхностного фактора в единицу времени на единицу площади поверхности;  $B$  – величина, характеризующая воздействие объемного фактора в единице объема за единицу времени.

Применив формулу (1.11) к производной от интеграла в левой части, перепишем (4.1) в виде

$$\int_W \frac{\partial \theta}{\partial t} dW + \int_S \theta u_n dS = \int_S A dS + \int_W B dW. \quad (4.2)$$

Будем считать, что функция  $A$  обладает свойствами (1.12) или (1.20). Тогда, с использованием формулы Остроградского-Гаусса уравнение (4.2) примет вид

---

\* Например, массой, количеством движения, полной энергией.

$$\int_W \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta u_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta u_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta u_z}{\partial z} \right) dW = \int_W \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + B \right) dW. \quad (4.3)$$

При выводе уравнения (4.3) не делалось никаких ограничений на величину контрольного объема  $W$ . Следовательно, оно справедливо и для бесконечно малого объема. В результате, отбросив интегралы, получаем дифференциальную форму уравнения сохранения количества физической величины

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta u_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta u_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta u_z}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + B. \quad (4.4)$$

Выполним дифференцирование в левой части (4.4) и перегруппируем слагаемые

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x} u_x + \frac{\partial \theta}{\partial y} u_y + \frac{\partial \theta}{\partial z} u_z + \theta \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + B.$$

Первые четыре слагаемых в последнем выражении есть индивидуальная производная параметра  $\theta$ , см. формулу (2.7). Следовательно (4.4) можно представить в виде

$$\frac{d\theta}{dt} + \theta \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + B \quad (4.5)$$

или, используя оператор дивергенции, в виде

$$\frac{d\theta}{dt} + \theta \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + B. \quad (4.6)$$

Применим полученные выражения обобщенного закона сохранения количества произвольной физической величины (4.1), (4.4), (4.5) к частным случаям.

## 4.2. Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности представляет собой математическое выражение закона сохранения массы. В данном случае в (4.1) и (4.4) следует положить  $\theta = \rho$ ,  $A = 0$ . В результате получаем следующие выражения уравнения неразрывности в интегральной форме

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW + \int_S \rho u_n ds = \int_W B dW \quad (4.7)$$

и в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = B. \quad (4.8)$$

В уравнениях (4.7), (4.8)  $B$  имеет смысл объемного источника (стока) массы, например, как результат действия химических реакций или фазовых переходов. Если источников и стоков нет, то вместо (4.8) имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = 0. \quad (4.9)$$

Используя (4.5), уравнению (4.8) можно придать следующий вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = B \quad (4.10)$$

или, используя оператор дивергенции,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = B. \quad (4.11)$$

Если в области течения отсутствуют источники и стоки массы ( $B = 0$ ) и жидкость несжимаема ( $\rho = \text{const}$ ), то уравнение неразрывности запишется следующим образом

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (4.12)$$

В дальнейшем будем полагать, что в области течения источники и стоки массы отсутствуют.

### 4.3. Уравнение сохранения количества движения. Уравнения Навье-Стокса

Закон сохранения количества движения в контрольном объеме формулируется следующим образом: *изменение количества движения жидкости в контрольном объеме в единицу времени равно сумме действующих на него поверхностных и объемных внешних сил*. Поэтому в данном случае обобщенная переменная  $\theta$  представляет собой удельное (отнесенное к единице объема) количество движения, то есть  $\theta = \rho \mathbf{u}$ , поверхностный фактор  $A$  – напряжение поверхностных сил, действующих в точке поверхности объема с вектором внешней нормали  $\mathbf{n}$ :  $A = \mathbf{p}_n$ , а объемный фактор  $B$  – объемные силы:  $B = \rho \mathbf{f}$ . В качестве объемных сил будем рассматривать силу тяжести и инерционные силы (возникающие при рассмотрении процессов в жидкости в подвижной системе координат):

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} - \mathbf{a}_i, \quad (4.13)$$

где  $\mathbf{g}$  – ускорение силы тяжести;  $\mathbf{a}_i$  – центробежное ускорение, ускорение в переносном движении и т. п.

Таким образом, уравнение сохранения количества движения принимает вид:

1) в интегральной форме

$$\int_W \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dW + \int_S \rho \mathbf{u} u_n dS = \int_S \mathbf{p}_n dS + \int_W \rho \mathbf{f} dW; \quad (4.14)$$

2) в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \mathbf{u} u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho \mathbf{u} u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho \mathbf{u} u_z}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} + \rho \mathbf{f}. \quad (4.15)$$

Здесь  $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z$  – вектора напряжений поверхностных сил, приложенных к элементарным площадкам, перпендикулярным осям  $Ox, Oy, Oz$  соответственно.

Выполним дифференцирование в левой части (4.15) и сгруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) + \mathbf{u} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} \right) = \\ = \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} + \rho \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Первая скобка в левой части (4.16) представляет собой индивидуальную производную скорости, вторая скобка равна нулю вследствие уравнения неразрывности (4.9). Поэтому (4.15) принимает вид

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} + \rho \mathbf{f}. \quad (4.17)$$

Уравнение (4.17) носит название уравнения сохранения количества движения в напряжениях, так как в правой части присутствуют вектора напряжений поверхностных сил, для определения которых необходимы дополнительные данные.

Уравнение (4.17) векторное. Запишем его проекцию на координатную ось  $Ox$ <sup>\*</sup>.

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) + f_x, \quad (4.18)$$

где  $p_{xx}, p_{yx}, p_{zx}$  – проекции векторов  $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z$  на координатную ось  $Ox$ , то есть компоненты тензора напряжений (3.12). Для применения данного уравнения в расчетах необходимо связать компоненты тензора напряжений со скоростями деформаций движущейся жидкости. С этой целью используем обобщенную гипотезу Ньютона.

Подставляя выражения для  $p_{xx}, p_{yx}, p_{zx}$ , из (3.30), получим проекцию уравнения сохранения количества движения несжимаемой жидкости на ось  $Ox$  в следующем виде

$$\rho \frac{du_x}{dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] +$$

\* Проекции на другие оси записываются аналогично и для сокращения объема пособия здесь не приводятся. Читателю предлагается проделать эти выкладки самостоятельно.

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right], \quad (4.19)$$

или, выполняя дифференцирование в правой части,

$$\rho \frac{du_x}{dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial u_y}{\partial y \partial x} \right) + \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right).$$

Перегруппируем слагаемые и изменим порядок дифференцирования в смешанных производных:

$$\rho \frac{du_x}{dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right). \quad (4.20)$$

Последнее слагаемое в правой части (4.20) рано нулю, так как содержит производную от дивергенции скорости. Кроме того учтем, что  $\nu = \mu / \rho$ . Тогда окончательно получим

$$\frac{du_x}{dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right). \quad (4.21)$$

Проекции уравнения на другие оси координат находятся аналогично.

$$\frac{du_y}{dt} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right); \quad (4.22)$$

$$\frac{du_z}{dt} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \quad (4.23)$$

Уравнения (4.21)...(4.23) носят название уравнений Навье-Стокса.

В векторной форме уравнения Навье-Стокса (4.21)...(4.23) записутся следующим образом

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (4.24)$$

Использованное в уравнении (4.24) обозначение

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.25)$$

называется дифференциальным *оператором Лапласа*. Например  $\nabla^2 F$  есть  $\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ . Тогда выражение  $\nabla^2 \mathbf{u}$  раскрывается следующим

образом  $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 (u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}) = \nabla^2 u_x \mathbf{i} + \nabla^2 u_y \mathbf{j} + \nabla^2 u_z \mathbf{k}$ .

Уравнения Навье-Стокса для сжимаемой жидкости имеют более сложный вид, что обусловлено более сложной зависимостью напряжений поверхностных сил от тензора скоростей деформации. Их вывод, который можно найти, например, в [2], в данном учебном пособии мы не приводим.

Отметим лишь, что уравнения Навье-Стокса для сжимаемой жидкости отличается от (4.24) только последним слагаемым в правой части, которое учитывает действие вязких касательных напряжений. Если обозначить это слагаемое, не раскрывая его содержания, через  $\mathbf{a}_\mu$ , то уравнения Навье-Стокса для сжимаемой жидкости можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{a}_\mu. \quad (4.26)$$

Рассмотрим частные случаи уравнений Навье-Стокса.

#### **4.3.1 Уравнения движения идеальной жидкости. Уравнения Эйлера**

В областях течения, где отсутствуют значительные поперечные градиенты скорости, жидкость может считаться идеальной. Такие режимы течения реализуются, например, вдали от твердых поверхностей.

Уравнения движения идеальной среды могут быть получены из уравнений Навье-Стокса (4.21)...(4.23) при  $v = 0$

$$\frac{du_x}{dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{du_y}{dt} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{du_z}{dt} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4.27)$$

Уравнения (4.27) носят название уравнений Эйлера. Заметим, что данные уравнения справедливы, как для сжимаемой, так и для несжимаемой жидкости.

#### **4.3.2 Уравнения гидростатики**

Если жидкость неподвижна, то уравнения Эйлера принимают вид

$$f_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad f_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad f_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4.28)$$

Придадим уравнениям (4.28) другую, более удобную в некоторых приложениях форму. Умножим первое уравнение (4.28) на  $dx$ , второе на  $dy$ , третье на  $dz$  и сложим

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right). \quad (4.29)$$

Выражение в скобках есть полный дифференциал функции гидростатического давления  $p = f(x, y, z)$ . Окончательно получаем

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = \frac{1}{\rho} dp. \quad (4.30)$$

Уравнения (4.28), (4.30) называют *основными дифференциальными уравнениями гидростатики*.

Рассматриваемые нами объемные силы являются потенциальными. В соответствии с определением потенциала силы  $\Phi$  имеем

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{k} \right). \quad (4.31)$$

Следовательно,

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = - (f_x dz + f_y dy + f_z dx) \quad (4.32)$$

есть полный дифференциал.

Если проекции объемной силы константы, то (4.32) можно проинтегрировать

$$\Phi = - (f_x x + f_y y + f_z z) + \text{const}. \quad (4.33)$$

Будем рассматривать *баротропные среды*, то есть такие, плотность которых зависит только от давления:  $\rho = \rho(p)$ . Тогда, если ввести в рассмотрение функцию давления  $\mathfrak{R}$  такую, что

$$d\mathfrak{R} = \frac{1}{\rho} dp, \quad (4.34)$$

то последние слагаемые в правых частях уравнений (4.28) запишутся следующим образом

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z}. \quad (4.35)$$

С учетом (4.31) и (4.35) уравнения (4.28) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Phi + \mathfrak{R}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (\Phi + \mathfrak{R}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} (\Phi + \mathfrak{R}) = 0. \quad (4.36)$$

Рассмотрим вид уравнений (4.36), для различных моделей баротропной среды: несжимаемой жидкости, адиабатического и изотермического газа.

**Несжимаемая жидкость.** В этом случае  $\rho = \text{const}$  и  $\mathfrak{R} = p / \rho$ . Уравнения (4.36) принимают вид

$$f_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad f_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad f_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4.37)$$

**Адиабатический совершенный газ.** В данной модели  $\rho = Cp^{1/k}$ , где  $C$  – константа. Получим выражение для функции давления  $\mathfrak{R}$ .

$$\mathfrak{R} = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dp}{C p^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{C} \frac{k}{k-1} p^{\frac{k-1}{k}} + C_1,$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования. Так как  $C = \rho p^{-1/k}$ , то функция давления для модели адиабатического газа выразится следующим образом

$$\mathfrak{R} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + C_1. \quad (4.38)$$

Подставив (4.38) в (4.36), получим уравнения статики адиабатического совершенного газа

$$f_x = \frac{k}{k-1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right), \quad f_y = \frac{k}{k-1} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} \right), \quad f_z = \frac{k}{k-1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) \quad (4.39)$$

**Изотермический совершенный газ.** В данной модели  $\rho = p / (RT)$ , что позволяет получить следующие выражения для функции давления

$$\mathfrak{R} = \int \frac{dp}{\rho} = RT \int \frac{dp}{p} = RT \ln p + C_1, \quad (4.40)$$

и уравнений статики

$$f_x = RT \frac{\partial}{\partial x} \ln p, \quad f_y = RT \frac{\partial}{\partial y} \ln p, \quad f_z = RT \frac{\partial}{\partial z} \ln p. \quad (4.41)$$

### 4.3.3 Потенциальные течения

Пусть в области течения существует скалярная функция  $\varphi$ , частные производные которой по координатам равны соответствующим проекциям вектора скорости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = u_z \quad (4.42)$$

Соотношения (4.42) означают, что вектор скорости равен градиенту  $\varphi$ . Эта функция называется потенциалом скорости\*, а соответствующее течение потенциальным. В потенциальном течении угловая скорость любой частицы жидкости равна нулю  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ , что легко проверить, если подставить (4.42) в (2.32) и (2.34). Поэтому потенциальные течения называют безвихревыми.

Раскроем индивидуальную производную в левой части первого уравнения (4.27) и выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{\partial x} + u_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + u_z \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Разности частных производных, стоящие в скобках, равны нулю, так как с точностью до множителя  $1/2$  представляют собой проекции угловой скорости на оси Oz и Oy, а в потенциальном течении они равны нулю. Поэтому (4.43) примет вид

---

\* По аналогии с потенциалом силы.

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u^2 / 2}{\partial x}, \quad (4.44)$$

где  $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$  – квадрат модуля скорости.

Выражая  $u_x$  через потенциал скорости, представим  $\partial u_x / \partial t$  в виде

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (4.45)$$

Аналогично выражаются производные других компонент скорости.

Будем считать движущуюся среду баротропной. Тогда с учетом (4.31), (4.35), (4.44), (4.45) уравнения Эйлера (4.27) для потенциального движения примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \Phi + \mathfrak{R} \right) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \Phi + \mathfrak{R} \right) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \Phi + \mathfrak{R} \right) = 0. \end{cases} \quad (4.46)$$

Равенство нулю частных производных по всем координатам от выражения, содержащегося в скобках (4.46), означает, что оно не зависит от координат, а является только функцией времени. То есть решение (4.46) имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \Phi + \mathfrak{R} = F(t), \quad (4.47)$$

где  $F(t)$  – произвольная функция времени.

Выражение (4.47) носит название интеграла Коши-Лагранжа. Если течение стационарное, то решение уравнений (4.46) принимает вид

$$\frac{u^2}{2} + \Phi + \mathfrak{R} = \text{const.} \quad (4.48)$$

Слагаемые в левой части (4.48) представляют собой отдельные виды механической энергии, содержащиеся в 1 кг жидкости: кинетическую, потенциальную энергию положения, потенциальную энергию давления. В целом (4.48) выражает постоянство полной механической энергии жидкости во всей области течения.

#### 4.4. Уравнение Бернулли для трубки тока

Запишем соотношение (4.43) с учетом (2.32) и (2.34) в виде

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u^2 / 2}{\partial x} + 2(u_y \omega_z + u_z \omega_y). \quad (4.49)$$

Аналогично можно выразить индивидуальные производные и других проекций скорости

$$\frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + 2(u_x \omega_z + u_z \omega_x), \quad (4.50)$$

$$\frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u^2 / 2}{\partial z} + 2(u_x \omega_y + u_y \omega_x). \quad (4.51)$$

Умножим (4.49) на  $\mathbf{i}$ , (4.50) на  $\mathbf{j}$ , (4.51) на  $\mathbf{k}$  и сложим. В результате получаем векторную форму этих выражений:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{grad} \frac{u^2}{2} + 2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (4.52)$$

Подставим (4.52) в уравнение Навье-Стокса (4.26), учитывая, что объемные силы имеют потенциал и считая движущуюся среду баротропной,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\text{grad} \left( \frac{u^2}{2} + \Phi + \mathfrak{R} \right) + \mathbf{a}_\mu. \quad (4.53)$$

Уравнение (4.53) выполняется во всей области течения. Возьмем произвольную в этой области линию тока и умножим скалярно обе части уравнения (4.53) на элемент длины дуги  $ds$  данной линии тока:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot ds + 2(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot ds = -(\text{grad } B) \cdot ds + \mathbf{a}_\tau \cdot ds. \quad (4.54)$$

Здесь введено обозначение  $B = \frac{u^2}{2} + \Phi + \mathfrak{R}$  – трехчлен Бернулли.

Так как вектор произведения  $(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})$  ортогонален вектору  $\mathbf{u}$ , а вектор  $ds$  коллинеарен вектору скорости  $\mathbf{u}$ , то второй член в левой части (4.54) равен нулю. Заметим, кроме того, что скалярное произведение  $(\text{grad } B) \cdot ds$  есть полный дифференциал функции  $B$

$$(\text{grad } B) \cdot ds = \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz = dB.$$

Таким образом уравнение (4.54) приобретает вид

$$dB + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot ds = \mathbf{a}_\mu \cdot ds,$$

или, раскрывая выражение для трехчлена Бернулли,

$$d \left( \frac{u^2}{2} \right) + d\Phi + d\mathfrak{R} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot ds = \mathbf{a}_\mu \cdot ds \quad (4.55)$$

Уравнение (4.55) называется *уравнением Д. Бернулли* и является одним из фундаментальных уравнений механики жидкости и газа.

Проинтегрируем (4.55) вдоль рассматриваемой линии тока от точки 1 до точки 2, считая, что из объемных сил действует только сила тяжести, а движение жидкости рассматривается в системе координат, связанной с по-

верхностью земли и осью  $Oz$  направленной вертикально вверх. Тогда  $f_x = f_y = 0$ ,  $f_z = -g$  и, в соответствии с (4.33),  $\Phi = gz + \text{const}$ , где  $z$  – вертикальная координата рассматриваемой точки. Подставим это выражение потенциала массовых сил в (4.54) и поделим все члены получившегося уравнения на  $g$ . Кроме того, введем обозначения:

$$\Delta h_{\mu} = \frac{1}{g} \int_1^2 \mathbf{a}_t \cdot d\mathbf{s}, \quad \Delta h_t = \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.56)$$

В результате получаем следующее уравнение, связывающее параметры нестационарного течения сжимаемой жидкости в двух сечениях трубы тока между собой

$$z_1 + \frac{\mathfrak{R}_1}{g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{\mathfrak{R}_2}{g} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h_{\mu} + \Delta h_t. \quad (4.57)$$

Рассмотрим его более подробно. Все члены уравнения имеют размерность длины\*, однако им можно придать энергетический смысл. Действительно, если жидкость поднята на высоту  $z$ , то каждая единица ее массы обладает потенциальной энергией  $zg$ . Второй член уравнения  $\mathfrak{R}/g$  – это работа сил давления, производимая в единицу времени по перемещению единицы веса жидкости вдоль линии тока. Наконец третий член – кинетическая энергия единицы веса жидкости, перемещающейся вдоль линии тока. Физический смысл величины  $\Delta h_{\mu}$  следует из (4.56). Как видно, – это работа, затрачиваемая жидкостью на преодоление вязких сил, отнесенная к единице веса жидкости. Данный вид энергии безвозвратно теряется (переходит в теплоту) при протекании жидкости между точками 1 и 2. Этот процесс необратимого преобразования механической энергии в тепловую называется *диссипацией*. Слагаемое  $\Delta h_t$  в соответствии с (4.56), можно трактовать как затраты энергии на разгон (торможение) жидкости. Этот член называют *инерционным напором*. Для ускоряющихся потоков он положительный, для замедляющихся – отрицательный.

В целом уравнение Бернулли (4.57) и его дифференциальная форма (4.55), выражают закон сохранения механической энергии движущейся жидкости. Имея это в виду, придадим уравнению Бернулли более общий вид и добавим в левую часть (4.55) слагаемое  $de_{\text{тех}}$ , представляющее собой дифференциал удельной технической работы. Эта величина положительная, если техническая работа совершается внешними техническими системами (насосами, компрессорами и т. п.) и отрицательна, если жидкость совершает работу по приводу технических устройств. Тогда уравнение (4.55) примет вид

---

\* В гидродинамике подобные члены называются напорами.

$$d\left(\frac{u^2}{2}\right) + d\Phi + d\mathfrak{R} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot ds + de_{tex} = \mathbf{a}_\mu \cdot ds. \quad (4.58)$$

Аналогичное слагаемое добавим и в уравнение (4.57)

$$z_1 + \frac{\mathfrak{R}_1}{g} + \frac{u_1^2}{2g} + \Delta h_{tex} = z_2 + \frac{\mathfrak{R}_2}{g} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h_\mu + \Delta h_t, \quad (4.59)$$

где  $\Delta h_{tex}$  – напор, создаваемый внешними техническими системами, установленными на участке между точками 1 и 2 рассматриваемой линии тока.

Рассмотрим частные случаи уравнения Бернулли.

**Несжимаемая жидкость**  $\rho = \text{const}$ . Функция давления для этого случая имеет вид  $\mathfrak{R} = p/\rho$ . Тогда уравнение Бернулли (4.57) для несжимаемой жидкости запишется следующим образом

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + \Delta h_{tex} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h_\mu + \Delta h_t. \quad (4.60)$$

Если течение жидкости установившееся, то  $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$  и, следовательно,  $\Delta h_t = 0$ . Тогда имеем

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + \Delta h_{tex} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h_\mu. \quad (4.61)$$

Перепишем уравнение (4.60) в виде

$$\left( z_1 + \frac{u_1^2}{2g} \right) - \left( z_2 + \frac{u_2^2}{2g} \right) = \frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g} + \Delta h_\mu - \Delta h_{tex}. \quad (4.62)$$

Оно представляет собой частную форму закона сохранения механической энергии: изменение полной удельной, отнесенной к единице веса энергии жидкости (потенциальной и кинетической  $z + u^2/2g$ ) равно сумме работы приложенных к ней сил (давления  $(p_1 - p_2)/\rho g$ , вязкости  $\Delta h_t$ , а также технической работы  $\Delta h_{tex}$ ).

Дифференциальная форма уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости получается путем подстановки в (4.58)  $\mathfrak{R} = p/\rho$  и  $\rho = \text{const}$

$$gdz + \frac{1}{\rho} dp + d\left(\frac{u^2}{2}\right) + de_t + de_{tex} + de_\mu = 0, \quad (4.63)$$

где использованы обозначения:  $de_\mu = -\mathbf{a}_\mu \cdot ds$ ,  $de_t = \partial \mathbf{u} / \partial t \cdot ds$ . Знак «минус» в первом обозначении поставлен исходя из физического смысла этого параметра – потеря механической энергии потока вследствие действия сил вязкого сопротивления.

**Адиабатическое течение совершенного газа.** Для данного случая функция давления выражается формулой (4.38).

Следовательно уравнение Бернулли для адиабатического течения совершенного газа запишется следующим образом

$$z_1 + \frac{u_1^2}{2g} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1 g} + \Delta h_{\text{tex}} = z_2 + \frac{u_2^2}{2g} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2 g} + \Delta h_t + \Delta h_\mu. \quad (4.64)$$

**Относительное движение идеальной жидкости.** Рассмотрим движение идеальной жидкости в канале, который движется с ускорением относительно Земли. С такими течениями приходится сталкиваться при расчетах, например, турбомашин. Если рассматривать движение в системе координат, связанной со стенками канала, то оно будет установившимся. Однако при переходе в подвижную систему координат мы в число объемных сил должны включить силы инерции.

Рассмотрим движение вдоль трубы тока, вращающейся целиком вокруг некоторой оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , рис. 4.1.

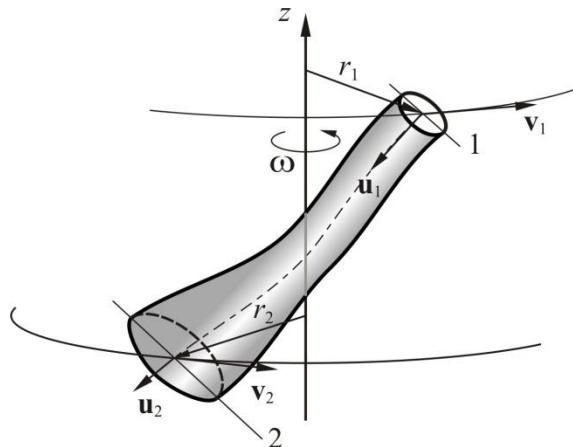


Рис. 4.1. Относительное движение жидкости

К числу объемных сил, действующих на жидкость в данном движении, относятся: сила тяжести  $\mathbf{f}_t$ , центробежная сила  $\mathbf{f}_{\text{ц}}$  и кориолисова сила  $\mathbf{f}_k$ .

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{g}, \quad \mathbf{f}_{\text{ц}} = \omega r \mathbf{r}^0 = \frac{v^2}{r} \mathbf{r}^0, \quad \mathbf{f}_k = -2\omega \times \mathbf{u}, \quad (4.65)$$

где  $v = \omega r$  – окружная переносная скорость перемещения трубы тока на радиусе  $r$ ;  $\mathbf{r}^0$  – орт радиального направления;  $\mathbf{u}$  – скорость жидкости в подвижной системе координат.

Уравнение Бернулли для трубы тока при стационарном течении идеальной жидкости имеет вид

$$d\left(\frac{u^2}{2}\right) + d\Phi + d\mathfrak{R} = 0. \quad (4.66)$$

Потенциал объемных сил в данном случае включает потенциал силы тяжести  $\Phi_t$  и центробежной силы  $\Phi_{\text{ц}}$ . Сила Кориолиса работы не совершает, так как в соответствии с (4.65), ее направление ортогонально линии тока. Следовательно, ее действие не изменяет запас энергии движущейся жидкости. Так как уравнение Бернулли по своему физическому смыслу есть уравнение сохранения механической энергии, то (4.66) не должно со-

держать силы Кориолиса. Потенциал силы тяжести, в предположении, что ось  $z$  подвижной системы ортогональна поверхности земли, имеет вид

$$\Phi_t = gz. \quad (4.67)$$

Потенциал центробежной силы выражается формулой

$$\Phi_{\text{ц}} = -\frac{\omega^2 r^2}{2}. \quad (4.68)$$

Подставляя (4.67), (4.68) в (4.66), получим

$$gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} + \mathfrak{R} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (4.69)$$

Применяя этот интеграл к двум сечениям 1 и 2 трубки тока, учитывая, что  $\omega r = v$  есть окружная скорость трубки тока, получим уравнение относительного установившегося движения идеальной жидкости

$$gz_1 + \frac{u_1^2 - v_1^2}{2} + \mathfrak{R}_1 = gz_2 + \frac{u_2^2 - v_2^2}{2} + \mathfrak{R}_2. \quad (4.70)$$

Для несжимаемой жидкости  $\mathfrak{R} = p/\rho$  и уравнение (4.70) принимает вид

$$p_1 + \rho gz_1 + \rho \frac{u_1^2 - v_1^2}{2} = p_2 + \rho gz_2 + \rho \frac{u_2^2 - v_2^2}{2}. \quad (4.71)$$

Из (4.71) видно, что чем выше окружная скорость относительного движения трубки тока, тем выше давление жидкости в данном сечении.

#### 4.5. Уравнение сохранения энергии

В технических устройствах часто имеют место случаи течения жидкости и газа, сопровождающиеся теплообменом с окружающей средой, существенным переходом механической работы в теплоту. В этих случаях для определения параметров состояния рабочей среды недостаточно только уравнений движения (Эйлера либо Навье-Стокса), а дополнительно требуется использовать уравнение, выражающее общий термодинамический закон сохранения энергии.

Закон сохранения энергии в контрольном объеме формулируется следующим образом: *изменение полной (внутренней плюс кинетической) энергии в контрольном объеме в единицу времени равно сумме мощности внешних (поверхностных и объемных) сил, действующих на контрольный объем, теплового потока подведенного к нему извне и мощности внутренних источников тепловыделения.*

Обобщенная переменная  $\Theta$  в данном случае представляет собой удельную (отнесенную к единице объема) полную (внутреннюю плюс кинетическую) энергию, то есть  $\Theta = \rho U = \rho(e + u^2/2)$ , поверхностный фактор  $A$  – сумма мощности поверхностных сил, приложенных к элементу площади поверхности объема с вектором внешней нормали  $\mathbf{n}$  и плотности теплового потока, подведенного извне через этот элемент площади  $\mathbf{q}$ . То есть

$A_x = \mathbf{p}_x \cdot \mathbf{u} + q_x$ ,  $A_y = \mathbf{p}_y \cdot \mathbf{u} + q_y$ ,  $A_z = \mathbf{p}_z \cdot \mathbf{u} + q_z$ . Объемный фактор  $B$  есть сумма мощности объемных сил  $\mathbf{f}$  и удельного объемного тепловыделения  $Q$ , например, за счет фазовых переходов. То есть  $B = \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) + \rho Q$ . Таким образом, учитывая изложенное и (4.4), уравнение сохранения энергии запишется следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial \rho U u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho U u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho U u_z}{\partial z} &= \frac{\partial(\mathbf{p}_x \cdot \mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{p}_y \cdot \mathbf{u})}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{p}_z \cdot \mathbf{u})}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) + \rho Q. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Преобразуем левую часть уравнения (4.72), учитывая уравнение неразрывности (4.9),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial \rho U u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho U u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho U u_z}{\partial z} &= U \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} \right) + \\ &+ \rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + u_x \frac{\partial U}{\partial x} + u_y \frac{\partial U}{\partial y} + u_z \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \rho \frac{dU}{dt}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Выполним дифференцирование в первом слагаемом правой части (4.72). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{p}_x \cdot \mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{p}_y \cdot \mathbf{u})}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{p}_z \cdot \mathbf{u})}{\partial z} + \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) &= \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} + \rho \mathbf{f} \right) + \\ &+ \mathbf{p}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Выражение, стоящее в скобках в правой части (4.74) есть правая часть уравнения сохранения количества движения (4.17). Поэтому (4.74) можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{p}_x \cdot \mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{p}_y \cdot \mathbf{u})}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{p}_z \cdot \mathbf{u})}{\partial z} + \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) &= \\ = \rho \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{p}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Подставим (4.73), (4.75) в (4.72), учитывая, что  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^2$ :

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho \frac{du^2 / 2}{dt} + \left( \mathbf{p}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + \rho Q. \quad (4.76)$$

Так как  $U = e + u^2 / 2$ , то (4.76) примет вид

$$\rho \frac{de}{dt} = \left( \mathbf{p}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + \rho Q. \quad (4.77)$$

Раскроем скалярное произведение в первых трех слагаемых правой части (4.77), обозначив эту сумму через  $e_{\Delta}$

$$e_{\Delta} = \mathbf{p}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = p_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + p_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + p_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \\ + p_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + p_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + p_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial y} + p_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial z} + p_{zy} \frac{\partial u_y}{\partial z} + p_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (4.78)$$

Подставим выражения для компонент тензора напряжений в несжимаемой жидкости (3.30) в формулу (4.78)

$$e_{\Delta} = \mu \left\{ 2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right\}. \quad (4.79)$$

Из (4.79) следует, что в случае несжимаемой жидкости  $e_{\Delta}$  представляет собой часть механической энергии, расходуемой на преодоление сил вязкости и переходящей в тепло, то есть  $e_{\Delta}$  количественно выражает диссиацию механической энергии. Диссиация равна нулю, если либо отсутствует деформация жидкости (она движется, как твердое тело), либо среда идеальная ( $\mu = 0$ ).

С учетом введенного обозначения уравнение сохранения энергии запишется в виде

$$\rho \frac{de}{dt} = e_{\Delta} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + \rho Q. \quad (4.80)$$

Уравнение (4.80) показывает, что изменение внутренней энергии происходит за счет теплообмена с окружающей средой и за счет диссиации механической энергии. Поскольку процесс диссиации необратим, то диссирированную энергию  $e_{\Delta}$  можно рассматривать, как потери механической энергии.

Проекции плотности теплового потока найдем с использованием закона теплопроводности Фурье

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (4.81)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности. С учетом (4.81) уравнение (4.80) приобретает вид

$$\rho \frac{de}{dt} = e_{\Delta} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho Q. \quad (4.82)$$

#### 4.5.1 Уравнение баланса энергии при адиабатическом движении идеального и совершенного газа

Напомним, что адиабатическим является процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой, а идеальным называется газ, лишенный внутреннего трения. Так как внутреннее трение и теплопроводность явления одной природы – процесса молекулярного переноса, то пренебрегая трением, не будем учитывать и теплопроводность в газовой фазе. Кроме того будем пренебречь и явлениями лучистого переноса теплоты. Поэтому для рассматриваемого случая  $q_x = q_y = q_z = Q = 0$ ,  $p_{xy} = p_{yx} = p_{xz} = p_{zx} = p_{yz} = p_{zy} = 0$ ,  $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$ , и (4.80) примет вид

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right). \quad (4.83)$$

Используя уравнение состояния, выразим удельную внутреннюю энергию через давление и плотность:

$$e = c_v T = c_v \frac{p}{R\rho} = \frac{c_v}{c_p - c_v} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho}. \quad (4.84)$$

Дивергенцию вектора скорости, стоящую в правой части (4.83) выразим из уравнения неразрывности (4.10), полагая, что объемный источник массы отсутствует:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}. \quad (4.85)$$

Подставляя (4.84) и (4.85) в (4.83), получим

$$\frac{\rho}{k-1} \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho} \right) = \frac{p}{\rho} \frac{dp}{dt}. \quad (4.86)$$

Выполним дифференцирование в левой части уравнения (4.86) и приведем подобные. В результате получим

$$\frac{dp}{dt} = k \frac{p}{\rho} \frac{dp}{dt},$$

или

$$\frac{dp}{p} = k \frac{dp}{\rho}. \quad (4.87)$$

Интегрирование (4.87) дает адиабату Пуассона  $p / \rho^k = \text{const.}$

То есть адиабатическое движение идеального совершенного газа является баротропным.

Получим уравнение сохранения энергии для случая стационарного движения в отсутствии объемных сил\*. Для этого заметим, что

$$\frac{p}{\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dt} - \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho} \right). \quad (4.88)$$

Подставим (4.88) в уравнение (4.86), имея в виду, что в его левой части стоит индивидуальная производная внутренней энергии,

$$\rho \frac{de}{dt} = \frac{dp}{dt} - \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho} \right). \quad (4.89)$$

Так как  $e + p/\rho = h$ , то (4.89) принимает вид

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} \text{ или } \rho dh = dp. \quad (4.90)$$

Для данных условий уравнение Бернулли (4.55) запишется следующим образом

$$d \left( \frac{u^2}{2} \right) + \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (4.91)$$

Из (4.90) и (4.91) получаем

$$d \left( h + \frac{u^2}{2} \right) = 0. \quad (4.92)$$

Из (4.92) следует, что в адиабатическом течении идеального газа вдоль линии тока сумма энтальпии и кинетической энергии остается постоянной:

$$h + \frac{u^2}{2} = h_0, \quad (4.93)$$

где  $h_0$  энтальпия адиабатически заторможенного потока, которую называют *полной энтальпией*\*\* или *энтальпией торможения*.

Рассмотрим как изменяется в данном процессе еще одна термодинамическая функция – энтропия  $S$ , определяемая соотношением

$$dS = \frac{dq}{T}. \quad (4.94)$$

Преобразуем (4.94), используя выражение для второго начала термодинамики и (4.87),

\* Влияние объемных сил при движении газа оказывается только при очень большом перепаде, например, в задачах динамической метеорологии. В большинстве технических приложений газовой динамики влияние объемных сил пренебрежимо мало.

\*\* Не путать с полной энергией, которая равна сумме внутренней и кинетической энергий.

$$\begin{aligned}
dS &= \frac{c_v dT + p d(1/\rho)}{T} = c_v \frac{dT}{T} - \frac{p}{\rho T} \frac{d\rho}{\rho} = c_v \frac{d(p/\rho)}{p/\rho} - R \frac{d\rho}{\rho} = \\
&= \frac{R}{k-1} [d\ln(p/\rho) - (k-1)d\ln\rho] = \\
&= \frac{R}{k-1} [d\ln p - d\ln\rho - (k-1)d\ln\rho] = \frac{R}{k-1} d\ln\left(\frac{p}{\rho^k}\right).
\end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя, получаем

$$S = \frac{R}{k-1} \ln\left(\frac{p}{\rho^k}\right) + \text{const.} \quad (4.95)$$

Так как при адиабатном движении идеального газа отношение  $p/\rho^k$  остается постоянным вдоль линии тока, то в соответствии с (4.95) данное течение является и изоэнтропным.

#### 4.6. Уравнения Рейнольдса для развитого турбулентного режима движения несжимаемой жидкости

Обобщенная гипотеза Ньютона и уравнения Навье-Стокса справедливы как для ламинарного, так и для турбулентного режимов движения. Однако использование их «напрямую» для турбулентного режима вследствие наличия пульсационных составляющих параметров течения затруднительно. Поэтому при расчете турбулентных режимов течения обычно ставится задача отыскания осредненных скоростей и давлений. Для решения этой задачи исходные уравнения подвергаются операции осреднения по времени. Проделаем эту процедуру для модели несжимаемой жидкости.

Средние значения пульсирующих параметров

$$p = \bar{p} + p'; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'; \quad u_i = \bar{u}_i + u'_i, i = (x, y, z) \quad (4.96)$$

определяем по формулам, аналогичной (2.44).

Операция осреднения обладает рядом свойств, справедливость которых нетрудно показать прямыми вычислениями. Например, покажем, что осредненная производная по координате от пульсирующего давления равна производной от осредненной величины:

$$\frac{\overline{\partial p}}{\partial x} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial p}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} p dt = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}. \quad (4.97)$$

Этому же правилу подчиняется и производная по времени

$$\frac{\overline{\partial p}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t}. \quad (4.98)$$

Кроме того для любого параметра, например  $u$ , справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned}\bar{\bar{u}}_i &= \bar{u}_i; \bar{u}' = 0; \bar{\bar{u}_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j; \bar{\bar{u}_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}'_i \bar{u}'_j; \\ \bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_k &= \bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_k + \bar{u}'_i \bar{u}'_j \bar{u}'_k + \bar{u}'_i \bar{u}'_j \bar{u}'_k + \bar{u}'_j \bar{u}'_i \bar{u}'_k + \bar{u}'_k \bar{u}'_i \bar{u}'_j\end{aligned}\quad (4.99)$$

и пр.

Учитывая эти правила осреднения, приходим к выводу, что уравнение неразрывности при переходе к осредненным параметрам не изменит своего вида

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0 \text{ или } \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0. \quad (4.100)$$

Перейдем к осреднению уравнения Навье-Стокса в проекции на ось  $x$ . Предварительно следующим образом преобразуем выражение для конвективной составляющей индивидуальной производной  $du_x/dt$ , входящей в левую часть (4.21).

$$\begin{aligned}u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial u_x u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x u_z}{\partial z} - \\ - u_x \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= \frac{\partial u_x u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x u_z}{\partial z}.\end{aligned}\quad (4.101)$$

В (4.101) учтено, что для несжимаемой жидкости  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . С учетом этого преобразования это уравнение Навье-Стокса примет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x u_z}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right). \quad (4.102)$$

Аналогично записываются и два других уравнения. Перед проведением осреднения членов уравнения (4.102) в целом рассмотрим более подробно осреднение конвективного члена в его левой части.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_x u_x}{\partial x} &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial u_x u_x}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u_x u_x dt \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} (\bar{u}_x + u'_x)(\bar{u}_x + u'_x) dt \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} (\bar{u}_x \bar{u}_x + 2\bar{u}_x u'_x + u'_x u'_x) dt \right],\end{aligned}$$

откуда, с учетом (4.99), находим

$$\frac{\partial \bar{u}_x u_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_x \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'_x \bar{u}'_x}{\partial x}. \quad (4.103)$$

С учетом уравнения неразрывности (4.100) сумма конвективных производных от осредненной скорости может быть преобразована следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_x \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_x \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_x \bar{u}_z}{\partial z} &= \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \bar{u}_x \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) = \\ &= \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Наконец представим члены, содержащие пульсационные составляющие скорости, в виде

$$\frac{\partial \bar{u}'_x \bar{u}'_x}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_x}{\partial x}. \quad (4.105)$$

В результате первое уравнение Навье-Стокса после операции осреднения его членов приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} &= \bar{f}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial z^2} \right) - \\ &- \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_x}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_y}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Аналогично осредняются и два других уравнения Навье-Стокса. Эти осредненные уравнения носят название *уравнений Рейнольдса*.

Уравнение (4.106) по форме такое же, как и исходное уравнение Навье-Стокса за исключением последних трех слагаемых в правой части с пульсационными составляющими скорости вида  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_x}{\partial x}$ , которые выражают

собой действие дополнительных напряжений, присущих пульсирующему турбулентному потоку. Их называют *турбулентными (рейнольдсовыми) напряжениями*.

Запишем уравнение (4.106) в компактной форме, используя для обозначения пространственных координат и проекций гидродинамических параметров числовые индексы. То есть обозначим  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $\bar{u}_1 = \bar{u}_x$ ,  $\bar{u}_2 = \bar{u}_y$ ,  $\bar{u}_3 = \bar{u}_z$  и т. д. Кроме того будем предполагать, что если в одночленном выражении будет встречаться повторяющийся индекс, то по этому индексу производится суммирование. Например, конвективная часть индивидуальной производной проекции скорости  $u_x$  запишется так

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad j = 1.$$

С учетом указанных правил уравнения Рейнольдса (4.106) примут вид

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = \bar{f}_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + v \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \bar{u}'_j \bar{u}'_i}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (4.107)$$

Подобная форма записи математических выражений будет использоваться и в дальнейшем, при необходимости.

Таким образом, касательные напряжения в турбулентном потоке складывается из вязких напряжений  $\tau_\mu^*$ , описываемых слагаемыми в правой части уравнений типа (4.106), стоящими в скобках, и турбулентных  $\tau_{ij}$

$$\tau = \tau_\mu + \tau_{ij}, \quad (4.108)$$

причем турбулентные напряжения выражаются формулой

$$\tau_{ij} = -\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j \quad (4.109)$$

и обладают свойством взаимности:  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ , то есть образуют симметричный тензор второго ранга  $\boldsymbol{\tau}_t$  с компонентами  $\tau_{ij}, i, j = \overline{1, 3}$ . Диагональные компоненты  $-\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_i$  играют роль нормальных, а остальные – касательных напряжений.

Как видим, уравнения Рейнольдса, по сравнению с уравнениями Навье-Стокса содержат дополнительные неизвестные – турбулентные напряжения. Поэтому для замыкания данной системы необходимы дополнительные соотношения, связывающие эти напряжения с другими параметрами течения. Такие соотношения не могут быть получены из общефизических законов сохранения, и формулируются на основе ряда гипотез, выдвинутых различными авторами (Буссинеском, Прандтлем, Лаундером и др.). Гипотезы (модели турбулентности) содержат определяемые из опыта константы и справедливы только для тех условий, при которых определены данные константы. Теория турбулентности, построенная на основе этих гипотез, носит название полуэмпирической теории турбулентности.

Если рассматриваются турбулентные течения, в которых внутренняя энергия жидкости претерпевает существенные изменения, то для их расчета необходимо привлекать уравнение сохранения энергии, которое получается из уравнения (4.72) с использованием концепции Рейнольдса и выполнения операций осреднения пульсационных составляющих параметров. В данном пособии вывод осредненного уравнения сохранения энергии не приводится. Информацию по данному вопросу можно найти, например. В [2].

## 4.7. Замыкающие соотношения и условия однозначности

### 4.7.1 Замыкающие соотношения

Полученная выше система трех дифференциальных уравнений, описывающих динамику жидкости и газа, и включающая: уравнение неразрывности, векторное уравнение сохранения количества движения, уравнение сохранения энергии неполная, так как содержит семь неизвестных:  $\mathbf{u}$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $Q$ . Для ее замыкания должны привлекаться дополнительные соотношения, описывающие зависимость коэффициентов динамической вязко-

---

\* То есть определяемых молекулярной вязкостью жидкости

сти  $\mu$  и теплопроводности  $\lambda$  от параметров состояния среды, уравнение для определения интенсивности объемного источника тепловыделения  $Q$ , а также уравнение состояния.

При расчете турбулентных течений перечисленные выше замыкающие соотношения должны быть дополнены математическими выражениями, описывающими связь тензора турбулентных напряжений  $\tau_{ij} = -\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j$  с осредненными параметрами течения, то есть моделями турбулентности.

Используя замыкающие соотношения можно исключить из уравнений неразрывности, сохранения количества движения и энергии «лишние» переменные и свести задачу динамики жидкости к трем дифференциальным уравнениям<sup>\*</sup> относительно трех неизвестных функций, в качестве которых могут быть, например,  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ ,  $p(x, y, z, t)$ ,  $T(x, y, z, t)$ .

Если рассматривается адиабатическое течение баротропного нетеплопроводного газа, то уравнение сохранения энергии можно не рассматривать, так как температура найдется из уравнения состояния. В этом частном случае задача упрощается и включает в себя два дифференциальных уравнения (неразрывности и сохранения количества движения) относительно двух неизвестных функций  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ ,  $p(x, y, z, t)$ .

Если рассматривается течение несжимаемой жидкости и коэффициент ее кинематической вязкости не зависит от температуры, то уравнение сохранения энергии может быть проинтегрировано независимо от остальных. В этом случае общая задача гидродинамики распадается на две независимые: систему двух дифференциальных уравнений (неразрывности и сохранения количества движения) относительно неизвестных функций  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ ,  $p(x, y, z, t)$  и одно дифференциальное уравнение (сохранения энергии) с искомой функцией  $T(x, y, z, t)$ .

#### 4.7.2 Условия однозначности

Сформированная таким образом система уравнений должна быть дополнена *условиями однозначности*, позволяющими из общего многообразия решений, удовлетворяющих данной системе дифференциальных уравнений, выделить единственное решение, соответствующее поставленной задаче. К этим условиям относятся: геометрические характеристики области течения, граничные (краевые) условия и начальные условия.

---

<sup>\*</sup> Заметим, прежде всего, что уравнение сохранения количества движения векторное, поэтому, по сути дела, это три скалярных уравнения. То есть система уравнений динамики жидкости включает пять скалярных дифференциальных уравнений. Кроме того, следует сказать, что дифференциальных уравнений в задаче гидродинамики может быть еще больше, если модель турбулентности построена с использованием «своих» дифференциальных уравнений.

Кратко охарактеризуем данные условия однозначности. Рассмотрим при этом общую постановку задачи динамики, так как указанные выше частные случаи легко получаются из общей.

**Геометрические характеристики.** Геометрические характеристики области течения определяют размеры и границы потока жидкости.

**Граничные условия.** Граничные условия определяют особенности движения жидкости на границах во все моменты времени и зависят от типа границы: непроницаемая либо проницаемая стенка, свободная граница, проницаемая граница расчетной области. С математической точки зрения это ограничения на величины каждой из искомых функций, заданные на границе расчетной области.

1) Граница – непроницаемая стенка. Условия на стенке зависят от того рассматривается вязкая, либо идеальная жидкость.

а) При расчете течений *вязкой жидкости* на непроницаемой стенке задается условие прилипания, которое состоит в равенстве вектора скорости жидкости вектору скорости стенки в каждой точке ее поверхности:

$$\mathbf{u}(x_{ct}, y_{ct}, z_{ct}, t) = \mathbf{u}_{ct}. \quad (4.110)$$

Если стенка неподвижна, то  $\mathbf{u}_{ct}(t) = 0$ . Необходимо отметить, что выполнение условия прилипания не зависит от материала и состояния поверхности. Оно выполняется при обтекании поверхностей как смачиваемыми, так и несмачиваемыми жидкостями и нарушается только при течении сильно разреженных газов<sup>\*</sup>.

б) При расчете течений идеальной жидкости на непроницаемой стенке задается условие непротекания, то есть равенство нормальных к поверхности стенки компонент векторов скорости жидкости и стенки:

$$\mathbf{u}(x_{ct}, y_{ct}, z_{ct}, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{ct} \cdot \mathbf{n}, \quad (4.111)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к данной точке поверхности стенки. Если стенка неподвижна, то  $\mathbf{u}_{ct}(t) = 0$ .

2) Граница – проницаемая стенка. В этом случае на стенке должны быть заданы соотношения, определяющие величину скорости вдува (отсоса)  $u_w(x_{ct}, y_{ct}, z_{ct}, t)$ , которая при задании граничных условий должна быть добавлена к нормальной компоненте скорости стенки:

$$\mathbf{u}(x_{ct}, y_{ct}, z_{ct}, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{ct} \cdot \mathbf{n} \pm u_w(x_{ct}, y_{ct}, z_{ct}, t), \quad (4.112)$$

где знак плюс берется при вдуве и минус – при отсосе. В случае вязкой жидкости в дополнение к условиям (4.112) должна быть обнулена касательная к стенке компонента скорости:  $\mathbf{u}(x_{ct}, y_{ct}, z_{ct}, t) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ , где  $\boldsymbol{\tau}$  – вектор касательной к данной точке поверхности стенки.

Если рассматривается неадиабатическое течение, то на стенке кроме скорости течения должны быть заданы условия теплообмена с окружающей средой, то есть должна быть задана функция  $\mathbf{q}(x_{ct}, y_{ct}, z_{ct}, t)$ .

---

\* В так называемых свободномолекулярных течениях.

3) На свободной границе жидкости задается условие равенства давления в жидкости давлению в окружающей среде  $p_{\text{св}} = p_0$ .

4) На проницаемых поверхностях области течения, то есть на поверхностях, через которые жидкость попадает в расчетную область и покидает ее, задаются, например:

- на входе – распределение скорости  $\mathbf{u}(x_{\text{вх}}, y_{\text{вх}}, z_{\text{вх}}, t)$  и температуры  $T(x_{\text{вх}}, y_{\text{вх}}, z_{\text{вх}}, t)$ ;
- на выходе – равенство давления в потоке жидкости давлению в окружающей среде  $p(x_{\text{вых}}, y_{\text{вых}}, z_{\text{вых}}, t) = p_0$ .

**Начальные условия.** Если рассматривается нестационарная задача, то в дополнение к граничным условиям должны быть заданы поля гидродинамических параметров в начальный момент времени, то есть начальные условия. На момент времени  $t_0$  должны быть заданы: поле вектора скорости  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t_0)$ , любые две из трех следующих функций<sup>\*</sup>  $\rho = \rho(x, y, z, t_0)$ ,  $p = p(x, y, z, t_0)$ ,  $T = T(x, y, z, t_0)$ . Функции  $\mu(x, y, z, t_0)$ ,  $\lambda(x, y, z, t_0)$ ,  $Q(x, y, z, t_0)$  не задаются, а находятся из соответствующих замыкающих соотношений. При этом значения полей гидродинамических параметров должны удовлетворять граничным условиям и дифференциальным уравнениям. Поэтому, например, если задано начальное поле скорости и температуры, то начальное поле давления следует определить из исходной системы дифференциальных уравнений.

Условия однозначности могут быть заданы в виде числового значения, функциональной зависимости или дифференциального уравнения. Система уравнений, описывающая движение среды, совместно с условиями однозначности называется *краевой задачей*.

#### 4.8. Контрольные вопросы

1. Какой физический закон отражает уравнение неразрывности?
2. Запишите уравнение неразрывности для сжимаемой и несжимаемой жидкости.
3. Дайте определение закона сохранения количества движения для жидкого контрольного объема.
4. Запишите уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости.
5. Запишите уравнения движения Эйлера.
6. Запишите основное дифференциальное уравнение гидростатики.
7. Дайте определение баротропной среды.
8. Дайте определение потенциального течения. Укажите свойства потенциальных течений.
9. Запишите выражение уравнения Бернулли для трубы тока в дифференциальной форме.

---

<sup>\*</sup> Третья функция найдется из уравнения состояния.

10. Запишите выражение интеграла уравнения Бернулли для трубы торка.
11. Дайте определение закона сохранения энергии для жидкого контурного объема.
12. Как изменяется энтропия при адиабатическом течении идеального, совершенного газа?
13. Что собой представляют турбулентные напряжения?
14. Что собой представляют условия однозначности?

## ГЛАВА 5. ГИДРОСТАТИКА

### 5.1. Дифференциальные уравнения Эйлера для покоящейся жидкости

Дифференциальные уравнения, описывающие равновесие покоящейся жидкости (уравнения Эйлера), получены нами ранее, как частный случай уравнений Навье-Стокса и представлены соотношениями (4.28). Было показано, что эти уравнения имеют решение, то есть равновесие в жидкости возможно только в том случае, если объемные силы имеют потенциал, а жидкость баротропна. Уравнения Эйлера в этом случае приобретают вид (4.36), а их решение описывается формулой

$$\Phi + \Re = \text{const}. \quad (5.1)$$

Частные модели баротропности приводят к уравнениям Эйлера вида:

- (4.37) – для случая несжимаемой жидкости в поле потенциальных сил с решением

$$\frac{p}{\rho} + \Phi = \text{const}; \quad (5.2)$$

- (4.39) – для случая адиабатического совершенного газа в поле потенциальных сил с решением

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \Phi = \text{const}; \quad (5.3)$$

- (4.41) – для случая изотермического совершенного газа в поле потенциальных сил с решением

$$RT \ln p + \Phi = \text{const}. \quad (5.4)$$

Из выражения (5.2) следует, что в несжимаемой жидкости поверхности уровня  $\Phi = \text{const}$  совпадают с изобарическими поверхностями.

### 5.2. Интеграл уравнений Эйлера. Основная формула гидростатики

Уравнения Эйлера позволяют найти распределение давления по объему жидкости, зная которое можно определить силы давления на ограничивающие стенки.

Рассмотрим равновесие (абсолютный покой) несжимаемой жидкости в поле силы тяжести, рис. 5.1.

Для рассматриваемого случая

$$f_x = f_y = 0, \quad f_z = -g \quad \text{и} \quad \Phi = gz + \text{const}. \quad (5.5)$$

Подставим это выражение в (5.2), а константу определим из условия, что на свободной поверхности жидкости  $z = z_0$  давление равно давлению окружающей среды  $p = p_0$ , то есть

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 = \text{const}. \quad (5.6)$$

Подставляя (5.5), (5.6) в (5.2), получим

$$\frac{1}{\rho}(p_0 - p) = g(z - z_0), \quad (5.7)$$

или

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z). \quad (5.8)$$

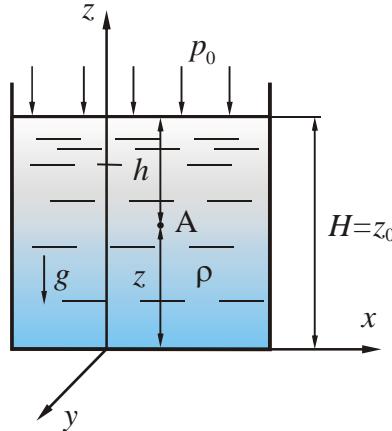


Рис. 5.1. К выводу основной формулы гидростатики

Так как  $z_0 - z = h$  (см. рис. 5.1), то

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (5.9)$$

Выражение (5.9) является *основной формулой гидростатики*. Здесь абсолютное давление  $p$  называется *гидростатическим*, величина  $\rho gh$  называется *весовым давлением*,  $p_0$  – *внешнее давление*.

Анализ уравнения (5.9) позволяет сформулировать **закон Паскаля:** *внешнее давление  $p_0$  передается всем точкам покоящейся жидкости и по всем направлениям одинаково.*

### 5.3. Равновесие газа в поле силы тяжести

Найдем распределение давления по высоте газовой атмосферы. Для этого используем систему координат с началом, расположенным на поверхности земли, осью  $z$ , направленной вертикально вверх. Рассмотрим случай адиабатической и изотермической атмосферы. Распределение давления для этих случаев описывается формулами (5.3) и (5.4) соответственно. Потенциал объемной силы выражается формулой (5.5). Константы интегрирования находим из условия, что при  $z = 0$ ,  $p = p_0$ :

- при адиабатической атмосфере

$$\frac{k-1}{k} \frac{p_0}{\rho_0} = \text{const}; \quad (5.10)$$

- при изотермической атмосфере

$$RT \ln p_0 = \text{const}. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.5), (5.10) в (5.3) и (5.5), (5.11) в (5.4), получаем:

- для адиабатической атмосферы

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{k-1}{k} gz, \quad (5.12)$$

или, используя уравнение состояния,

$$RT = RT_0 - \frac{k-1}{k} gz; \quad (5.13)$$

- для изотермической атмосферы

$$RT \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -gz, \quad (5.14)$$

или, учитывая, что  $RT = p_0 / \rho_0$ ,

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} gz\right). \quad (5.15)$$

Из (5.13) видно, что температура адиабатической атмосферы убывает с высотой. Найдем ее максимальную высоту, то есть высоту, при которой  $T = 0$ . Пусть  $T_0 = 289$  К,  $R = 287$  Дж/(кг К),  $k = 1,4$ . Подставив эти данные в (5.13), получим  $H = z = 29592$  м. То есть высота адиабатической атмосферы ограничена. Высота же изотермической атмосферы, как следует из (5.15) бесконечна.

#### 5.4. Абсолютное и избыточное давление, вакуум. Понятие «напор»

Если жидкость находится в ненапряженном состоянии, то давление в ней равно нулю  $p = 0$ . Значение давления, отсчитываемого от этого нуля, называется *абсолютным* давлением. Избыток давления над *атмосферным*  $p_{\text{ат}}$  называется *избыточным* (*манометрическим*) давлением  $p_{\text{изб}}$ . Таким образом, по определению имеем

$$p = p_{\text{ат}} + p_{\text{изб}}. \quad (5.16)$$

Если давление в какой либо точке объема жидкости меньше атмосферного, то в технических приложениях такое состояние называют *вакуумом*. Для его характеристики вводится *вакуумметрическое* давление

$$p_{\text{в}} = p_{\text{ат}} - p. \quad (5.17)$$

Для точки А на рис. 5.1 избыточное давление равно

$$p_{\text{изб}}^A = p_0 + \rho gh - p_{\text{ат}}. \quad (5.18)$$

Если  $p_0 = p_{\text{ат}}$ , то избыточное давление равно весовому.

Разделим обе части уравнения (5.8) на  $\rho g$  и перейдем к избыточным давлениям  $p_{\text{и}} = p - p_0$ :

$$\frac{p_{\text{и}}}{\rho g} + z = H = \text{const}. \quad (5.19)$$

Все члены уравнения приобретают размерность длины, которые в гидростатике и технических приложениях принято называть напорами:

- *гидростатический (полный) напор*

$$H = \frac{P_{\text{и}}}{\rho g} + z; \quad (5.20)$$

- *пьезометрический напор (или пьезометрическая высота)*

$$H_{\text{п}} = \frac{P_{\text{и}}}{\rho g}; \quad (5.21)$$

- *геометрический напор*

$$H_{\text{г}} = z. \quad (5.22)$$

Если гидростатическое давление меньше атмосферного, то вводится *вакуумметрический напор (высота)*

$$H_{\text{в}} = \frac{P_{\text{в}}}{\rho g} = \frac{P_0 - P}{\rho g}. \quad (5.23)$$

Размерность напора можно представить в виде  $[H] = \text{м} = \text{Дж}/\text{Н}$ . Следовательно, напор можно трактовать как потенциальную энергию единицы веса жидкости (удельную потенциальную энергию): геометрический напор – потенциальную энергию положения; пьезометрический напор – потенциальную энергию давления. Величина полного напора отражает полный запас потенциальной энергии покоящейся жидкости, который одинаков для всех частиц жидкости.

## 5.5. Равновесие несжимаемой жидкости в сообщающихся сосудах.

### Измерение давления

Рассмотрим случай равновесия двух несмешивающихся жидкостей различной плотности, находящихся в сообщающихся сосудах, рис. 5.2.

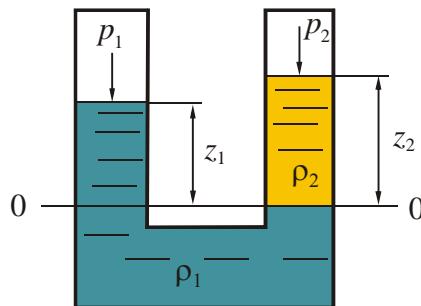


Рис. 5.2. Равновесие жидкости в сообщающихся сосудах:

$0 - 0$  – плоскость отсчета высот;  $\rho_1 > \rho_2$

Давление жидкости на поверхности раздела обозначим через  $p$ , тогда, согласно (5.9), можем записать

$$p = p_1 + \rho_1 g z_1 = p_2 + \rho_2 g z_2. \quad (5.24)$$

Если давления над поверхностями жидкостей равны, то есть, например,  $p_1 = p_2 = p_{\text{ат}}$ , то

$$p_{\text{ат}} + \rho_1 g z_1 = p_{\text{ат}} + \rho_2 g z_2, \quad (5.25)$$

или

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (5.26)$$

Таким образом, если жидкости в двух сообщающихся сосудах разнородны, то при одинаковых давлениях на свободных поверхностях высоты столбов жидкости над плоскостью раздела обратно пропорциональны их плотностям. Если жидкости однородны ( $\rho_1 = \rho_2$ ), то их уровни будут находиться на одной и той же высоте  $z_1 = z_2$ .

В приведенных выкладках силы молекулярного взаимодействия жидкости и стенок сосудов не учитываются. В противном случае необходимо вводить поправку на высоту капиллярного подъема (понижения) в соответствии с формулой (1.53).

На принципах равновесия жидкости в сообщающихся сосудах основано измерение давления. Рассмотрим несколько примеров.

1. Простейшим прибором для измерения давления является стеклянная трубка, открытая в атмосферу, называемая *пьезометром*, рис. 5.3.

Для жидкости в пьезометре, в соответствии с (5.9), можем записать

$$z_{\text{ат}} + \frac{P_{\text{ат}}}{\rho g} = z + \frac{P}{\rho g}; \quad p = p_{\text{ат}} + \rho g(z_{\text{ат}} - z); \quad p_i = \rho g(z_{\text{ат}} - z). \quad (5.27)$$

Таким образом, пользуясь пьезометром можно определить абсолютное и избыточное давление в точке присоединения трубы пьезометра к сосуду. Заметим, что высота подъема жидкости в трубке над точкой отбора есть пьезометрический напор. Для исключения влияния капиллярного давления диаметр трубы пьезометра должен быть не менее 8...10 мм.

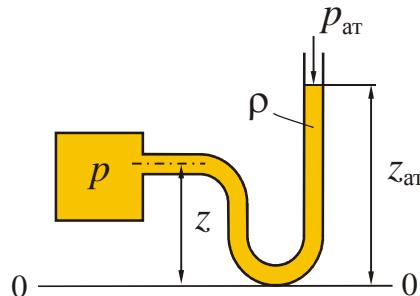


Рис. 5.3. Схема измерения давления пьезометром

2. *Дифференциальные пьезометры* служат для измерения разности давлений. Схема такого устройства показана на рис. 5.4.

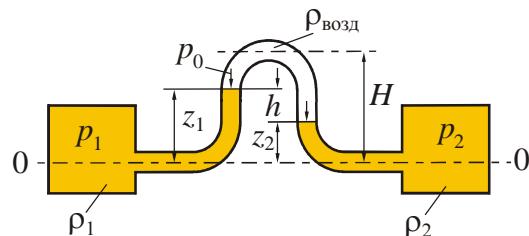


Рис. 5.4. Измерение пьезометром разности давлений

Рассмотрим случай, когда жидкости в сосудах одинаковые и требуется определить разность давлений  $p_1 - p_2$  на одной и той же высоте. Используя основную формулу гидростатики (5.9), запишем:

$$p_1 = p_0 + \rho g z_1; \quad p_2 = p_0 + \rho g z_2 + \rho_{\text{возд}} gh; \quad (5.28)$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g (z_1 - z_2) - \rho_{\text{возд}} gh; \quad \Delta p = gh (\rho - \rho_{\text{возд}}).$$

Подобного рода дифференциальный пьезометр будет работать при условии, что  $p_1 \leq p_0 + \rho g H$ . В противном случае равновесие жидкости нарушится. Для исключения этого в верхней части пьезометра устанавливают краник для подкачки воздуха и повышения давления.

3. Измерение вакуумметрического давления, рис. 5.5.

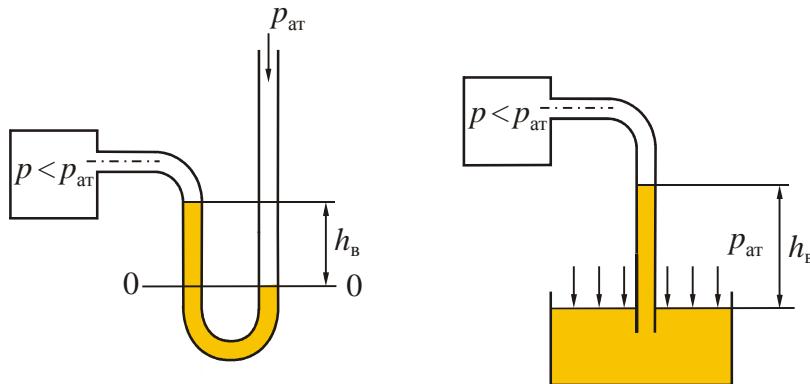


Рис. 5.5. Применение пьезометров для измерения вакуумметрического давления

Условие равновесия в данном случае имеет вид

$$p = p_{\text{ат}} - \rho g h_v, \quad (5.29)$$

где  $h_v$  – вакуумметрический напор.

## 5.6. Силы давления покоящейся жидкости на криволинейные поверхности

Силовое воздействие жидкости на твердую поверхность площадью  $S$ , погруженную в жидкость, равно сумме воздействий элементарных сил  $d\mathbf{F}$ , действующих на каждый элемент  $dS$  площади ее поверхности, рис. 5.6. То есть

$$d\mathbf{F} = p \mathbf{n} dS, \quad (5.30)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к элементу поверхности  $dS$ , внешний к объему жидкости;  $p$  – давление на площадке  $dS$ .

Суммируя элементарные силы, получаем главный вектор сил

$$\mathbf{F} = \int_S p \mathbf{n} dS, \quad (5.31)$$

называемый силой давления жидкости на поверхность  $S$ . Точка приложения главного вектора называется *центром давления*.

Главный момент сил, действующий со стороны жидкости на ту же площадку, найдется как

$$\mathbf{M} = \int_S p \mathbf{n} \times \mathbf{r} dS, \quad (5.32)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор площадки  $dS$  (см. рис. 5.6).

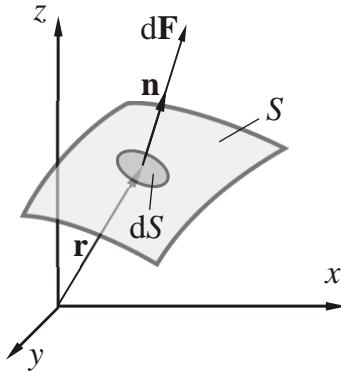


Рис. 5.6. К определению главного вектора и момента сил, действующих на твердую поверхность со стороны жидкости

Для того чтобы определить полное силовое воздействие жидкости на площадку  $S$  произвольной формы необходимо найти проекции сил давления  $F_x, F_y, F_z$  на координатные оси  $x, y, z$ . Если в зависимости от конфигурации стенки эти три силы пересекутся в одной точке на данной поверхности, то воздействие жидкости сводится к одной силе давления  $\mathbf{F}$ . Если же проекции сил не пересекаются, то силовое воздействие сводится к силе  $\mathbf{F}$  и моменту  $\mathbf{M}$ .

В общем случае сила давления  $\mathbf{F}$  складывается из силы внешнего давления  $\mathbf{P}_0$  и силы весового давления  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}. \quad (5.33)$$

Однако задачу определения  $\mathbf{F}$  можно свести к задаче определения только силы весового давления, заменив внешнее давление давлением эквивалентного столба жидкости.

Рассмотрим криволинейную твердую поверхность  $S$ , ограждающую жидкость от внешней среды, рис. 5.7.

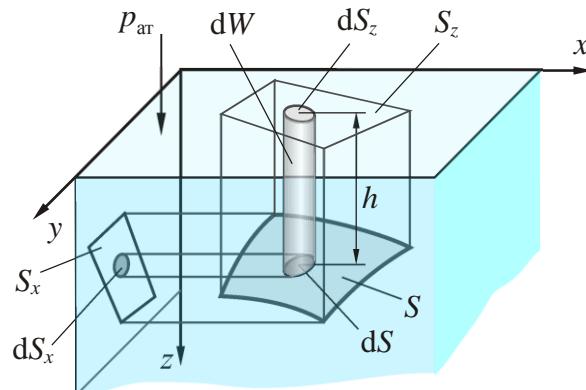


Рис. 5.7. К определению силы давления жидкости на твердую поверхность

Пусть внешнее давление равно атмосферному. Тогда сила давления жидкости на твердую поверхность будет равна силе весового давления  $\mathbf{P}$ , так как силы от действия атмосферного давления, приложенные в внутренней и наружной стороне рассматриваемой поверхности, взаимно уничтожаются. Найдем проекции сил весового давления  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  на рассматриваемую поверхность. Горизонтальная проекция силы найдется по формуле

$$P_x = \int_S dP_x. \quad (5.34)$$

Так как каждая элементарная сила давления  $d\mathbf{P}$  в покоящейся жидкости направлена по нормали  $\mathbf{n}$  к элементу поверхности  $dS$ , то

$$dP_x = n_x \rho g h dS = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) \rho g h dS_x, \quad (5.35)$$

где  $n_x$  – проекция внешней нормали  $\mathbf{n}$  к элементу поверхности  $dS$  на ось  $x$ ;  $h$  – высота столба жидкости над рассматриваемым элементом поверхности;  $dS_x$  – проекция элемента поверхности  $dS$  на плоскость  $zy$  (перпендикулярную оси  $x$ ).

Подставив (5.35) в (5.34) и учитывая, что в принятой системе координат  $h = z$  (см. рис. 5.7), получим

$$P_x = \rho g \int_{S_x} z dS_x. \quad (5.36)$$

Интеграл  $\int_{S_x} z dS_x$  приставляет собой статический момент площади проекции  $S_x$  относительно оси  $y$ , следовательно

$$P_x = \rho g z_{ц.м}^x S_x, \quad (5.37)$$

где  $S_x$  – проекция площадки  $S$  на плоскость, перпендикулярную оси  $x$ ;  $z_{ц.м}^x$  – глубина расположения центра масс этой проекции.

Проекция силы весового давления на ось  $y$  найдется аналогично

$$P_y = \rho g z_{ц.м}^y S_y. \quad (5.38)$$

Проекция силы весового давления на ось  $z$  равна

$$P_z = \rho g \int_S z \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}) dS = \rho g \int_{S_z} z dS_z. \quad (5.39)$$

Интеграл  $W = \int_{S_x} z dS_x$  приставляет собой объем криволинейного вертикального цилиндра, ограниченного снизу поверхностью  $S$ , сверху – проекцией этой поверхности на свободную поверхность жидкости. Этот цилиндр называется телом давления, а произведение  $G = \rho g W$  есть вес тела давления.

Таким образом, для расчета силы весового давления покоящейся жидкости на криволинейную твердую поверхность необходимо руководствоваться следующими правилами.

- Горизонтальные проекции силы весового давления жидкости  $P_i$  ( $i = x, y$ ) на криволинейную твердую поверхность  $S$  равны произведению площади соответствующей проекции  $S_i$  ( $i = x, y$ ) этой криволинейной поверхности на давление в центре масс данной площади проекции.
- Вертикальная проекция силы весового давления численно равна весу тела давления  $P_z = G = \rho g W$ .
- Горизонтальные составляющие силы  $P_i$  ( $i = x, y$ ) проходят через центры давления\* соответствующих проекций, а вертикальная – через центр масс тела давления.
- Вертикальная составляющая направлена вниз, если жидкость расположена над твердой поверхностью. В противном случае она направлена вниз. Объем тела давления в этом случае считается отрицательным.

## 5.7. Силы давления покоящейся жидкости на плоские поверхности

Рассмотрим два частных случая действия силы давления: равномерной и неравномерной.

### 5.7.1 Сила равномерного давления на горизонтальную плоскую поверхность

Данный случай ( $p = \text{const}$ ,  $\mathbf{n} = \text{const}$ ) реализуется при покоящейся жидкости или при движении емкости с жидкостью вверх или вниз. В этом случае из (5.31) имеем

$$\mathbf{F} = p\mathbf{n}S, \quad (5.40)$$

где  $\mathbf{F}$  – вектор силы давления  $p$ ;  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к рассматриваемой поверхности.

Линия действия силы проходит через центр масс площади  $S$ . Заметим, что сила давления на дно сосуда не зависит от формы его боковых стенок, рис. 5.8. Действительно,

$$\begin{cases} p = p_0 + \rho gh_0; \\ F = (p_0 + \rho gh_0)S_0, \end{cases} \quad (5.41)$$

то есть сила давления равна произведению площади дна  $S_0$  на гидростатическое давление в любой из точек дна.

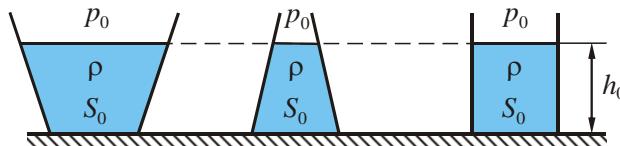


Рис. 5.8. Влияние формы сосуда на силу давления

---

\* Об определении центра давления, см. следующий раздел.

### 5.7.2 Сила неравномерного давления на плоскую стенку

В этом случае ( $p \neq \text{const}$ ;  $\mathbf{n} = \text{const}$ ). В этом случае система элементарных сил  $d\mathbf{F}$ , одинаковых по направлению, но различных по величине, сводятся к одной силе давления

$$\mathbf{F} = \mathbf{n} \int_S p dS. \quad (5.42)$$

Рассмотрим плоскую стенку  $AB$  сосуда, наклоненную под углом  $\alpha$  к горизонту, на которой выделим площадку  $S$  произвольной формы, рис. 5.9, и найдем действующую на данную площадку силу давления  $\mathbf{F}$ . Для большей наглядности изложения боковая стенка сосуда на рисунке развернута вместе с осью  $x$  вокруг оси  $y$  на  $90^\circ$  до совпадения с плоскостью чертежа.

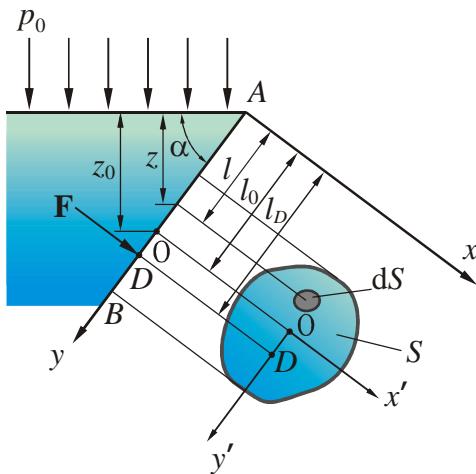


Рис. 5.9. К определению силы давления жидкости на наклонную прямолинейную стенку

На элемент поверхности  $dS$  действует давление  $p = p_0 + \rho g z$ , см. рис. 5.9. Подставим эту величину в (5.42)

$$\mathbf{F} = \mathbf{n} \int_S (p_0 + \rho g z) dS = \mathbf{n} \left( p_0 \int_S dS + \rho g \int_S z dS \right) = \mathbf{n} \left( p_0 S + \rho g \sin \alpha \int_S l dS \right). \quad (5.43)$$

Последний интеграл в (5.43) представляет собой статический момент площадки  $S$  относительно оси  $x$ . Тогда справедливо равенство

$$\int_S l dS = l_0 S, \quad (5.44)$$

где  $l_0$  – координата центра масс площадки  $S$ , отсчитываемая вдоль оси  $y$ . С учетом (5.44) выражение (5.43) примет вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{n} (p_0 S + \rho g l_0 S \sin \alpha) = \mathbf{n} (p_0 + \rho g z_0) S. \quad (5.45)$$

То есть полная сила давления на плоскую наклонную стенку по величине равна произведению площади стенки на гидростатическое давление в ее центре масс.

Результирующая сила – от давления жидкости и внешнего давления также найдется по формуле (5.45), однако вместо  $p_0$  надо в этом случае подставить избыточное давление  $p_0 - p_{\text{ат}}$ . Если давление над жидкостью равно атмосферному, то результирующая сила равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{n} \rho g z_0 S. \quad (5.46)$$

Найдем координаты точки приложения сил давления жидкости. Для этого представим силу давления в виде суммы двух сил:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P} = \mathbf{n} p_0 S + \mathbf{n} \rho g z_0 S. \quad (5.47)$$

Так как внешнее давление  $p_0$  по закону Паскаля передается всем точкам жидкости без изменения, то равнодействующая сила  $\mathbf{P}_0$  приложена в центре масс площади  $S$ .

Для определения координаты точки приложения силы от весового давления применим теорему Вариньона, согласно которой момент от действия равнодействующей силы  $\mathbf{P}$  равен сумме моментов составляющих сил относительно той же самой оси

$$Pl_D = \rho g \int_S l_z dS = \rho g \sin \alpha \int_S l^2 dS. \quad (5.48)$$

Величина равнодействующей силы весового давления согласно (5.45) равна

$$P = \rho g z_0 = \rho g l_0 \sin \alpha. \quad (5.49)$$

Последний интеграл в соотношении (5.48) представляет собой момент инерции  $J_x$  площади  $S$  относительно оси  $x$ :

$$J_x = \int_S l^2 dS. \quad (5.50)$$

С учетом (5.49) и (5.50) из (5.48) получаем

$$l_D = \frac{J_x}{l_0 S}. \quad (5.51)$$

Произведение  $l_0 S$  представляет собой статический момент площади  $S$  относительно оси  $x$ . Из теоретической механики известно, что момент инерции  $J_x$  может быть представлен в виде

$$J_x = J_0 + l_0^2 S, \quad (5.52)$$

где  $J_0$  – центральный момент инерции рассматриваемой площади  $S$  (относительно оси, проходящей через центр масс).

Подставив (5.52) в (5.51), получим

$$l_D = l_0 + \frac{J_0}{l_0 S}. \quad (5.53)$$

Таким образом, точка приложения равнодействующей сил весового давления  $\mathbf{P}$  на площадь  $S$  расположена ниже центра масс этой площади. Расстояние между ними равно

$$\Delta l = l_D - l_0 = \frac{J_0}{l_0 S}. \quad (5.54)$$

Если внешнее давление  $p_0$  равно атмосферному, то точка  $D$  и будет центром давления. Если же  $p_0 \neq p_{\text{ат}}$ , то координаты центра давления находятся по правилам механики, как координаты точки приложения суммы сил от внешнего избыточного и весового давлений.

### 5.8. Относительное равновесие несжимаемой жидкости

Состояние жидкости, когда она находится в покое относительно стенок сосуда, движущегося с ускорением, называется относительным равновесием. Выбирая систему координат, связанную со стенками сосуда, можно свести данную задачу к статической задаче, решение которой находится с использованием уравнений Эйлера. При переходе в движущуюся систему координат в число действующих объемных сил необходимо включить силу инерции, плотность распределения которой  $\mathbf{f}_i$  численно равна ускорению рассматриваемой частицы жидкости  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{f}_i = -\mathbf{a}. \quad (5.55)$$

Знак « $-$ » показывает, что сила инерции направлена противоположно ускорению.

Рассмотрим два характерных случая равновесия жидкости: в сосуде, движущемся прямолинейно, и во вращающемся сосуде.

#### 5.8.1 Равновесие в сосуде, движущемся прямолинейно с постоянным ускорением

Рассмотрим сосуд, движущийся по наклонной поверхности  $AB$  с постоянным ускорением  $\mathbf{a}$ , рис. 5.10.

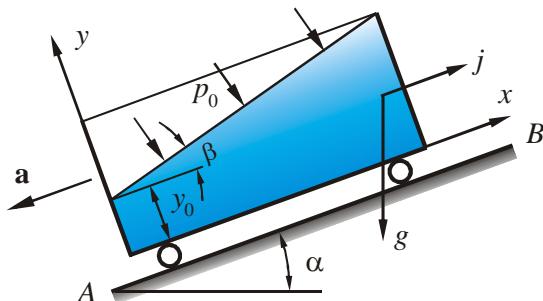


Рис. 5.10. Равновесие жидкости при прямолинейном равноускоренном движении

Проекции единичных объемных сил в движущейся системе координат равны

$$f_x = j - g \sin \alpha; \quad f_y = -g \cos \alpha; \quad f_z = 0. \quad (5.56)$$

С учетом этих соотношений основное дифференциальное уравнение гидростатики (4.30) примет вид

$$dp = \rho [(j - g \sin \alpha) dx - g \cos \alpha dy]. \quad (5.57)$$

Интегрируя (5.57), получим

$$p = \rho [(j - g \sin \alpha)x - gy \cos \alpha] + C. \quad (5.58)$$

Константа интегрирования находится из граничных условий:  $p = p_0$  при  $x = 0$  и  $y = y_0$ . Подставив граничные условия в (5.58), получим

$$C = p_0 + \rho g y_0 \cos \alpha. \quad (5.59)$$

Окончательно закон распределения давления в жидкости примет вид

$$p = p_0 + \rho (j - g \sin \alpha)x + \rho g (y_0 - y) \cos \alpha. \quad (5.60)$$

Полагая в уравнении (5.58)  $p = \text{const}$ , получим уравнение изобарических поверхностей

$$(j - g \sin \alpha)x - gy \cos \alpha + C_1 = 0. \quad (5.61)$$

Уравнение свободной поверхности жидкости получим, положив в (5.60)  $p = p_0$ :

$$(j - g \sin \alpha)x - g(y - y_0) \cos \alpha = 0, \quad (5.62)$$

или

$$y = y_0 + \frac{j - g \sin \alpha}{g \cos \alpha} x. \quad (5.63)$$

Если движение сосуда происходит только под действием силы тяжести, то  $j = 0$ . Тогда  $y = y_0 - x \operatorname{tg} \alpha$ . То есть в системе координат, связанной с землей поверхность жидкости горизонтальна.

Сравнивая (5.61) и (5.62), видим, что изобарические поверхности есть плоскости параллельные свободной поверхности.

### 5.8.2 Равновесие жидкости в сосуде, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega$

Система координат  $x, y, z$  связана с вращающимся сосудом, рис. 5.11.

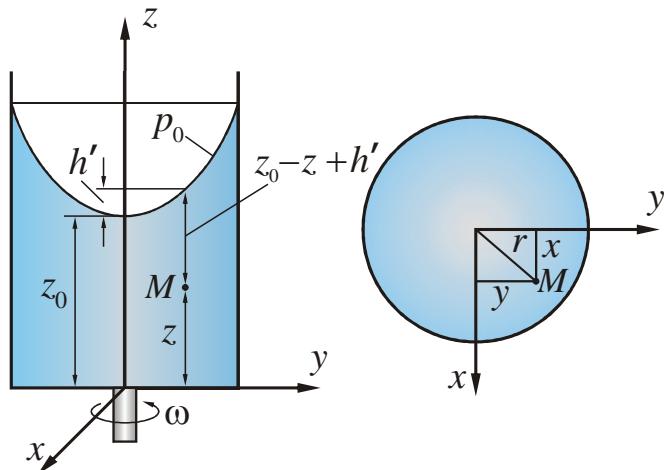


Рис. 5.11. Равновесие жидкости во вращающемся сосуде

В данном случае объемной силой, кроме силы веса, является центробежная сила инерции

$$\mathbf{f}_{\text{цб}} = \omega^2 r^0 \mathbf{r}^0, \quad (5.64)$$

где  $r$  – радиус рассматриваемой точки жидкости относительно оси вращения;  $\mathbf{r}^0$  – единичный вектор радиальной (вращающейся) системы координат. Проекции на оси координат результирующих объемных сил равны

$$f_x = \omega^2 r \cos(\mathbf{r}^0, \mathbf{i}) = \omega^2 x; \quad f_y = \omega^2 r \cos(\mathbf{r}^0, \mathbf{j}) = \omega^2 y; \quad f_z = -g. \quad (5.65)$$

С учетом (5.65) дифференциальное уравнение гидростатики (4.30) запишется в виде

$$dp = \rho \omega^2 x dx + \rho \omega^2 y dy - \rho g dz, \quad (5.66)$$

которое после интегрирования примет вид

$$p = \rho \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho g z + C. \quad (5.67)$$

Константу интегрирования найдем из условия:  $p = p_0$  при  $x = y = 0$  и  $z = z_0$ . Тогда

$$C = p_0 + \rho g z_0. \quad (5.68)$$

Учитывая (5.68), а также то, что  $x^2 + y^2 = r^2$ , закон распределения давления в жидкости (5.67) запишем в виде

$$p = p_0 + \rho g \left( z_0 - z + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right). \quad (5.69)$$

Приравняв в (5.69)  $p = p_0$ , получим уравнение свободной поверхности жидкости:

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2, \quad (5.70)$$

которое представляет собой параболу. Следовательно, свободная поверхность вращающейся с постоянной угловой скоростью жидкости – параболоид вращения. Из (5.70) видно, что дробь  $\omega^2 r^2 / (2g) = h'$  представляет собой высоту, на которую поднята над вершиной параболоида точка свободной поверхности, см. рис. 5.11. Таким образом, выражение в скобках (5.69) представляет собой заглубление  $h$  точки  $M$  под свободную поверхность, см. рис. 5.11. То есть (5.69) принимает традиционный вид гидростатического (линейного) распределения давления по глубине  $p = p_0 + \rho g h$ , которая в данном случае отсчитывается от свободной поверхности.

Уравнение изобарических поверхностей во вращающейся жидкости получится из (5.67), если положить  $p = \text{const}$ :

$$\rho \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho g z + C_1 = 0. \quad (5.71)$$

Как видно оно представляет собой параметрическое уравнение семейства параболоидов вращения с осью  $z$ .

### 5.9. Закон Архимеда. Плавание тел

Пусть тело  $ABDE$  полностью погружено в жидкость и находится в состоянии покоя рис. 5.12. На тело действует сила тяжести  $\mathbf{G}$ , приложенная в точке  $C$ . Определим суммарную силу, действующую на тело со стороны жидкости, называемой *силой Архимеда*.

Результирующая горизонтальная сила, действующая на тело, равна нулю, так как проекции сил давления на любую из горизонтальных осей равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому воздействие жидкости сводится к одной результирующей вертикальной силе, которую определим следующим образом.

По закону Паскаля внешнее давление передается всем точкам жидкости без изменения. Следовательно, результирующая сила, действующая на погруженное в жидкость тело и обусловленная действием внешнего давления, будет равна нулю. Таким образом, сила Архимеда обусловлена действием только весового давления. В соответствии с разделом 5.6 на нижнюю часть  $AED$  погруженного в воду тела будет действовать сила весового давления  $P_2$ , равная весу тела давления  $AEDNM$ , направленная снизу-вверх, рис. 5.12  $P_2 = \rho g W_{AEDNM}$ . На верхнюю же часть  $ABD$  тела действует сила весового давления  $P_1$ , равная весу тела давления  $ABDNM$  и направленная сверху-вниз  $P_1 = \rho g W_{ABDNM}$ . Результирующая сила будет равна разности весов тел давления:

$$P_A = P_1 - P_2 = \rho g (W_{AEDNM} - W_{ABDNM}) = \rho g W \quad (5.72)$$

и, следовательно, она равна весу жидкости в объеме тела  $W$ .

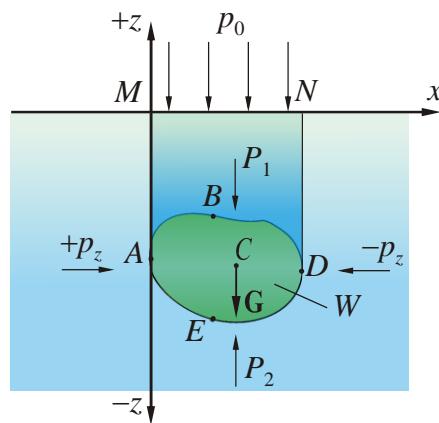


Рис. 4.13. К определению силы Архимеда

Уравнение (5.72) выражает **закон Архимеда**: *на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая (подъемная) сила, направленная снизу вверх и равная весу жидкости в объеме тела (или его погруженной части).*

Объем вытесненной телом жидкости называется *объемным водоизмещением*, а ее вес – *водоизмещением*.

*Центр водоизмещения* – это центр тяжести вытесненного объема жидкости.

*Подъемная сила* приложена к смоченной поверхности тела в точке, где эта поверхность пересекается вертикалью, проходящей через центр водоизмещения.

**Плаванье тел.** На законе Архимеда основана теория плаванья тел. Погруженное в жидкость однородное тело с плотностью  $\rho_t$  находится под действием двух сил: силы тяжести тела в пустоте  $G = \rho_t g W_t$  и подъемной силы Архимеда  $P_A = \rho_{ж} g W$  ( $W_t$  – объем тела;  $\rho_{ж}$  – плотность жидкости).

Возможны следующие варианты поведения тела в несжимаемой жидкости.

1.  $\rho_t > \rho_{ж}$ . Так как  $G - P_A = W_t g (\rho_t - \rho_{ж}) > 0$ , то тело тонет.
2.  $\rho_t = \rho_{ж}$ . Так как  $G = P_A$ , тело будет плавать внутри жидкости, сохраняя безразличное равновесие на любой глубине.
3.  $\rho_t < \rho_{ж}$ . Так как  $G - P_A = W_t g (\rho_t - \rho_{ж}) < 0$ , то тело всплывает и частично выйдет выше поверхности жидкости на столько, чтобы новая подъемная сила уравновесилась силой веса тела.

Для плавающего на поверхности тела выполняется условие

$$\rho_{ж} W' = \rho_t W_t, \quad (5.73)$$

где  $W'$  – объем погруженной части тела.

## 5.10. Остойчивость плавающих сил

Способность тела возвращаться в состояние равновесия после полученного крена называется *остойчивостью*.

Рассмотрим плавающее тело, имеющее продольную плоскость симметрии, рис. 5.13. Центр тяжести тела расположен в точке  $C$ , центр водоизмещения – в точке  $D_0$ .

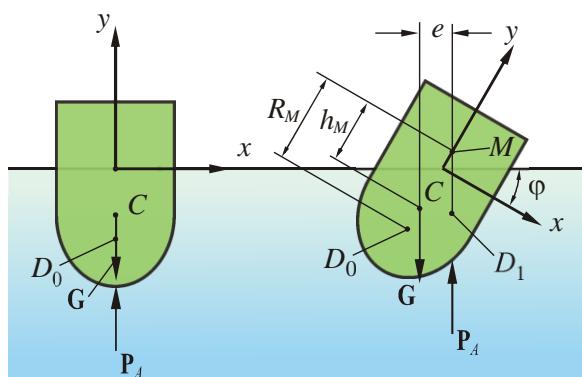


Рис. 5.13. Остойчивость плавающего тела

Пусть тело накренилось на угол  $\varphi$ . Поскольку вес тела не изменился, то останется прежней и величина силы Архимеда  $P_A$ . Центр водоизмещения при этом переместится в новое положение  $D_1$ , а подъемная сила будет проходить через нее, оставаясь вертикальной.

Точка  $M$  пересечения оси координат  $y$  с линией действия подъемной силы называется *метацентром*.

Так как при плавании тела  $G < P_A$ , то тело обладает остойчивостью в случае, когда метацентр расположен выше центра тяжести тела.

Замкнутая плоская линия пересечения плавающего тела с поверхностью жидкости называется *ватерлинией*. Часть плоскости, ограниченная ватерлинией называется *площадью плавания (площадью грузовой ватерлинии)*. Расстояние  $R_M$  называется *метацентрическим радиусом*,  $h_M$  – *метацентрической высотой*. Величина  $h_M$  считается положительной, если метацентр  $M$  расположен выше центра тяжести  $C$ .

Таким образом, тело обладает остойчивостью, если  $h_M > 0$ .

## 5.11. Равновесие твердого тела во вращающейся жидкости.

### Центрифугирование

Рассмотрим теперь задачу о равновесии твердого тела, имеющего объем  $W$  и площадь внешней поверхности  $S$ , погруженного во вращающуюся жидкость отличной от тела плотности, рис. 5.14. Будем считать, что тело вращается вокруг вертикальной оси сосуда с той же угловой скоростью  $\omega$ , что и жидкость. Найдем равнодействующую сил, приложенных к данному телу. Для удобства решения задачи введем цилиндрическую систему координат  $(r, 0, z)$ .

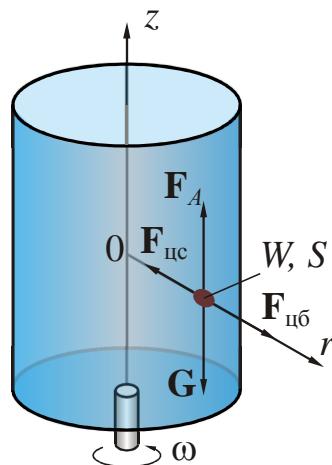


Рис. 5.14. К эффекту центрифугирования

В данном случае на тело действуют следующие внешние силы: сила веса  $\mathbf{G}$ , центробежная сила  $\mathbf{F}_{\text{цб}}$  и равнодействующая сил давления жидкости на внешнюю поверхность тела  $\mathbf{P}$ . Таким образом, главный вектор внешних сил  $\mathbf{F}$ , приложенных к телу, равен

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_{\text{цб}} + \mathbf{P}. \quad (5.74)$$

Или

$$\mathbf{F} = \rho_t g W \mathbf{k} + \int_W \rho_t \omega^2 \mathbf{r} dW - \int_S \mathbf{n} p dS, \quad (5.75)$$

где  $\rho_t$  – плотность тела;  $\mathbf{k}$  – единичный вектор оси  $z$ ,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор элементарного объема  $dW$  тела;  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к элементу поверхности тела  $dS$ . Перед последним слагаемым в правой части (5.75) должен быть поставлен знак минус, так как направление сил давления, действующих на тело, противоположно направлению внешней нормали.

Центробежная сила, выраженная первым интегралом в (5.75), преобразуется следующим образом

$$\mathbf{F}_{\text{цб}} = \int_W \rho_t \omega^2 \mathbf{r} dW = \rho_t \omega^2 \int_W \mathbf{r} dW = \rho_t \omega^2 \mathbf{r}_{\text{ц.т}} W. \quad (5.76)$$

В (5.76) учтено, что последний интеграл представляет собой статический момент тела, который равен произведению объема тела  $W$  на координату его центра тяжести  $\mathbf{r}_{\text{ц.т}}$ .

Преобразуем поверхностный интеграл в (5.75) в объемный, используя формулу (1.23):

$$-\int_S \mathbf{n} p dS = - \left( \mathbf{i} \int_W \frac{\partial p}{\partial x} dW + \mathbf{j} \int_W \frac{\partial p}{\partial y} dW + \mathbf{k} \int_W \frac{\partial p}{\partial z} dW \right). \quad (5.77)$$

Распределение давления в находящейся в равновесии вращающейся жидкости получено ранее и выражается уравнением (5.69). Используя (5.69), получаем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{\text{ж}} \omega^2 x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho_{\text{ж}} \omega^2 y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_{\text{ж}} g. \quad (5.78)$$

Подставляя (5.78) в (5.77), получим

$$\begin{aligned} -\int_S \mathbf{n} p dS &= -\mathbf{i} \rho_{\text{ж}} \omega^2 \int_W x dW - \mathbf{j} \rho_{\text{ж}} \omega^2 \int_W y dW + \mathbf{k} \rho_{\text{ж}} g \int_W dW = \\ &= -\rho_{\text{ж}} \omega^2 x_{\text{ц.м}} W \mathbf{i} - \rho_{\text{ж}} \omega^2 y_{\text{ц.м}} W \mathbf{j} + \rho_{\text{ж}} g W \mathbf{k} = -\rho_{\text{ж}} \omega^2 r_{\text{ц.м}} W \mathbf{r} + \rho_{\text{ж}} g W \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (5.79)$$

где  $x_{\text{ц.м}}, y_{\text{ц.м}}$  – координаты центра масс тела в прямоугольной системе координат.

Так как  $x_{\text{ц.м}} \mathbf{i} + y_{\text{ц.м}} \mathbf{j} = r_{\text{ц.м}} \mathbf{r}$ , где  $r_{\text{ц.м}}$  – координата центра масс тела в цилиндрической системе координат, то интеграл сил давления по поверхности тела примет вид

$$-\int_S \mathbf{n} p dS = -\rho_{\text{ж}} \omega^2 r_{\text{ц.м}} W \mathbf{r} + \rho_{\text{ж}} g W \mathbf{k}. \quad (5.80)$$

Первое слагаемое в правой части (5.80) представляет собой центростремительную силу  $\mathbf{F}_{\text{ц.с}}$ , второе – подъемную (Архимедову) силу  $\mathbf{F}_A$ , дейст-

вующую на тело. Подставляя (5.80), (5.79) в (5.75) и проектируя полученное уравнение на ось  $r$ , получим

$$F_r = \omega^2 r_{\text{ц.т}} W (\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{ж}}). \quad (5.81)$$

Аналогично получается проекция результирующей силы на ось  $z$

$$F_z = Wg (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{т}}). \quad (5.82)$$

Таким образом, если плотность тела больше плотности жидкости, то тело тонет и выносится на периферию сосуда. В противном случае тело всплывает и стремится к оси вращения. На этом физическом эффекте основан принцип действия центрифуг и сепараторов – устройств, предназначенных для разделения суспензий.

## 5.12. Контрольные вопросы

1. Запишите выражение основного закона гидростатики.
2. Дайте определение абсолютного, избыточного и вакуумметрического давления.
3. Дайте определение гидростатического, пьезометрического, вакуумметрического напора.
4. Напишите формулу для определения проекций силы давления жидкости, действующей на криволинейную поверхность.
5. Напишите формулу для определения величины силы давления жидкости, действующей на плоскую поверхность.
6. Напишите формулу для определения координаты центра давления на плоской поверхности.
7. Какова форма изобарических поверхностей жидкости в сосуде, движущемся равноускоренно?
8. Какова форма изобарических поверхностей жидкости во вращающемся с постоянной угловой скоростью сосуде?
9. Сформулируйте закон Архимеда.
10. Каков принцип действия центрифуг?

## ГЛАВА 6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТЕЙ

В технических приложениях зачастую приходится сталкиваться с ситуацией, когда исследование рабочих процессов на натурном объекте оказывается невозможным из-за больших материальных затрат или времени, потребного для выполнения испытаний. В этом случае испытания на натурном объекте заменяют исследованиями на моделях. Необходимость моделирования возникает также, когда требуемый результат не может быть получен теоретическим путем. При этом встает вопрос, как правильно смоделировать процесс и каким образом представить полученные результаты, чтобы они обладали общностью, а не только отражали результаты конкретных модельных исследований. Ответ на него дает теория подобия - учение о подобии явлений.

### 6.1. Основные положения теории подобия

Термин подобие заимствован из геометрии. Как известно, геометрически подобные фигуры, например треугольники, обладают тем свойством, что их соответственные углы равны, а сходственные стороны пропорциональны:

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)}; \quad \alpha_2^{(1)} = \alpha_2^{(2)}; \quad \alpha_3^{(1)} = \alpha_3^{(2)}; \quad \frac{l_1^{(1)}}{l_1^{(2)}} = \frac{l_2^{(1)}}{l_2^{(2)}} = \frac{l_3^{(1)}}{l_3^{(2)}} = c_l, \quad (6.1)$$

где  $\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, i = \overline{1,3}$  – соответственные углы первого и второго треугольника;  $l_i^{(1)}, l_i^{(2)}, i = \overline{1,3}$  – длины сходственных сторон первого и второго подобных треугольников;  $c_l$  – константа геометрического подобия.

В условие подобия (6.1) входят как безразмерные (углы), так и размерные (длины сторон) величины. Однако, если представить длины сторон в относительных единицах  $\tilde{l}_1^{(1)} = l_1^{(1)} / l_1^0, \quad \tilde{l}_2^{(1)} = l_2^{(1)} / l_1^0, \quad \tilde{l}_2^{(2)} = l_2^{(2)} / l_2^0$  и т. д., выбрав в качестве масштабов каждой фигуры сходственные величины, например длину первой стороны  $l_1^0 = l_1^{(1)}, \quad l_2^0 = l_1^{(2)}$ , то условие подобия будет содержать только безразмерные величины и заключаться в равенстве соответственных углов и сходственных размеров фигур. Действительно

$$\alpha_i^{(1)} = \alpha_i^{(2)}, \quad i = \overline{1,3}; \quad \tilde{l}_1^{(1)} = \tilde{l}_1^{(2)} = 1, \quad \tilde{l}_2^{(2)} = \frac{l_2^{(2)}}{l_1^{(2)}} = \frac{l_2^{(1)} c_l}{l_1^{(1)}} = \frac{l_2^{(1)}}{l_1^{(1)}} = \tilde{l}_2^{(1)}, \quad \tilde{l}_3^{(1)} = \tilde{l}_3^{(2)}. \quad (6.2)$$

Условия подобия могут быть распространены на любые физические явления, например, на поле скоростей при движении двух потоков жидкости – *кинематическое подобие*, на поле сил, вызывающих это движение – *динамическое подобие*, на поле температур и тепловых потоков – *тепловое подобие* и т. д. И в общем случае *подобие двух явлений означает подобие*

*полей одноименных физических величин*<sup>\*</sup>, определяющих эти явления. При этом сравнивать физические величины, описывающие подобные процессы, следует только в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени. *Сходственные точки пространства* двух подобных процессов имеют одинаковые численные значения координат, выраженные в относительных единицах. Аналогично, *сходственные моменты времени*, выраженные в относительных единицах, одинаковы.

Поля физических величин, определяющих какой-либо физический процесс, можно рассматривать, как решение дифференциальных уравнений, описывающих его. Но если в подобных процессах безразмерные значения однородных параметров в сходственных точках одинаковы, то и сами уравнения, будучи представленными в относительном виде, должны быть одинаковы. Более того, должны быть одинаковыми безразмерные условия однозначности (границные и начальные условия). Очевидно, что эти условия одинаковости накладывают ограничения на выбор масштабов физических параметров, описывающих анализируемый процесс. Рассмотрим более подробно данные ограничения на примере гидродинамического подобия.

**Подобие гидродинамических процессов.** Как известно, динамика процессов движения вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса (4.21)...(4.23). Преобразуем их к безразмерному виду<sup>\*\*</sup>, для чего выберем масштабы физических параметров  $L^0, u^0, t^0, p^0, f^0$  и перейдем к относительным переменным:

$$\tilde{x} = \frac{x}{L^0}, \tilde{y} = \frac{y}{L^0}, \tilde{z} = \frac{z}{L^0}, \tilde{u}_x = \frac{u_x}{u^0}, \tilde{u}_y = \frac{u_y}{u^0}, \tilde{u}_z = \frac{u_z}{u^0}, \tilde{p} = \frac{p}{p^0}, \tilde{f} = \frac{f}{f^0}, \tilde{t} = \frac{t}{t^0}. \quad (6.3)$$

Выразив из (6.3) размерные переменные через безразмерные и масштабы, подставим их в уравнение (4.21):

$$\begin{aligned} \frac{u^0}{t^0} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{t}} + \frac{(u^0)^2}{L^0} \left( \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_y \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} \right) &= f^0 \tilde{f}_x - \\ - \frac{p^0}{\rho L^0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\nu u^0}{(L^0)^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}^2} \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4) еще не является безразмерным, так как перед каждым членом стоит размерный комплекс, составленный из масштабов переменных и констант (в данном случае  $\rho$  и  $\nu$ ) задачи. Для приведения к безраз-

<sup>\*</sup> То есть равенство однородных физических величин, выраженных в относительном (безразмерном) виде.

<sup>\*\*</sup> Проделаем эту операцию, в качестве примера, только для первого уравнения, то есть для проекции уравнения на ось  $x$ .

мерному виду поделим обе части уравнения на коэффициент при конвективном члене  $(u^0)^2 / L^0$ :

$$\begin{aligned} \frac{L^0}{u^0 t^0} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_y \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}} &= \frac{f^0 L^0}{(u^0)^2} \tilde{f}_x - \\ - \frac{p^0}{\rho(u^0)^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\nu}{u^0 L^0} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tilde{z}^2} \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Здесь все члены уравнения уже безразмерны, включая и комплексы, стоящие перед соответствующими членами уравнения (6.5). Эти комплексы называют *числами подобия*. Числам подобия принято присваивать имена собственные по фамилиям выдающихся ученых, внесших существенный вклад в данную отрасль знаний. Числа подобия, сформированные при анализе уравнения движения, называются:

- число Фруда

$$Fr = \frac{(u^0)^2}{f^0 L^0}; \quad (6.6)$$

- число Эйлера

$$Eu = \frac{p_0}{\rho(u^0)^2}; \quad (6.7)$$

- число Рейнольдса

$$Re = \frac{u^0 L^0}{\nu}; \quad (6.8)$$

- число Струхала (гомохронности)<sup>\*</sup>

$$Sh = \frac{L^0}{u^0 t^0}. \quad (6.9)$$

Таким образом, два гидродинамических процесса будут подобными, а описывающие их уравнения, представленные в относительных переменных, будут одинаковыми, если будут одинаковыми соответствующие числа подобия, то есть:

$$Fr = \text{idem}; \quad Eu = \text{idem}; \quad Re = \text{idem}; \quad Sh = \text{idem}. \quad (6.10)$$

<sup>\*</sup> Число Струхала, характеризующее нестационарность течения, обычно используется для описания периодических процессов. В этом случае оно записывается в виде

$Sh = \frac{u}{\omega l_1}$ , где  $\omega$  - характерная частота изменения параметров течения. Для описания

непериодических процессов многими авторами применяется число  $Ho = 1/Sh = u^0 t^0 / L^0$ , называемое числом гомохронности.

Обратимся к условиям однозначности задачи. Пусть мы рассматриваем стационарное течение несжимаемой жидкости в канале и во входном его сечении задана величина расхода с равномерным распределением скорости. Тогда краевое условие в начальном сечении может быть записано в виде

$$Re = Re_{bx} = \frac{u_{bx} d_{bx}}{\nu}; \quad Fr = Fr_{bx} = \frac{u_{bx}^2}{gd_{bx}}. \quad (6.11)$$

Здесь в качестве масштабов физических переменных задачи приняты:  $u^0 = u_{bx}$  – скорость в начальном сечении канала в качестве масштаба скорости;  $L^0 = d_{bx}$  – диаметр канала в его начальном сечении в качестве масштаба линейного размера области течения;  $f^0 = g$  – ускорение свободного падения в качестве масштаба объемной силы. Как видим числа Рейнольдса и Фруда могут быть заданы исходя из краевых условий и, сформированные таким образом, однозначно определяют решение задачи для остальной области течения. Поэтому данные числа называются *определяющими* или *критериями подобия*. При описанных выше краевых условиях перепад давлений  $\Delta p$  между входом и выходом канала является зависимой переменной, то есть находятся из решения уравнений. Поэтому, если число Эйлера определить, как  $Eu = \Delta p / (\rho u_{bx}^2)$ , то равенство этих чисел в двух процессах будет обеспечено автоматически. Следовательно, число  $Eu$  в данном случае не является определяющим числом подобия. Таким образом, равенство критериев подобия автоматически обеспечивает и равенство соответствующих чисел подобия при надлежащем выборе масштабов переменных задачи.

Краевые условия на боковых стенках канала задаются в виде условия «прилипания» жидкости  $u_{ct} = 0$ . Использовать данное краевое условие для формирования определяющего числа подобия (задав, например,  $Re = 0$ ) нельзя, так как будут обнулены соответствующие члены уравнения (6.5), и решение задачи становится невозможным.

Таким образом, в рассмотренной задаче определяющим, то есть критериями подобия являются только числа  $Re$  и  $Fr$ , определенные из краевого условия во входном сечении канала. Задание этих чисел по соотношению (6.11) обеспечит подобие процессов при моделировании.

Заметим, что в зависимости от постановки задачи определяющие числа могут становиться неопределенными и наоборот<sup>\*</sup>.

Таким образом, обобщая изложенное выше, можем сказать:

<sup>\*</sup> Например, если в качестве краевых условий задан не расход, а перепад давлений на концах канала, то определяющим будет число Эйлера, а число Рейнольдса будет следовать из решения задачи.

1. Подобными могут быть физические явления только качественно одинаковые, то есть такие, которые описываются уравнениями, одинаковыми как по форме, так и по содержанию.

Если же математическое описание каких-либо двух явлений одинаково по форме, но различно по физическому содержанию, то такие явления называются *аналогичными*. Аналогичными могут быть, например, процессы теплопроводности, электропроводности и диффузии.

2. Обязательным условием подобия физических процессов является геометрическое подобие.

3. При анализе подобных явлений сопоставлять между собой можно только однородные<sup>\*</sup> величины и лишь в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени.

4. Подобие двух физических явлений означает подобие всех величин, характеризующих рассматриваемые явления. Это значит, что в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени любая величина  $\varphi^{(1)}$  первого явления пропорциональна однородной с ней величине  $\varphi^{(2)}$  второго явления, то есть

$$\varphi^{(2)} = c_{\varphi} \varphi^{(1)} \text{ или } \tilde{\varphi}^{(2)} = \tilde{c}_{\varphi} \tilde{\varphi}^{(1)}. \quad (6.12)$$

Коэффициент пропорциональности  $c_{\varphi}$  называется *константой (постоянной) подобия*. При этом каждая физическая величина  $\varphi$  имеет свою постоянную подобия  $c_{\varphi}$ , численно отличную от других. Ни от координат, ни от времени  $c_{\varphi}$  не зависит.

В качестве масштаба  $\varphi^0$  физической величины в каждом из сравниваемых явлений следует выбирать анализируемые физические величины  $\varphi$  в сходственных точках пространства в сходственные моменты времени.

Основные положения теории подобия можно сформулировать в виде трех теорем.

**Первая теорема подобия.** *Подобные между собой процессы имеют одинаковые числа подобия.*

**Вторая теорема подобия.** *Зависимость между переменными, характеризующими какой-либо процесс, может быть представлена в виде зависимости между числами подобия  $K_1, K_2, \dots, K_n$ :*

$$f(K_1, K_2, \dots, K_n) = 0. \quad (6.13)$$

Зависимость вида (6.13) называется *уравнением подобия*. Так как для всех подобных между собой процессов числа подобия сохраняют одно и то же значение, то уравнения подобия для них также одинаковы. Следовательно, представляя результаты какого-либо опыта в числах подобия, мы

---

\* Однородными называются такие величины, которые имеют один и тот же физический смысл и одинаковую размерность.

получим обобщенную зависимость, которая справедлива для всех подобных между собой процессов.

**Третья теорема подобия.** *Подобны те процессы, условия однозначности которых подобны, а числа подобия, составленные из величин, входящих в условия однозначности, имеют одинаковое численное значение.*

Итак, теория подобия позволяет, не интегрируя дифференциальных уравнений, получить из них числа подобия и, используя опытные данные, установить уравнения подобия, которые справедливы, для всех подобных между собой процессов.

Однако необходимо помнить, что такие обобщенные зависимости ограничены условиями подобия, и из них нельзя делать заключения, выходящие за пределы этих ограничений. Общего решения теория подобия не дает, она позволяет лишь обобщить опытные данные.

При практическом моделировании полное подобие удается выполнить не всегда. Рассмотрим, например, условия подобия (6.11). Для выполнения гидродинамического подобия двух потоков необходимо выполнение равенства чисел  $Re$  и  $Fr$ .

Из условия  $Fr_1 = Fr_2$  следует

$$\frac{(u_{bx1})^2}{gd_{bx1}} = \frac{(u_{bx2})^2}{gd_{bx2}} \text{ или } \frac{u_{bx2}}{u_{bx1}} = \sqrt{\frac{d_{bx2}}{d_{bx1}}}, \quad (6.14)$$

то есть масштаб скорости пропорционален корню из масштаба линейного размера. Или скорость в модели  $u_{bx2}$  должна быть меньше скорости в натуре  $u_{bx1}$  в  $\sqrt{d_{bx2} / d_{bx1}}$  раз.

С другой стороны из условия  $Re_1 = Re_2$  получаем

$$\frac{u_{bx1}d_{bx1}}{v_1} = \frac{u_{bx2}d_{bx2}}{v_2} \text{ или } \frac{u_{bx2}}{u_{bx1}} = \frac{v_2}{v_1} \frac{d_{bx1}}{d_{bx2}}. \quad (6.15)$$

Из (6.15) вытекает, что если моделирование производится на одной и той же жидкости  $v_1 = v_2$ , то скорость в модели должна быть меньше скорости в натуре в  $d_{bx2} / d_{bx1}$  раз.

Как видим, выполнение одновременно двух условий (6.11) невозможно. В этом случае проводится дополнительный анализ и выявляется преобладающее влияние того или иного критерия подобия на результат моделирования. Практикой исследований установлено, что течения со свободной поверхностью в поле силы тяжести формируются, в основном, под влиянием этой силы и здесь моделирование должно выполняться по критерию Фруда. При течениях в закрытых каналах, без образования свободной поверхности, определяющим является критерий Рейнольдса.

Для выявления степени влияния критерия подобия на результат моделирования полезно представлять их физический смысл. Выясним этот смысл для чисел  $Fr$ ,  $Eu$ ,  $Re$ ,  $Sh$ . Они получены путем деления коэффициен-

тов при отдельных членах уравнения, которые представляют собой относенные к единице массы силы различной природы, на коэффициент при конвективной силе инерции. Вспоминая физический смысл членов уравнения Навье-Стокса, приходим к следующему выводу. Число Фруда  $Fr = \left(\frac{u^0}{L}\right)^2 / \left(\frac{g}{\rho}\right)$  характеризует отношение силы инерции к силе тяжести; число  $Re = u^0 L / \nu$  – отношение сил инерции к силе вязкости; число  $Eu = p^0 / \left(\rho \left(\frac{u^0}{L}\right)^2\right)$  – отношение силы давления к силе инерции; число  $Sh = L / \left(\frac{u^0 t}{L}\right)$  – отношение локальной силы инерции к конвективной. Эти результаты еще раз подтверждают то, что рассматриваемые числа подобия являются числами динамического подобия, так как все они представляют собой отношение различных сил.

## 6.2. Основные положения теории анализа размерностей

Иногда изучаемое явление настолько сложно, что для него невозможно составить полную систему уравнений. В этом случае общий вид условий подобия может быть найден при помощи метода анализа размерностей. Рассмотрим основные понятия данной теории.

*Размерными* называются величины, численные значения которых зависят от системы единиц измерения. Примеры размерных величин: длина, время, энергия, момент силы и т. д.

*Безразмерными* называются величины, численные значения которых не зависят от системы единиц измерения. Примеры безразмерных величин: отношение двух длин, геометрические углы\*, отношение квадрата длины к площади, отношение энергии к моменту силы и т. д.

Единицы измерения бывают *основными* и *производными*. Производные единицы выражаются определенным образом через основные. Именно наличие производных единиц позволяет компоновать безразмерные комплексы – числа подобия. Количество и вид основных единиц зависит от системы единиц измерения. В системе СИ за основные единицы измерения приняты:  $l$  – метр,  $t$  – секунда,  $m$  – килограмм-массы,  $k$  – градус Кельвина и т. д.

*Размерностью* называется выражение производной единицы измерения через основные. Размерность будем записывать символически в виде формулы, в которой символ единицы массы обозначается  $M$ , символ единицы длины –  $L$ , символ единицы времени –  $T$ , символ единицы температуры –  $K$ . Размерность физической величины обозначается символом этой вели-

---

\* Фактически углы имеют размерность – рад, градус. Однако в научных и технических исследованиях принято измерять углы в рад, поэтому можно считать угол безразмерной величиной.

чины, заключенным в квадратные скобки. Например, для размерности силы  $F$  будем иметь

$$[F] = M L T^{-2}. \quad (6.16)$$

Теория размерностей основывается на следующих положениях.

1. Любое математическое уравнение, описывающее изучаемый процесс, должно быть однородным по размерностям, то есть физические величины должны входить в это уравнение таким образом, чтобы все члены уравнения имели одинаковую размерность.

2. Производные единицы измерения выражаются через основные в виде их произведения в соответствующих степенях, то есть в виде зависимости типа (6.16).

В теории размерностей доказывается следующая теорема, которая называется  *$\pi$ -теоремой* и звучит следующим образом. *Выражающая некоторый физический закон функциональная связь между  $n = k + s$  размерными величинами  $f(l, t, m, \dots, q, v, a, h, \dots, w)$ , из которых  $k$  величин имеют независимые размерности  $l, t, m, \dots$ , может быть представлена в виде связи между  $n - k = s$  безразмерными комплексами  $\pi_q, \pi_v, \dots, \pi_w$ , каждый из которых является комбинацией из  $k + 1$  размерных величин.*

Рассмотрим основные рекомендации по применению  $\pi$ -теоремы при анализе задач механики жидкости и газа.

Первым этапом анализа является составление полного перечня параметров, определяющих исследуемый процесс. Это одна из наиболее сложных составляющих анализа. Задача облегчается, если известно математическое описание процесса, хотя бы в самом общем виде. Однако в ряде случаев приходится руководствоваться просто общими физическими соображениями о сути исследуемого явления, использовать опыт анализа размерностей аналогичных задач.

В общем случае размерные физические величины, определяющие процесс, можно подразделить на три группы:

- геометрические параметры, характеризующие размеры и форму области течения —  $l_1, l_2, l_3, \dots$ ;
- кинематические, динамические и энергетические характеристики потока, например, скорость  $u$  (или расход  $Q$ ), давление  $p$  или перепад давлений  $\Delta p$  (или градиент давления  $d p/d t$ ), касательное напряжение  $\tau$ , сила сопротивления  $F_c$ , объемная сила (ускорение свободного падения  $g$ ); тепловой поток  $q$  (или коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ ), температура  $\Theta$  (разность температур  $\Delta\theta$ ) и т. д.;
- физические характеристики свойств жидкости и газа, например, плотность  $\rho$ , коэффициент динамической вязкости  $\mu$ , модуль упругости  $E$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ , удельная теплоемкость  $c_p$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda$  и т. д.

В результате определяется количество существенных для процесса физических величин  $n$ . Приведенный выше перечень является не обязательным и не полным. В каждой конкретной задаче он должен формироваться на основании анализа физической сути исследуемого процесса.

Число основных размерностей в задачах механики жидкости и газа принимается равным трем (размерности длины, массы, времени). Если исследуются тепловые характеристики течения, то добавляется четвертая размерность – Кельвин. Таким образом,  $k = 3$  или  $k = 4$ . В соответствии с этим, за величины с независимыми размерностями обычно принимаются, например, характерная длина  $l_1$ , скорость  $u$ , плотность  $\rho$ , температура  $\theta$ .

Определяется количество безразмерных комплексов  $s = n - k$ .

Базируясь на каждой из «оставшихся»  $s$  переменных задачи с зависимыми размерностями, формируют безразмерные комплексы  $\pi_i$  ( $i = 1 \dots s$ ).

Например, на базе величины коэффициента динамической вязкости получаем комплекс

$$\pi_\mu = \frac{\mu}{l_1^{a_\mu} u^{b_\mu} \rho^{c_\mu} \theta^{d_\mu}}. \quad (6.17)$$

Входящие в выражения типа (6.17) показатели степени  $a_\mu, b_\mu, c_\mu, d_\mu$  определяются из условия нулевой размерности у всего комплекса  $\pi_i$ . Например, для комплекса  $\pi_\mu$  имеем

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}; \quad [l] = L; \quad [u] = LT^{-1}; \quad [\rho] = ML^{-3}; \quad [\theta] = K. \quad (6.18)$$

С учетом (6.18) условие нулевой размерности комплекса  $\pi_\mu$  примет вид

$$ML^{-1}T^{-1}L^{-a_\mu} (LT^{-1})^{-b_\mu} (ML^{-3})^{-c_\mu} K^{-d_\mu} = LT^0 M^0 K^0. \quad (6.19)$$

Приводя в левой части (6.19) подобные члены и приравнивая степени при одинаковых сомножителях в левой и правой частях, получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} -1 - a_\mu - b_\mu + 3c_\mu = 0; \\ -1 + b_\mu = 0; \\ 1 - c_\mu = 0; \\ d_\mu = 0. \end{cases}. \quad (6.20)$$

Отсюда получаем:  $a_\mu = 1$ ;  $b_\mu = 1$ ;  $c_\mu = 1$ ;  $d_\mu = 0$ . Тогда безразмерный комплекс примет вид

$$\pi_\mu = \frac{\mu}{l_1 u \rho}. \quad (6.21)$$

Аналогично получаются выражения для других безразмерных комплексов, например,

$$\pi_{l_2} = \frac{l_2}{l_1}, \quad \pi_p = \frac{\Delta p}{\rho u^2}, \quad \pi_\tau = \frac{\tau}{\rho u^2}, \quad \pi_t = \frac{tu}{l}, \quad \pi_g = \frac{l_1 g}{u^2}, \quad \pi_\sigma = \frac{\sigma}{l_1 \rho u^2}, \quad \pi_\varepsilon = \frac{E}{\rho u^2}. \quad (6.22)$$

Безразмерные комплексы типа  $\pi_{l_2}$ , очевидно, выражают безразмерную геометрию области течения. Анализируя выражения для других комплексов, замечаем, что  $\pi_\mu$  есть величина обратная числу Рейнольдса,  $\pi_g$  – обратная числу Фруда,  $\pi_t$  – обратная числу

Струхала,  $\pi_p$  – это число Эйлера. Параметр  $\pi_\tau$  выражает в безразмерном виде напряжения вязкого трения; величина  $C_f = 2\pi_\tau$  в гидрогазодинамике называется коэффициентом трения. Величины, обратные параметрам  $\pi_\sigma$  и  $\pi_\epsilon$  называются числами Вебера We и Коши Ca соответственно, они характеризуют действие на жидкость сил поверхностного натяжения и упругости (сжимаемости). Перечисленные числа являются основными числами гидродинамического подобия.

Таким образом, рассматривая, например, гидродинамическую задачу мы можем сказать, что между параметрами потока существует функциональная связь, которая в обобщенном (безразмерном) виде может быть представлена следующим образом

$$\varphi(l_i/l_1, Eu, C_f, Fr, Re, We, Ca, Sh) = 0. \quad (6.23)$$

Любой из безразмерных параметров в (6.23) может рассматриваться, как зависимый, а остальные, как аргументы. Чаще всего искомыми параметрами являются  $C_f, Eu$ .

Метод анализа размерностей не позволяет установить вид самой зависимости (6.23), однако часто знание даже только перечня безразмерных параметров, определяющих протекание процесса, и их вида весьма полезно для теоретического анализа и для рациональной постановки эксперимента.

Впрочем, в некоторых частных случаях теория анализа размерностей позволяет установить и вид функциональной связи между параметрами течения. Рассмотрим, например, течение жидкости через водослив, рис. 6.1.

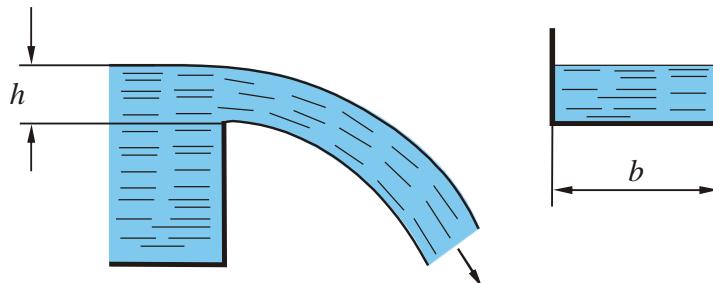


Рис. 6.1. Течение жидкости через водослив

Анализируя физическую картину процесса, можно сказать, что массовый расход жидкости  $G$  при фиксированной форме лотка будет определяться плотностью жидкости  $\rho$ , ускорением свободного падения  $g$ , высотой слоя (напором) жидкости  $h$ .

$$G = f(\rho, g, h). \quad (6.24)$$

Имеем четыре независимых между собой размерных параметра. Основных размерностей в данной задаче три: кг, с, м. Следовательно, можем сформировать только один безразмерный комплекс, величина которого не зависит от принятой системы единиц и, следовательно, является константой. Таким образом, можем записать

$$\frac{G}{\rho g^{1/2} h^{5/2}} = C. \quad (6.25)$$

Отсюда с точностью до константы  $C$  находим вид функции для расчета расхода жидкости при ее течении через водослив

$$G = C \rho \sqrt{gh^5}. \quad (6.26)$$

Величина константы  $C$  может быть определена из эксперимента.

### 6.3. Контрольные вопросы

1. Дайте определение сходственных точек пространства и сходственных моментов времени.
2. Дайте определение подобия полей физических величин.
3. Поясните понятия числа подобия и критерия подобия.
4. Перечислите основные числа гидродинамического подобия и поясните их физический смысл.
5. Сформулируйте основные теоремы теории подобия.
6. Укажите основные положения теории анализа размерностей.
7. Сформулируйте  $\pi$ -теорему теории размерностей.

## ГЛАВА 7. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ЩЕЛЯХ И УЗКИХ КАНАЛАХ

### 7.1. Ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в каналах

Такие течения реализуются при движении очень вязкой жидкости или при течении в тонких капиллярах, с малыми скоростями. Рассмотрим ламинарное течение жидкости в цилиндрической трубе произвольной формы, рис. 7.1. Направим ось  $z$  вдоль оси трубы и будем считать трубу бесконечно длинной.

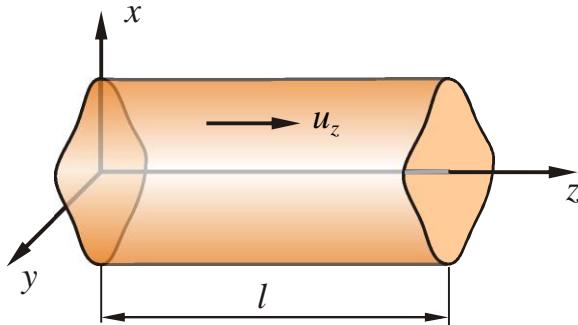


Рис. 7.1. Течение в цилиндрической трубе

Так как труба цилиндрическая, то поперечные компоненты скорости равны нулю  $u_x = 0$ ,  $u_y = 0$ . Пренебрегая действием объемных сил, уравнения Навье-Стокса (4.21)...(4.23) приводим к виду

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \end{cases} \quad (7.1)$$

Из уравнения неразрывности (4.12) следует

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (7.2)$$

Из (7.2) видно, что проекция скорости  $u_z$  является функцией только  $x$  и  $y$ , а из первых двух уравнений (7.1) – что  $p$  – функция только  $z$ . Вследствие этого система (7.1) и (7.2) сводится к одному уравнению

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = \frac{dp}{dz}. \quad (7.3)$$

Левая часть (7.3) зависит только от  $x$  и  $y$ , а правая – только от  $z$ . Это может быть только в случае постоянства левой и правой частей. Поэтому можем записать

$$\frac{dp}{dz} = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l}, \quad (7.4)$$

где  $\Delta p$  – постоянное по длине трубы падение давления на участке  $l$ .

Таким образом, уравнение (7.3) сводится к линейному уравнению в частных производных второго порядка

$$\nabla^2 u_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}, \quad (7.5)$$

которое должно быть решено при граничном условии обращения в нуль скорости  $u_z$  на контуре нормального к оси сечения, а также дополнительного условия, задающего падение давления  $\Delta p$  на длине  $l$ .

Рассмотрим частные случаи интегрирования уравнения (7.5).

**Плоское движение между двумя параллельными плоскостями**  $y = \pm h$ . В этом случае координата  $x$  исчезает, и задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 u_z}{dy^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}. \quad (7.6)$$

Его решение при граничных условиях  $u_z = 0$  при  $y = \pm h$  имеет вид

$$u_z = \frac{\Delta p h^2}{2\mu l} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right]. \quad (7.7)$$

То есть распределение скорости представляет собой параболу. Максимальная скорость достигается в плоскости симметрии потока ( $y = 0$ ) и равна

$$u_{z \max} = \frac{\Delta p h^2}{2\mu l}. \quad (7.8)$$

Определим объемный расход, отнесенный к единице ширины потока

$$Q = \int_{-h}^h u_z dy = \frac{2}{3} \frac{\Delta p h^3}{\mu l}, \quad (7.9)$$

откуда получаем среднерасходную скорость

$$u_{z \text{ср}} = \frac{Q}{2h} = \frac{1}{3} \frac{\Delta p h^2}{\mu l} = \frac{2}{3} u_{z \max}. \quad (7.10)$$

Анализируя выражение (7.9) необходимо обратить внимание, во-первых, на существенную зависимость расхода от высоты щели – пропорционально кубу  $h$ , во-вторых, – расход пропорционален перепаду давления, а не корню из перепада, как в случае идеальной жидкости, что следует из уравнения Бернулли.

**Движение жидкости в круглой трубе.** Течение в рассматриваемом случае обладает осевой симметрией. Поэтому целесообразно использовать цилиндрическую систему координат с осью  $Oz$ , совпадающей с осью трубы и осью  $Or$ , направленной по ее радиусу. Для этого необходимо найти

выражение дифференциального оператора Лапласа (4.25) в новой системе координат, учитывая осевую симметрию.

Так как  $r^2 = x^2 + y^2$ , то

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{r}{x}. \quad (7.11)$$

По правилам дифференцирования сложных функций с учетом (7.11) имеем

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_z}{\partial x}(r(x, y)) = \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{x}{r}. \quad (7.12)$$

Находим вторую производную по координате  $x$ , учитывая (7.11) и (7.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{x}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{x}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{x}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} \right) \frac{x}{r} = \\ &= \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

Аналогично находится вторая производная по координате  $y$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}.$$

Тогда для оператора Лапласа в рассматриваемом случае осевой симметрии и независимости скорости от координаты  $z$  имеем выражение

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (7.13)$$

С учетом (7.13) уравнение (7.5) для рассматриваемого случая примет вид

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = -\frac{\Delta p}{\mu l}. \quad (7.14)$$

Дважды интегрируя по  $r$ , находим

$$u_z = \frac{\Delta p}{\mu l} \left( \frac{1}{4} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \right). \quad (7.15)$$

Постоянные интегрирования определяем из граничных условий

$$u_z = 0 \text{ при } r = R, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0, \quad (7.16)$$

где  $R$  – радиус трубы. С использованием (7.16) находим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{R^2}{4}. \quad (7.17)$$

Таким образом, для рассматриваемого случая распределение скорости в поперечном сечении трубы примет вид

$$u_z = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (7.18)$$

Максимальная скорость достигается на оси канала (при  $r = 0$ ) и равна

$$u_{z \max} = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l}. \quad (7.19)$$

Объемный расход определяется, как

$$Q = \pi \int_0^R u_z r dr = \frac{\pi \Delta p R^2}{2\mu l} \int_0^R \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] r dr = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu l}. \quad (7.20)$$

Формула (7.20) выражает закон *Пуазейля*: при установившемся ламинарном движении несжимаемой жидкости сквозь цилиндрическую круглую трубу объемный расход пропорционален перепаду давления на единицу длины трубы и четвертой степени ее радиуса.

Как видим, в данном случае зависимость расхода от размера поперечного сечения канала еще существеннее, чем при плоском ламинарном течении – расход пропорционален четвертой степени радиуса (диаметра) трубы. Связь расхода с перепадом давлений, как и в предыдущем случае, линейная.

Найдем среднерасходную скорость течения

$$u_{z \text{ср}} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta p R^2}{8\mu l} = \frac{u_{z \max}}{2}. \quad (7.21)$$

Как видно, максимальная скорость в два раза превышает среднерасходную.

**Течение Куэтта.** Данным термином называют плоское безградиентное течение вязкой жидкости, вызванное перемещением пластин, рис. 7.2.

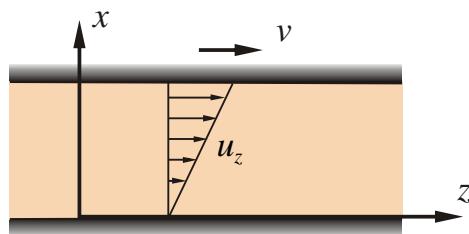


Рис. 7.2. Течение Куэтта

Уравнения движения жидкости (7.1) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0. \quad (7.22)$$

Решение (7.22) при граничных условиях  $u_z = 0$  при  $x = 0$ ,  $u_z = v$  при  $x = h$  (где  $v$  – относительная скорость перемещения верхней пластины) представляет собой линейную функцию

$$u_z = v \frac{x}{h}. \quad (7.23)$$

Из (7.23) видно, что данный вид течения характеризуется постоянной величиной касательных напряжений по всей толщине зазора между пластинами

$$\tau_0 = \mu \frac{du_z}{dx} = \mu \frac{v}{h}. \quad (7.24)$$

Величина расхода жидкости, приходящаяся на единицу ширины зазора, вызванная перемещением пластин, будет равна

$$Q = \int_0^h u_z dx = \frac{v}{h} \int_0^h x dx = \frac{vh}{2}. \quad (7.25)$$

## 7.2. Течение жидкости в тонком слое переменной толщины

Рассмотрим движение жидкости в гидродинамическом слое смазки. Особенностью такого движения жидкости является малость толщины слоя по сравнению с размерами граничных поверхностей. Это дает возможность считать поверхности слабоискривленными и рассматривать гидродинамическую задачу в декартовой системе координат. Рассмотрим две слабоискривленные и приблизительно параллельные поверхности, между которыми движется слой жидкости под действием градиента давления и перемещения поверхностей, рис. 7.3.

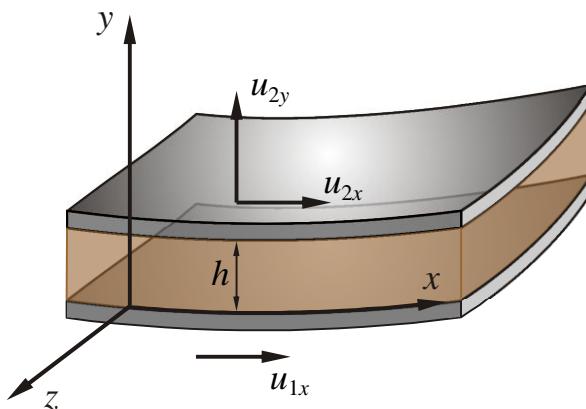


Рис. 7.3. Схема расположения поверхностей смазывающего слоя

Движение считаем установившимся. Ось \$x\$ системы координат расположим коллинеарно вектору скорости первой поверхности. Тогда \$u = u\_{1x}\$, \$u\_{1y} = 0\$. Проекции скорости второй поверхности на оси \$x\$ и \$y\$ в общем случае отличны от нуля, \$u\_{2x} \neq 0\$, \$u\_{2y} \neq 0\$. Так как по предположению толщина слоя все время остается малой, то отношение \$u\_{2y}/u\_{1x}\$ также является малой величиной. Поэтому для проекций скорости жидкости в любой точке слоя \$u\_y \ll u\_x\$. Кроме того, вследствие малости \$h\$, производные скорости жидкости

сти по оси  $y$  значительно превосходят производные по оси  $x$  для любой компоненты. То есть

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} \gg \frac{\partial u_i}{\partial x} \sim \frac{\partial u_i}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \sim \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \quad (i = x, y, z). \quad (7.26)$$

На основании этих рассуждений можем пренебречь в уравнениях Навье-Стокса не только инерционными  $\partial u_i / \partial x$ ,  $\partial u_i / \partial y$ ,  $\partial u_i / \partial z$  ( $i = x, y, z$ )\*, но и вязкими членами, содержащими производные по  $x$  и  $z$ . Так как движение считаем пространственным, в уравнении неразрывности должны быть сохранены все три члена. Тогда уравнения движения жидкости в щели примут вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}; \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (7.28)$$

Из системы (7.27), (7.28) сразу может быть найдено распределение скорости по толщине слоя. Поскольку, в соответствии со вторым уравнением (7.27) давление по толщине слоя постоянно, то первое и третье уравнения могут быть проинтегрированы по этой координате. Так как эти уравнения по форме одинаковы, то решение запишем для первого из них

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (7.29)$$

Константы интегрирования находятся из граничных условий.

Рассмотрим, например, частный случай, когда границы щели неподвижны. Тогда граничные условия имеют вид  $u_x = 0$  при  $y = 0$  и  $y = h$ . Подставляя граничные условия в (7.29) находим

$$C_1 = -\frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad C_2 = 0. \quad (7.30)$$

Закон распределения скорости для данного случая принимает вид

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y - h). \quad (7.31)$$

**Плоский клиновидный слой смазки.** Рассмотрим плоское движение жидкости в клиновидном зазоре, рис. 7.4.

\* Конвективные члены исчезают вследствие малости производных либо скоростей, так как они представляют собой произведение этих величин.

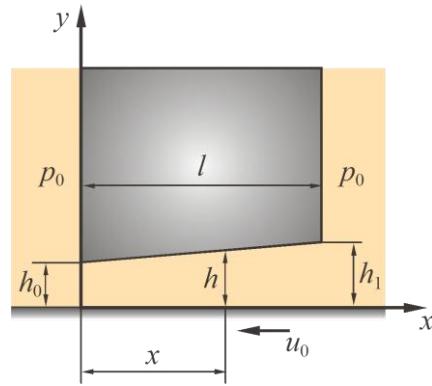


Рис. 7.4. Схема движения жидкости в клиновом слое

Пусть нижняя пластина клина движется с постоянной скоростью  $u_0$  в направлении отрицательной оси  $x$ . Пространство слева и справа от верхнего клина считаем заполненным жидкостью, находящимся под одинаковым давлением  $p_0$ . Распределение скорости в слое смазки описывается соотношением (7.29). Найдем постоянные интегрирования для наших граничных условий  $u_x = -u_0$  при  $y = 0$  и  $u_x = 0$  при  $y = h$ :

$$C_1 = \frac{u_0}{h} - \frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad C_2 = -u_0. \quad (7.32)$$

Подставляя (7.32) в (7.29), получаем

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) - u_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right). \quad (7.33)$$

Распределение давления по длине слоя  $p(x)$  найдем с использованием уравнения неразрывности следующим образом. Проинтегрируем уравнение неразрывности по  $y$

$$\int_0^h \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dy = 0. \quad (7.34)$$

Интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция равна нулю. Границные условия для  $u_y$  и давления имеют вид:

$$u_y = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = h; \quad p = p_0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l. \quad (7.35)$$

С учетом граничных условий  $\int_0^h \frac{\partial u_y}{\partial y} dy = u_y|_0^h = 0$ . Тогда (7.34) запишется в виде

$$\int_0^h \frac{\partial u_x}{\partial x} dy = 0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u_x dy = 0. \quad (7.36)$$

Подставив в (7.36) (7.33) и выполнив интегрирование, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u_0 h}{2} \right) = 0. \quad (7.37)$$

Из (7.37) следует, что выражение в скобках не зависит от  $x$ . Так как это выражение не зависит и от  $y$ , то оно является константой. С учетом этого замечания, запишем (7.37) в виде

$$-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u_0 h}{2} = \frac{u_0 h_*}{2} \text{ или } \frac{\partial p}{\partial x} = -6\mu u_0 \frac{h - h_*}{h^3}. \quad (7.38)$$

Постоянная интегрирования  $h_*$  имеет смысл толщины слоя, при которой  $\partial p / \partial x = 0$ , то есть давление достигает экстремальной величины. Можно показать, что это максимум.

Для удобства интегрирования уравнения (7.38) перейдем в производной от переменной  $x$  к переменной  $h$ . Толщина зазора зависит от продольной координаты следующим образом (см. рис. 7.4)

$$h = h_0 + \frac{h_l - h_0}{l} x = h_0 \left( 1 + k \frac{x}{l} \right), \quad (7.39)$$

где  $k = (h_l - h_0)/h_0$  - геометрический параметр клиновидности зазора. С учетом (7.39) можем записать

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = k \frac{h_0}{l} \frac{\partial p}{\partial h}. \quad (7.40)$$

С учетом (7.40) уравнение (7.38) примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial h} = -\frac{6\mu u_0 l}{kh_0} \left( \frac{1}{h^2} - \frac{h_*}{h^3} \right). \quad (7.41)$$

Интегрируя, получим

$$p = \frac{6\mu u_0 l}{kh_0} \left( \frac{1}{h} - \frac{h_*}{2h^2} \right) + C_0. \quad (7.42)$$

Для определения постоянных  $h_*$  и  $C_0$  используем граничные условия (7.35). После преобразований получаем

$$h_* = 2h_0 \frac{1+k}{2+k}, \quad C_0 = p_0 - \frac{6\mu u_0 l}{kh_0^2} \frac{1}{2+k}. \quad (7.43)$$

Теперь закон распределения давления по длине зазора выразится формулой

$$p = p_0 + \frac{6\mu u_0 l}{kh_0^2} \left[ \frac{l}{l+kx} - \frac{1}{2+k} - \frac{1+k}{2+k} \frac{l^2}{(l+kx)^2} \right]. \quad (7.44)$$

График распределения давления по длине зазора в относительных координатах  $\bar{p} = (p - p_0) / \frac{6\mu u_0 l}{kh_0^2} = f(x/l)$  показан на рис. 7.5 для  $k = 1,2$ .

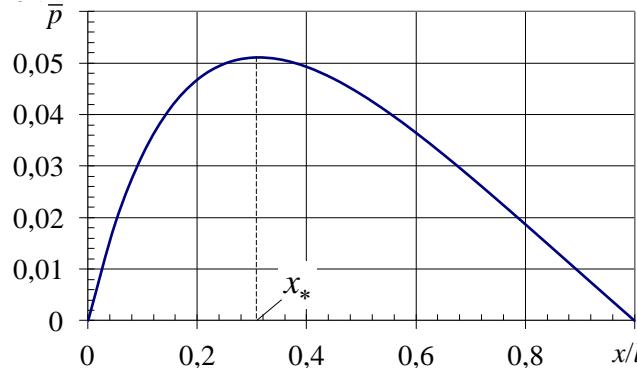


Рис. 7.5. Распределение давления по длине смазочного зазора

Максимум давления достигается в точке  $x_* = l/(2+k)$ , что соответствует толщине зазора  $h_*$ .

Вычислим силы давления  $P$  и трения  $F_\mu$ , действующие в зазоре и приходящиеся на единицу его ширины. Сила  $P$  найдется, как интеграл от избыточного давления:

$$P = \int_0^l (p - p_0) dx = \frac{6\mu u_0 l^2}{k^2 h_0^2} \left[ \ln(1+k) - \frac{2k}{2+k} \right]. \quad (7.45)$$

Как видим, сила давления обратно пропорциональна квадрату толщины зазора. Поэтому при возрастании прижимающей нагрузки клина сила давления возрастает при уменьшении зазора до момента компенсации нагрузки. Тем самым предотвращается выдавливание смазочного слоя из зазора.

Для отыскания силы трения вычислим касательное вязкостное напряжение, используя распределение скорости (7.33)

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{u_0}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7.46)$$

Подставив в (7.46) выражение для  $h$  из (7.39) и  $\partial p / \partial x$  из (7.38), окончательно получим

$$\tau_0 = \mu \frac{u_0}{h_0} \left[ \frac{4l}{l+kx} - \frac{6(1+k)}{2+k} \frac{l^2}{(l+kx)^2} \right]. \quad (7.47)$$

С учетом (7.47) сила трения найдется, как

$$F_\mu = \int_0^l \tau_0 dx = \mu \frac{u_0 l}{h_0} \left[ \frac{4}{k} \ln(1+k) - \frac{6}{2+k} \right]. \quad (7.48)$$

Например, при  $k = 1,2$ , соответствующей максимуму силы давления

$$F_\mu \approx 0,75 \frac{u_0 l}{h_0}.$$

Рассмотрим распределение скорости в зазоре (7.33) с учетом данных по распределению давления  $p(x)$ . При  $x > x_*$ , где  $\partial p / \partial x < 0$ , возможно такое сочетание параметров, при котором  $u_x > 0$ . То есть в верхней части зазора смазка движется противоположно пластине, рис. 7.6.

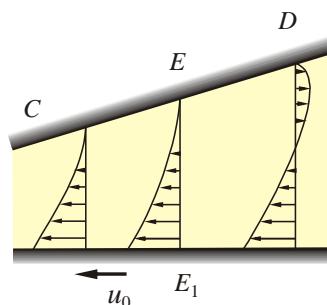


Рис. 7.6. Образование отрыва и обратного течения в смазочном слое

На участке  $l > x > x_* = l/(2+k)$ , где градиент давления отрицательный, жидкость в нижних слоях движется в сторону возрастания давления, преодолевая при этом и сопротивление трения. То есть двигаться в направлении движения нижней пластины могут только частицы смазки, имеющие достаточный запас кинетической энергии. В верхних слоях, где абсолютная величина скорости мала и, следовательно, запаса ее кинетической энергии становится недостаточно, жидкость начинает двигаться в сторону

падения давления, образуя возвратное течение, сопровождающееся отрывом основного потока от твердой поверхности.

Сечение отрыва найдем из условия

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=h} = 0. \quad (7.49)$$

Подставим в (7.49) профиль скорости (7.33) и преобразуем получившееся выражение к виду

$$\frac{u_0}{h_{\text{отр}}} + \frac{h_{\text{отр}}}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (7.50)$$

Учитывая (7.38), из (7.50) найдем

$$h_{\text{отр}} = \frac{3}{2} h_* \quad \text{или} \quad x_{\text{отр}} = \frac{2k+1}{k(k+2)} l. \quad (7.51)$$

Из (7.51) следует, что  $x_{\text{отр}} > l$  только при отрицательном параметре клиновидности  $k < 0$ .

### 7.3. Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет профиль скорости в поперечном сечении канала в течении Пуазейля?
2. Какой зависимостью связан расход жидкости с перепадом давлений в течении Пуазейля?
3. Какой вид имеет профиль скорости в поперечном сечении потока в течении Куэтта?
4. Какой вид имеет профиль скорости в поперечном сечении тонкого плоского зазора переменной высоты при течении с перепадом давления?
5. Какой вид имеет распределение давления по длине плоского клиновидного слоя смазки?
6. Как связана сила давления в смазочном зазоре с его толщиной?

## ГЛАВА 8. ОДНОМЕРНАЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

### 8.1. Одномерная модель реальных потоков

Если все параметры движущегося потока зависят только от одной, в общем случае криволинейной координаты, то такой поток называют *одномерным*. Простейшим примером одномерного потока является течение в элементарной трубке тока, благодаря малой площади поперечного сечения которой скорости течения и другие параметры среды распределены однородно в пределах каждого сечения.

Хотя реальные потоки конченых размеров, строго говоря, не могут считаться одномерными, но некоторые из них могут быть сведены к одномерной модели. Так, например, при течении вязкой жидкости в трубе или в канале между двумя параллельными стенками имеет место неоднородное распределение скорости поперек потока, но эта неоднородность зачастую бывает несущественна во многих технических задачах, где достаточно знать среднюю по сечению потока (среднерасходную) скорость  $w$ :

$$w = \frac{Q}{S} = \frac{1}{S} \int_S u dS, \quad (8.1)$$

где  $S$  – площадь живого сечения потока;  $Q$  – объемный расход среды через данное сечение;  $u$  – местная скорость движения. Тогда, заменив истинные, неоднородно распределенные по сечению скорости их средним значением  $w$ , и приняв давление постоянным по живому сечению, прейдем к одномерной модели потока.

В общем случае течение в канале трехмерное. Однако, если кривизна линий тока в реализующемся течении мала, а также мал угол, образующийся между соседними линиями тока (рис. 8.1 *a*), то такой поток можно приближенно считать одномерным. Потоки, удовлетворяющие этим условиям, называют *плавноизменяющимися*. Рассмотрим свойства таких течений. На рис. 8.1 *б* показано живое сечение  $MN$  плавно изменяющегося потока с местной системой координат  $x', y', z'$ .

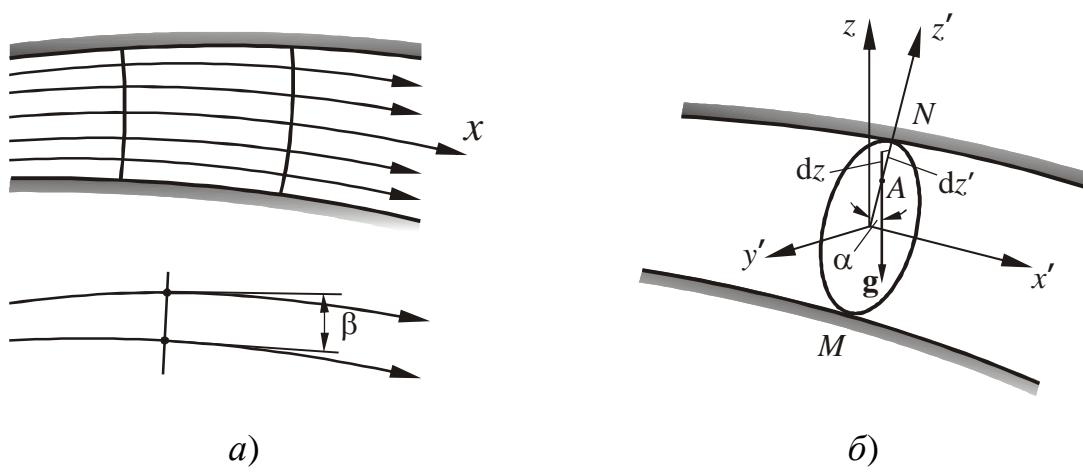


Рис. 8.1. Одномерное приближение плавно изменяющегося течения

Для простоты будем считать жидкость несжимаемой, а живое сечение плоским. В плавно изменяющемся течении, ввиду малых величин углов  $\beta$ , образуемых линиями тока, поперечные составляющие скорости пренебрежимо малы, то есть  $u'_z \approx 0$ ,  $u'_y \approx 0$ . Следовательно равны нулю проекции на оси  $y'$ ,  $z'$  силы вязкости. Тогда проекции уравнения Навье-Стокса на оси  $y'$ ,  $z'$  для рассматриваемого живого сечения можно записать в виде

$$f_{y'} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y'} = 0, \quad f_{z'} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z'} = 0. \quad (8.2)$$

Пусть объемная сила представляет собой силу тяжести, тогда ее проекции на оси местной системы координат запишутся следующим образом

$$f_{y'} = 0, \quad f_{z'} = -g \cos \alpha = -g \frac{\partial z}{\partial z'}. \quad (8.3)$$

С учетом (8.3) уравнения (8.2) примут вид

$$\frac{\partial p}{\partial y'} = 0, \quad g \cos \alpha + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z'} = 0. \quad (8.4)$$

Из первого уравнения следует, что в пределах живого сечения давление зависит только от координаты  $z'$ . Тогда второе уравнение можно проинтегрировать по  $z'$ :

$$gz' \cos \alpha + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad \text{или} \quad gz + \frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (8.5)$$

Таким образом, с точностью до гидростатической составляющей  $\rho g z$  давление можно считать постоянным в пределах живого сечения плавно изменяющегося потока.

## 8.2. Уравнение Бернулли для одномерного потока вязкой несжимаемой жидкости

Рассмотрим установившееся движение ограниченного стенками канала плавно изменяющегося потока несжимаемой жидкости. Уравнение Бернулли вдоль каждой линии тока такого течения имеет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h_\mu, \quad (8.6)$$

где индексами 1 и 2 отмечены значения параметров среды, относящиеся к сечениям  $F_1$  и  $F_2$ .

Умножим правую и левую часть (8.6) на соответствующее произведение  $\rho g u_i$  и проинтегрируем полученное уравнение по площади *живого сечения*\* потока  $F_1$  и  $F_2$ .

\* Живым называется сечение, в каждой точке которого направление вектора скорости совпадает с направлением нормали к нему.

$$\int_{F_1} \left( z_1 g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} \right) \rho u_1 dF = \int_{F_2} \left( z_2 g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + \Delta h_\mu g \right) \rho u_2 dF. \quad (8.7)$$

Учитывая, что в пределах живого сечения выполняется равенство (8.5), последнее уравнение можем записать в виде

$$z_1 \rho g + p_1 + \frac{1}{2Q} \int_{F_1} \rho u_1^3 dF = z_2 \rho g + p_2 + \frac{1}{2Q} \int_{F_2} \rho u_2^3 dF + \frac{1}{Q} \int_{F_2} \Delta h_\mu \rho g u_2 dF, \quad (8.8)$$

где  $Q = \int_{F_1} u_1 dF = \int_{F_2} u_2 dF = wF$  – расход жидкости ( $w$  – средняя по живому

сечению скорость потока).

Введем обозначения

$$\Delta p = \frac{1}{Q} \int_F \Delta h_\mu \rho g u dF, \quad \alpha = \frac{1}{w^3 F} \int_F u^3 dF. \quad (8.9)$$

Интеграл вида  $\int_F \frac{u^2}{2} \rho u dF = \frac{\rho}{2} \int_F u^3 dF$  представляет собой кинетическую

энергию потока, переносимую в единицу времени через сечение  $F$  потока.

Величина  $\frac{w^2}{2} \rho w F$  может быть истолкована, как поток кинетической энергии через то же сечение при постоянной в данном сечении скорости, равной среднерасходной  $w$ . Поэтому величина  $\alpha$ , выражаемая вторым равенством (8.9), представляет собой отношение истинного потока кинетической энергии (при неравномерном распределении скорости по сечению) к потоку кинетической энергии, определенному по среднерасходной скорости. Этот параметр называют *коэффициентом Кориолиса*. Величина его всегда больше единицы и зависит от распределения скорости в живом сечении. Например, для развитого ламинарного течения в круглой трубе коэффициент Кориолиса  $\alpha = 2$ , а для турбулентного  $\sim 1,1$ . При значительной неравномерности скорости, например в криволинейных каналах, он может достигать больших величин.

С учетом введенных обозначений уравнение Бернулли для плавноизменяющегося потока<sup>\*</sup> вязкой несжимаемой жидкости примет вид

$$\rho g z_1 + p_1 + \frac{\alpha_1 \rho w_1^2}{2} = z_2 + p_2 + \frac{\alpha_2 \rho w_2^2}{2} + \Delta p. \quad (8.10)$$

Каждый из членов уравнения имеет размерность давления и представляет собой тот или иной вид удельной (отнесенный к единице объема)

<sup>\*</sup> Строго говоря, выполнение условия плавного изменения потока требуется только для окрестности сечений  $F_1$  и  $F_2$ , так как при выводе уравнения (8.10) допущение плавного изменения сделано только для окрестности указанных сечений. Между этими сечениями данное условие может нарушаться.

энергии потока:  $\rho gz$  – потенциальной энергии объемных сил (тяжести);  $p$  – потенциальной энергии упругого состояния (поверхностных сил давления);  $\alpha \rho w^2 / g$  – кинетической энергии;  $\Delta p$  – безвозвратные потери механической энергии, преобразующиеся в теплоту. В целом уравнение (8.10) описывает закон сохранения механической энергии между сечениями 1 и 2 одномерного плавноизменяющегося потока жидкости.

Давление  $p$  называется *статическим давлением* потока, которое, будучи выраженным в избыточных единицах, равно *пьезометрическому давлению*, см. раздел 5.4. Сумма  $p + \alpha \rho w^2 / 2 = p_0$  называется *полным давлением*. Полное давление равно давлению потока, заторможенному в рассматриваемой точке пространства без потерь механической энергии. С учетом введенного понятия полного давления,  $\Delta p$  можно рассматривать, как потери полного давления между рассматриваемыми сечениями потока. Составляющая полного давления, соответствующая кинетической энергии потока, называется *динамическим давлением*  $p_d = \alpha \rho w^2 / 2$ .

В технических приложениях широко применяется форма уравнения Бернулли, все члены которого имеют размерность длины. Она получается из (8.10) путем деления правой и левой части на  $\rho g$ :

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 w_2^2}{2g} + \Delta h_\mu. \quad (8.11)$$

Составляющие данного уравнения Бернулли имеют следующие наименования. Величину  $H_{\text{гд}} = z_1 + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha w^2}{2g}$  называют *гидродинамическим напором*, величину  $H_{\text{п}} = \frac{p}{\rho g}$  – *пьезометрическим напором*,  $H_w = \frac{\alpha w^2}{2g}$  – *скоростным напором*, а  $\Delta h_\mu$  – *потерей напора*.

Как видим все члены уравнения (8.11) имеют размерность длины, которым можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим истечение жидкости из резервуара через трубопровод переменного сечения, рис. 8.2.

Выделим в трубопроводе три сечения 1–1, 2–2 и 3–3, в каждом из которых установим трубы Прандтля (для измерения пьезометрического напора) и Пито (для измерения полного напора, то есть суммы пьезометрического и скоростного). Тогда разность показаний трубок Пито и Прандтля есть величина скоростного напора  $\alpha w^2 / (2g)$ . Рассмотрим показания трубок в каждом сечении.

**Сечение 1–1.** Мениск в трубке Пито не достигает уровня воды в резервуаре, так как часть напора  $\Delta h_l$  будет затрачена на преодоление сил сопротивления при входе в трубопровод.

Сечение 2–2. Площадь живого сечения  $F_2$  меньше  $F_1$ , поэтому, в соответствии с уравнением неразрывности,  $w_2 > w_1$ . Разность показаний трубок Пито в первом и во втором сечениях – есть величина потерь напора на преодоление внешних сил сопротивления между этими сечениями  $\Delta h_{1-2} = \Delta h_2 - \Delta h_1$ .

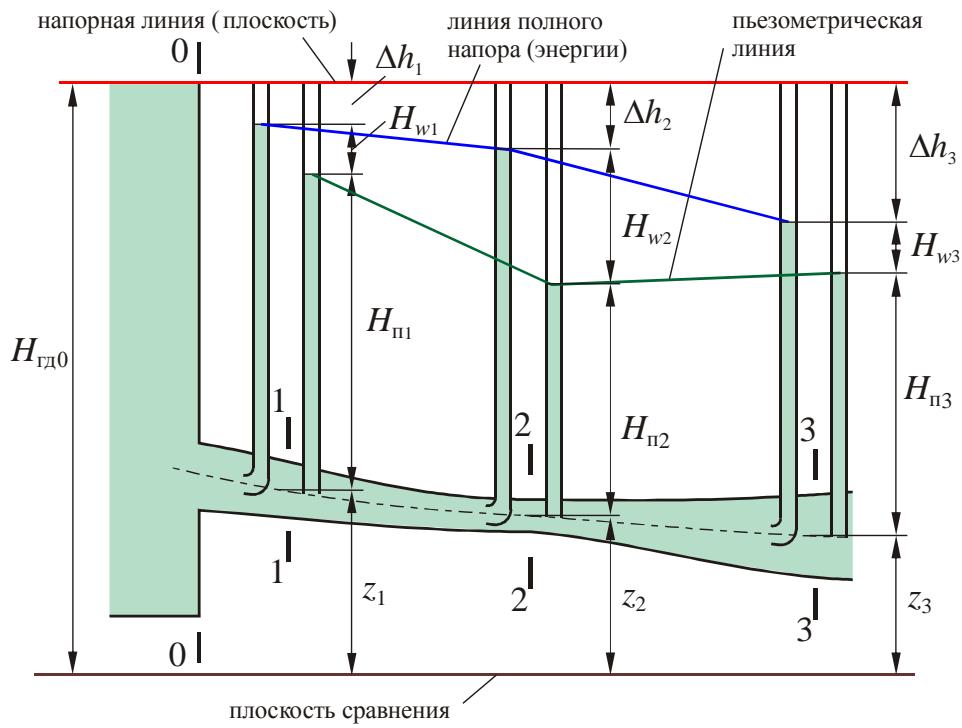


Рис. 8.2. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли

Сечение 3–3. Площадь живого сечения  $F_2$  меньше  $F_3$ , поэтому  $w_2 > w_3$  и  $\frac{\alpha_2 w_2^2}{2\rho g} > \frac{\alpha_3 w_3^2}{2\rho g}$ , то есть скоростной напор  $H_w$  при движении от второго сечения к третьему падает. За счет этого пьезометрический напор  $H_\pi$  возрастает. Полный же напор (показания трубок Пито) падает так как между сечениями 2–2 и 3–3 имеются потери механической энергии  $\Delta h_{2-3} = \Delta h_3 - \Delta h_2$ .

Геометрическая трактовка уравнения Бернулли заключается в том, что пьезометрический напор  $H_\pi$  есть высота, на которую может подняться свободная поверхность движущейся жидкости относительно рассматриваемого сечения трубопровода. Сумма пьезометрического и динамического напоров  $H_\pi + H_w$  есть высота, на которую может подняться свободная поверхность полностью заторможенной жидкости относительно рассматриваемого сечения трубопровода, то есть характеризует максимально возможную высоту подъема. Линия полного напора всегда опускается, так как часть механической энергии потока превращается в тепловую, то есть те-

ряется. При этом сумма всех четырех высот  $z$ ,  $H_{\text{п}}$ ,  $H_w$  и  $\Delta h$  остается постоянной, так как отражает запас полной энергии потока в начальном сечении.

### **8.3. Природа потерь полного давления (напора).**

#### **Структура общих формул для потерь напора**

Потери полного давления при движении вязкой жидкости обусловлены деформациями движущейся среды (вследствие взаимодействия с ограничивающими поток стенками, находящимися в потоке элементами устройств и механизмов), возникновением в результате сдвиговых деформаций касательных вязкостных напряжений. Работа этих напряжений и приводит к диссипации механической энергии.

При рассмотрении потока, ограниченного внешними стенками, все внешние факторы, обуславливающие потери механической энергии движущейся жидкости, называют *гидравлическими сопротивлениями*.

Для того чтобы использовать уравнение Бернулли для решения прикладных задач необходимо предварительно установить зависимости, позволяющие определить величины потерь напора (полного давления), обусловленные гидравлическими сопротивлениями. Гидравлические потери по физической природе их проявления подразделяются на два типа:

1. *Местные потери* (*потери на местных сопротивлениях*), обусловленные изменением по величине и направлению скорости движения жидкости, которое сопровождается образованием вихревых зон. Местные потери локализованы на участке канала потока небольшой протяженности, причиной их возникновения является наличие уступов, резких изгибов стенок канала, слияние нескольких потоков или разветвление потока на несколько каналов, наличие регулирующих или запорных элементов (гидравлической арматуры) в рассматриваемом участке канала и т. п.

2. *Потери на трение* – распределенные по длине канала потери, возникающие как следствие затрат энергии на преодоление сил трения жидкости о стенки. Под этими потерями понимают потери, возникающие в протяженных каналах с приблизительно постоянной площадью живого сечения и установившимся профилем скорости в нем, то есть при равномерном движении жидкости.

В реальных потоках участки равномерного движения жидкости могут чередоваться с местными сопротивлениями, число частных видов которых чрезвычайно велико. При подсчете полных потерь применяется принцип сложения, согласно которому полные потери давления равны сумме потерь на отдельных участках равномерного движения и потерь на всех местных сопротивлениях

$$\Delta p = \sum_{i=1}^n \Delta p_{\text{tp}i} + \sum_{j=1}^m \Delta p_{\text{M}j}, \quad (8.12)$$

где  $\Delta p_{m_i}$  – потери полного давления на трение на  $i$ -ом участке равномерного движения;  $\Delta p_{m_j}$  – потери полного давления на  $j$ -ом местном сопротивлении. В терминах напора выражение (8.12) примет вид

$$\Delta h_{\mu} = \sum_{i=1}^n \Delta h_{tp,i} + \sum_{j=1}^m \Delta h_{m,j}. \quad (8.13)$$

Несмотря на то, что структура потока и механизм потерь в местных сопротивлениях и на участке равномерного движения существенно различны, исходя из общих законов гидродинамики можно установить структуру общих формул, выражающих потери в любом сопротивлении. Из этих общих формул в некоторых случаях удается получить теоретические формулы для конкретных видов сопротивлений, а в других – приходится дополнительно использовать эмпирические данные.

**Формула расчета потерь на трение.** Рассмотрим равномерный поток жидкости в цилиндрической трубе, в которой отсутствуют местные сопротивления. В установившемся потоке движущая сила – сила перепада давления уравновешивается силой сопротивления за счет трения:

$$(p_1 - p_2)F = \tau F_b, \quad (8.14)$$

где  $\tau$  – напряжение трения;  $F_b$  – площадь боковой поверхности трубы. Для круглой трубы  $F = \pi d^2 / 4$ ,  $F_b = \pi dL$  и (8.14) принимает вид

$$p_1 - p_2 = \Delta p_{tp} = 4\tau \frac{L}{d}. \quad (8.15)$$

Разделив и умножив правую часть на динамическое давление  $\rho w^2 / 2$ , получим

$$\Delta p_{tp} = \rho \frac{w^2}{2} \lambda \frac{L}{d}, \quad (8.16)$$

или

$$\Delta h_{tp} = \frac{w^2}{2g} \lambda \frac{L}{d}, \quad (8.17)$$

где  $\lambda$  – коэффициент гидравлического трения, определяемый по формуле

$$\lambda = 8 \frac{\tau}{\rho w^2}. \quad (8.18)$$

Впервые формула (8.16) была получена экспериментально в XIX веке и названа формулой Дарси-Вейсбаха.

Величина коэффициента гидравлического трения  $\lambda$  находится с использованием экспериментальных данных. Для удобства использования эти экспериментальные данные должны быть обобщены. Обобщенный вид зависимости для определения коэффициента  $\lambda$  может быть установлен, например, исходя из следующих соображений теории размерностей.

Из общих физических представлений можно предположить, что величина потерь давления на трение  $\Delta p_{\text{тр}}$  является функцией скорости течения  $w$ , плотности  $\rho$ , коэффициента динамической вязкости  $\mu$  жидкости, диаметра  $d$ , длины  $L$  трубопровода и средней высоты бугорков шероховатости его стенок  $k^*$ . То есть имеем следующую функциональную зависимость

$$f(\Delta p_{\text{тр}}, \rho, w, \mu, d, L, k) = 0, \quad (8.19)$$

связывающую между собой 7 размерных величин. Величин, имеющих независимые размерности в данной задаче 3, так как за основные размерности в механике приняты: метр, секунда, килограмм массы. Следовательно, в соответствии с  $\pi$ -теоремой зависимость (8.19) может быть преобразована к зависимости между четырьмя безразмерными комплексами – числами подобия. В качестве величин с независимыми размерностями примем плотность, скорость и диаметр. Оставшиеся четыре величины  $\Delta p_{\text{тр}}$ ,  $l$ ,  $k$ ,  $\mu$  служат «основой» для формирования четырех безразмерных комплексов. Два комплекса следуют из полученной ранее формулы (8.16). Первый из них построен на основе величины  $\Delta p_{\text{тр}}$  и это число Эйлера  $\pi_1 = Eu = \Delta p_{\text{тр}} / (\rho w^2)$ . Второй, сформированный на основе величины  $L$ , представляет собой относительную длину трубопровода  $\pi_2 = L/d$ . Третий комплекс, в котором «задействована» величина  $k$ , для того, чтобы быть безразмерным параметром, должен иметь вид, аналогичный  $\pi_2$ . То есть это относительная высота бугорков шероховатости  $\pi_3 = k/d$ . Четвертый комплекс, который формируется на основе величины  $\mu$ , очевидно, представляет собой число Рейнольдса

$$\pi_4 = Re = \frac{\rho w d}{\mu}. \quad (8.20)$$

Таким образом, зависимость (8.19) может быть представлена в виде

$$f\left(Eu, \frac{L}{d}, \frac{k}{d}, Re\right) = 0. \quad (8.21)$$

Придадим ей более ясный для нашей задачи вид, для чего вновь обратимся к формуле (8.16), которую запишем следующим образом

$$Eu = \frac{\lambda}{2} \frac{L}{d}. \quad (8.22)$$

Сравнивая (8.21) и (8.22), можем сделать вывод, что коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  в общем случае должен быть функцией двух параметров

\* Эти предположения подтверждаются опытными данными и результатами теоретических исследований.

$$\lambda = \lambda \left( \text{Re}, \frac{k}{d} \right). \quad (8.23)$$

**Формула расчета потерь на местных сопротивлениях.** При наличии местного сопротивления на рассматриваемом участке потока также возникает перепад давления  $\Delta p_m = p_1 - p_2$ . Относительная величина этого перепада

$$\xi_m = \frac{\Delta p_m}{\rho w^2 / 2} \quad (8.24)$$

называется коэффициентом местного сопротивления. В общем случае коэффициент  $\xi_m$  зависит от геометрии потока (то есть типа местного сопротивления и его размеров) и числа Рейнольдса и определяется с использованием экспериментальных данных. С учетом введенного коэффициента местного сопротивления, получим

$$\Delta p_m = \xi_m \rho \frac{w^2}{2}, \quad \Delta h_m = \xi_m \frac{w^2}{2g}. \quad (8.25)$$

Зависимость (8.25) называется формулой Вейсбаха.

Таким образом, для учета потерь полного давления необходимо уметь определять коэффициенты  $\lambda$  и  $\xi_m$ , которые в общем случае зависят от конфигурации потока и режима течения (числа Рейнольдса).

#### 8.4. Ламинарное и турбулентное течение жидкости в трубах

**Ламинарное (слоистое) течение, возникновение турбулентности.** При установившемся ламинарном движении несжимаемой жидкости в круглых трубах напряжение трения и, следовательно, коэффициент гидравлического трения могут быть определены на основании решения уравнений Навье-Стокса. Такое решение получено в разделе 7.1 и имеет вид

$$w = \frac{\Delta p d^2}{32 \mu l} \text{ или } \Delta p = \frac{32 \mu l w}{d^2}, \quad (8.26)$$

где  $d$  – диаметр канала;  $l$  – его длина.

Найдем коэффициент сопротивления  $\lambda$  течению жидкости в канале, представив перепад давлений в виде формулы Дарси-Вейсбаха

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{w^2}{2}. \quad (8.27)$$

Сравнивая (8.26) и (8.27), получаем следующую формулу, называемую формулой Пуазейля

$$\lambda = \frac{64 \mu}{\rho w d} = \frac{64}{\text{Re}_d}, \quad (8.28)$$

где  $\text{Re}_d = \frac{\rho w d}{\mu} = \frac{w d}{v}$  – число Рейнольдса.

Эти результаты в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re_d < Re_{kp}$  хорошо соответствует опытным данным Никурадзе. Если число Рейнольдса потока будет больше критического  $Re_{kp}$ , то возможно нарушение ламинарного характера течения и возникновение турбулентности. Для круглых труб принимают

$$Re_{kp} = 2300. \quad (8.29)$$

При этом необходимо отметить, что критическое число Рейнольдса  $Re_{kp}$ , при превышении которого возникает турбулентность, существенно зависит от внешних возмущений, вносимых в поток. Так, например, если вход в трубу сделать плавным, устранить другие источники внешних возмущений, то ламинарный режим сохраняется до  $Re \approx 20000$  и даже более. Поэтому  $Re_{kp}$  следует понимать как границу устойчивого ламинарного режима в том смысле, что при  $Re_d < Re_{kp}$  любые возмущения, вносимые в поток, будут с течением времени затухать и поток сохранит ламинарный характер.

Переход к турбулентному режиму сопровождается изменением закона сопротивления, а также формы профиля скорости в поперечном сечении трубы. Сам переход не происходит мгновенно. При числах Рейнольдса немного меньших критического в ламинарном потоке периодически возникают очаги турбулентности, которые могут на отдельных участках заполнять все сечение потока, образуя турбулентные пробки. Такое явление, когда через одно сечение канала проходит то турбулентный, то ламинарный поток называют *перемежаемостью* и характеризуют *коэффициентом перемежаемости*  $\gamma = \Delta t / T$ , который представляет собой долю  $\Delta t$  некоторого интервала времени  $T$ , в течение которой в данной точке потока существует турбулентный режим. При увеличении числа Рейнольдса коэффициент  $\gamma$  непрерывно возрастает и достигает единицы при развитом турбулентном режиме.

Если трубе не круглая, то при определении числа Рейнольдса используется *гидравлический (эквивалентный) диаметр*

$$d_r = \frac{4F}{P_{cm}} \quad (8.30)$$

равный отношению учетверенной площади живого сечения  $F$  к смоченному периметру потока  $P_{cm}$ <sup>\*</sup>.

При ламинарном течении профиль скорости (7.18) существует только на *участке стабилизированного течения*, где форма профиля не зависит от продольной координаты. Если же на вход трубы поступает однородный по

\* Нетрудно заметить, что для круглой трубы гидравлический и геометрический диаметры совпадают.

скорости потока, то возникает начальный участок течения, протяженностью  $l_{\text{нач}}$ , на котором исходный однородный профиль скорости, вследствие действия вязких сил, преобразуется в параболический, рис. 8.3.

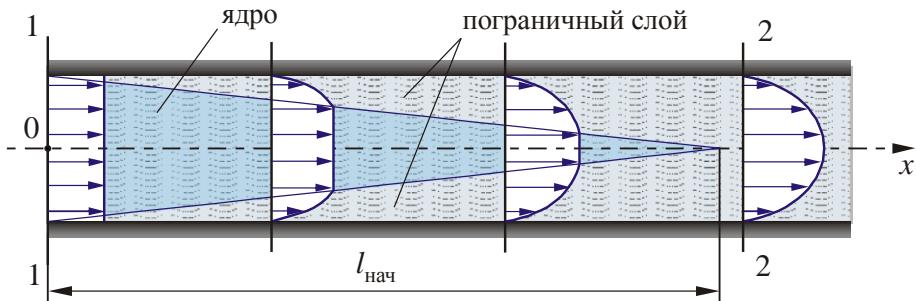


Рис. 8.3. Схема начального участка ламинарного течения в трубе

Так как на стенках трубы скорость жидкости равна нулю, а расход в любом сечении остается постоянным, то замедление движения у пристенных слоев компенсируется соответствующим увеличением скорости слоев, расположенных ближе к центру трубы.

Таким образом, на начальном участке поток имеет ядро, где сохраняется равномерное распределение скоростей, и пристенный пограничный слой, в котором скорость распределяется неравномерно. В конце участка пограничные слои смыкаются на оси трубы, и ниже по течению устанавливается параболическое распределение скоростей.

Длина начального участка  $l_{\text{нач}}$  может быть оценена по формуле С.М. Тарга

$$l_{\text{нач}} = 0,04d \text{Re}_d. \quad (8.31)$$

На начальном участке формула (8.28) несправедлива, поэтому для определения гидравлического сопротивления начального участка трубы должны применяться специальные экспериментальные данные или решение уравнений Навье-Стокса при соответствующих начальных и граничных условиях.

**Турбулентное течение.** При расчете турбулентных течений в настоящее время используют экспериментальные данные, так как уравнения Рейнольдса незамкнуты и, следовательно, не могут быть решены без использования дополнительной информации.

Рассмотрим турбулентный поток жидкости в круглой трубе, рис. 8.4.

Подробно структура и профиль скорости турбулентного потока в канале рассмотрены в Главе 14. Здесь же дадим только качественное описание картины течения.

В турбулентном потоке полное напряжение трения  $\tau$  слагается из вязкостного  $\tau_\mu$  (обусловленного действием молекулярной вязкости жидкости) и турбулентного  $\tau_t$ . Вследствие действия молекулярной вязкости жидкость прилипает к стенкам канала, поэтому в потоке существует пристенный

*вязкий подслой* толщиной  $\delta_v$ . В пределах вязкого подслоя  $\tau_\mu \gg \tau_t$ . В центральной части потока (в *турбулентном ядре*)  $\tau_t \gg \tau_\mu$ . Таким образом весь поток можно разбить на область турбулентного течения и вязкий подслой. В действительности резкой границы между вязким подслоем и турбулентным ядром не существует, переход осуществляется через буферную область конечной толщины. Здесь двухслойная модель используется как приближенное описание реальной структуры потока.

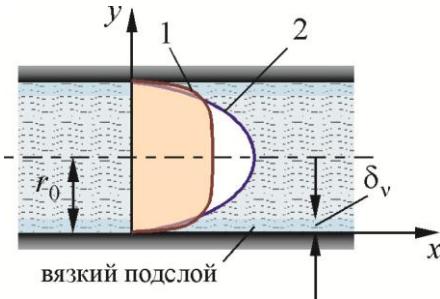


Рис. 8.4. Схема структуры турбулентного потока в трубе:  
 1 – профиль скорости при турбулентном потоке;  
 2 – при ламинарном потоке

В вязком подслое характер течения близок к течению Куэтта, поэтому профиль скорости здесь линейный, описывается формулой (7.23). Учитывая, что при линейном профиле скорости  $\tau_w = \mu u_\delta / \delta_v$  (где  $\tau_w$  – касательные напряжения на стенке), для нашего случая получим

$$u = \frac{\tau_w}{\mu} y. \quad (8.32)$$

Толщина вязкого подслоя может быть оценена по формулам

$$\delta_v = 11,6v \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}, \quad \delta_v = 68,4d \text{Re}_d^{-0,875}, \quad (8.33)$$

где  $\text{Re}_d$  – число Рейнольдса, определенное по диаметру трубопровода.

В турбулентном ядре потока профиль скорости описывается логарифмической зависимостью (см. раздел 14.2.2)

$$u = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \left[ A \lg \left( \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{y}{v} \right) + B \right], \quad (8.34)$$

где  $A$ ,  $B$  – экспериментальные константы. Согласно опытам И. Никурадзе  $A = 5,75$ ,  $B = 5,5$ .

Формула (8.34) справедлива, когда  $\delta_v > k$ . Здесь  $k$  – средняя высота выступов шероховатости стенки. В этом случае турбулентное ядро не будет испытывать непосредственного влияния шероховатости. Трубы, работающие в таком режиме, называются гидравлически гладкими.

При  $\delta_v < k$  на закон распределения скорости влияет шероховатость стенок. В этом случае для расчета профиля скорости может использоваться следующая формула И. Никурадзе

$$u = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \left( 5,75 \lg \left( Re \frac{y}{k} \right) + 8,48 \right). \quad (8.35)$$

Экспериментальные исследования показали, что вблизи оси трубы распределение скоростей несколько отличается от логарифмического, но это отличие несущественно. Логарифмический профиль скорости является универсальным, пригодным для диапазона чисел Рейнольдса  $Re_d > 4000$ .

Кроме логарифмического профиля в практике расчетов турбулентных течений широко используется степенная аппроксимация опытных данных по распределению скоростей

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left( \frac{y}{r_0} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (8.36)$$

где  $u_{\max}$  – значение скорости на оси трубы.

Показатель степени  $n$  является функцией числа Рейнольдса. При  $Re = 4000 \dots 32,4 \cdot 10^5$  можно принять  $n = 6 \dots 10$ . Для гидравлически гладкого режима течения  $n = 7$ .

Зная распределение скорости по сечению трубопровода, можно определить отношение скорости на оси трубы  $u_{\max}$  к среднерасходному значению  $w$ . Например, для степенного профиля при  $n = 7$   $u_{\max}/w = 1,22$ . Из этой оценки следует, что при турбулентном режиме течения скорость потока распределена по поперечному сечению более равномерно, чем при ламинарном течении ( $u_{\max}/w = 2$ ), что связано с влиянием турбулентного перемешивания. Качественный вид профиля скорости в канале трубопровода при ламинарном и турбулентном режиме течения показан на рис. 8.4.

Приведенные выше формулы распределения скорости соответствуют стабилизированному, то есть полностью развитому течению. Формирование стабилизированного турбулентного потока, как и в рассмотренном выше случае ламинарного течения, происходит постепенно. Длина начального участка составляет 25...40 диаметров (или, как говорят, калибров) трубы.

## 8.5. Опытные данные о коэффициенте гидравлического трения

Если при эксперименте измерить перепад давления и среднюю скорость в трубопроводе, то коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  может быть найден по формуле Дарси-Вейсбаха. Впервые такие опыты выполнил и обобщил для гидравлически гладких и шероховатых труб Иван Ильич Никурадзе в Гетингенском университете 1933 г. под руководством Л. Прандтля. Опыты проводились для труб с искусственно созданной рав-

номерно-зернистой шероховатостью, то есть бугорки шероховатости имели приблизительно одинаковые размеры и форму\*. Результаты опытов И. Никирадзе представлены на диаграмме, рис. 8.5. В качестве геометрического параметра подобия при обработке результатов экспериментов, в соответствии с (8.23), принято отношение  $k_s/d$ , где индексом « $s$ » отмечена равномерно-зернистая шероховатость, гидродинамического – число Рейнольдса. На диаграмме имеется пять зон.

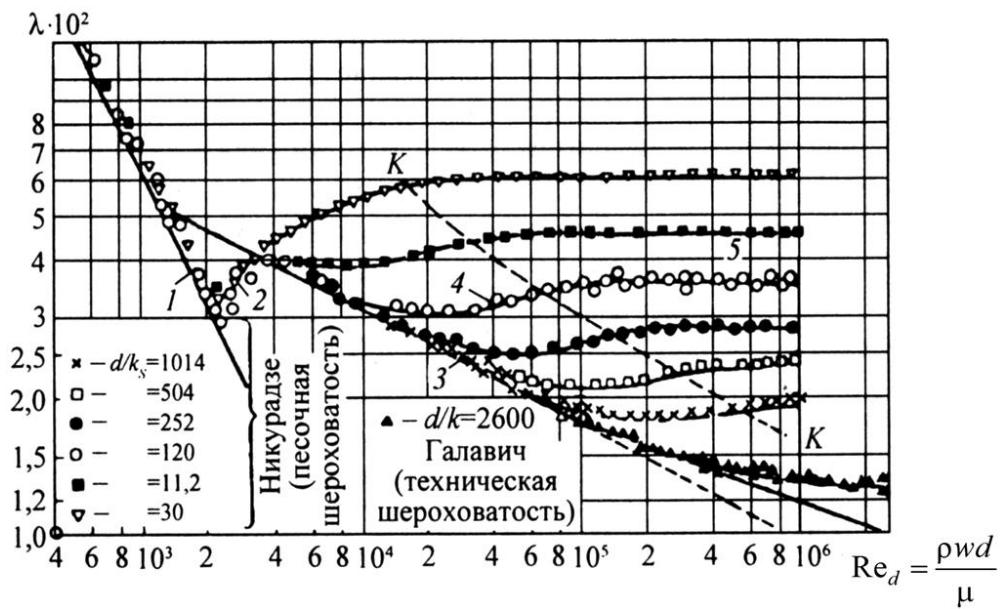


Рис. 8.5. Диаграмма И. Никирадзе зависимости коэффициента трения для труб с равномерно-зернистой шероховатостью

1 – зона ламинарного режима ( $Re < 2300$ ). В пределах этой зоны  $\lambda$  не зависит от шероховатости (кривая 1) и подчиняется формуле Пуазейля

$$\lambda = \frac{64}{Re_d}. \quad (8.37)$$

2 – переходная зона от ламинарного к турбулентному режиму течения соответствует числам Рейнольдса  $2300 < Re_d < 4000$  (кривая 2). В потоке наблюдается исчезающие очаги турбулентности. Коэффициент трения определяется по формуле Френкеля

$$\lambda = \frac{2,7}{Re_d^{0,53}}. \quad (8.38)$$

3 – зона турбулентного движения в гидравлически гладких трубах (кривая 3 на рис. 8.5) соответствует числам Рейнольдса  $4000 < Re_d < 20 \frac{d}{k_s}$

\* Естественная шероховатость, образующаяся в трубах в результате коррозии, отложений и эрозии существенно неоднородна.

и высоте бугорков шероховатости  $\delta_v = 68,4r_0 \text{Re}_d^{-0,875} > k_s$ . Коэффициент трения может быть определен по формуле Блазиуса

$$\lambda = \frac{0,316}{\text{Re}_d^{0,25}}. \quad (8.39)$$

4 – доквадратичная зона сопротивления ограничивается кривой 3 и пунктирной линией  $K-K$  (режим частично шероховатых труб) соответствует числом Рейнольдса  $20d/k_s < \text{Re}_d < 500d/k_s$ . Коэффициент трения может быть определен по формуле Альтшуля

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{k_s}{d} + \frac{68}{\text{Re}_d} \right)^{0,25}. \quad (8.40)$$

5 – зона квадратичного сопротивления образована горизонтальными участками кривых\* (режим развитой шероховатости) соответствует числом Рейнольдса  $\text{Re}_d > 500d/k_s$ . Здесь работает формула Никурадзе

$$\lambda = 1,74 + \lg \left( \frac{d}{k_s} \right) \quad (8.41)$$

или формула Шифрисона

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{k}{d} \right)^{0,25}. \quad (8.42)$$

При данном режиме течения толщина вязкого подслоя мала и турбулентный поток непосредственно взаимодействует с выступами шероховатости. Эта зона называется *автомодельной* зоной, так как  $\lambda$  не зависит от  $\text{Re}_d$ .

Заметим, что формула Альтшуля является универсальной, так как при  $k_s = 0$  она переходит в формулу Блазиуса, а при  $\text{Re}_d \rightarrow \infty$  – в формулу Шифрисона.

Для труб с естественной шероховатостью существуют аналогичные данные по коэффициенту  $\lambda$ , выполненные рядом исследователей позже работ Никурадзе, рис. 8.6.

Из рис. 8.6 видно, что в переходной области поведение коэффициента шероховатости отличается от зависимостей, полученных Никурадзе. Для труб с естественной шероховатостью  $\lambda$  в этой зоне всегда выше чем в квадратичной и непрерывно убывает при увеличении  $\text{Re}$ . Это объясняется неравномерностью шероховатости. В результате на сопротивление влияет не только средняя высота выступов шероховатости, но и их форма, а также расположение на стенке. Поэтому в практике пользуются эквивалентной шероховатостью  $k_{\text{экв}}$ , под которой понимают такую высоту выступов одно-

\* Зона называется «квадратичной», так как  $\lambda$  не зависит от  $\text{Re}$  и потери давления пропорциональны квадрату скорости.

родной (песочной) шероховатости, которая создает сопротивление, равное сопротивлению реальных труб. Значения  $k_{\text{экв}}$  определяются экспериментально и приводятся в специальных справочниках в зависимости от типа, материала и размера труб. Отношение  $k/k_{\text{экв}}$  колеблется в широких пределах от 1,5 до 10.

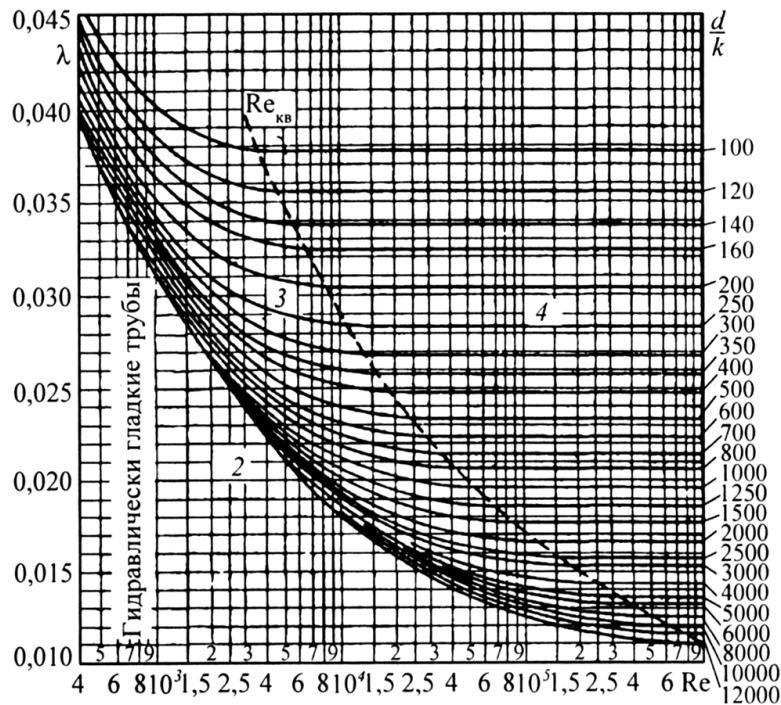


Рис. 8.6 Диаграмма для определения коэффициента трения  $\lambda$  для труб с естественной шероховатостью

## 8.6. Местные гидравлические сопротивления

Определение коэффициента потерь полного давления на местных сопротивлениях теоретическими методами затруднено вследствие существенной трехмерности течения. Поэтому коэффициенты  $\xi$  в основном определяют экспериментально<sup>\*</sup> по формуле Вейсбаха по результатам замера перепада давления и расхода. Лишь для отдельных частных случаев в зоне квадратичного сопротивления, где коэффициент потерь не зависит от числа Рейнольдса, а определяется только геометрическими параметрами местного сопротивления, получены теоретические решения. Рассмотрим, в качестве примера, определение коэффициента потерь на внезапном расширении и сужении потока.

**Потери на внезапное расширение.** В этом случае на уступе канала происходит отрыв потока с образованием вихрей в отрывной зоне в углах

\* Большой объем информации о величинах коэффициентов потерь полного давления  $\xi$  для различных типов местных сопротивлений, а также данные, необходимые для расчета потерь на трение, приведены в [5].

канала. Схема течения показана на рис. 8.7. Образовавшаяся транзитная струя расширяется и в сечении 2'-2' достигает стенок канала. Распределение скорости в этом сечении еще существенно неоднородно и стабилизируется только в сечении 2–2. На участке течения от сечения 1–1 до сечения 2–2 происходит потеря механической энергии потока, обусловленная преодолением вязких сил, возникающих в вихревой зоне и в процессе стабилизации эпюры скоростей. Существуют также потери механической энергии, обусловленные трением жидкости о стенки канала, которыми будем пренебречь, считая, что протяженность местного сопротивления невелика.

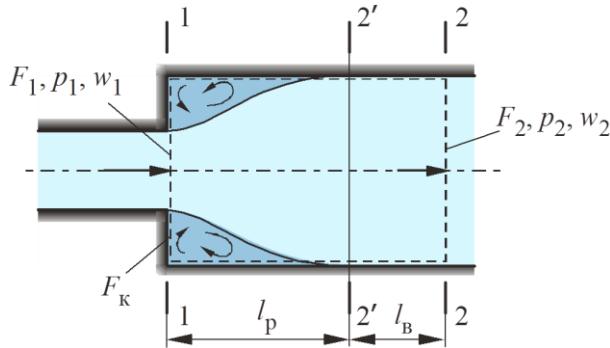


Рис. 8.7. Течение жидкости в окрестности внезапного расширения

Выразим потери на внезапное расширение при помощи уравнения Бернулли, записанное для сечений 1–1 и 2–2, считая, для простоты, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

$$\Delta p_{\text{вн.р}} = p_1 - p_2 + \frac{\rho}{2} (w_1^2 - w_2^2). \quad (8.43)$$

Перепад давлений  $p_1 - p_2$  найдем при помощи уравнения сохранения количества движения, записанного в проекции на ось канала для объема, показанного на рис. 8.7 пунктиром. При этом учтем, что на кольцевой поверхности уступа  $F_k = F_2 - F_1$  можно принять давление, равным  $p_1$ . Тогда закон сохранения количества движения запишется в виде

$$p_1 F_2 - p_2 F_2 = \rho w_2^2 F_2 - \rho w_1^2 F_1. \quad (8.44)$$

Из (8.44), учитывая, что  $w_1 F_1 = w_2 F_2$ , имеем

$$p_1 - p_2 = \rho w_2 (w_2 - w_1). \quad (8.45)$$

Подставив (8.45) в (8.43) получим формулу Борда

$$\Delta p_{\text{вн.р}} = \frac{\rho}{2} (w_1 - w_2)^2. \quad (8.46)$$

Приводя формулу Борда к виду формулы Вейсбаха, можем записать

$$\Delta p_{\text{вн.р}} = \rho \frac{w_1^2}{2} \left( 1 - \frac{w_2}{w_1} \right)^2 = \rho \frac{w_1^2}{2} \left( 1 - \frac{F_1}{F_2} \right)^2. \quad (8.47)$$

Таким образом, для внезапного расширения в квадратичной зоне течения

$$\xi_{\text{вн.р}} = \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)^2. \quad (8.48)$$

В частном случае истечения из трубы в большой резервуар  $F_2 \gg F_1$  и  $\xi_{\text{вн.р}} = 1$ . То есть в этом случае теряется весь скоростной напор потока, имеющийся во входном сечении трубопровода.

**Потери на внезапное сужение.** В этом случае в углах местного сопротивления также образуется отрывная зона. Кроме того отрыв потока происходит и непосредственно на входе в узкую часть трубы, см. рис. 8.8. Транзитная струя, благодаря силам инерции сжимается, образуя сжатое сечение  $F_c$ , а затем снова расширяется, занимая все сечение трубы.

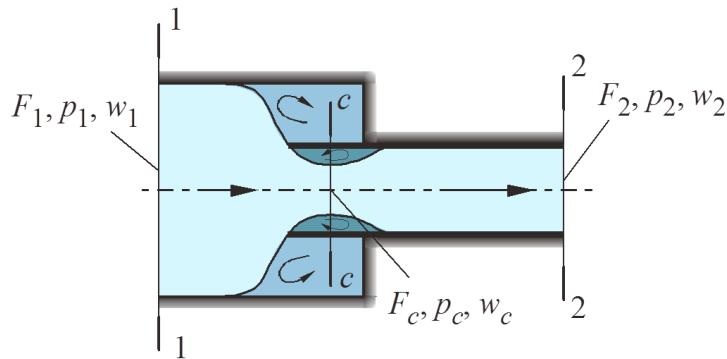


Рис. 8.8. Течение жидкости в окрестности внезапного сужения

Измерение показывает, что основные потери давления происходят на участке расширения транзитной струи за сечением  $F_c$ . Применим к участку потока между сечениями  $c-c$  и  $2-2$  (см. рис. 8.8) формулу Борда:

$$\Delta p_{\text{суж}} = \frac{\rho}{2} (w_c^2 - w_2^2) \quad (8.49)$$

или, записывая (8.49) в форме Вейсбаха,

$$\Delta p_{\text{суж}} = \frac{\rho}{2} w_2^2 \left( \frac{F_2}{F_c} - 1 \right)^2 = \frac{\rho}{2} w_2^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2, \quad (8.50)$$

где коэффициент внутреннего сжатия  $\varepsilon = F_c / F_2$  может быть определен по формуле

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - F_2 / F_1}}. \quad (8.51)$$

Из (8.50) и (8.51) находим

$$\xi_{\text{суж}} = 1 - \frac{F_2}{F_1}. \quad (8.52)$$

Если труба стыкуется с большим резервуаром, то  $F_1 \gg F_2$  и  $\xi_{\text{суж}} = 1$ . Для других форм сужения потока коэффициент гидравлического сопротивления можно определить по формуле

$$\xi_{\text{суж}} = \xi \left( 1 - \frac{F_2}{F_1} \right), \quad (8.53)$$

где  $\xi$  – экспериментальный коэффициент.

**Взаимное влияние местных сопротивлений.** Формулы для расчета коэффициентов гидравлических потерь на местных сопротивлениях такие, как (8.25) и т. п. получены при условии, что на входе в местное сопротивление имеется полностью развитый профиль скорости. Следовательно, ими можно пользоваться, если между местными сопротивлениями имеются достаточно длинные прямолинейные участки трубопроводов. На практике иногда местные сопротивления располагаются настолько близко друг к другу, что поток между ними не успевает выровняться, поскольку вихревые образования, возникающие при прохождении местного сопротивления, сказываются на значительном расстоянии вниз по течению. Вместе с тем при практических расчетах в большинстве случаев суммарные потери в трубопроводах определяются путем простого суммирования потерь, определенных по формулам типа (8.25).

В случаях, когда расстояние между отдельными местными сопротивлениями меньше длины влияния, для точных расчетов суммарная величина сопротивлений должна быть установлена с помощью специальных экспериментов. Она может оказаться как больше, так и меньше суммы соответствующих единичных сопротивлений в зависимости от длины прямого участка между ними. В качестве примера взаимного влияния местных сопротивлений на рис. 8.9 показано изменение суммарного коэффициента сопротивления двух незакругленных поворотов под углом  $\alpha = 45^\circ$  в зависимости от длины  $l$  вставки между ними.

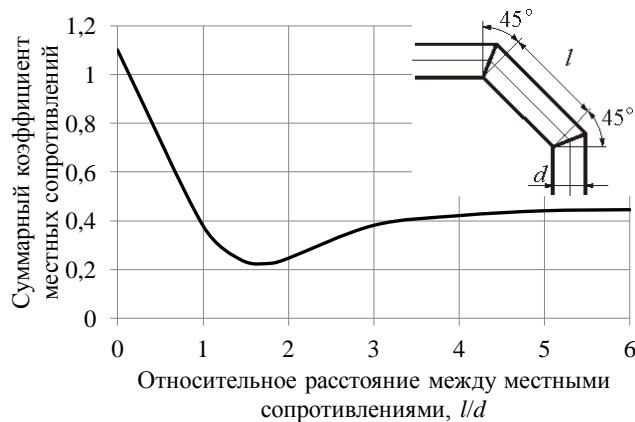


Рис. 8.9. Взаимное влияние местных сопротивлений

При  $l/d = 0$  суммарная величина коэффициента местного сопротивления двух поворотов равна  $\xi_{\Sigma} = 1,1$ , то есть равна коэффициенту  $\xi$  для одного поворота на  $90^\circ$ . При увеличении  $l/d$  до  $\sim 2$  суммарная величина уменьшается до  $\xi_{\Sigma} \approx 0,23$ . При дальнейшем увеличении расстояния до  $l/d \approx 6$   $\xi_{\Sigma}$  возрастает, стремясь к величине 0,472, равной удвоенному значению коэффициента для одного поворота на  $45^\circ$ .

### 8.7. Неустановившееся одномерное течение несжимаемой жидкости

К таким течениям относится большинство неустановившихся потоков несжимаемой жидкости в трубах и каналах с недеформируемыми стенками. Уравнение неустановившегося одномерного течения несжимаемой жидкости может быть получено аналогично (8.10) путем осреднения по площади живого сечения потока уравнения Бернулли для трубы тока (4.60).

Проинтегрируем уравнение (4.60) по площади живого сечения и введем осредненные по площади параметры потока. Замечая, что уравнение (4.60) отличается от использованного для получения одномерного уравнения Бернулли установившегося течения, наличием инерционного члена, выполним осреднение только для него. В остальном искомое уравнение будет совпадать с (8.10)\*.

Инерционный член, подлежащий осреднению, в форме потерь давления имеет вид

$$\Delta p_t = \rho \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}. \quad (8.54)$$

Осредним его по площади живого сечения  $F$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p_t} &= \frac{1}{Q} \int_F u \Delta p_t dF = \frac{1}{Q} \int_F \left( \rho u \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t} ds \right) dF = \frac{\rho}{2Q} \int_{s_1}^{s_2} \left( \int_F \frac{\partial u^2}{\partial t} dF \right) ds = \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{s_1}^{s_2} \left( \frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial t} \int_F u^2 dF \right) ds = \frac{\rho}{2} \int_{s_1}^{s_2} \left( \frac{1}{Q} \frac{\partial \alpha_0 w^2 F}{\partial t} \right) ds = \frac{\rho}{Q} \int_{s_1}^{s_2} \alpha_0 w F \frac{\partial w}{\partial t} ds, \end{aligned} \quad (8.55)$$

где  $\alpha_0 = \frac{1}{F} \int_F \left( \frac{u}{w} \right)^2 dF$  – коэффициент осреднения количества движения,

который будем считать независящим от времени. Учитывая, что расход  $Q = wF$  для несжимаемой жидкости не зависит от координаты, можем записать

\* Здесь необходимо заметить, что осреднение инерционного члена имеет смысл только для таких неустановившихся течений, форма линий тока которых не изменяется по времени. В противном случае осредненный параметр становится неоднозначным.

$$\overline{\Delta p_t} = \rho \int_{s_1}^{s_2} \left( \alpha_0 \frac{\partial w}{\partial t} \right) ds = \rho \frac{dQ}{dt} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\alpha_0}{F} ds. \quad (8.56)$$

В частном случае при течении жидкости в круглой прямолинейной трубе длиной  $L$  выражение (8.56) имеет вид

$$\overline{\Delta p_t} = \rho \alpha_0 L \frac{dw}{dt}. \quad (8.57)$$

Теперь можем записать полное выражение для уравнения одномерного неустановившегося движения несжимаемой жидкости (опуская черту осреднения при инерционной составляющей потерь давления)

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \alpha_1 \frac{w_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \rho \alpha_2 \frac{w_2^2}{2} + \Delta p_\mu + \overline{\Delta p_t}. \quad (8.58)$$

Важно отметить, что инерционная составляющая потеря давления  $\overline{\Delta p_t}$  (инерционный напор  $\Delta h_i$ ) является знакопеременной величиной, так как ее знак определяется знаком производной. В ускоряющихся потоках она положительна, в замедляющихся – отрицательна. Физически данный член уравнения движения не связан с диссинацией механической энергии, то есть он выражает обратимые преобразования энергии.

Потери полного давления на преодоления вязких сил  $\Delta p_\mu$  в неустановившемся движении в общем случае зависят от ускорения потока. Однако в практических расчетах для их определения чаще всего используют такие же зависимости, что и при установившемся течении.

## 8.8. Прямой гидравлический удар в трубах

При больших ускорениях потока жидкости в трубе, например, при быстрым открытии или закрытии заслонки клапана, влияние инерционного напора может оказаться превалирующим над другими членами уравнения (8.58). Так как при зарытии клапана  $dw/dt \rightarrow -\infty$  и, следовательно,  $\overline{\Delta p_t} \rightarrow -\infty$ , то для сохранения смысла уравнения должно выполняться условие  $p_2 \rightarrow \infty$ . Экспериментальные работы показывают, что в реальных условиях даже при практически мгновенном изменении скорости давление  $p_2$  не увеличивается до бесконечности\*. Однако рост его может быть весьма существенным.

Резкое изменение давления в трубе, вызванное большими локальными ускорениями жидкости, называют *гидравлическим ударом*. Рассмотрим физическую картину его возникновения.

Пусть в прямой горизонтальной трубе, питающейся из большого резервуара с постоянным уровнем, существует установившийся режим течения

\* Объяснением данного противоречия является допущение несжимаемости жидкости, принятное при выводе уравнения (8.58).

со скоростью  $w_0$ . Допустим, что в некоторый момент времени клапан, расположенный в конце трубы мгновенно закрывается. Тогда слои жидкости, расположенные около клапана, окажутся благодаря инерции остальной жидкости сжатыми. А так как жидкости относятся к плохо сжимаемым средам, в них резко возрастет давление. Наряду с этим уплотнением слоев жидкости произойдет растяжение стенок трубы и повышение в них напряжений. Это напряженное состояние среды не может быть локализовано, поэтому будет передаваться в слои жидкости, расположенные выше по течению в виде волны.

Волна изменения давления, распространяющаяся вверх по течению, называется *прямой*, а противоположного направления – *обратной*. Поверхность, отделяющая участок распространения ударной волны от участка невозмущенного течения называется *фронтом волны*. Фронт волны гидравлического удара перемещается со скоростью, называемой *скоростью фронта ударной волны*.

Волна сжатия, распространяющаяся вверх по потоку, достигнув резервуара, поглощается им; давление в начальном сечении трубопровода резко падает до первоначального уровня. Возникает волна разрежения, распространяющаяся по направлению к клапану по сжатой при прохождении прямой волны жидкости. В течение времени, пока волна разрежения не достигнет клапана, давление на нем продолжает расти, так как инерционная составляющая напора продолжает преобразовываться в статический напор. Поэтому в нестационарной гидродинамике вводится такой параметр, как *фаза гидравлического удара* – время, в течение которого волна проходит двойную длину трубы. Если время закрытия затвора клапана  $t_{\text{кл}}$  меньше фазы удара  $t_{\text{уд}}$ , то давление на нем достигнет максимально возможной величины. Такой гидравлический удар называется *прямым*.

Определим давление прямого гидравлического удара. Рассмотрим трубопровод длиной  $L$  с внутренним радиусом  $r_0$  и толщиной стенки  $\delta$ . При внезапном останове потока жидкости его кинетическая энергия затрачивается на работу по расширению стенок трубы и на работу сжатия жидкости внутри трубы. Кинетическая энергия жидкости, содержащейся в трубе, найдется как

$$K = m \frac{w^2}{2} = \rho \pi r_0^2 L \frac{w^2}{2}. \quad (8.59)$$

Элементарная работа  $dA_l$ , затрачиваемая на перемещение стенок трубы на величину  $dr$ , равна произведению силы внутреннего давления жидкости, действующей на стенку трубы после удара  $F$ , на деформацию стенки:

$$dA_l = F dr = 2\pi r L p dr. \quad (8.60)$$

Выразим элементарную деформацию стенок трубы  $dr$  через приращение давления  $dp$ . Для этого запишем изменение напряжений в стенке трубы  $d\sigma$  при ее деформации, используя закон Гука

$$d\sigma = E_{ct} \frac{dr}{r}, \quad (8.61)$$

где  $E_{ct}$  – модуль упругости материала стенки трубы.

С другой стороны это растягивающее напряжение равно отношению приращения силы внутреннего давления, равной (в расчете 1 м длины)  $2rdp$  и действующей в продольном сечении трубы, на площадь этого сечения  $2\delta$  (где  $\delta$  - толщина стенки трубы). То есть

$$d\sigma = \frac{2rdp}{2\delta} = \frac{rdp}{\delta}. \quad (8.62)$$

Из (8.61) и (8.62) находим

$$dr = \frac{r^2}{E_{ct}\delta} dp. \quad (8.63)$$

Подставив (8.63) в (8.60), получим

$$dA_l = 2\pi L p \frac{r^3}{E_{ct}\delta} dp. \quad (8.64)$$

Учитывая, что в приведенных выражениях  $p$  – это избыточное давление, и принимая приближенно  $r = r_0$ , проинтегрируем (8.64):

$$A_l = \int_0^p 2\pi L \frac{r_0^3}{E_{ct}\delta} p dp \approx 2\pi L \frac{r_0^3}{E_{ct}\delta} \int_0^p p dp = \frac{\pi L r_0^3 p^2}{E_{ct}\delta}. \quad (8.65)$$

Найдем работу, затрачиваемую на сжатие жидкости  $A_2$ . По определению работы сжатия единицы объема среды имеем

$$dA_{02} = p d\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (8.66)$$

В соответствии с законом Гука изменение напряжения (давления) в жидкости  $dp$  при изменении ее объема  $d(1/\rho)$  равно

$$dp = E_{ж} d\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (8.67)$$

где  $E_{ж}$  – модуль упругости жидкости.

Подставив (8.67) в (8.66) и интегрируя полученное выражение, получим

$$A_{02} = \int_0^p \frac{p}{E_{ж}} dp = \frac{1}{2} \frac{p^2}{E_{ж}}. \quad (8.68)$$

Тогда работа сжатия всего объема жидкости в трубопроводе

$$A_2 = A_{02} \pi r_0^2 L = \frac{p^2}{2E_{ж}} \pi r_0^2 L. \quad (8.69)$$

В соответствии с теорией Н.Е Жуковского

$$K = A_l + A_2, \quad (8.70)$$

или

$$\rho \pi r_0^2 L \frac{w^2}{2} = \frac{\pi r_0^3}{E_{ct}\delta} L p^2 + \frac{\pi r_0^2}{2 E_{ж}} L p^2. \quad (8.71)$$

Решая (8.71) относительно  $p$ , находим

$$p = \rho w \sqrt{\frac{E_{ж}}{\rho \left( \frac{2r_0 E_{ж}}{\delta E_{ct}} + 1 \right)}}. \quad (8.72)$$

Величину

$$E_{пр} = \frac{E_{ж}}{\frac{2r_0 E_{ж}}{\delta E_{ct}} + 1} \quad (8.73)$$

называют приведенным модулем упругости.

Скорость распространения волны сжатия-разрежения в упругой среде определяется, как

$$c = \sqrt{E/\rho}, \quad (8.74)$$

где  $E$  – модуль упругости среды. Тогда величину

$$c_{уд} = \sqrt{\frac{E_{пр}}{\rho}} \quad (8.75)$$

можно считать скоростью распространения ударной волны. С учетом введенных обозначений окончательно получаем соотношение

$$p = \rho w c_{уд}, \quad (8.76)$$

называемое формулой Жуковского.

Если время закрытия клапана  $t_{кл}$  больше, чем время фазы гидроудара  $t_{уд}$ , то повышение давления  $\Delta p$  в системе при гидроударе можно оценить по формуле

$$\Delta p = \rho w c_{уд} \frac{t_{уд}}{t_{кл}}. \quad (8.77)$$

### 8.9. Условия перехода скорости газа через скорость звука

Найдем условие, при котором газ может разогнаться до скорости большей скорости звука при течении по каналу переменного сечения. Рассмотрим стационарное течение идеального газа в канале переменного сечения, считая, для простоты, что газодинамические параметры зависят только от одной координаты, совпадающей с осью канала. То есть предполагаем, что в каждом из поперечных сечений газодинамические параметры распределены однородно. Уравнение неразрывности для данного случая имеет вид

$$\rho u F = \text{const}, \quad (8.78)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения канала. Продифференцируем это уравнение и разделим обе части на постоянную величину  $\rho u F$ . В результате получим

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{F}{F} = 0. \quad (8.79)$$

Представим первый член уравнения (8.79) в виде

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{\rho}. \quad (8.80)$$

Выразим отношение  $dp/\rho$  из уравнения Бернулли (4.63). Учитывая, что газ в рассматриваемом случае технической работы не совершает  $de_{\text{тех}} = 0$ , течение стационарное  $de_t = 0$ , а для идеального газа  $de_u = 0$  и, пренебрегая потенциальной энергией «положения», получим:

$$\frac{dp}{\rho} = -d\left(\frac{u^2}{2}\right). \quad (8.81)$$

Подставим (8.81), (8.80) в (8.79) и учтем, что производная плотности по давлению равна обратной величине квадрата скорости звука, то есть  $d\rho/dp = 1/a^2$ . Тогда получим

$$-\frac{1}{a^2} d\left(\frac{u^2}{2}\right) + \frac{du}{u} + \frac{dF}{F} = 0. \quad (8.82)$$

Или, проведя преобразования,

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{du}{u} = -\frac{dF}{F}. \quad (8.83)$$

Отношение скорости течения газа к местной скорости звука носит название числа Маха и обозначается через  $M$ :

$$M = \frac{u}{a}. \quad (8.84)$$

Течения со скоростями  $u < a$  ( $M < 1$ ) называются *дозвуковыми*, а при  $u > a$  ( $M > 1$ ) – *сверхзвуковыми*. При достижении потоком скорости звука  $M = 1$  имеет место *звуковое течение*.

Число Маха играет важную роль в теории газовой динамики. Оно выступает и как газодинамический параметр и может использоваться, как критерий подобия. Рассматриваемое, как критерий подобия,  $M$  показывает, какое влияние на газодинамические параметры оказывает сжимаемость среды. Если течение происходит с числами Маха  $M < \sim 0,1 \dots 0,3$ , то для большинства практических задач сжимаемость можно не учитывать и для решения использовать модель идеальной жидкости.

С использованием данного параметра уравнение (8.83) примет вид

$$(1 - M^2) \frac{du}{u} = - \frac{dF}{F}. \quad (8.85)$$

Это уравнение носит название *уравнения Гюгонио*, из которого, видно, что для ускорения дозвукового потока требуется уменьшать площадь сечения канала, а для ускорения сверхзвукового – увеличивать. Таким образом, для получения сверхзвукового потока канал должен иметь сужающуюся дозвуковую часть ( $M < 1$ ), при этом  $du > 0$  и поток ускоряется. В минимальном сечении скорость потока достигает скорости звука ( $M = 1$ ). В последующей расширяющейся части канала течение сверхзвуковое ( $M > 1$ ) и поток продолжает ускоряться. Круглый канал такой формы называется *соплом Лаваля*.

Если где-нибудь в потоке газа скорость  $u$  станет равна местной скорости звука  $a$ , то такая скорость газа  $u = a^*$  называется критической; критическими называются и соответствующие значения  $p^*$ ,  $\rho^*$ ,  $T^*$  давления, плотности и температуры. Живое сечение потока, где скорость течения газа достигает критической скорости, называется *критическим сечением*. Поэтому минимальное сечение канала  $F^*$  называется критическим.

## 8.10. Параметры торможения. Газодинамические функции

Из (4.92) видно, что если газовую струю полностью затормозить, то теплосодержание достигнет максимального значения

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2}, \quad (8.86)$$

которое называют *полным теплосодержанием*. Соответствующую температуру газа<sup>\*</sup>

$$T_0 = \frac{h_0}{c_p} \quad (8.87)$$

называют *температурой торможения* (или *температурой адиабатически заторможенного потока*). Температуру движущегося потока называют *статической температурой*. Температура торможения выражается через статическую температуру потока формулой, следующей из (8.86) и (1.31)

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p}. \quad (8.88)$$

Преобразуем (8.88) с использованием формулы Майера (1.35):

---

<sup>\*</sup> Теплосодержание связано с температурой формулой (1.31).

$$\begin{aligned}
T_0 &= T + \frac{u^2}{2c_p} \frac{R c_v}{R c_v} = T + \frac{u^2}{2c_p} \frac{c_p - c_v}{R} \frac{c_v}{c_v} = T + \frac{c_p - c_v}{2c_v} \frac{u^2}{c_p/c_v R} = \\
&= T \left( 1 + \frac{k-1}{2} \frac{u^2}{kRT} \right) = T \left( 1 + \frac{k-1}{2} \frac{u^2}{a^2} \right),
\end{aligned} \tag{8.89}$$

где  $a$  – скорость звука в рассматриваемой точке потока.

С использованием ранее введенного числа Маха (см. (8.84)), формула (8.89) может быть представлена в виде

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2. \tag{8.90}$$

Используя уравнение адиабаты:  $\rho_0 / \rho = (T_0 / T)^{\frac{1}{k-1}}$ ,  $p_0 / p = (T_0 / T)^{\frac{k}{k-1}}$  можно получить следующие выражения для определения *адиабатически заторможенной плотности*  $\rho_0$  и *давления*  $p_0$  через соответствующие *статические параметры* и число Маха:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad \frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{8.91}$$

Относительные функции

$$\tau(M) = \frac{T}{T_0} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-1}, \quad \varepsilon(M) = \frac{\rho}{\rho_0} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{k-1}}, \tag{8.92}$$

$$\pi(M) = \frac{p}{p_0} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{k}{k-1}},. \tag{8.93}$$

устанавливающие связь между текущими (статическими) параметрами потока и параметрами в состоянии торможения называются *газодинамическими функциями* адиабатического, изоэнтропического течения. Они заложены в функции числа Маха и широко применяются в практике инженерных расчетов газовых течений\*.

Интересно отметить, что в изоэнтропических формулах (8.91) содержится, как частный случай при  $M = 0$  формулы несжимаемой жидкости:

$$\rho = \rho_0 \text{ и } p + \frac{u^2}{2} = p_0. \tag{8.94}$$

Для того, чтобы показать это необходимо разложить правые части (8.91), в степенные ряды при малых  $M$  [2]. То есть число Маха может являться мерой сжимаемости движущейся среды. Так, если допустить ошиб-

\* Кроме перечисленных имеется широкий набор других, дополнительных газодинамических функций, расширяющих возможности расчетной оценки параметров газовых потоков.

ку от неучета сжимаемости 1 %, то число Маха в потоке не должно превышать  $M \leq 0,14$ . Таким образом, течение газа с невысокими скоростями можно рассматривать, как течение несжимаемой жидкости.

Поскольку скорость потока может быть как выше, так и ниже скорости звука, существует и такой режим, когда скорость потока равна скорости звука, то есть  $M = 1$ . Этот режим называется критическим. Ему соответствует значение температуры в потоке

$$T^* = \tau(1)T_0 = T_0 \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{-1} = T_0 \frac{2}{k+1}. \quad (8.95)$$

Само значение скорости звука критического режима отличается от скорости звука в заторможенном газе

$$\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} = \sqrt{\frac{2}{k+1}}, \quad (8.96)$$

откуда

$$a^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_0}. \quad (8.97)$$

Можно охарактеризовать степень преобразования теплосодержания в кинетическую энергию еще одним способом, поделив тепловой перепад на теплосодержание при критическом режиме, то есть

$$\frac{T_0 - T}{T^*} = \frac{h_0 - h}{h^*} = \frac{u^2/2}{c_p T^*} = \frac{u^2/2}{c_p T^* \frac{kR}{kR}} = \frac{u^2/2}{\left(a^*\right)^2 \frac{c_p}{k(c_p - c_v)}} = \frac{u^2}{\left(a^*\right)^2} \frac{k-1}{2}. \quad (8.98)$$

Отсюда находим отношение  $T/T_0$

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{u^2}{\left(a^*\right)^2}. \quad (8.99)$$

Отношение скорости потока  $u$  к критической скорости звука  $a^*$  называется *приведенной скоростью* или *скоростным коэффициентом*<sup>\*</sup>:

$$\lambda = \frac{u}{a_{\text{кр}}}. \quad (8.100)$$

С учетом введенного параметра  $\lambda$  формула (8.99) примет вид

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 = \tau(\lambda). \quad (8.101)$$

Из (8.101) следует, что при максимальном расширении газа, когда  $T = 0$ , скоростной коэффициент принимает максимальное значение

<sup>\*</sup> Используется также термин коэффициент скорости.

$$\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \quad (8.102)$$

Величина  $\lambda_{\max}$  позволяет найти максимальную скорость потока, достижимую при расширении до вакуума ( $p = 0$ ) в сопле Лаваля. Вспоминая определение скоростного коэффициента  $\lambda = u/a^*$  и выражение для критической скорости звука  $a^* = a_0 \sqrt{2/(k+1)}$ , находим

$$u_{\max} = \lambda_{\max} a^* = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{kRT_0} \sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0} = \sqrt{2h_0}, \quad (8.103)$$

где индексом «0» обозначены параметры адиабатически заторможенного потока. Из (8.103) видно, что максимально достижимая в сопле Лаваля скорость газового потока определяется величиной его заторможенной энталпии. Например, воздух, имеющий температуру торможения  $T_0 = 300 K$ , невозможно разогнать до скорости более, чем  $\approx 775$  м/с.

Введенные ранее газодинамические функции могут быть выражены и через скоростной коэффициент. Относительная температура  $\tau(\lambda)$  находится по формуле (8.101), а относительная плотность  $\varepsilon(\lambda)$  и давление  $\pi(\lambda)$  находятся из нее при помощи уравнения адиабаты

$$\varepsilon(\lambda) = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad \pi(\lambda) = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (8.104)$$

Приведенная скорость  $\lambda$ , как и число  $M$ , считается критерием подобия для газовых течений, характеризующим степень преобразования теплосодержания в кинетическую энергию. Между ними существует однозначная взаимосвязь, которую можно получить путем следующих преобразований

$$M^2 = \frac{u^2}{a^2} = \frac{u^2}{(a^*)^2} \frac{(a^*)^2}{a^2} \frac{a_0^2}{a_0^2} = \lambda^2 \left(\frac{a^*}{a_0}\right)^2 \frac{a_0^2}{a^2} = \lambda^2 \frac{2}{k+1} \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 = \frac{\lambda^2 \frac{2}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}. \quad (8.105)$$

Обратное преобразование находится аналогично и выражается зависимостью

$$\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}. \quad (8.106)$$

## 8.11. Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятию плавноизменяющееся течение, каковы его свойства?
2. Запишите уравнение Бернулли для потока несжимаемой жидкости.

3. Дайте определение коэффициента Кориолиса. Каковы его значения для ламинарного и турбулентного режимов течения?
4. Дайте определение понятию полное давление, статическое давление, динамическое давление.
5. Дайте определение понятиям гидродинамический (полный) напор, пьезометрический напор, динамический напор, потеря напора.
6. Дайте геометрическую трактовку уравнения Бернулли.
7. В чем заключается природа потерь полного давления (напора)?
8. Запишите обобщенную зависимость для расчета потерь полного давления при течении жидкости в каналах.
9. Запишите формулу Дарси-Вейсбаха.
10. Запишите формулу Вейсбаха для расчета потерь давления на местном сопротивлении.
11. Опишите качественную структуру пограничного слоя и потока в целом при течении жидкости в канале при ламинарном и турбулентном режимах.
12. Каково критическое число Рейнольдса при течении жидкости в каналах?
13. Опишите основные области диаграммы Никурадзе.
14. Запишите формулу Борда для расчета потерь давления при внезапном расширении потока.
15. В чем причина взаимного влияния местных сопротивлений на величину потерь давления?
16. Что представляет собой инерционный напор, каков его знак?
17. Запишите формулу Жуковского для определения давления при прямом гидравлическом ударе.
18. Запишите уравнение Гюгонио. Какова форма проточной части сопла Лаваля?
19. Каков физический смысл числа Маха газового потока?
20. Дайте определение понятиям: параметры торможения, критические параметры.
21. Дайте определение основных газодинамических, изоэнтропических функций.

## ГЛАВА 9. РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ

### 9.1. Классификация трубопроводов

Встречающиеся в технике трубопроводы можно условно разделить на две группы:

- простые трубопроводы, состоящие из одной трубы с постоянным по длине расходом;
- сложные трубопроводы, образующиеся в результате последовательного соединения, разветвлений, параллельных соединений, боковых отводов или замыканий в кольца труб разных длин и диаметров.

В основе расчета любого трубопровода лежит задача о расчете простого трубопровода, постоянного по всей длине диаметра. На практике задача расчета трубопроводов встречается обычно в следующих трех постановках.

1. Требуется определить перепад давления  $\Delta p$  в трубопроводе диаметром  $d$  и длиной  $L$ . Заданы также нивелирные высоты  $z_1$  и  $z_2$  начала и конца трубопровода, расход и теплофизические свойства жидкости.

2. Требуется найти расход жидкости  $Q$  через трубопровод, геометрические характеристики которого заданы, и известен перепад давления  $\Delta p$ .

3. Определить диаметр  $d$ , если все остальные геометрические характеристики трубопровода, а также кинематические, теплофизические параметры жидкости и перепад давления известны.

Исходными уравнениями для расчета трубопроводов при транспортировке несжимаемых жидкостей являются: уравнение Бернулли, уравнение неразрывности, формулы для расчета потерь полного давления по длине трубопроводов, а также на местных сопротивлениях. Для газов дополнительно используется уравнение состояния, например, Клапейрона-Менделеева. Если на трубопроводе установлен нагнетатель, то должна быть задана его рабочая характеристика – зависимость создаваемого им напора от расхода.

### 9.2. Расчет простого трубопровода

Рассмотрим установившееся течение несжимаемой жидкости по трубопроводу длиной  $L$  постоянного диаметра  $d$ . Уравнение Бернулли, записанное для сечений на входе и на выходе из трубопровода, имеет вид

$$\rho g z_1 + p_1 + \frac{\alpha_1 \rho w_1^2}{2} = z_2 + p_2 + \frac{\alpha_2 \rho w_2^2}{2} + \Delta p_{\text{tp}} + \Delta p_{\text{M}}. \quad (9.1)$$

Так как  $d = \text{const}$ , то  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $w_1 = w_2$  и уравнение (9.1) примет вид

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1) + \Delta p_{\text{tp}} + \Delta p_{\text{M}}, \quad (9.2)$$

где  $\Delta p$  – перепад статического давления;  $\Delta p_{\text{тр}}$  – потери полного давления на трение по длине трубопровода;  $\Delta p_m$  – потери на местных сопротивлениях.

Суммарные потери давления (на трение и местные сопротивления) найдутся, как

$$\Delta p_\Sigma = \Delta p_{\text{тр}} + \Delta p_m = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho w^2}{2} + \sum_i \xi_i \frac{\rho w^2}{2} = \frac{\rho w^2}{2} \left( \lambda \frac{L}{d} + \sum_i \xi_i \right). \quad (9.3)$$

Среднерасходная скорость движения жидкости находится из соотношения для объемного расхода

$$w = \frac{4Q}{\pi d^2}. \quad (9.4)$$

Подставив (9.4) в (9.3), получим

$$\Delta p_\Sigma = \frac{8\rho Q^2}{\pi^2 d^4} \left( \lambda \frac{L}{d} + \sum_i \xi_i \right). \quad (9.5)$$

Порядок решения сформулированных выше задач расчета трубопровода следующий.

1. Первая задача. Рассчитывается скорость движения жидкости по формуле (9.4) и число Рейнольдса  $Re = \rho w d / \mu$ . По известному числу  $Re$  определяется режим течения и находится коэффициент гидравлического трения  $\lambda$ . Определяются коэффициенты потерь полного давления на местных сопротивлениях  $\xi_i$  и находятся суммарные потери давления  $\Delta p_\Sigma$  по формуле (9.5). По формуле (9.2) определяется искомый перепад статического давления  $\Delta p$ .

2. Вторая задача. В данном случае перепад статического давления  $\Delta p$  задан, поэтому из уравнения (9.2) могут быть определены суммарные потери давления  $\Delta p_\Sigma$ . Теперь из уравнения (9.5) может быть определен искомый расход  $Q$ . Так как входящий в уравнение (9.5) коэффициент трения  $\lambda$  (а зачастую и коэффициент потерь на местном сопротивлении  $\xi_i$ ) зависит от расхода и эта зависимость нелинейная, то в общем случае оно в явном виде относительно  $Q$  не разрешается. Поэтому для определения расхода необходимо применить итерационную процедуру, например, по формуле

$$Q^{(n)} = \sqrt{\frac{\pi^2 d^4 \Delta p_p}{8\rho} \left[ \lambda(Q^{(n-1)}) \frac{l}{d} + \sum_i \xi_i(Q^{(n-1)}) \right]^{-1}}, \quad (9.6)$$

где  $\Delta p_p = \rho g (z_1 - z_2) + p_1 - p_2$  – располагаемый (рабочий) перепад давлений на концах трубопровода,  $n$  – номер итерации;  $Q^{(n)}$  – расход на  $n$ -ой итерации.

3. Третья задача. Данная задача также является итерационной, так как от искомой величины диаметра  $d$  зависят коэффициент трения  $\lambda$  и коэффициент местных потерь  $\xi_i$ . Формула итерационного поиска диаметра может быть, например, следующей

$$d^{(n)} = \sqrt{\frac{Q}{\pi} \sqrt{\frac{8\rho}{\Delta p_p} \left[ \lambda(d^{(n-1)}) \frac{l}{d^{(n-1)}} + \sum_i \xi_i(d^{(n-1)}) \right]}}. \quad (9.7)$$

### 9.3. Расчет сложного трубопровода

**Последовательное соединение труб.** Принципиальная схема такого сложного трубопровода, состоящая из нескольких последовательно соединенных труб различного диаметра, приведена на рис. 9.1.

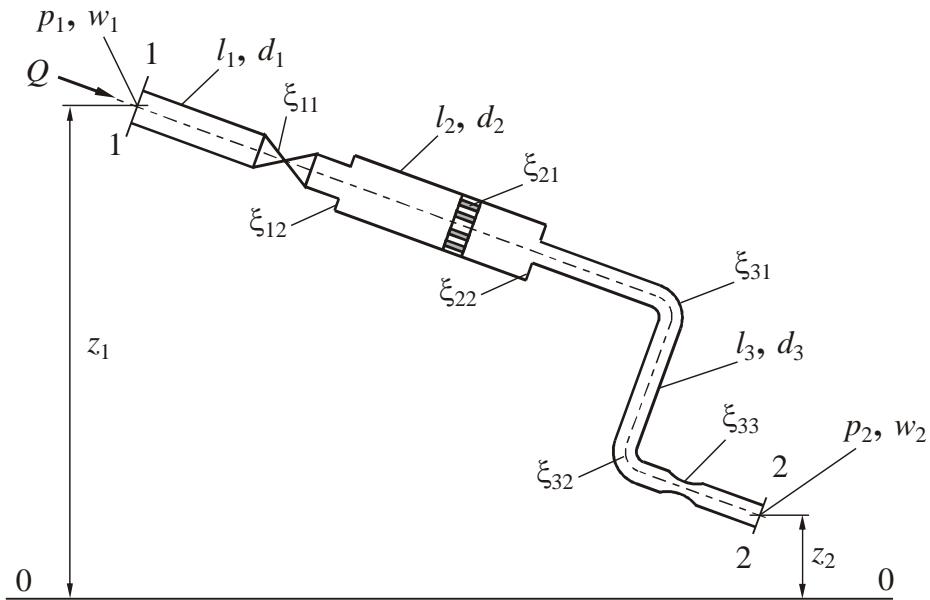


Рис. 9.1. Схема сложного трубопровода с последовательным соединением труб

Уравнение Бернулли для расчетных сечений 1–1 и 2–2 имеет вид

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2} + \rho g z_2 + \sum_i \left( \Delta p_{tpi} + \sum_j \Delta p_{mji} \right), \quad (9.8)$$

где  $\Delta p_{mji}$  – потери давления на  $j$ -ом местном сопротивлении в  $i$ -ой трубе.

Трубы, входящие в трубопровод, имеют различный диаметр. Поэтому потери на трение должны определяться для каждой  $i$ -ой трубы отдельно:

$$\Delta p_{tpi} = \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \rho \frac{w_i^2}{2}. \quad (9.9)$$

Формула для расчета местных потерь имеет традиционную структуру

$$\Delta p_{mji} = \xi_{ij} \rho \frac{w_i^2}{2}. \quad (9.10)$$

Скорость жидкости в каждой из труб равна

$$w_i = \frac{Q}{F_i} = \frac{4Q}{\pi d_i^2}, \quad (9.11)$$

где  $F_i$  – площадь живого сечения  $i$ -ой трубы.

Следовательно, скорость в каждой из труб можно выразить через скорость  $w_k$  в какой-то одной из труб, принятой за расчетную:

$$w_i = w_k \frac{F_k}{F_i}. \quad (9.12)$$

Подставив (9.12) в (9.9) и (9.10), получим

$$\Delta p_{tpi} = \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \rho \frac{F_k^2}{F_i^2} \frac{w_k^2}{2}, \quad \Delta p_{mij} = \xi_{ij} \rho \frac{F_k^2}{F_i^2} \frac{w_k^2}{2}, \quad (9.13)$$

где  $\xi_{ij}$  – коэффициент потерь давления на  $j$ -ом местном сопротивлении в  $i$ -ой трубе.

Сумма статического и скоростного давления представляет собой полное давление потока  $p_0 = p + \rho a w^2 / 2$ .

С учетом полученных выражений и последнего соотношения уравнение (9.8) можно записать в виде

$$\Delta p_p = \rho F_k^2 \frac{w_k^2}{2} \left[ \sum_i \left( \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{1}{F_i^2} + \sum_j \frac{\xi_{ij}}{F_i^2} \right) \right] = \frac{\rho Q^2}{2} \left[ \sum_i \left( \frac{\lambda_i}{F_i^2} \frac{l_i}{d_i} + \frac{1}{F_i^2} \sum_j \xi_{ij} \right) \right], \quad (9.14)$$

где  $\Delta p_p = \rho g (z_1 - z_2) + p_{10} - p_{20}$  – располагаемый (рабочий) перепад давления;  $p_{10}, p_{20}$  – полное давление в первом и втором сечении трубопровода.

Введем  $\eta_{tp}$  – коэффициент расхода трубопровода

$$\eta_{tp} = \frac{1}{F_k \sqrt{\sum_i \left( \frac{\lambda_i l_i}{d_i F_i^2} + \frac{1}{F_i^2} \sum_j \xi_{ij} \right)}}. \quad (9.15)$$

Тогда можем записать следующие выражения

$$w_k = \eta_{tp} \sqrt{\frac{2 \Delta p_p}{\rho}}, \quad Q = Q_k = w_k F_k = \eta_{tp} F_k \sqrt{\frac{2 \Delta p_p}{\rho}}. \quad (9.16)$$

С использованием приведенных формул можно решать сформулированные выше задачи расчета для каждой из труб, входящих в трубопровод. Алгоритм расчета остается такой же, как и для простого трубопровода постоянного диаметра.

**Параллельное соединение труб.** Рассмотрим трубопровод, имеющий несколько ветвей, включенных параллельно между двумя точками, рис. 9.2.

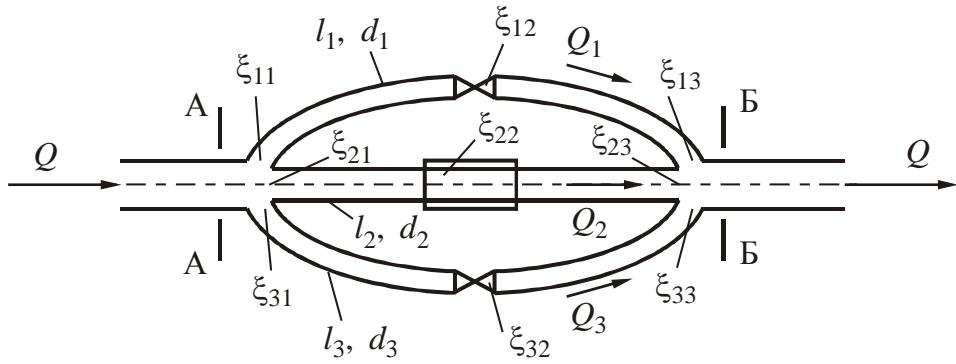


Рис. 9.2. параллельное соединение трубопроводов

Будем считать, что для такого трубопровода задан общий расход  $Q$ , геометрические характеристики каждой ветви между сечениями А и Б. Найдем распределение расходов  $Q_i$  по ветвям, входящим в параллельный пучок, и перепад давления между точками А и Б  $\Delta p_p$ .

Для каждой из ветвей значение давления в сечениях А и Б одинаково (см. раздел 8.1), следовательно потеря давления и располагаемый перепад  $\Delta p_p$  между этими точками также одни и те же. Тогда, пользуясь (9.16), для каждой  $i$ -ой ветви можем записать

$$Q_i = \eta_{tpi} F_i \sqrt{\frac{2\Delta p_p}{\rho}}, \quad i = 1 \dots n. \quad (9.17)$$

Сумма расходов по ветвям равна общему расходу  $Q$ :

$$Q = \sum_i^n Q_i = \sqrt{\frac{2\Delta p_p}{\rho}} \sum_i^n (\eta_{tpi} F_i). \quad (9.18)$$

Система (9.17)...(9.18) замкнута, так как включает  $n + 1$  уравнение для определения  $n$  неизвестных расходов и перепада давлений  $\Delta p_p$ . Существенной трудностью при решении этой системы уравнений является ее нелинейность. Поэтому в общем случае ее приходится решать итерационным методом.

С использованием приведенных формул могут быть решены все три сформулированные выше задачи расчета для данного сложного трубопровода.

1. Первая задача – задача определения перепада и распределения расходов по ветвям трубопровода может быть решена следующим образом. Выразим из (9.18)  $\Delta p_p$  и организуем итерации по перепаду давления

$$\Delta p_p^{(n+1)} = \frac{\rho}{2} \left[ \frac{Q}{\sum_{i=1}^n \eta_{tpi} (\Delta p_p^{(n)}) F_i} \right]^2, \quad (9.19)$$

где  $n$  – номер итерации;  $\Delta p_p^{(n)}$  – перепад давления на  $n$ -ой итерации.

Так как коэффициент расхода в свою очередь зависит от величины расхода, то есть  $\eta_{\text{tp}i} = \eta_{\text{tp}i}(Q_i)$ , то при выполнении каждой итерации по  $\Delta p_p$  проводим внутренние итерации по расходу в каждой ветви  $Q_i$  по формуле

$$Q_i^{(s+1)} = \eta_{\text{tp}i} \left( Q_i^{(s)} \right) F_i \sqrt{\frac{2\Delta p_p}{\rho}}, \quad i = 1 \dots n, \quad (9.20)$$

где  $s$  – номер внутренней итерации. То есть по алгоритму, аналогичному тому, который был использован при решении второй задачи для простого трубопровода.

2. Вторая задача для рассматриваемого трубопровода проще первой, так как требуется найти распределение расходов по ветвям при заданном перепаде. То есть она представляет собой задачу, решаемую на одной итерации по  $\Delta p_p$  в только что рассмотренном выше случае.

3. Третья задача – итерационный подбор диаметра  $d_{kj}$  (диаметра  $k$ -ой трубы в  $j$ -ой ветви трубопровода) по заданной величине расхода  $Q_i$  и перепаду давления  $\Delta p_p$  представляет собой набор независимых задач третьего типа для сложного трубопровода с последовательным соединением труб, решение которых рассмотрено ранее. Количество этих задач равно количеству параллельных ветвей.

#### 9.4. Особенность работы сифонного трубопровода

Сифон – это самотечный трубопровод, движение жидкости в котором происходит за счет разности уровней, рис. 9.3.

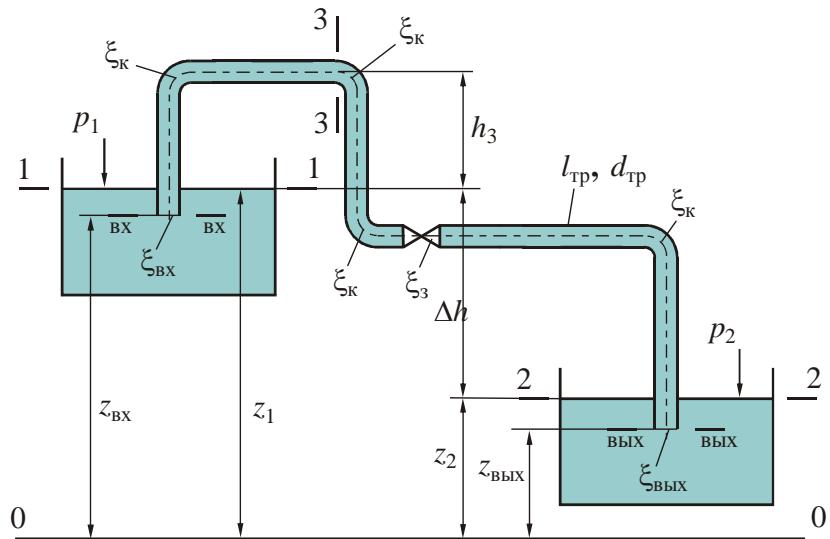


Рис. 9.3. Схема сифонного трубопровода

Если течение жидкости происходит из одного резервуара в другой, как показано на рис. 9.3, и скоростью изменения уровня жидкости в резервуаре

можно пренебречь, то разность полных давлений в начальном и конечном сечениях трубопровода можно связать с разностью уровней в резервуарах.

Запишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2.

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho}{2} \left( \frac{Q}{F} \right)^2 \left( \lambda \frac{l_{\text{tp}}}{d_{\text{tp}}} + 4\xi_k + \xi_3 + \xi_{\text{вх}} + \xi_{\text{вых}} \right), \quad (9.21)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения трубопровода;  $\xi_k, \xi_3, \xi_{\text{вх}}, \xi_{\text{вых}}$  – потери полного давления на коленах трубопровода, на задвижке, на вход в трубопровод и на выход из него соответственно.

Учитывая, что  $z_1 - z_2 = \Delta h$  есть разность уровней жидкости в резервуарах и обозначая  $\Delta p = p_1 - p_2$ , запишем (9.21) в виде

$$\rho g \Delta h + \Delta p = \frac{\rho}{2} \left( \frac{Q}{F} \right)^2 \left( \lambda \frac{l_{\text{tp}}}{d_{\text{tp}}} + \xi_{\Sigma} \right), \quad (9.22)$$

где  $\xi_{\Sigma} = \xi_{\text{вх}} + 4\xi_k + \xi_3 + \xi_{\text{вых}}$  – сумма коэффициентов потерь полного давления на местных сопротивлениях трубопровода;

Формула (9.22) показывает, что расход жидкости через сифон определяется разностью уровней в резервуарах и перепадом давлений в них и не зависит от высоты подъема  $h_3$  жидкости. Однако, чем больше высота подъема, тем меньше величина статического давления в данном сечении трубопровода. И если давление упадет ниже давления насыщенных паров  $p_{\text{нас}}$ , произойдет нарушение сплошности течения. Это вызовет срыв потока и сифон прекратит работу. Поэтому для нормальной работы сифона необходимо, чтобы давление в самой высокой и одновременно наиболее удаленной от напорного резервуара точке трубопровода, где разрежение наибольшее, превышало давление насыщенных паров жидкости при данной температуре  $p_{\text{нас}}$ . На рис. 9.3 эта точка соответствует сечению 3–3. Записав уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 3–3, получим условие нормальной работы сифона

$$p_3 = p_1 - \rho g h_3 - \frac{\rho}{2} \left( \frac{Q}{F} \right)^2 \left( 1 + \lambda \frac{l_{1-3}}{d} + \xi_{1-3} \right) > p_{\text{нас}}, \quad (9.23)$$

где  $l_{1-3}, \xi_{1-3}$  – длина трубопровода и сумма коэффициентов местных потерь от входа в трубопровод до сечения 3–3 соответственно.

Для запуска сифона в работу его необходимо предварительно заполнить жидкостью от независимого источника или создать в нем разрежение, достаточное для подъема жидкости на максимальную высоту трубопровода.

## 9.5. Работа нагнетателя в сети

В подавляющем большинстве встречающихся в технических приложениях случаев движение жидкости либо газа по системе трубопроводов

осуществляется под действием нагнетателя (насоса, компрессора, вентилятора и т. д.) с помощью которого создается определенная разность полных давлений по концам данного участка сети, рис. 9.4. Часть трубопровода до насоса называется *всасывающим*, после насоса – *нагнетательным* или *напорным*. Для определения перепада давления  $\Delta p_{\text{H}}$ , который нагнетатель должен создать для обеспечения заданных параметров движения среды в сети трубопроводов, запишем уравнение Бернулли для всего трубопровода в целом, то есть для участка 1–4.

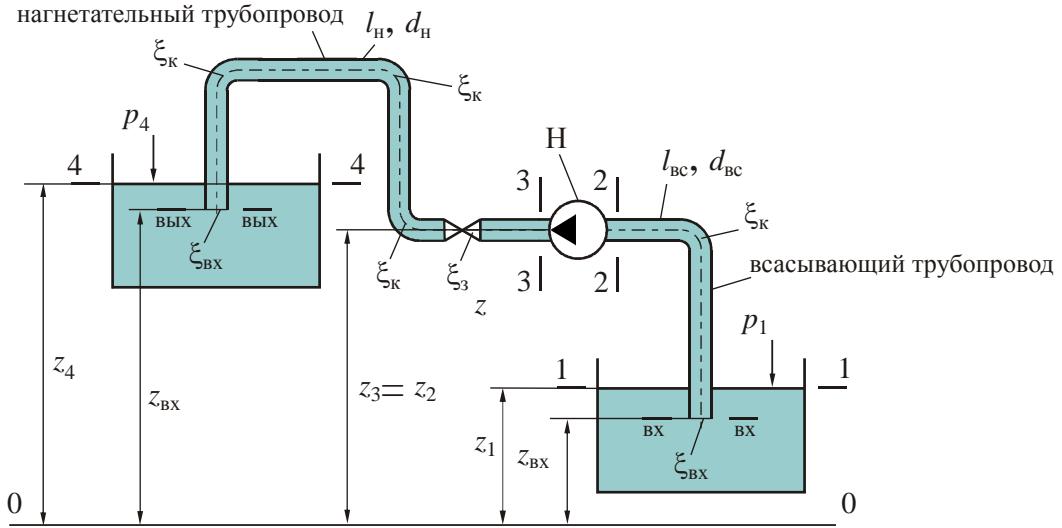


Рис. 9.4. Участок сети с нагнетателем: Н – нагнетатель

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} + \Delta p_{\text{H}} = \rho g z_4 + p_4 + \rho \frac{\alpha_4 w_4^2}{2} + \Delta p_{1-4}, \quad (9.24)$$

где  $\Delta p_{1-4}$  – потери полного давления на участке сети от сечения 1–1 до сечения 4–4. Отсюда потребный перепад полного давления, создаваемый нагнетателем равен

$$\Delta p_{\text{H}} = \rho g (z_4 - z_1) + (p_4 - p_1) + \rho \frac{\alpha_4 w_4^2}{2} - \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} + \Delta p_{1-4} \quad (9.25)$$

или, обозначая полное давление, как  $p_0 = p + \rho \alpha w^2 / 2$ ,

$$\Delta p_{\text{H}} = \rho g (z_4 - z_1) + (p_{04} - p_{01}) + \Delta p_{1-4}. \quad (9.26)$$

Правая часть выражений (9.25) и (9.26) представляет собой изменение удельной (отнесенной к 1 м<sup>3</sup>) полной энергии транспортируемой среды при ее переходе от начального к конечному сечению трубопроводной сети плюс необратимые путевые потери этой энергии. Обозначим ее через  $\Delta p_{\text{сеть}}$ . Если  $\Delta p_{\text{сеть}} > 0$ , то есть запас энергии в начальном сечении сети недостаточен, чтобы обеспечить требуемый уровень энергии (полного давления) в конечном сечении и компенсировать путевые потери, то необходима установка нагнетателя. Величина  $\Delta p_{\text{сеть}}$  зависит от расхода  $Q$ , так как от

расхода зависит как динамическое давление, так и путевые потери, то есть  $\Delta p_{\text{сеть}} = f(Q)$ . Эта зависимость называется *характеристикой сети*. Для турбулентного режима течения, пользуясь (9.14) и (9.25), характеристику сети можно представить в виде следующей квадратичной зависимости от расхода

$$\Delta p_{\text{сети}} = \rho g (z_{\text{вых}} - z_{\text{вх}}) + (p_{\text{вых}} - p_{\text{вх}}) + \frac{\rho}{2} \left[ \sum_i \left( \frac{\lambda_i}{F_i^2} \frac{l_i}{d_i} + \frac{1}{F_i^2} \sum_j \xi_{ij} \right) \right] Q^2. \quad (9.27)$$

Здесь индексы «вх» и «вых» относятся к начальному и конечному сечению сети соответственно.

В частном случае развитого турбулентного режима течения жидкости в трубопроводе коэффициенты  $\lambda_i$  и  $\xi_{ij}$  не зависят от числа Рейнольдса (то есть не зависят от расхода) и характеристика сети приобретает вид параболы

$$\Delta p_{\text{сети}} = a + bQ^2, \quad (9.28)$$

где  $a = \rho g (z_{\text{вых}} - z_{\text{вх}}) + (p_{\text{вых}} - p_{\text{вх}})$ ,  $b = \frac{\rho}{2} \left[ \sum_i \left( \frac{\lambda_i}{F_i^2} \frac{l_i}{d_i} + \frac{1}{F_i^2} \sum_j \xi_{ij} \right) \right]$ . Вид

этой зависимости показан на рис. 9.5.

Перепад давления, создаваемый нагнетателем, также в общем случае является функцией расхода  $\Delta p_n = f(Q)$ . Эта зависимость называется *характеристикой нагнетателя*. Вид ее зависит от типа и конструкции нагнетателя. Типичная характеристика центробежного насоса при постоянной частоте вращения рабочего колеса  $n$  показана на рис. 9.5.

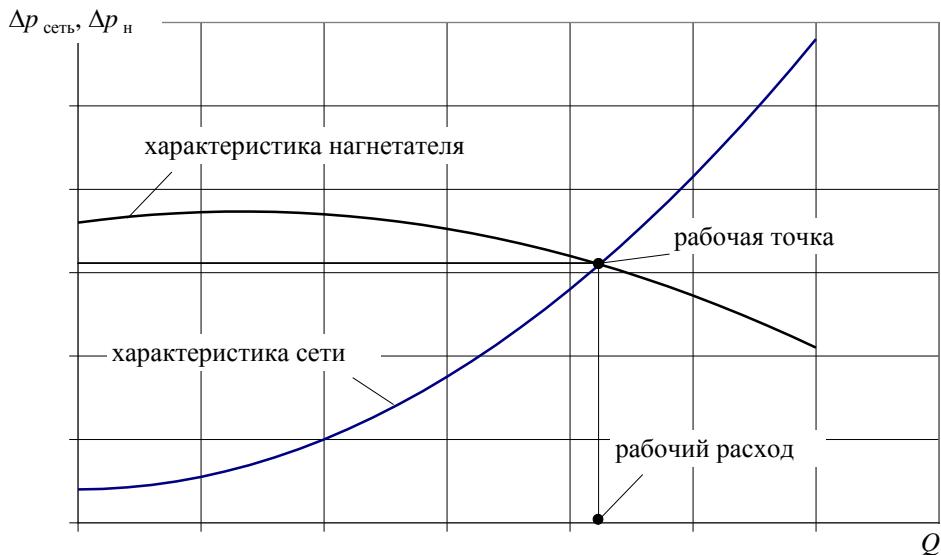


Рис. 9.5. Взаимное расположение характеристики сети и нагнетателя

В стационарном режиме, в соответствии с (9.25), перепад давлений, создаваемый нагнетателем, равен перепаду давлений, необходимому для работы сети. То есть расход и перепад давлений в этом режиме равны координатам точки пересечения характеристик сети и нагнетателя (рис. 9.5), которая называется *рабочей точкой*.

Если трубопроводная сеть представляет собой замкнутую на себя (закольцованную) систему, то в этом случае в уравнении (9.26) мы должны принять  $p_{01} = p_{04}$  и  $z_1 = z_4$ . То есть в закольцованной системе давление, развиваемое нагнетателем  $\Delta p_h$  должно равняться потерям полного давления в сети  $\Delta p_{tp} + \Delta p_m$ .

**Работа всасывающего трубопровода.** Проанализируем работу всасывающего трубопровода насоса. Для этого составим уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2 сети, пренебрегая скоростью перемещения уровня в баке всасывания, см. рис. 9.4.

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2} + \Delta p_{1-2} \quad (9.29)$$

или

$$p_2 = p_1 - \rho g (z_2 - z_1) - \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2} - \Delta p_{1-2}, \quad (9.30)$$

где  $\Delta p_{1-2}$  – потери полного давления во всасывающем трубопроводе.

Из уравнения (9.30) видно, что работа всасывающей линии обеспечивается давлением  $p_1$  в баке, которое тратится на подъем жидкости на высоту  $z_2 - z_1$ , создание динамического давления  $p_{d2} = \rho \alpha_2 w_2^2 / 2$ , преодоление сопротивления трубопровода  $\Delta p_{1-2}$  и должно обеспечивать безкавитационную работу насоса.

**Регулирование расхода.** Как следует из приведенного выше определения рабочей точки, изменение расхода, создаваемого насосом при его работе в сети, может быть осуществлено путем изменения характеристики сети (изменения ее гидравлического сопротивления). Пусть нам необходимо уменьшить расход от  $Q_1$  до  $Q_2$ . Для этого требуется так изменить гидравлическое сопротивление сети, чтобы ее характеристика пересекла характеристику насоса в точке с расходом  $Q_2$  (рис. 9.6). При этом, так как новая рабочая точка должна лежать на характеристике насоса, то давление в сети возрастет  $\Delta p_2 > \Delta p_1$ .

Как видно из рис. 9.6, при расходе  $Q_2$  гидравлическое сопротивление сети должно быть увеличено на  $\Delta p_c$ . Такое изменение гидравлического сопротивления достигается за счет установки регулирующего клапана с изменяемым коэффициентом гидравлического сопротивления  $\xi_3$ , см. рис. 9.4. Требуемое изменение коэффициента гидравлического сопротивления  $\Delta \xi_3$  может быть определено по формуле

$$\Delta \xi_3 = \frac{2 \Delta p_c}{\rho} \left( \frac{F_{tp}}{Q_2} \right)^2, \quad (9.31)$$

где  $F_{tp}$  – площадь прохода трубопровода в месте установки клапана. Данный метод регулирования называется регулированием расхода путем *дресселирования*.

Изменение мощности, потребной на привод насоса при уменьшении расхода, составит

$$\Delta N = (\Delta p_2 - \Delta p_1)(Q_2 - Q_1). \quad (9.32)$$

Так как  $\Delta p_2 > \Delta p_1$ , то уменьшение мощности не пропорционально падению расхода. А при «крутоя» характеристики насоса потребная мощность может даже и возрасти.

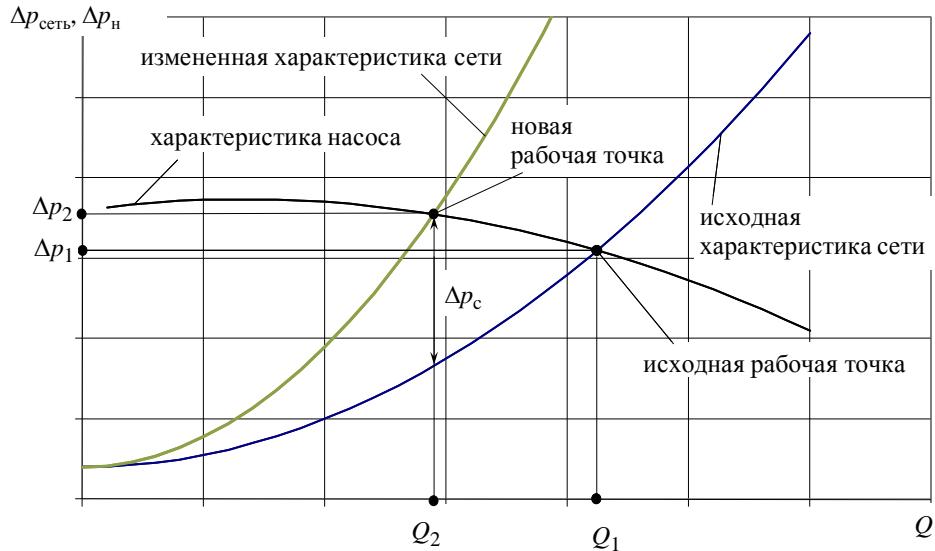


Рис. 9.6. Регулирование расхода дросселированием

Таким образом, данный метод регулирования расхода не является эффективным с точки зрения потребных энергозатрат.

Избежать дополнительных затрат мощности можно, если изменить характеристику насоса таким образом, чтобы она пересекла характеристику сети в точке с расходом  $Q_2$  (рис. 9.7).

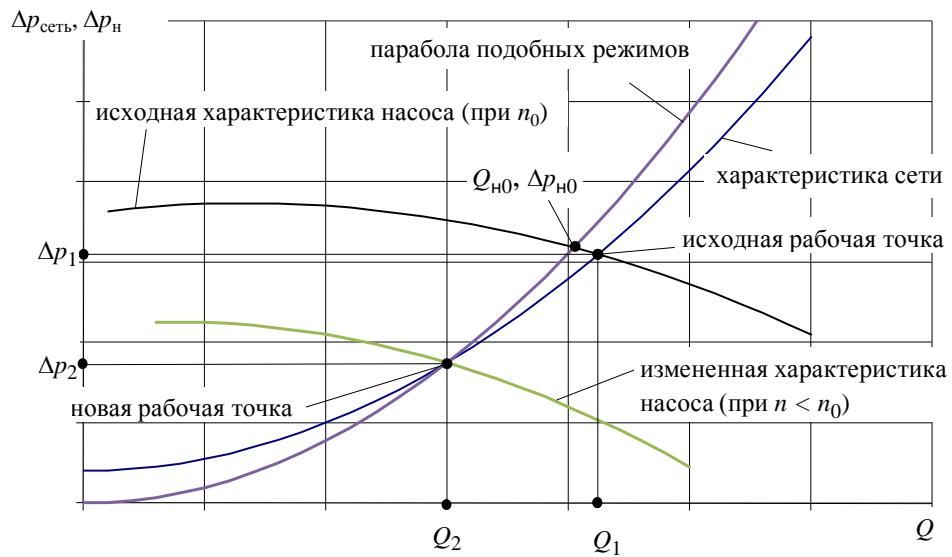


Рис. 9.7. Регулирование расхода изменением частоты вращения рабочего колеса

Рассмотрим возможность такого изменения характеристики насоса. Характеристика центробежного насоса зависит не только от его конструкции, но и от частоты вращения рабочего колеса  $n$ . При этом расход, создаваемый центробежным насосом, пропорционален частоте вращения, а давление — пропорционально квадрату частоты:

$$Q = Q_0 \frac{n}{n_0}, \quad \Delta p_h = \Delta p_{h0} \left( \frac{n}{n_0} \right)^2, \quad (9.33)$$

где  $Q_0, \Delta p_{h0}$  – расход и давление, создаваемые насосом при «базовой» частоте вращения  $n_0$ . По этим формулам можно пересчитать характеристику насоса на новую частоту вращения  $n$ , если известна характеристика при базовой частоте  $n_0$ . То есть частота вращения  $n$  однозначно определяет вид рабочей характеристики при неизменной конструкции насоса  $\Delta p_h = f_h(Q_h, n)$ . Покажем, что можно подобрать такую частоту вращения, при которой характеристика насоса пройдет через точку, лежащую на характеристике сети при расходе  $Q_2$ .

Исключив из (9.33) частоту  $n$ , получим зависимость, связывающую давление  $\Delta p_h$  насоса и расход  $Q$  при изменении частоты вращения:

$$\Delta p_h = \frac{\Delta p_{h0}}{Q_0^2} Q^2, \quad (9.34)$$

которую называют *параболой подобных режимов*.

Параметры в рабочей точке  $\Delta p_2$  и  $Q_2$  известны из характеристики сети. Так как требуется, чтобы новая характеристика насоса проходила через эту точку, то следовательно, парабола подобных режимов при искомой частоте  $n$  должна проходить через новую рабочую точку  $(\Delta p_2, Q_2)$ , а при базовой частоте  $n_0$  она пересечет исходную характеристику насоса в некоторой точке  $\Delta p_{h0}, Q_{h0}$ , см рис. 9.7. Следовательно, можем записать следующие соотношения

$$\Delta p_2 = \frac{\Delta p_{h0}}{Q_0^2} Q_2^2; \quad (9.35)$$

$$\Delta p_{h0} = f_h(Q_{h0}, n_0). \quad (9.36)$$

Из (9.35) и (9.36) можно найти неизвестные величины  $\Delta p_{h0}$  и  $Q_{h0}$ , и тогда из любой формулы (9.33) находится новая частота вращения рабочего колеса насоса  $n$ . Следовательно, существует частота вращения  $n$ , при которой характеристика насоса пересечет характеристику сети в точке с заданным расходом. То есть, изменения частоту вращения рабочего колеса насоса можно регулировать расход жидкости так, что рабочая точка будет перемещаться по характеристике сети. Уменьшение потребной мощности при рассматриваемом изменении расхода составит

$$\Delta N = a(Q_2 - Q_1) + b(Q_2^3 - Q_1^3),$$

где  $a, b$  – коэффициенты в характеристике сети, см. формулу (9.28).

## 9.6. Расчет трубопроводов при движении газов

**Приближение несжимаемой жидкости.** Как мы видели ранее (см. раздел 8.10), если движение газа происходит с числами Маха не более  $M = 0,1 \dots 0,2$ , то газ с достаточной точностью может считаться несжимаемой жидкостью. Кроме того, ввиду низкой плотности газа влияние объемных сил на движение газового потока зачастую оказывается пренебрежимо малым по сравнению с действием поверхностных сил. Поэтому в большинстве случаев гидростатическая составляющая давления может быть отброшена и уравнение Бернуlli при расчете газоводов принимает вид

$$p_1 + \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2} + \Delta p_{\text{тр}} + \Delta p_{\text{м}}. \quad (9.37)$$

В остальном описанные выше методы расчета трубопроводов с несжимаемой жидкостью пригодны и для расчета газовых низкоскоростных потоков.

**Переменная плотность движущейся среды.** При расчете газовых трубопроводных систем встречаются случаи, когда в различных участках трубопроводов газ имеет существенно различную плотность, что обусловлено различным уровнем давления в данных участках трубопроводной сети. Например, существенно могут отличаться давление и плотность во всасывающем и нагнетательном трубопроводах компрессора, в газовых трубопроводах до и после редукционного клапана и др.

Для расчета таких систем их необходимо разбить на участки, в пределах которых плотность газа можно считать постоянной. После разбиения движение газа по каждому такому участку рассчитывается независимо. При этом для каждого из участков используется приближение несжимаемой жидкости.

Сложнее для расчета случай, когда газопровод имеет повышенное сопротивление. В результате статическое давление существенно изменяется его по длине, что приводит и к соответствующему изменению плотности, и приближение несжимаемой жидкости для расчета параметров движения газа применять недопустимо.

### **9.6.1 Изотермическое течение газа с большими перепадами давления**

Такой режим характерен, например, для транспортных газопроводов, протяженных систем воздухораспределения и пр., где вследствие существенных потерь давления, плотность газа в конце трубопровода значительно меньше, чем в начале, а скорость течения, в соответствии с уравнением неразрывности, – больше. Основным видом потерь в таких трубопроводах являются потери на трение.

Часто газовые трубопроводы работают под давлением значительно больше атмосферного при относительно низких скоростях течения. В таких случаях в уравнении Бернулли оказывается возможным пренебречь и динамической составляющей давления. Сказанное можно подтвердить следующим примером. Пусть при течении воздуха реализовались следующие параметры:  $p_1 = 3 \cdot 10^5$  Па,  $p_2 = 1 \cdot 10^5$  Па,  $w_1 = 20$  м/с,  $w_2 = 25$  м/с,  $T = 300$  K. Тогда плотность воздуха в начальном сечении трубопровода  $\rho = p_1 / (RT) = 3 \cdot 10^5 / (287 \cdot 300) = 3,48$  кг/м<sup>3</sup>. Изменение динамического давления можно оценить величиной

$$\Delta p_{\text{дин}} = \rho \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 3,48 \frac{625 - 400}{2} = 392 \text{ Па.}$$

То есть перепад статического давлений  $p_1 - p_2$  в  $\sim 500$  раз превышает изменение динамического давления.

С учетом изложенного дифференциальное уравнение Бернулли (4.55) (4.58) для рассматриваемого случая можно записать в виде (считая коэффициенты Кориолиса равными единицы)

$$dp = -dp_{\text{тр}}, \quad (9.38)$$

или, используя формулу Дарси-Вейсбаха,

$$dp = -\lambda \rho \frac{w^2}{2} \frac{dl}{d}. \quad (9.39)$$

Для интегрирования этого уравнения необходимо знать зависимость плотности  $\rho$ , скорости  $w$  и коэффициента трения  $\lambda$  от длины  $l$ . Эти зависимости следуют из характера термодинамических процессов, имеющих место при течении газа. Например, в случае адиабатического процесса температура газа будет падать по мере продвижения газа, сопровождающееся его расширением вследствие падения статического давления. На практике часто встречаются случаи течения газа по нетеплоизолированному трубопроводу. С достаточной степенью точности такое течение можно считать изотермическим, в котором температура газа все время равна температуре окружающей среды. Такой расчетный случай значительно проще для решения, чем режим адиабатического течения. Рассмотрим его более подробно.

Заметим, что при стационарном течении (с постоянным массовым расходом  $G$ ) число Рейнольдса при изотермическом течении постоянно по длине трубопровода:

$$Re = \frac{\rho w d}{\mu} = \frac{\rho w d d 4\pi}{\mu d 4\pi} = \frac{\rho w \pi d^2}{4} \frac{4}{\mu d} = \frac{4G}{\mu d} = \text{const при } G = \text{const}.$$

Следовательно, коэффициент трения  $\lambda$  является также постоянной величиной. Скорость  $w$  и плотность  $\rho$  в любом промежуточном сечении связаны со скоростью  $w_1$  плотностью  $\rho_1$  в начальном сечении уравнением неразрывности. То есть имеем

$$\rho = \rho_1 \frac{p}{p_1}, \quad w = w_1 \frac{\rho_1}{\rho} = w_1 \frac{p_1}{p}. \quad (9.40)$$

Первое соотношение (9.40) следует из уравнения состояния газа и условия изотермичности процесса.

Проинтегрируем (9.39) с учетом (9.40) и замечания о постоянстве  $\lambda$

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2} \rho_1 p_1, \quad (9.41)$$

или, учитывая, что  $\rho_1 w F = G$  (где  $F$  – площадь сечения трубопровода),

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{G^2}{2F^2} \frac{p_1}{\rho_1}. \quad (9.42)$$

Запишем (9.41) в виде

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2p_1} = \lambda \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2} \rho_1. \quad (9.43)$$

Преобразуем левую часть последнего уравнения следующим образом

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2p_1} = \frac{(p_1 - p_2)(p_1 + p_2)}{2p_1} = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \left( 1 + \frac{p_2}{p_1} \right). \quad (9.44)$$

Запишем давление в конце трубопровода в виде  $p_2 = p_1 + \Delta p$ . Подставляя (9.44) с учетом последнего выражения в уравнение (9.43), получим

$$p_1 - p_2 = \frac{2}{2 - \frac{\Delta p}{p_1}} \lambda \frac{l}{d} \rho_1 \frac{w_1^2}{2}. \quad (9.45)$$

Уравнение (9.45) отличается от формулы Дарси-Вейсбаха для определения потерь на трение при движении по трубопроводу несжимаемой жидкости только наличием множителя, зависящим от отношения  $\Delta p / p_1$ . Если  $\Delta p / p_1 < 5\%$ , то пренебрежение этим множителем дает ошибку в определении давления  $\sim 2,5\%$ , что допустимо для большинства инженерных расчетов.

Таким образом, необходимость учета сжимаемости при расчете движения газа зависит не от величины абсолютного давления в начале или конце трубопровода, а от относительной величины потерь давления на рассчитываемом участке. При  $\Delta p / p_1 < 5\%$  расчет можно вести с использованием соотношений для несжимаемой жидкости. При  $\Delta p / p_1 > 5\%$  необходимо использовать уравнение типа (9.41). Для расчета коэффициента трения  $\lambda$  в этом случае, как и прежде можно использовать формулы, полученные для несжимаемой жидкости.

Если известен перепад давлений на концах трубопровода, то расход газа можно найти по формуле, следующей из уравнения (9.42)

$$G = F \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{RT} \frac{1}{\lambda} \frac{d}{l}}. \quad (9.46)$$

### 9.6.2 Адиабатическое течение газа

Такой режим течения характерен для систем пневмопривода технологического оборудования, когда рабочий газ, например воздух, подается в исполнительный механизм, например, силовой пневмоцилиндр. В этом случае на входе в трубопровод известны параметры газа: давление  $p_0$  или

плотность  $\rho_0 = p_0 / (RT_0)$ , где  $T_0$  – температура газа в источнике питания. На выходе из трубопровода также может быть определено давление  $p_N$  из условий работы силового пневмоцилиндра.

Систему уравнений для данного режима движения газа получим, осреднив по площади сечения трубопровода  $F$  уравнение неразрывности (4.9) и Бернулли (4.55), считая течение одномерным с равномерным распределением параметров и пренебрегая объемными силами. При этом учтем, что функция давления  $\mathfrak{R}$  для адиабатического газа выражается формулой (4.38). Проекцию на ось трубопровода  $x$  члена  $\mathbf{a}_\mu$ , входящего в правую часть уравнения (4.55), найдем исходя из его физического смысла – удельная (отнесенная к единице массы) сила сопротивления трения\*. Тогда можем записать

$$a_{\mu x} = -\frac{\tau \Pi dx}{\rho F dx} = -\frac{\tau \Pi}{\rho F} = -\frac{\lambda}{2} \frac{w^2}{d} \frac{w}{|w|}, \quad (9.47)$$

где  $\Pi = \pi d$  – периметр трубопровода;  $\tau = \frac{\lambda}{8} \rho \frac{w^2}{2}$  – напряжение трения на его стенках;  $\lambda$  – коэффициент гидравлического трения. Множитель  $w/|w|$  добавлен в формулу (9.47) для того, чтобы сила трения была направлена противоположно вектору скорости.

С учетом (9.47) и сделанных допущений уравнение неразрывности и Бернулли для рассматриваемого случая примут вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w}{\partial x} = 0; \quad (9.48)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} \right) = -\frac{\lambda}{2} \frac{w^2}{d} \frac{w}{|w|}. \quad (9.49)$$

Замыкающим соотношением для уравнений (9.48), (9.49) является уравнение адиабаты Пуассона  $p = \text{const} \rho^k$ . Составленная система уравнений совместно с граничными условиями должна интегрироваться каким-либо численным методом.

Необходимо сделать некоторые пояснения относительно задания граничных условий. В качестве одного из условий на левой, либо правой границе канала должно быть обязательно задано условие, включающее скорость течения  $w$ . С помощью уравнения адиабаты плотность или давление могут быть исключены из уравнений (9.48), (9.49). Получится два дифференциальных уравнения относительно переменных  $p, w$  или  $\rho, w$ . Скорость из уравнений не исключается. Поэтому она обязательно должна при-

\* Так как  $\mathbf{a}_\mu \cdot d\mathbf{s}$  есть удельная (отнесенная к единице массы) потеря механической энергии на преодоление сил трения.

существовать в одном из граничных условий. Это может быть сделано, например, следующим образом с использованием формулы Вейсбаха

$$p_0 = \xi_{\text{вх}} \rho_1 \frac{w_1^2}{2},$$

где  $\xi_{\text{вх}}$  – потери полного давления на входе в трубопровод;  $\rho_1, w_1$  – плотность и скорость во входном сечении трубопровода.

Подчеркнем еще раз, что данная задача является краевой, то есть граничные условия задаются на противоположных концах канала. Корректно сформировать граничные условия для двух переменных  $p, w$  или  $\rho, w$  в начальном сечении трубопровода невозможно.

Рассмотрим частный случай стационарного течения. В этом случае вместо системы (9.48), (9.49) имеем

$$\rho w F = G = \text{const}, \quad (9.50)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} \right) = -\frac{\lambda}{2} \frac{w^2}{d}, \quad (9.51)$$

где  $G$  – массовый расход газа.

Несмотря на то, что в такой постановке имеется всего одно дифференциальное уравнение и оно интегрируется при задании начальных условий, то есть условий в начальном сечении трубопровода, сформировать сразу эти начальные условия, отвечающие решению общей постановки задачи, невозможно. Для решения общей задачи расчета трубопровода приходится делать несколько итераций, на каждой из которых необходимо интегрировать уравнение (9.51). Покажем это. Путем замены переменных, с использованием (9.50) и уравнения адиабаты можно исключить из (9.51), например, плотность и скорость. Тогда получим следующее уравнение относительно давления

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{k}{k-1} p^{\frac{k-1}{k}} + b p^{-\frac{2}{k}} \right) = -\frac{\lambda(G, d)}{2d} b p^{-\frac{2}{k}}, \quad (9.52)$$

где  $b = \frac{1}{2} \left( \frac{G}{F} \frac{p_1^{\frac{1}{k}}}{\rho_1} \right)^2$ ;  $p_1, \rho_1$  – давление и плотность в начальном сечении трубопровода.

Обычно температура газа  $T$  в источнике питания неизменна. Следовательно, давление и плотность в начальном сечении однозначно связаны уравнением состояния  $p_1 = \rho_1 RT$ .

Рассмотрим первую задачу расчета трубопроводов, см. раздел 9.1. Задан расход  $G$ , давление в конце трубопровода  $p_2$  и его диаметр. Требуется найти давление в начале трубопровода  $p_1$ , обеспечивающее заданный рас-

ход. Если задаться некоторой величиной давления  $p_1$ , то по уравнению состояния можно найти плотность  $\rho_1$ . После этого коэффициенты  $b$  и  $\lambda$  могут быть найдены и, следовательно, уравнение (9.52) может быть проинтегрировано по длине трубопровода с начальным условием  $p(x=0)=p_1$ . Если в результате интегрирования в конце трубопровода реализуется величина давления, отличающаяся от требуемой, то следует изменить давление  $p_1$  и повторить процедуру вычислений. Расчеты повторяются до получения соответствия расчетного давления в конце трубопровода требуемому значению  $p_2$ .

Рассмотрим вторую задачу расчета трубопровода: заданы давления в начале  $p_1$ , в конце  $p_2$  трубопровода и его диаметр, требуется определить расход  $G$ . Алгоритм расчетов аналогичен алгоритму предыдущей задачи. Только в этом случае варьировать следует расходом, добиваясь получения давления в конце трубопровода равного требуемому значению  $p_2$ .

Аналогично решается и третья задача, когда заданы давления  $p_1$ ,  $p_2$  и расход  $G$ , а ищется диаметр  $d$ .

### 9.6.3 Неадиабатическое течение газа

Такой режим реализуется, например, при течении продуктов сгорания в системе выхлопа, либо при течении воздуха в каналах системы охлаждения оборудования. Для решения этой задачи необходимо привлечение уравнения сохранения энергии. Данная задача также является краевой. В качестве граничных условий чаще всего (исходя из возможных технических приложений задачи) в начальном сечении трубопровода могут быть заданы: давление  $p_0$  и температура  $T_0$ , либо расход  $\rho_0 w_0 F$  и температура, а в выходном сечении – давление  $p_N$ . Система уравнений для расчета движения газа получается путем осреднения по площади сечения трубопровода уравнения неразрывности (4.9), проекции на ось канала  $x$  уравнения Навье–Стокса (4.15) и уравнения сохранения энергии (4.72) при тех же допущениях, что и в рассмотренном выше случае адиабатического течения. После преобразований получим:

- уравнение сохранения массы (неразрывности)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w}{\partial x} = 0; \quad (9.53)$$

- уравнение сохранения количества движения

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial p + \rho w^2}{\partial x} = -\lambda \frac{\rho}{d} \frac{w^2}{2} \frac{w}{|w|}; \quad (9.54)$$

- уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho w \left( U + \frac{w^2}{2} \right) \right] = \frac{K(T_E - T)}{d}, \quad (9.55)$$

где  $K$  – коэффициент теплопередачи;  $T_E$  – температура окружающей среды.

Заметим, что в уравнении сохранения энергии отсутствует сила трения, так как она не совершает работы (скорость на стенке равна нулю).

В качестве замыкающих соотношений в данной задаче выступают выражение для внутренней энергии  $U = c_v T + w^2 / 2$  (где  $c_v$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме) и уравнение состояния  $p = \rho RT$ .

Система уравнений (9.53), ..., (9.55) интегрируется численно.

#### 9.6.4 Самотяга

В ряде случаев при расчете газоводов влияние массовых сил может быть существенным, а иногда и определяющим. В качестве примера можно привести расчет низконапорных систем газораспределения, расчет систем естественной вентиляции, расчет дымовых труб и т. д. В данных примерах имеет место течение газа более легкого, чем воздух окружающей среды, а входное и выходное сечения канала, по которому движется газ, имеют существенно различающиеся высоты расположения. Это приводит к появлению дополнительного перепада давления по длине канала. Данное явление называется *самотяга*. Рассмотрим его более подробно.

Пусть имеется канал, в котором реализуется плавноизменяющееся течение газа с плотностью  $\rho$ , отличной от плотности воздуха  $\rho_B$ , рис. 9.8.

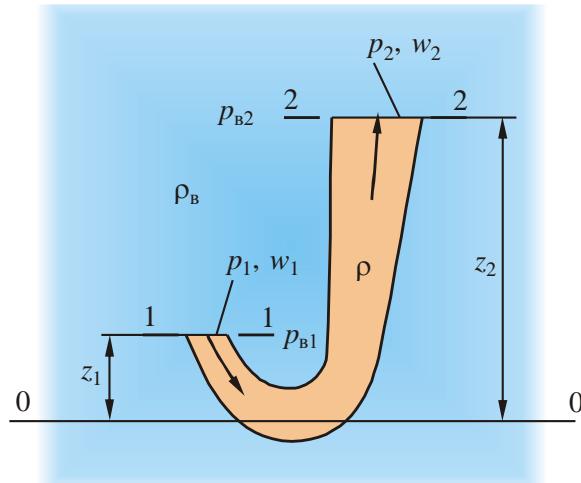


Рис. 9.8. К определению эффекта самотяги

Вследствие малых скоростей течения в таких каналах, для их расчета можно использовать приближение несжимаемой жидкости. Уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2 такого течения имеет вид

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2} + \Delta p_{1-2}, \quad (9.56)$$

где  $\Delta p_{1-2}$  – потери полного давления между сечениями 1–1 и 2–2.

Прибавим и вычтем из каждой части уравнения (9.56)  $p_{\text{в}1}$  и  $p_{\text{в}2}$  – давление воздуха на высоте расположения сечений 1–1 и 2–2 соответственно:

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} + p_{\text{в}1} - p_{\text{в}1} = \rho g z_2 + p_2 + p_{\text{в}2} - p_{\text{в}2} + \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2} + \Delta p_{1-2}. \quad (9.57)$$

Считая плотность воздуха постоянной, что допустимо при не очень большом перепаде высот, в соответствии с основным уравнением гидростатики, можем записать

$$p_{\text{в}1} = p_a - \rho_{\text{в}} g z_1, \quad p_{\text{в}2} = p_a - \rho_{\text{в}} g z_2. \quad (9.58)$$

Подставим (9.58) в (9.57) и перегруппируем члены. В результате получим

$$\begin{aligned} g z_1 (\rho - \rho_{\text{в}}) + (p_1 - p_{\text{в}1}) + \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} &= \\ = g z_2 (\rho - \rho_{\text{в}}) + (p_2 - p_{\text{в}2}) + \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2} + \Delta p_{1-2}. \end{aligned} \quad (9.59)$$

Используя уравнение (9.59), представим потери полного давления между сечениями 1–1 и 2–2 следующим образом

$$\Delta p_{1-2} = (p_1 - p_{\text{в}1}) - (p_2 - p_{\text{в}2}) + g(\rho - \rho_{\text{в}})(z_1 - z_2) + \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} - \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2}. \quad (9.60)$$

Вводя обозначения:  $p_{\text{ст}}^{\text{изб}} = p - p_{\text{в}}$  – избыточное статическое давление (разность статического давления в потоке и давления окружающего воздуха в данном сечении;  $p_{\text{д}} = \rho \alpha w^2 / 2$  – динамическое давление потока;  $p_{\text{с}} = g(\rho - \rho_{\text{в}})(z_1 - z_2)$  – избыточное геометрическое давление – самотяга, перепишем (9.60) в сокращенном виде

$$\Delta p_{1-2} = (p_{\text{ст}1}^{\text{изб}} - p_{\text{ст}2}^{\text{изб}}) + (p_{\text{д}1} - p_{\text{д}2}) + p_{\text{с}}. \quad (9.61)$$

Или

$$\Delta p_{1-2} = p_{01}^{\text{изб}} - p_{02}^{\text{изб}} + p_{\text{с}}, \quad (9.62)$$

где  $p_0^{\text{изб}} = p_{\text{ст}}^{\text{изб}} + p_{\text{д}} - p_{\text{в}}$  – полное избыточное давление в соответствующем сечении.

Таким образом, движение жидкости или газа по трубопроводу осуществляется под действием перепада полного избыточного давления на концах трубопровода и геометрического перепада давления (самотяги). Этот перепад давления расходуется на преодоление потерь механической энергии (полного давления) между начальным и конечным сечениями трубопровода.

Избыточное геометрическое давление (самотяга) вызывается стремлением жидкости (газа) опускаться или подниматься в зависимости от того, в какой среде более легкой или более тяжелой данная жидкость (газ) наход-

дится. Это давление может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, способствует оно или препятствует движению потока.

Необходимо подчеркнуть, что эффект самотяги возможен только с трубопроводных системах, вход и выход которых сообщаются с окружающей средой. В изолированных каналах данный эффект невозможен.

## **9.7. Контрольные вопросы**

1. Дайте определение понятиям простой и сложный трубопровод.
2. Сформулируйте три типа задач расчета трубопроводов.
3. В чем состоит трудность решения второй и третьей задач расчета трубопроводов? Какие методы их решения существуют?
4. Какие соотношения используются при решении задач расчета сложных трубопроводов с параллельным соединением труб?
5. В чем заключается особенность работы сифонного трубопровода? Каковы критические условия его работы?
6. Каким образом происходит согласование режимов работы трубопровода и нагнетателя. Что такая рабочая точка?
7. Какие существуют методы регулирования расхода жидкости в трубопроводной сети, в чем состоят их достоинства и недостатки?
8. Какие допущения принимаются для расчета течения изотермического газа в трубопроводе при большом перепаде давлений?
9. В каком случае можно пренебречь изменением плотности газа при расчете трубопровода и использовать модель несжимаемой жидкости?
10. Дайте определение понятию самотяга, в чем причина ее происхождения и как она находится?

## ГЛАВА 10. ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ ОБЪЕМА ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ

### 10.1. Истечение жидкости через отверстия и насадки при постоянном напоре

Рассмотрим истечение жидкости в из резервуара в атмосферу через отверстие в тонкой стенке, рис. 10.1. Здесь, как и в случае входа в трубу, наблюдается сжатие струи за отверстием. Причиной этого является инерционность частиц, двигающихся к отверстию изнутри резервуара по радиальным направлениям. За сжатым сечением струя практически не расширяется, а при достаточно большой скорости истечения может распадаться на отдельные капли.

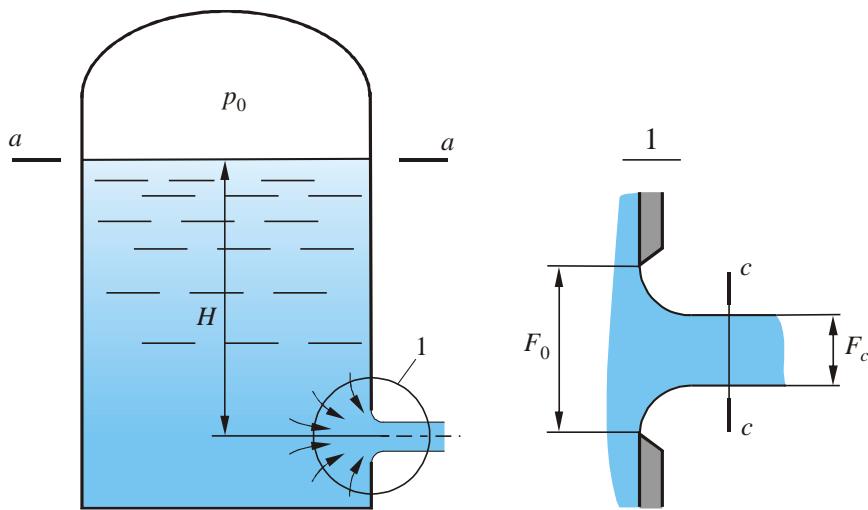


Рис. 10.1. Истечение жидкости из резервуара через отверстие в тонкой стенке

Для вывода формул истечения применим уравнение Бернулли к сечениям  $a-a$  (свободная поверхность жидкости в резервуаре) и  $c-c$  (сжатое сечение струи), предполагая, что скорость опускания уровня в резервуаре мала

$$\rho gH + p_0 = p_1 + \rho \frac{\alpha_c w_c^2}{2} + \xi_0 \rho \frac{w_c^2}{2}, \quad (10.1)$$

где  $\xi_0$  – коэффициент местного сопротивления, обусловленного входом жидкости в отверстие.

Решая это уравнение относительно скорости в сжатом сечении, находим

$$w_0 = \varphi_0 \sqrt{2 \left( gH + \frac{p_0 - p_1}{\rho} \right)}. \quad (10.2)$$

где  $\varphi_0 = 1 / \sqrt{\alpha_c + \xi_0}$  – коэффициент скорости.

Введем коэффициент сжатия струи, определяемый как  $\varepsilon = F_c / F_0$  (где  $F_c$  – площадь сжатого сечения струи;  $F_0$  – площадь отверстия) и коэффициент расхода отверстия, равный  $\eta = \varphi_0 \varepsilon$ . С учетом этих параметров можем записать следующее выражение для расхода через отверстие

$$Q = \eta F_0 \sqrt{2 \left( gH + \frac{p_0 - p_1}{\rho} \right)}. \quad (10.3)$$

На величину коэффициента расхода влияют числа Фруда  $Fr = 2H/d_0$ , Вебера  $We = 2gHd_0\rho/\sigma$  ( $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения) и Рейнольдса. Однако при  $Fr > 10$ ,  $We = 250...2500$  коэффициент  $\eta$  зависит только от числа Рейнольдса. Эта зависимость для круглого отверстия показана на рис. 10.2.

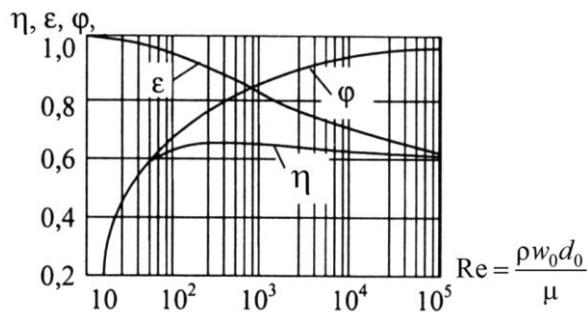


Рис. 10.2. Зависимость коэффициента расхода  $\eta$ , истечения  $\varphi$  и сжатия струи  $\varepsilon$  от числа Рейнольдса

Параметры струи, вытекающей из отверстия, можно изменять, если истечение организовывать через насадки. Рассмотрим действие цилиндрического насадка, рис. 10.3, а.

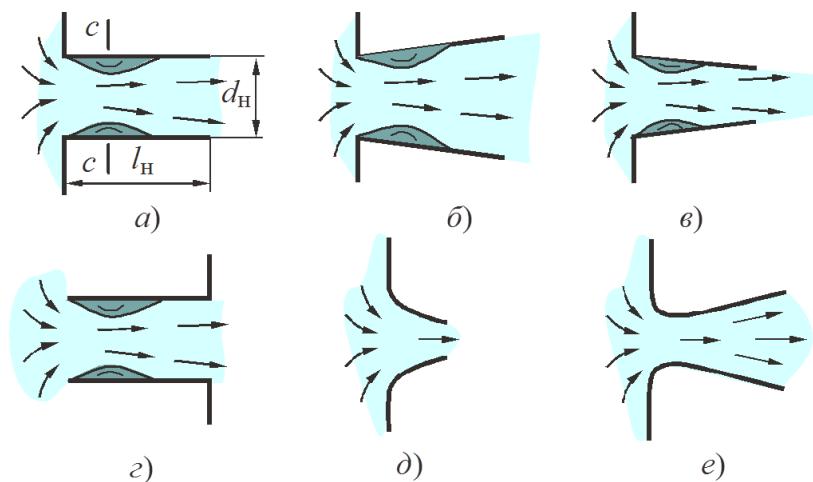


Рис. 10.3. Насадки, используемые для увеличения расхода

При входе в него струя жидкости сжимается так же, как при истечении через отверстие, однако, поскольку она ограничена боковой поверхностью

насадка то образуется кольцевая вихревая область между поверхностями транзитной струи и трубы. За сжатым сечением струя расширяется и на выходе заполняет все сечение насадка. Поэтому на выходе из насадка поджатия потока нет.

В сжатом сечении образуется вакуум, так как скорость в нем выше, чем в выходном сечении, а давление на выходе равно атмосферному. Следовательно, при истечении через насадок перепад давления от свободной поверхности резервуара до сжатого сечения выше, чем при истечении через отверстие. Таким образом, применение насадка позволяет увеличить расход жидкости по сравнению с истечением через отверстие. Правда в последнем случае появляются дополнительные потери на расширение транзитной струи и на трение, которых нет при истечении через отверстие. Однако при длине насадка  $l_h = (3\dots 4)d_h$  эти потери много меньше, чем выигрыш от увеличения перепада давления.

Расход при истечении через насадки определяется также по формуле (10.3), где коэффициент расхода  $\eta$  зависит от числа Рейнольдса (как и при истечении через отверстие), а также от относительной длины насадка  $l_h/d_h$ . Величины  $\eta$  определяются экспериментально. Максимальная величина коэффициента расхода достигается при  $Re > 10^4$ ,  $l_h = (2,5\dots 3)d_h$  и равна  $\eta = 0,8\dots 0,82$ .

Эффект увеличения расхода насадком возрастает, если применить конический расходящийся насадок, см. рис. 10.3, б. Конический сходящийся насадок, см. рис. 10.3, в, служит для увеличения как расхода так и скорости струи. Увеличить коэффициент расхода насадка можно и за счет организации плавного входа, что исключит сужение струи, см. рис. 10.3, д, е.

## 10.2. Истечение жидкости при переменном напоре

Рассмотрим резервуар площадью поперечного сечения  $F$ , заполненный жидкостью до уровня  $H$ . Истечение жидкости происходит через насадок площадью живого сечения  $f$  при понижении уровня. Начальный объем жидкости равен  $V_0$ , рис. 10.4.

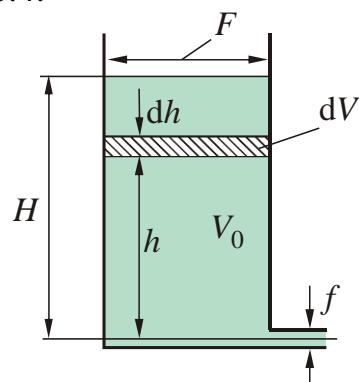


Рис. 10.4. Истечение жидкости при переменном напоре

В технических приложениях обычно требуется определить текущий расход жидкости  $Q$  и время опорожнения  $\tau$ .

Текущий расход жидкости, при условии, что избыточное давление в резервуаре равно нулю, найдем по формуле

$$Q = \eta f \sqrt{2gh}, \quad (10.4)$$

где  $\eta$  – коэффициент расхода насадка;  $h$  – текущая величина уровня жидкости.

Закон сохранения массы при истечении жидкости может быть записан в виде

$$\frac{dV}{dt} = -Q = -\eta f \sqrt{2gh}. \quad (10.5)$$

С другой стороны, из геометрических соображений имеем

$$\frac{dV}{dt} = F(h) \frac{dh}{dt}, \quad (10.6)$$

где  $F(h)$  – текущая площадь сечения резервуара.

Приравнивая левые части (10.5) и (10.6), получаем уравнение для определения текущего уровня

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\eta f}{F(h)} \sqrt{2gh}. \quad (10.7)$$

Таким образом, имеем систему двух уравнений (10.5) и (10.7) для определения  $V(t)$  и  $h(t)$ . Найдя эти величины, текущий расход определим по формуле (10.4), в время опорожнения – из условия  $V(\tau) = 0$ .

Рассмотрим решение задачи для частного случая – цилиндрического резервуара. Тогда  $F(h) = \text{const}$  и интегрируя (10.7) по уровню в пределах от  $H$  до  $h$ , а по времени в пределах от 0 до  $t$  находим

$$\sqrt{h(t)} = \sqrt{H} - \eta \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{f}{F} t. \quad (10.8)$$

Подставив (10.8) в (10.4), получаем

$$Q = Q_0 - \frac{\eta^2 g f^2}{F} t, \quad (10.9)$$

где  $Q_0 = \eta f \sqrt{2gH}$  – расход жидкости в начале истечения.

Интегрируя (10.5) с учетом (10.9), по объему в пределах от  $V_0$  до 0, а по времени в пределах от 0 до  $\tau$  находим

$$\frac{\eta^2 f^2 g}{2F} \tau^2 - Q_0 \tau + V_0 = 0. \quad (10.10)$$

Решение уравнения (10.10) имеет вид

$$\tau = \frac{Q_0 F}{\eta^2 f^2 g}. \quad (10.11)$$

Умножим и разделим (10.11) на  $2H$  и замечая, что  $\eta^2 f^2 g H = Q_0^2$  и  $FH = V_0$ , получим

$$\tau = 2\tau_0, \quad (10.12)$$

где  $\tau_0 = V_0 / Q_0$  – время опорожнения резервуара при условии, что расход остается постоянным и равным начальному расходу.

То есть время истечения жидкости из цилиндрического резервуара при переменном напоре в два раза больше времени истечения того же объема жидкости, происходящего при постоянном напоре, равном начальному напору.

Если необходимо определить время  $t$ , необходимое для понижения уровня не до нуля, а от начального значения до промежуточной величины  $h$ , то из (10.8) найдем

$$t = \frac{2F}{\eta f \sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h}). \quad (10.13)$$

Необходимо отметить, что в расчетах мы полагали, что коэффициент расхода насадка не зависит от числа Рейнольдса. При малых величинах уровня, когда скорость истечения падает, данное допущение неверно. Учитывая зависимость скорости истечения жидкости из насадка (10.2), число Рейнольдса можем определить по формуле

$$Re = \frac{\sqrt{2g}}{v} d \sqrt{h}, \quad (10.14)$$

где  $v$  – коэффициент кинematicкой вязкости жидкости.

При  $Re < 10$  время истечения можно с достаточной для практики точностью вычислить по формуле

$$\tau = \frac{2\eta F v}{gfd} \lg \frac{H}{h}, \quad (10.15)$$

где  $d$  – диаметр насадка.

### 10.3. Истечение газа из объема через отверстие

Найдем формулу для расчета расхода газа при его адиабатическом истечении из сосуда большого объема через отверстие в стенке, рис. 10.5.

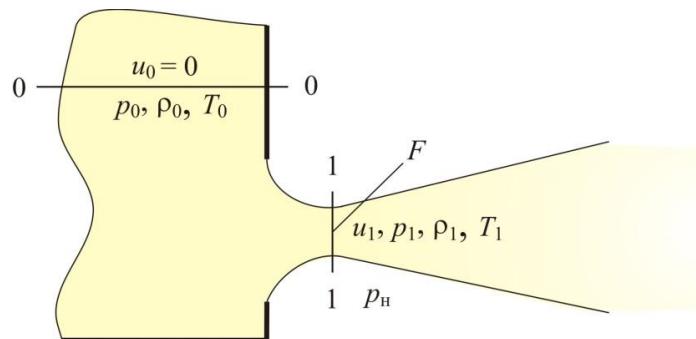


Рис. 10.5. К определению расхода газа через отверстие

Используем для этого уравнение Бернулли (4.64), записав его для двух сечений: в сосуде 0–0 и в минимальном сечении струи 1–1. По условию задачи площадь сечения резервуара значительно больше площади отверстия. Поэтому можно пренебречь скоростью движения газа в сечении 0–0. То есть принять  $u_0 = 0$ . Кроме того для газа величина потенциальной энергии «положения»  $gz$  в большинстве случаев пренебрежимо мала по сравнению с другими членами уравнения (4.64). Не будем также пока учитывать потери энергии на преодоление сил вязкого сопротивления  $h_\tau$ . Тогда можем записать

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2}. \quad (10.16)$$

Отсюда находим выражение для скорости в минимальном сечении струи

$$u_1 = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{p_1}{p_0}\right)}. \quad (10.17)$$

В соответствии с уравнением адиабаты  $\rho_0/\rho_1 = (p_1/p_0)^{-1/k}$ . Кроме того, статическое давление в струе  $p_1$  равно давлению в окружающей среде  $p_h$ , так как в противном случае внешняя граница струи будет перемещаться под действием перепада давлений  $p_1 - p_h$  до тех пор, пока эти давления не сравняются. То есть имеем равенство  $p_1 = p_h$ . Тогда с учетом этих выражений формулу (10.17) можем записать в виде

$$u_1 = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_h}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}. \quad (10.18)$$

Расход истекающего газа найдется, как  $G = \rho_1 u_1 F_c$ , где  $F_c$  – площадь струи в минимальном сечении. Подставляя в эту формулу выражение для скорости (10.18) и учитывая равенство  $\rho_1 = \rho_0 (p_1/p_0)^{1/k} = \rho_0 (p_h/p_0)^{1/k}$ , получим

$$G = F_c \sqrt{\frac{2k}{k+1} p_0 \rho_0 \left[\left(\frac{p_h}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_h}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]}. \quad (10.19)$$

Обозначим для удобства дальнейшего изложения  $p_0/p_h$  через  $\pi$ . Функция,  $G = f(\pi_h)$ , описываемая формулой (10.19), не монотонна. Она имеет максимум, который можно найти из условия  $dG/d\pi = 0$ . Выполняя дифференцирование, получим

$$\frac{dG}{d\pi} = \frac{F_c^2}{G} \frac{k}{k+1} \frac{p_0 \rho_0}{\pi} \left( \frac{2}{k} \pi^{\frac{2}{k}} - \frac{k+1}{k} \pi^{\frac{k+1}{k}} \right) = 0. \quad (10.20)$$

Отсюда находим отношение давлений  $\pi^*$ , соответствующее максимуму функции (10.19)

$$\pi^* = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (10.21)$$

Тогда максимальное значение расхода  $G^*$  получится из (10.19) при  $\pi = \pi^*$ :

$$G^* = F_c \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \sqrt{p_0 \rho_0} = p_0 F_c \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \sqrt{\frac{1}{RT_0}}. \quad (10.22)$$

На рис. 10.6 показан график функции  $\bar{G} = G/G^* = f(\pi)$ , построенный с использованием зависимостей (10.19) и (10.22) при  $k = 1,4$ .

Как видим при увеличении разрежения (уменьшении  $\pi$ ) расход возрастает до максимального значения  $\bar{G} = 1$ . При дальнейшем уменьшении  $\pi$  в соответствии с (10.19) расход должен падать до 0, как показано на рис. 3.7 пунктирной кривой. В действительности этого не происходит. При достижении максимума относительный расход остается постоянным вплоть до разрежения, соответствующего полному вакууму ( $\pi = 0$ ). Для того, чтобы понять причину этого явления, найдем скорость газа в минимальном сечении струи  $u^*$ , соответствующую максимальному расходу

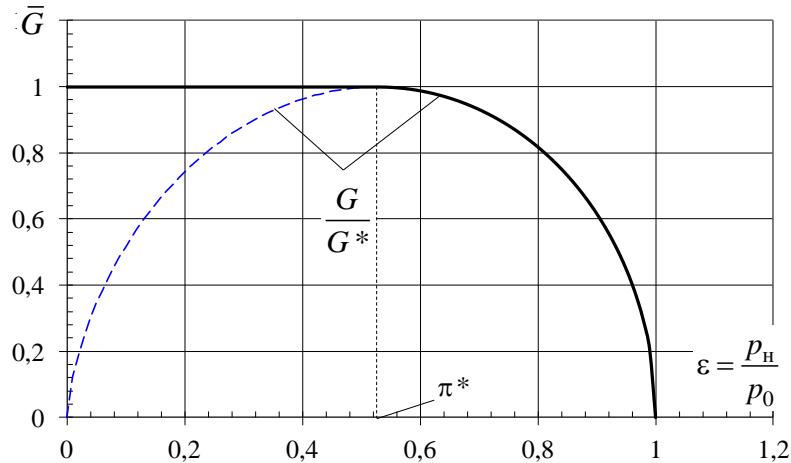


Рис. 5.6. Зависимость относительного расхода газа от перепада давлений

$$u^* = \frac{G^*}{F_c \rho_1} = \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{p_0 \rho_0}{\rho_1^2}} = \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{p_1}{\rho_1} \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^k \frac{\rho_0}{\rho_1}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{p_1}{\rho_1} \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^{\frac{k+1}{k}}} = \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{p_1}{\rho_1} \left( \frac{p_h}{p_0} \right)^{-\frac{k+1}{k}}} = \\
&= \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{p_1}{\rho_1} (\pi^*)^{-\frac{k+1}{k}}} = \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{p_1}{\rho_1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{-\frac{k+1}{k-1}}} = \sqrt{k \frac{p_1}{\rho_1}} = a_1. \quad (10.23)
\end{aligned}$$

Как видим, в этом случае скорость в минимальном сечении струи становится равной местной скорости звука  $a_1$ . Физически это означает, что при понижении давления окружающей среды ниже критической величины  $p_h^* = p_0 \pi^*$  возмущения разрежения уже не могут проникнуть внутрь сосуда и повлиять на характер течения, так как скорость распространения малых возмущений всегда равна скорости звука.

Нетрудно заметить, что получившаяся величина критического отношения давлений  $\pi^*$  равна газодинамической функции  $\pi(1)$ <sup>\*</sup>, что также свидетельствует о достижении в минимальном сечении струи скорости звука.

Таким образом, для определения расхода газа  $G$ , истекающего из сосуда через отверстие, должны использоваться соотношения

$$G = \begin{cases} \eta F_o \sqrt{\frac{2k}{k+1} p_0 \rho_0 \left[ \left( \frac{p_h}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_h}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} & \text{при } \frac{p_h}{p_0} > \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}; \\ \eta F_o \sqrt{k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{p_0 \rho_0}} & \text{при } \frac{p_h}{p_0} \leq \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \end{cases} \quad (10.24)$$

где  $\eta$ ,  $F_o$  – коэффициент расхода и площадь отверстия соответственно.

#### 10.4. Контрольные вопросы

1. Запишите формулу для расчета расхода при истечении жидкости из резервуара при постоянном расходе.
2. Какова величина коэффициента расхода при истечении жидкости через отверстие в тонкой стенке?
3. Что является причиной увеличения коэффициента расхода при истечении жидкости через короткий цилиндрический насадок?
4. Дайте определение понятиям коэффициент сжатия и коэффициент скорости.
5. Какие основные соотношения используются при расчете истечения жидкости из резервуара при переменном напоре?
6. Каково время полного опорожнения цилиндрического резервуара?

---

\* См. раздел 8.10.

7. Дайте определение понятию критический перепад давлений при истечении газа из сосуда.

8. В чем причина «запирания» расхода при истечении газа из сосуда при понижающемся давлении окружающей среды?

9. От каких параметров зависит расход газа при его истечении из сосуда, если параметры окружающей среды постоянны, а сосуд опорожняется?

## ГЛАВА 11. СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЙ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ ГАЗОВ

### 11.1. Возникновение скачков уплотнений

Если обратиться к уравнению Гюгонио, то формально может показаться, что возможно осуществить плавное торможение сверхзвукового потока до дозвуковых скоростей, если направить его в сопло с сужающейся по ходу течения сверхзвуковой частью и расширяющейся после критического сечения дозвуковой частью. Однако, как показывают опыты, плавный переход сверхзвукового потока в дозвуковой невозможен, он происходит скачкообразно и сопровождается резким ростом давления и плотности. Поэтому такой переход называют *с скачком уплотнения или ударной волной*\*.

Наличие такого скачкообразного изменения параметров газа – в действительности очень резкого их изменения на участке длины, равной по порядку длине свободного пробега молекулы, – показывает, что здесь имеет место внутренний молекулярный процесс, связанный с переходом кинетической энергии упорядоченного течения газа в кинетическую энергию беспорядочного теплового движения молекул. Этим объясняется разогрев газа при прохождении его из невозмущенной области перед фронтом ударной волны в область возмущенного движения за фронтом ударной волны. Повышение средней квадратичной скорости пробега молекул вызывает также возрастание давления и плотности газа при прохождении его сквозь фронт ударной волны.

В идеальном газе, где отсутствуют силы вязкости, скачок уплотнения представляет собой разрыв газодинамических параметров, то есть протяженность скачка уплотнения равна нулю. Поверхность разрыва может быть плоской или криволинейной. Если поверхность разрыва располагается под углом к вектору скорости набегающего потока, то скачок уплотнения называется *косым*. При нормальной ориентации поверхности разрыва относительно вектора скорости скачок уплотнения называется *прямым*.

Причину возникновения ударных волн в идеальном газе можно показать на следующем качественном примере. Представим себе (рис. 11.1) теплоизолированную от внешней среды цилиндрическую трубу бесконечной длины, вдоль которой перемещается поршень. Пусть вначале поршень и газ неподвижны, а затем поршень мгновенно приобретает некоторую скорость  $u_0$  и перемещается с этой скоростью влево, сжимая находящийся перед ним газ. Возникающее при этом возмущение (сжатие газа) будет распространяться по трубе.

---

\* С скачком уплотнения называют ударную волну, скорость движения фронта которой относительно газа равна нулю.

Распространение возмущений, создаваемых поршнем, можно рассматривать как совокупность непрерывно следующих друг за другом звуковых волн, причем каждая последующая волна перемещается по газу, сжатому предыдущими волнами. Но сжатие газа сопровождается его подогревом, а скорость распространения звука возрастает с температурой. То есть каждая последующая волна будет перемещаться быстрее, чем предыдущая. Волны будут догонять друг друга, складываться и образовывать одну обладающую конечной интенсивностью волну сжатия – ударную волну.

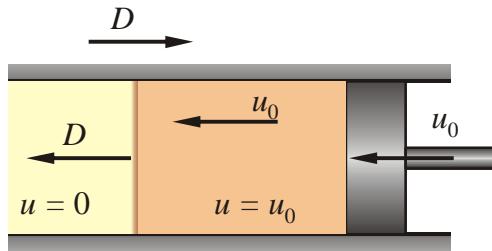


Рис. 11.1. Ударная волна, создаваемая поршнем в идеальном газе

Заметим, что при движении поршня влево за ним образуется разрежение, которое будет распространяться вправо от поршня также волновым образом. Но в этом случае волны уже не будут нагонять друг друга, так как последующая волна пойдет по газу, охлажденному предыдущей волной, и скорость распространения последующей волны будет меньше скорости предыдущей. Из этого рассуждения следует, что существование скачков разрежения невозможно.

Скачки уплотнения могут образовываться, как при течениях в каналах, так и при внешнем обтекании тел, при взаимодействии сверхзвуковых струй с препятствиями и т. д. На рис. 11.2 показаны примеры течений с образованием скачков уплотнений.

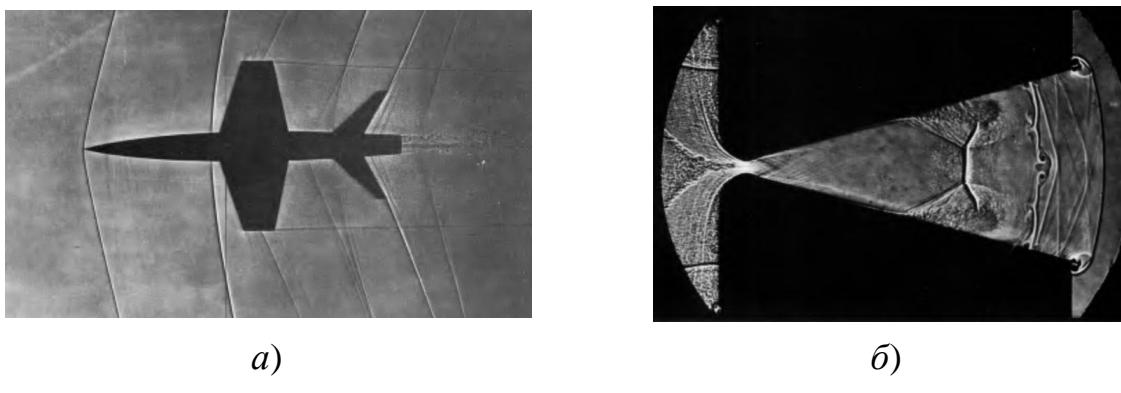


Рис. 11.2. Примеры визуализации течений с образованием ударных волн:  
 $a$  – модель самолета при  $M = 1,1$ ;  $\delta$  – процесс запуска сопла: сверхзвуковой поток, разогнавшийся в расширяющейся части, тормозится при взаимодействии с еще неподвижным газом окружающей среды с образованием системы скачков уплотнения

Протяженность скачка уплотнения в реальных газах имеет конечную величину, однако она настолько мала по сравнению с характерными размерами области течения, что и в этом случае можно говорить о разрыве газодинамических параметров.

## 11.2. Прямой скачок уплотнений

Определим, как изменяются параметры газа при прохождении ударной волны. Для того, чтобы сделать картину движения газа через ударную волну стационарной, обратим движение – сообщив мысленно всей трубе вместе с движущимся газом поступательное движение вправо со скоростью  $D$  навстречу поршню. Тогда будем иметь неподвижный скачок уплотнения, на который натекает невозмущенный газ со скоростью  $u_1 = D$ . За скачком газ движется со скоростью  $u_2 = D - u_0$ , рис 11.3. Выделим сечениями 1 и 2 объем газа, примыкающий к плоскости скачка уплотнения, и запишем применительно к нему выражения для законов сохранения.

$$\left| \begin{array}{ll} p = p_1 & p = p_2 \\ u_1 = D & u_2 = D - u_0 \\ \rho = \rho_1 & \rho = \rho_2 \\ T = T_1 & T = T_2 \end{array} \right|$$

Рис. 11.3. Изменение параметров газа при прохождении скачка уплотнения

В силу предполагаемой одномерности течения имеем:

- уравнение сохранения массы (неразрывности)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2; \quad (11.1)$$

- уравнение сохранения количества движения

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2; \quad (11.2)$$

- уравнение сохранения энергии

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2}. \quad (11.3)$$

С использованием полученных выражения найдем уравнение, связывающее плотности и давления при прохождении скачка уплотнений, исключив из рассмотрения скорости  $u_1$  и  $u_2$ . Для этого перепишем уравнение количества движения в виде

$$p_1 - p_2 = \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = \rho_1 u_1 (u_2 - u_1). \quad (11.4)$$

Умножим обе части этого равенства на выражения: справа на

$$\frac{u_2 + u_1}{\rho_1 u_1}, \quad (11.5)$$

а слева – на эквивалентное ему выражение

$$\frac{u_2}{\rho_1 u_1} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{u_2}{\rho_2 u_2} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}. \quad (11.6)$$

Тогда получим

$$(p_1 - p_2) \left( \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) = u_2^2 - u_1^2. \quad (11.7)$$

С другой стороны из уравнения баланса энергии следует

$$u_2^2 - u_1^2 = \frac{2k}{k-1} \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right). \quad (11.8)$$

Приравнивая обе части (11.7) и (11.8) найдем

$$(p_1 - p_2) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = \frac{2k}{k-1} \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right). \quad (11.9)$$

Группируя в этом равенстве члены с  $p_1$  и  $p_2$  найдем выражение для *ударной адиабаты Гюгонио*

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)\rho_2 - (k-1)\rho_1}{(k+1)\rho_1 - (k-1)\rho_2} = \frac{(k+1)\rho_2/\rho_1 - (k-1)}{k+1 - (k-1)\rho_2/\rho_1}. \quad (11.10)$$

Данное выражение отличается от уравнения адиабаты Пуассона (1.37), что, на первый взгляд, противоречит тому факту, что процесс в скачке уплотнения мы считали адиабатическим. Однако, надо иметь в виду, что адиабата Пуассона справедлива в изоэнтропическом неразрывном течении вдоль линии тока. Здесь мы имеем дело с разрывным течением. Следовательно, при прохождении скачка уплотнения энтропия потока должна возрастать, то есть происходит необратимое преобразование механической энергии в тепловую. Действительно, сравнив величины энтропии до и после скачка уплотнения, получаем

$$s_2 - s_1 = \frac{R}{k-1} \ln \left[ \left( \frac{p_2}{\rho_2^k} \right) - \ln \left( \frac{p_1}{\rho_1^k} \right) \right] = \frac{R}{k-1} \ln \left[ \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right] > 0. \quad (11.11)$$

График ударной адиабаты в сравнении с адиабатой Пуассона показан на рис. 11.4. Как видно из рис. 11.4, при  $\rho_2/\rho_1 > 1$  ударная адиабата располагается выше адиабаты Пуассона. Следовательно, выражение в квадратных скобках в (11.11) больше единицы и  $s_2 > s_1$ .

Из (11.11) и рис. 11.4 также следует, что возникновение скачков разрежения, то есть  $p_2/p_1 < 1$  и  $\rho_2/\rho_1 < 1$ , невозможно. В этом случае ударная адиабата располагается ниже изоэнтропической. То есть выражение в квадратных скобках меньше единицы и тогда  $s_2 < s_1$ , что противоречит второму началу термодинамики.

Как следует из (11.11), ударная адиабата имеет асимптоту

$$\left. \frac{\rho_2}{\rho_1} \right|_{p_2 / p_1 \rightarrow \infty} = \frac{k+1}{k-1}. \quad (11.12)$$

Это означает, что даже при бесконечном сжатии  $p_2 / p_1 \rightarrow \infty$  рост плотности в ударной волне ограничен. Так при  $k = 1,4$  плотность в скачке уплотнения может возрасти только в 6 раз.

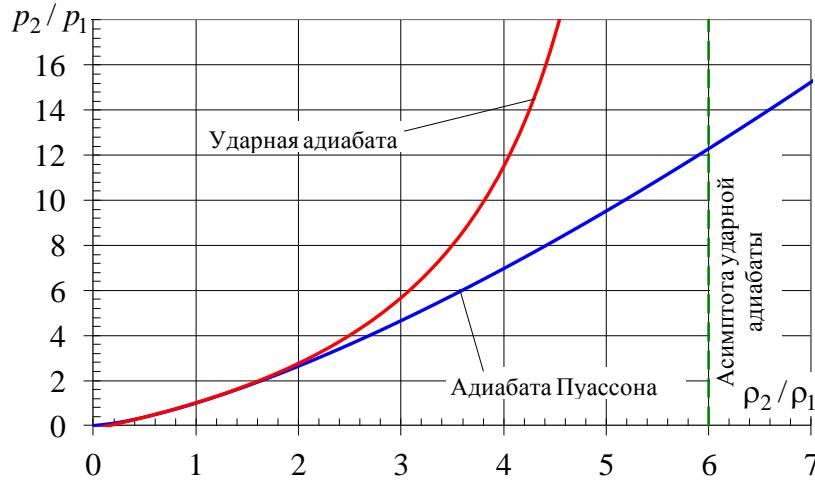


Рис. 11.4 Сравнение ударной адиабаты и адиабаты Пуассона

Рассмотрим теперь, как изменяются другие параметры потока при прохождении скачка уплотнения.

Из условия сохранения полной энталпии (11.3) следует сохранение температуры торможения газа  $T_0$ , а также, следовательно, и  $a_0$ ,  $a^*$  и  $T^*$ :

$$T_{01} = T_{02}, \quad T_1^* = T_2^*, \quad a_{01} = a_{02}, \quad a_1^* = a_2^*. \quad (11.13)$$

Найдем связь между скоростями газа  $u_1$  и  $u_2$  до и после скачка уплотнения. Перепишем уравнение сохранения количества движения с учетом уравнения неразрывности в виде

$$u_1 - u_2 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1}. \quad (11.14)$$

Уравнение сохранения энергии, записанное для каждой зоны, с учетом соотношения  $a_0^2 = a^{*2} (k+1)/2$  можно представить в виде

$$\frac{u_i^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_i}{\rho_i} = \frac{a_{0i}^2}{k-1} \equiv a_i^{*2} \frac{k+1}{2(k-1)}, \quad i=1,2. \quad (11.15)$$

Выразим отсюда отношение  $p/\rho$  для каждой зоны

$$\frac{p_1}{\rho_1} = a^{*2} \frac{k+1}{2k} - \frac{k-1}{2k} u_1^2, \quad \frac{p_2}{\rho_2} = a^{*2} \frac{k+1}{2k} - \frac{k-1}{2k} u_2^2 \quad (11.16)$$

и подставим в (11.14)

$$u_1 - u_2 = \frac{1}{u_2} \left( a^{*2} \frac{k+1}{2k} - \frac{k-1}{2k} u_2^2 \right) - \frac{1}{u_1} \left( a^{*2} \frac{k+1}{2k} - \frac{k-1}{2k} u_1^2 \right). \quad (11.17)$$

После преобразований (11.17) принимает вид

$$\frac{k+1}{2k}(u_1 - u_2) \left( 1 - \frac{a^*^2}{u_1 u_2} \right) = 0. \quad (11.18)$$

Так как в скачке уплотнения  $\rho_2 > \rho_1$ , то в соответствии с уравнением неразрывности  $u_1 > u_2$  и тогда из (11.18) следует формула Прандтля

$$u_1 u_2 = a^*^2 \quad \text{или} \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (11.19)$$

Так как  $u_1 > u_2$ , то из (11.19) следует, что

$$u_1 > a > u_2 \quad \text{или} \quad \lambda_1 > 1 > \lambda_2. \quad (11.20)$$

То есть *при движении газа до прохождения прямого скачка уплотнений поток является сверхзвуковым, а после скачка – дозвуковым*. Можно сказать, что прямой скачок уплотнения является формой перехода от сверхзвукового течения к дозвуковому.

Определим изменение статического давления при прохождении прямого скачка уплотнений  $\Delta p / p_1 = (p_2 - p_1) / p_1$ . Для этого используем уравнения сохранения массы (11.1), количества движения (11.2) и формулу Прандтля:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2}{p_1} = \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1} \left( 1 - \frac{u_2}{u_1} \right) = k \frac{u_1^2}{a_1^2} \left( 1 - \frac{u_1 u_2}{u_1^2} \right) = k M_1^2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right). \quad (11.21)$$

Применив формулу перехода от числа Маха к скоростному коэффициенту (8.105) и обратного перехода (8.106), окончательно получаем

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{2k}{k+1} \frac{\lambda_1^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} \frac{\lambda_1^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}, \quad (11.22)$$

и

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1), \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1) = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}. \quad (11.23)$$

**Скорость ударной волны и спутного потока.** Определим скорость распространения ударной волны  $D$  по неподвижному газу и скорость потока возмущенного газа  $u_{\text{сп}}$ , возникающего за ударной волной, называемого *спутным потоком*. Вспоминая, что при выводе расчетных соотношений для скачка уплотнений мы применили прием обращения движения, можем записать

$$D = u_1, \quad u_{\text{сп}} = D - u_2 = u_1 - u_2. \quad (11.24)$$

За меру интенсивности скачка, а следовательно, и ударной волны, примем число Маха  $M_1$  и сжатие газа в скачке  $p_2/p_1$ . В соответствии с определением числа Маха и выражением (11.23) можем записать:

$$M_1 = \frac{D}{a_1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}. \quad (11.25)$$

Отсюда находим зависимость скорости ударной  $D$  волны от ее интенсивности

$$D = M_1 a_1 = a_1 \sqrt{\frac{k-1}{2k} + \frac{k+1}{2k} \frac{p_2}{p_1}}. \quad (11.26)$$

Из этой формулы следует:

- *скорость распространения ударной волны по отношению к неподвижному газу всегда больше скорости звука в невозмущенном газе;*
- *звуковую волну можно рассматривать, как ударную волну очень малой интенсивности, так как при этом имеем*

$$D = a_1 \text{ при } M_1 = 1 \text{ или } p_2 = p_1. \quad (11.27)$$

Для определения скорости спутного потока используем формулу Прандтля. С учетом (11.24) можем записать

$$u_{\text{сп}} = u_1 - \frac{a^*^2}{u_1}. \quad (11.28)$$

Для критической скорости звука можем записать равенство

$$a^*^2 = \frac{2}{k+1} a_0^2 = \frac{2}{k+1} a_1^2 \frac{T_0}{T_1} = \frac{2}{k+1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) a_1^2. \quad (11.29)$$

Подставив (11.29) в (11.28) и учитывая, что  $u_1 = M_1 a_1$ , получим

$$u_{\text{сп}} = M_1 a_1 - \frac{2}{k+1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) \frac{a_1^2}{M_1 a_1} = \frac{2}{k+1} a_1 \left(M_1 - \frac{1}{M_1}\right). \quad (11.30)$$

Если подставить в (11.30) число Маха, выраженное из (11.23), то получим связь скорости  $u_{\text{сп}}$  со сжатием газа в волне  $p_2/p_1$ :

$$u_{\text{сп}} = \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{\frac{p_2}{p_1} - 1}{\sqrt{k-1 + (k+1) \frac{p_2}{p_1}}} a_1. \quad (11.31)$$

Зависимость скорости ударной волны и спутного потока от интенсивности ударной волны для воздуха с температурой 300 К показана на рис. 11.5.

Представленные данные показывают, что скорость спутного потока за ударной волной может быть очень большой. Так, например, ударная волна, несущая относительное сжатие воздуха  $p_2/p_1 = 1,22$ , могла бы вызвать спутный поток со скоростью 50 м/с. Отсюда также видно, сколь ничтожные сжатия воздуха несут с собой обычные звуковые волны, почти совершенно не смещающие частицы воздуха.

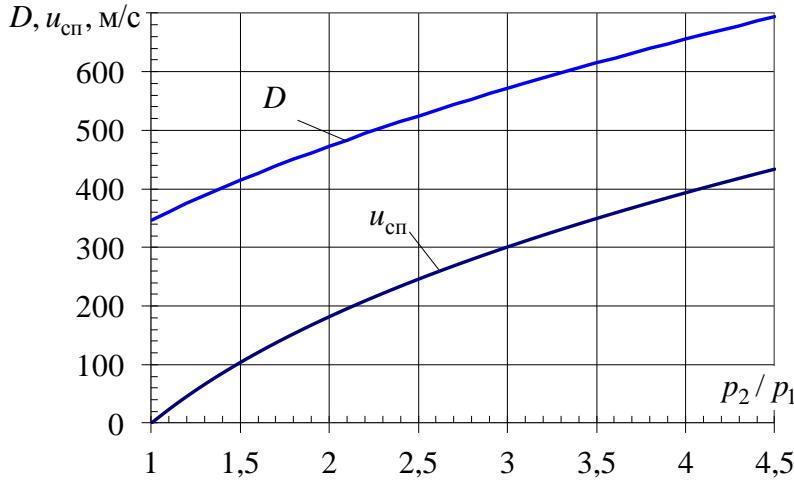


Рис. 11.5. Скорость ударной волны и спутного потока

**Потери механической энергии в прямом скачке уплотнения.** Определим потери механической энергии при прохождении прямого скачка уплотнения. При этом за величину, характеризующую механическую энергию, примем полное давление  $p_0$ , а за меру потерь примем отношение полных давлений до скачка  $p_{01}$  и после скачка  $p_{02}$ :

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}}. \quad (11.32)$$

Выражая полные давления через статические с использованием изоэнтропических функций, получим

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}{p_2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{p_1 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}{p_2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}. \quad (11.33)$$

Подставив в (11.33) отношение давлений  $p_1/p_2$  из (11.22) или (11.23) и используя формулу Прандтля, окончательно получим

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \begin{cases} \lambda_1^{\frac{2k}{k-1}} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \frac{k-1}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \lambda_1^2 \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_1^2}} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{M_1^{\frac{2k}{k-1}}}{\left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \left( k M_1^2 + \frac{k-1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}}}. \end{cases} \quad (11.34)$$

График зависимости (11.34) потерь полного давления в прямом скачке уплотнения показан на рис. 11.6. Из приведенного графика видно, что потери механической энергии в прямом скачке уплотнения могут быть весьма значительными – превышают 80 % при числе Маха набегающего потока более 3,5. При околозвуковых течениях потери полного давления пренебрежимо малы.

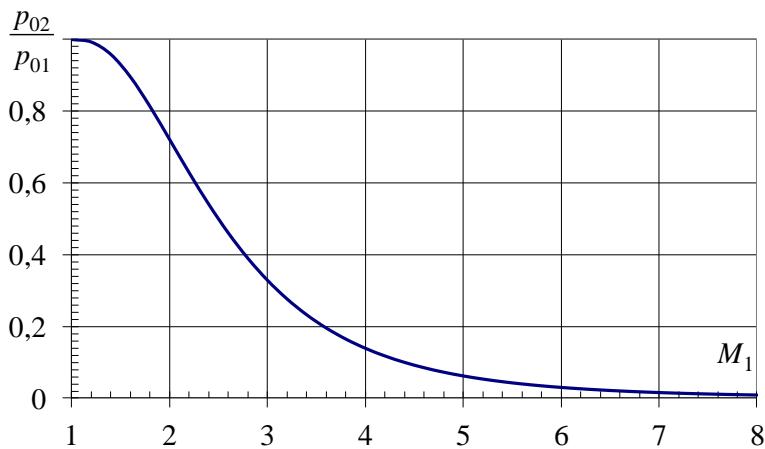


Рис. 10.7. Зависимость потерь полного давления в прямом скачке уплотнения от числа Маха набегающего потока

### 11.3. Косые скачки уплотнения

Помимо прямых скачков уплотнения, встречаются и так называемые *косые скачки уплотнения*. Фронт косого скачка располагается наклонно к направлению потока (рис.11.8). Косой скачок получается в том случае, когда, пересекая фронт скачка, сверхзвуковой газовый поток должен изменить свое направление, например, при косом натекании сверхзвукового потока на преграду.

При пересечении потоком фронта косого скачка модуль нормальной составляющей скорости уменьшается, а модуль тангенциальной составляющей остается неизменным.

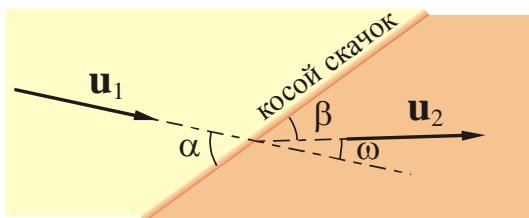


Рис. 11.8. Схема косого скачка уплотнения

Формально косой скачок уплотнения может быть сведен к прямому скачку, который сносится вместе с потоком газа вбок вдоль фронта скачка со скоростью, равной тангенциальной составляющей скорости. Из этого следует, что при малых углах  $\alpha$  сверхзвуковой поток перед скачком *может оставаться сверхзвуковым* и после прохождения косого скачка уплотнения.

При одной и той же скорости набегающего потока косой скачок уплотнения *всегда бывает слабее прямого*. Для отношений давления в косом скачке может быть получено соотношение

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 \sin^2 \alpha - \frac{k-1}{k+1}, \quad (11.35)$$

откуда видно, что в предельном случае, когда косой скачок переходит в прямой ( $\alpha = 90^\circ$ ), увеличение давления получается максимальным.

В другом предельном случае, когда угол наклона скачка к направлению потока перед ним определяется условием

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{M_1} \quad (11.36)$$

косой скачок вырождается в бесконечно слабую волну ( $p_1 \approx p_2$ ). Разъясним этот факт несколько подробнее. Пусть в некоторой точке «O» сверхзвукового газового потока возникло бесконечно малое возмущение давления (рис. 11.9).

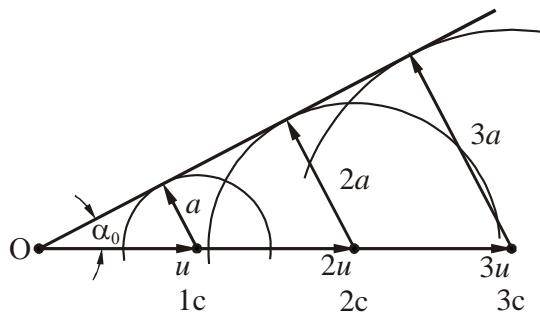


Рис. 11.9. Образование волн слабых возмущений

Слабая волна сжатия (или разрежения) побежит из центра возмущения во все стороны со скоростью звука  $a$ . Через единицу времени ( $t = 1$  с) фронт волны будет представлять собой сферу радиуса  $r = a$ . Однако вся масса газа, в которой возникла волна, сносится по потоку со сверхзвуковой скоростью  $u > a$ . По этой причине слабые волны давления никогда не выйдут за пределы конуса, поверхность которого является огибающей для сферических волн. Образующая такого конуса носит название *волны Маха* или *характеристики*. Угол  $\alpha_0$  между образующей и осью называется *углом Маха* или *углом распространения слабых возмущений*. Этот угол, как видно из рис. 11.9, определяется равенством

$$\sin \alpha = \frac{a}{u} = \frac{1}{M}. \quad (11.37)$$

Итак, фронт очень слабого косого скачка уплотнения располагается по отношению к набегающему потоку под углом  $\alpha_0$ , который определяется равенством (11.36). Сильные возмущения, как было показано выше, распространяются со сверхзвуковой скоростью, в связи с чем фронт сильного скачка образует с набегающим потоком больший угол, чем характеристика:  $\alpha > \alpha_0$ . Диапазон изменения угла  $\alpha$  для косого скачка уплотнения определяется, таким образом, следующими пределами:

$$90^\circ \geq \alpha \geq \alpha_0. \quad (11.38)$$

Из изложенного видно, что полное торможение сверхзвукового потока требует либо одного прямого скачка, либо системы из нескольких косых скачков<sup>\*</sup>.

Пример визуализации течения с образованием косых скачков уплотнения показан на рис. 11.9.

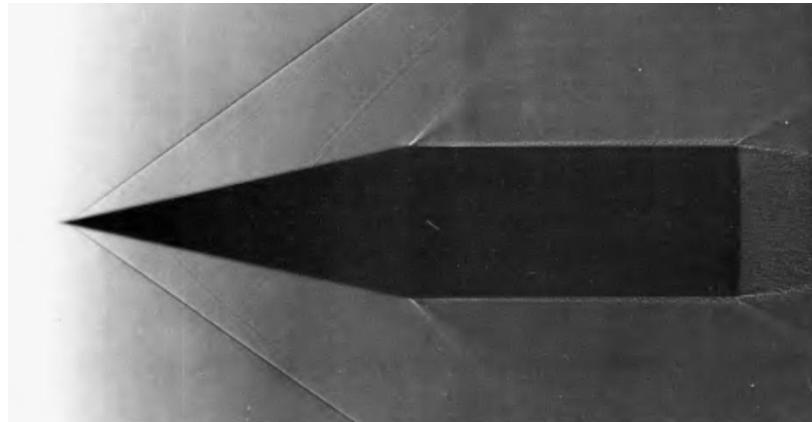


Рис. 11.9. Комбинация конуса и цилиндра в сверхзвуковом полете:  $M = 1,84$ . Конические (косые) скачки уплотнения на вершине конуса. Пограничный слой за вершиной конуса становится турбулентным и порождает волны Маха при обтекании углов модели

#### 11.4. Течение Прандтля-Майера

Рассмотрим сверхзвуковое течение газа около тупого угла, рис. 11.10.

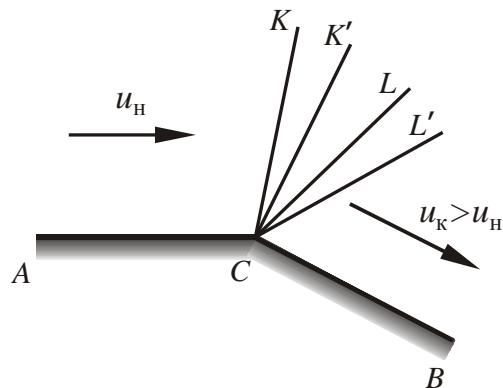


Рис. 11.10. Течение Пландтля-Майера при обтекании тупого угла сверхзвуковым потоком

При сверхзвуковом обтекании внешнего тупого угла  $ACB$  газ расширяется, ибо область, занятая газом, увеличивается; при расширении газ ускоряется. Вдоль участка стенки  $AC$  скорость газа постоянна. Угловая точка  $C$  при обтекании ее газом является препятствием, которое служит источни-

<sup>\*</sup> Система косых скачков обычно завершается слабым прямым скачком уплотнения.

ком возникновения слабых возмущений в газовом потоке. Эти возмущения, как было показано (см. раздел 11.3), распространяются в равномерном потоке по прямой линии – характеристики  $CK$ , которая отделяет невозмущенный газовый поток от возмущенного. Вдоль участка стенки  $CB$  скорость газа снова принимает постоянное значение, большее, чем в исходном потоке вдоль  $AC$ . Это значит, что возмущение, возникшее вследствие обтекания угловой точки  $C$ , закончится на другой характеристике  $CL'$ , которая также прямолинейна. Таким образом, поворот потока к новому направлению осуществляется внутри угла  $KCL'$  между двумя прямолинейными характеристиками.

Последняя характеристика  $CL'$ , на которой завершается поворот газового потока около точки  $C$ , располагается под углом  $\alpha_k$  к стенке  $CB$ , соответствующим равенству

$$\alpha_k = \frac{1}{M_k}, \quad (11.39)$$

тогда как первая характеристика располагается под углом  $\alpha_h$  к стенке  $AC$  в соответствии с равенством

$$\alpha_h = \frac{1}{M_h}. \quad (11.40)$$

здесь  $M_h, M_k$  – значения чисел Маха до и после поворота потока.

Таким образом, поворот потока около тупого угла и связанное с этим расширение газа (уменьшение давления) можно рассматривать как последовательность слабых возмущений источником которых служит вершина угла; эти возмущения распространяются в потоке по прямолинейным характеристикам, исходящим из вершины.

Сверхзвуковое течение с непрерывным увеличением скорости, такое, как описано выше, называется течением Прандтля-Майера.

## 11.5. Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятиям скачок уплотнения и ударная волна. Какова причина их возникновения?
2. Как изменяются давление, температура и плотность газа при прохождении скачка уплотнения?
3. Дайте определение понятию спутный поток.
4. Как изменяется энтропия газа при прохождении скачка уплотнения?
5. Как изменяются полное давление и полная температура газа при прохождении скачка уплотнения?
6. Как располагаются на графике друг относительно друга адиабата Пуассона и адиабата Гюгонио?
7. Запишите формулу Прандтля для прямого скачка уплотнения.

8. Скорость распространения ударной волны по отношению к неподвижному газу больше скорости звука?
9. Интенсивность какого скачка уплотнения больше прямого или косого?
10. Дайте определение понятию угол Маха.
11. Опишите качественную картину течения Прандтля-Майера при обтекании сверхзвуковым потоком тупого угла.

## ГЛАВА 12. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

### 12.1. Основные физические представления о пограничном слое. Толщина пограничного слоя и толщина вытеснения

Представим твердое тело, которое обтекается потоком вязкой жидкости, рис. 12.1. Вблизи поверхности тела образуется тонкий слой жидкости, в пределах которого скорость потока изменяется от нуля на поверхности до скорости, близкой к скорости набегающего потока  $u_0$ . Этот слой жидкости называется *пограничным слоем*. Заторможенные частицы жидкости пограничного слоя образуют за телом *гидродинамический след*, где сохраняется неравномерное распределение скоростей. Внутри пограничного слоя и следа, где градиенты скорости значительны, силой вязкого трения пренебрегать нельзя (силы инерции и вязкостные силы соизмеримы). Вне пограничного слоя и следа за телом, где градиенты скорости малы, силу вязкостного сопротивления можно не учитывать и жидкость считать идеальной, а поток безвихревым (потенциальным).

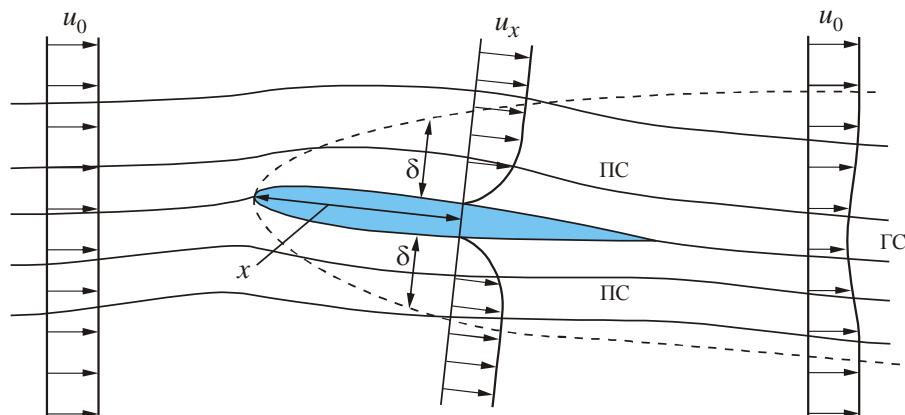


Рис. 12.1. Схема течения с образованием пристенного пограничного слоя и гидродинамического следа (на рисунке толщина ПС искусственно увеличена)

Таким образом, поток разделен на две части: пограничный слой и внешний поток. Во внешнем потоке движение можно изучать используя уравнения Эйлера, а внутри пограничного слоя – уравнения Навье-Стокса. Течение в пограничном слое может быть как ламинарным, так и турбулентным.

Толщина пограничного слоя мала по сравнению с расстоянием от точки его образования. Строго говоря, приближение скорости пограничного слоя к скорости внешнего потока имеет асимптотический характер, однако уже на относительно малом расстоянии  $\delta$  от твердой стенки разница этих скоростей незначительна и ей можно пренебречь. Таким образом,  $\delta$  зависит от точности, с которой определяется равенство скоростей в пограничном слое и во внешнем потоке. Следовательно, однозначно определить толщину пограничного слоя невозможно. Для исключения этой неоднозначности в

теории пограничного слоя вводятся другие геометрические параметры, которые косвенно характеризуют толщину  $\delta$ . К ним относятся *толщина вытеснения*  $\delta^*$  и *толщина потери импульса*  $\delta^{**}$ . Рассмотрим эти понятия более подробно.

Пусть имеется пластина, обтекаемая равномерным потоком вязкой жидкости, рис. 12.2. От начальной точки пластины 0 начинает формироваться пограничный слой, толщина которого  $\delta^*$ , равна нулю в начале пластины и увеличивается к ее концу по мере развития течения, см. рис. 12.2. Выше границы пограничного слоя на рис. 12.2 показана одна из линий тока внешнего течения. Составим уравнение баланса расходов в невозмущенном течении (сечение 1–1 на рис. 12.2) и в промежуточном сечении пограничного слоя 2–2:

$$q = u_0 \delta = u_0 \delta^* + \int_0^\delta u_x dy, \quad (12.1)$$

где  $u_0$  – скорость набегающего невозмущенного потока.

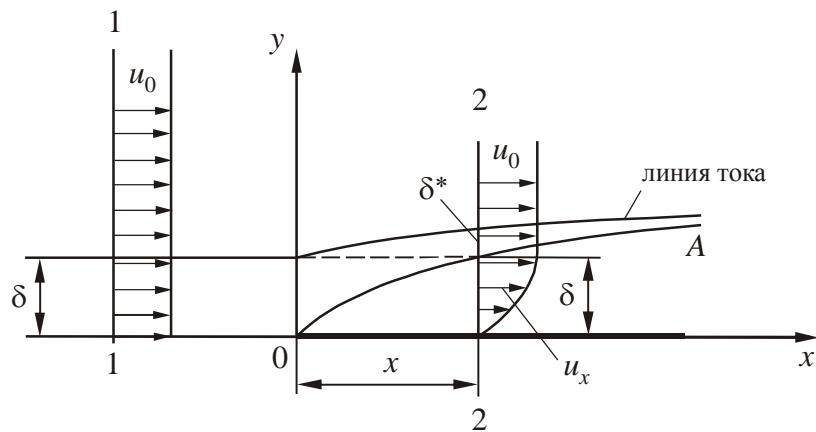


Рис. 12.2. К определению толщины вытеснения

В уравнении (12.1) произведение  $u_0 \delta^*$  выражает расход жидкости через участок сечения  $\delta^*$ , где скорость в пограничном слое  $u_x$  практически равна  $u_0$ . Из геометрических соображений следует  $\delta = \int_0^\delta dy$ . Подставим это выражение в (12.1)

$$u_0 \int_0^\delta dy = u_0 \delta^* + \int_0^\delta u_x dy. \quad (12.2)$$

Отсюда находим толщину вытеснения  $\delta^*$

\* Считаем что толщина  $\delta$  определена при некоторой условно принятой погрешности соответствия скоростей в пограничном слое и во внешнем течении.

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u_x}{u_0}\right) dy. \quad (12.3)$$

Из формулы (12.3) видно, что толщина вытеснения представляет собой величину смещения линий тока внешнего потока относительно линий тока идеальной жидкости из-за образования пограничного слоя. Нетрудно заметить, что толщина вытеснения практически не зависит от принятой при определении  $\delta$  погрешности соответствия скоростей на границе ПС и во внешнем течении. В качестве верхнего предела интегрирования можно принять и бесконечность, так как подынтегральная функция асимптотически убывает до нуля при увеличении  $y$ . В результате величина интеграла практически не изменится. Поэтому иногда употребляют запись

$$\delta^* = \int_0^{\infty, \delta} \left(1 - \frac{u_x}{u_0}\right) dy. \quad (12.4)$$

Если вместо асимптотического пограничного слоя принята модель слоя конечной толщины, то, как видно из (12.4), можно установить однозначную связь между  $\delta^*$  и  $\delta$ , если известно распределение продольной составляющей скорости в пограничном слое.

Толщина потери импульса  $\delta^{**}$  определяется соотношением

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u_x}{u_0} \left(1 - \frac{u_x}{u_0}\right) dy \quad (12.5)$$

и характеризует потерю количества движения, необходимого для преодоления сил трения в пограничном слое. Более подробно этот параметр будет рассмотрен далее.

## 12.2. Уравнения Прандтля ламинарного пограничного слоя

Рассмотрим обтекание криволинейной границы плоским установившимся потоком несжимаемой жидкости, рис. 12.3.

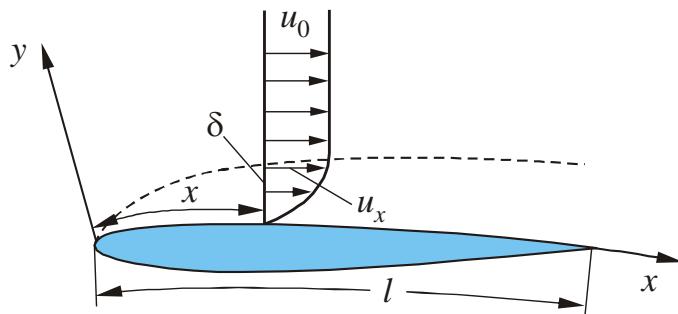


Рис. 12.3. Схема пограничного слоя на криволинейной поверхности

Вблизи поверхности формируется пограничный слой. В ламинарной области пограничного слоя течение может быть описано следующей системой уравнений.

### Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (12.6)$$

Уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости (в предположении пренебрежимости объемными силами)

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (12.7)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) = u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (12.8)$$

### Границные условия

$$u_x(x, 0) = u_y(x, 0) = 0; \quad u_x(x, \delta) = u_0, \quad (12.9)$$

где  $u_0$  – продольная составляющая скорости на внешней границе пограничного слоя.

Особенности течения в пограничном слое, обусловленные высокими поперечными градиентами скорости и относительно малыми продольными градиентами, позволяют упростить эти уравнения. Оценим порядок каждого из членов уравнений Навье–Стокса. Для этого в качестве характерного продольного размера используем длину обтекаемого тела, то есть  $x \sim l$ , характерного поперечного размера – толщину пограничного слоя, то есть  $y \sim \delta$ , в качестве характерной величины продольной скорости – скорость внешнего течения, то есть  $u_x \sim u_0$ .

Оценим порядок производных. Так как при изменении  $u_x$  от нуля до  $u_0$   $y$  изменяется от нуля до  $\delta$ , то

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{u_0}{l}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} \sim \frac{u_0}{\delta}, \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \sim \frac{u_0}{\delta^2}, \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \sim \frac{u_0}{l^2}. \quad (12.10)$$

Порядок поперечной составляющей скорости определим используя уравнение неразрывности:

$$u_y \Big|_{y=\delta} = \int_0^\delta \frac{\partial u_y}{\partial y} dy = - \int_0^\delta \frac{\partial u_x}{\partial x} dy \sim \frac{u_0}{l} \delta. \quad (12.11)$$

Теперь для членов уравнения (12.8) можем получить следующие оценки

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} \sim \frac{u_0 \delta}{l^2}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \sim \frac{u_0}{l}, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \sim \frac{u_0 \delta}{l^3}, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \sim \frac{u_0}{l \delta}. \quad (12.12)$$

Из этих оценок видно, что оба инерционных члена уравнения (12.7)  $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$  и  $u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}$  имеют один и тот же порядок  $\frac{u_0^2}{l}$ . Однако вязкостный член

$\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$  мал по сравнению со вторым вязкостным членом  $\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$ , ибо их отношение есть квадрат малой величины:

$$\frac{\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}}{\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}} = \frac{\delta^2}{l^2}. \quad (12.13)$$

Таким образом, в уравнении (12.7) можно отбросить первый вязкостный член и оно примет вид

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (12.14)$$

Логично предположить, что внутри пограничного слоя силы вязкости, оцениваемые величиной  $\nu \frac{u_0}{\delta^2}$ , и силы инерции, оценка которых  $\frac{u_0^2}{l}$ , имеют один порядок, тогда

$$\nu \frac{u_0}{\delta^2} \sim \frac{u_0^2}{l}, \quad (12.15)$$

откуда

$$\delta = C \sqrt{\frac{\nu l}{u_0}}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{l} = C \sqrt{\frac{\nu}{u_0 l}} = \frac{C}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad (12.16)$$

где  $C$  – константа, а  $\text{Re} = \frac{ul}{\nu}$  – местное число Рейнольдса.

Из (12.16) следует, что предположение о малость толщины пограничного слоя будет выполняться тем лучше, чем больше число Рейнольдса.

Оценим порядок членов уравнения (12.8). Здесь порядок инерционных членов одинаков  $\frac{u_0^2 \delta}{l^2}$ , первым вязкостным членом можно пренебречь по сравнению со вторым, то есть сумму членов левой части уравнения можно оценить величиной

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \sim \frac{u_0^2 \delta}{l^2}. \quad (12.17)$$

В соответствии с (12.12) и (12.15) справедлива оценка  $\nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \sim \nu \frac{u_0}{\delta l} \sim \frac{u_0^2 \delta}{l^2}$ . Тогда, учитывая эту оценку и (12.17), можем записать

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \approx 0. \quad (12.18)$$

Из (12.18) вытекает, что давление постоянно поперек пограничного слоя, равно давлению во внешнем потоке и является функцией только про-

дольной координаты, то есть  $p = f(x)$ . Таким образом, исходная система уравнений пограничного слоя (12.6)...(12.8) принимает вид уравнений пограничного слоя Прандтля

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + v \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (12.19)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (12.20)$$

Система (12.19), (12.20) незамкнутая, так как содержит три неизвестных  $u_x, u_y, p$ . Давление  $p$  может быть определено из решения задачи о потенциальном обтекании тела. Также из этой задачи должна быть определена скорость на внешней границе пограничного слоя  $u_0$ , входящая в граничные условия системы (12.19), (12.20).

Один из этих неизвестных параметров может быть исключен из рассмотрения, например, следующим образом. Для потенциального течения вдоль линии тока выполняется следующее соотношение (интеграл Бернулли для идеальной жидкости)

$$p + \rho \frac{u_0^2}{2} = \text{const}. \quad (12.21)$$

Дифференцируя (12.21) по  $x$ , получим

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u_0 \frac{du_0}{dx}. \quad (12.22)$$

С использованием (12.22) можно исключить давление из уравнения (12.19). В результате получим следующую систему уравнений:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = u_0 \frac{du_0}{dx} + v \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \quad (12.23)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (12.24)$$

$$u_x(x, 0) = u_y(x, 0) = 0; \quad u_x(x, \delta) = u_0. \quad (12.25)$$

В рассмотренной постановке предполагается, что пограничный слой по всему контуру тела настолько тонок, что его искажающее влияние на внешний поток пренебрежимо мало. Поэтому задачи расчета параметров внешнего потенциального течения и течения в пограничном слое могут решаться независимо.

**Решение уравнений Прандтля.** Рассмотрим для примера решение уравнений (12.23)...(12.25) при обтекании пластины. Данное решение впервые получил Г. Блазиус в 1908 г.

Распределение скорости в пограничном слое ищется в виде

$$\frac{u_x}{u_0} = f_0\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (12.26)$$

То есть считается, что в любых сечениях  $x$  профили скорости, выраженные в относительных координатах, подобны.

С учетом того, что  $\delta \sim \sqrt{\frac{vx}{u_0}}$ , далее вместо относительной координаты  $y/\delta$  используется координата  $\eta = y/\sqrt{vx/u_0}$ , то есть скорость  $u_x$  находится в виде

$$u_x = u_0 f(\eta). \quad (12.27)$$

Для упрощения решения уравнений Прандтля вводится функция тока  $\psi$ :

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (12.28)$$

С использованием функции тока уравнение неразрывности (12.24) удовлетворяется тождественно, а уравнение (12.23) приводится к виду (при этом учитывается, что при обтекании пластинки  $du_0/dx = 0$ )

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = v \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (12.29)$$

с граничными условиями

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } x > 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \quad (12.30)$$

С целью получения выражения для функции тока в относительных координатах вводится в рассмотрение вместо  $f(\eta)$  ее первообразная  $\varphi(\eta) = \int f(\eta) d\eta$ . Тогда, так как  $f(\eta) = \varphi'(\eta)$ , то

$$u_x = u_0 \varphi'(\eta). \quad (12.31)$$

Учитывая (12.28), получаем выражение для функции тока в виде

$$\psi = \int_0^y u_x dy = u_0 \int_0^y \varphi' \left( \frac{y}{\sqrt{vx/u_0}} \right) dy = u_0 \sqrt{vx/u_0} \int_0^y \varphi'(\eta) d\eta = u_0 \sqrt{vx/u_0} \varphi(\eta). \quad (12.32)$$

Дифференцируя это выражение, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_0 v}{x}} [\varphi(\eta) - \eta \varphi'(\eta)], \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_0 \varphi'(\eta), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= u_0 \sqrt{\frac{u_0}{vx}} \varphi''(\eta), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \frac{u_0}{x} \eta \varphi''(\eta), \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{u_0^2}{vx} \varphi'''(\eta). \end{aligned} \quad (12.33)$$

Подставляя результат, с учетом (12.28), в (12.29), получаем следующее уравнение для определения функции  $\varphi(\eta)$

$$2\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0. \quad (12.34)$$

Это обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка было проинтегрировано Г. Блазиусом с помощью степенных рядов при следующих граничных условиях

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = 0 \quad \text{при } \eta = 0; \quad \varphi' = 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty. \quad (12.35)$$

В частности, получено  $\varphi''(0) = 0,332$ . Тогда, учитывая, что

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \sqrt{\frac{u_0^3}{vx}} \varphi''(0), \quad (12.36)$$

получим

$$\tau = 0,332 \rho \sqrt{\frac{v u_0^3}{x}}. \quad (12.37)$$

Обычно в практических расчетах используется относительная величина касательных напряжений – коэффициент трения  $C_f$ , для которого из (12.37) получается следующее выражение

$$C_f = \frac{\tau}{\rho \frac{u_0^2}{2}} = \frac{0,664}{\sqrt{\frac{u_0 x}{v}}} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}. \quad (12.38)$$

Проинтегрировав (12.37) по двум поверхностям пластины (верхней и нижней) и поделив на  $\frac{1}{2} \rho u_0^2 S$  (где  $S = 2l \cdot 1$  – площадь поверхности пластины), получим коэффициент силы трения на пластине:

$$C_f = \frac{F_\mu}{\frac{1}{2} S \rho u_0^2} = \frac{1,328}{\sqrt{\frac{u_0 l}{v}}} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}}. \quad (12.39)$$

Эти результаты хорошо совпадают с опытными данными И. Никурадзе, которым разными методами получено:  $C_f = 1,315 / \sqrt{Re_l}$  и  $C_f = 1,319 / \sqrt{Re_l}$ , что подтверждает верность основных положений теории пограничного слоя. Вместе с тем, следует отметить, при  $x = 0$  решение (12.37) дает совершенно не соответствующий физическим представлениям результат:  $\tau = \infty$ . Объясняется это тем, что вблизи переднего края пластины нарушается условие  $\partial u_x / \partial x \ll \partial u_x / \partial y$ , положенное в основу вывода уравнений Прандтля.

### 12.3. Интегральные соотношения пограничного слоя

Даже упрощенная по сравнению с полной системой уравнений Навье–Стокса система уравнений пограничного слоя (12.23)...(12.25) остается сложной для решения. Поэтому разработаны другие, более упрощенные подходы для расчета результатов взаимодействия вязкого потока с твердой стенкой\*. К таким методам относится применение интегральных соотношений. Суть данного метода заключается в следующем.

Если предположить, что известно распределение скорости поперек пограничного слоя, то есть известна функция  $u_x = f(y, x)$ , то уравнения (12.23), (12.24) могут быть проинтегрированы по координате  $y$ . В результате мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение вместо уравнения в частных производных.

---

\* Ведь, в конечном итоге, именно это – результат силового и теплового взаимодействия потока со стенкой и является целью решения уравнений пограничного слоя.

Получим уравнения пограничного слоя в интегральных соотношениях. Рассмотрим элементарный объем жидкости, выделенный в пограничном слое нормальными к твердой стенке сечениями  $AB$  и  $CD$ , отстоящими друг от друга на малое расстояние  $dx$  и его верхней границей  $BC$ , рис. 12.4.

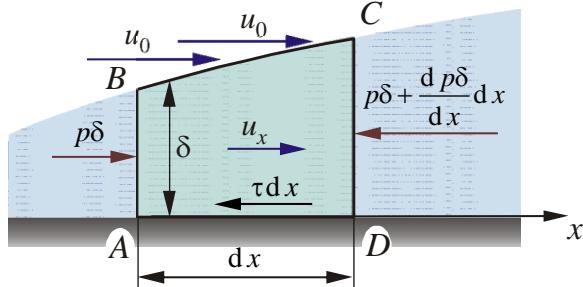


Рис. 12.4. К выводу интегральных соотношений

Запишем выражение уравнения сохранения количества движения жидкости, находящейся в этом объеме в проекции на ось  $x$ :

$$\int_{F_{ABCD}} \rho u_n u_x dF = P_{\text{пов}}, \quad (12.40)$$

где  $u_n$  – проекция вектора скорости на направление внешней нормали к элементу поверхности  $dF$ ;  $P_{\text{пов}}$  – проекция на ось  $x$  главного вектора внешних сил, равного сумме сил давления и трения  $P_{\text{пов}} = P_{\text{пов}}^p + P_{\text{пов}}^\tau$ .

На участке поверхности объема  $AB$   $u_n = -u_x$ , на участке  $CD$   $u_n = u_x$ , а на участке  $BC$  примем  $u_x = u_0$ . Тогда левая часть (12.40) может быть записана следующим образом

$$\int_{F_{ABCD}} \rho u_n u_x dF = - \int_0^\delta \rho u_x u_x dy + \int_0^\delta \rho u_x u_x dy + \frac{d}{dx} \left( \int_0^\delta \rho u_x u_x dy \right) dx + u_0 dm_{BC}. \quad (12.41)$$

Последний член в (12.41), описывающий перенос количества движения через границу  $BC$ , определим, используя следующее соображение. Так как при установившемся течении накапливания жидкости в выделенном объеме не происходит, то поток массы через границу  $BC$  равен разности потоков через границы  $CD$  и  $AB$ . То есть

$$dm_{BC} = - \frac{d}{dx} \left( \int_0^\delta \rho u_x dy \right) dx. \quad (12.42)$$

С учетом (12.42) (12.41) примет вид

$$\int_{F_{ADCD}} \rho u_n u_x dF = \frac{d}{dx} \left( \int_0^\delta \rho u_x^2 dy \right) dx - u_0 \frac{d}{dx} \left( \int_0^\delta \rho u_x dy \right) dx. \quad (12.43)$$

Определим проекцию на ось  $x$  главного вектора внешних сил давления и трения. Пусть на границу  $AB$  действует давление  $p$ . Тогда давление, действующее на границу  $CD$ , будет равно

$$p + \frac{dp}{dx} dx. \quad (12.44)$$

и проекция на ось  $x$  суммы внешних сил давления, приложенных к границам  $AB$  и  $CD$ , определится, как

$$P_{AB+CD}^p = p\delta - \left[ p\delta + \frac{d}{dx}(p\delta) \right] = - \left( \delta \frac{dp}{dx} + p \frac{d\delta}{dx} \right). \quad (12.45)$$

Давление на границе  $BC$  примем равным среднему значению между давлением на границах  $AB$  и  $CD$ . Тогда проекция на ось  $x$  внешней силы давления, приложенной к границе  $BC$  будет равна

$$P_{BC}^p = \frac{1}{2} \left( p + p + \frac{dp}{dx} dx \right) \frac{d\delta}{dx} dx = p \frac{d\delta}{dx} dx. \quad (12.46)$$

В последнем выражении пренебрегается слагаемым, пропорциональным величине второго порядка малости  $(dx)^2$ .

Силу трения, действующую на границу  $AD$  объема определим следующим образом

$$P_{AD}^\tau = \tau dx. \quad (12.47)$$

С учетом полученных выражений, проекция на ось  $x$  главного вектора внешних сил запишется следующим образом

$$P_{\text{пов}} = P_{AB+CD}^p + P_{BC}^p + P_{AD}^\tau = -\delta \frac{dp}{dx} dx - \tau dx. \quad (12.48)$$

Подставляя (12.43) и (12.48) в (12.40), получим уравнение импульсов для плоского пограничного слоя, называемое интегральным соотношением Кармана

$$\frac{d}{dx} \left( \int_0^\delta \rho u_x^2 dy \right) - u_0 \frac{d}{dx} \left( \int_0^\delta \rho u_x dy \right) = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau. \quad (12.49)$$

Уравнение (12.49) справедливо как для ламинарного, так и для турбулентного пограничного слоя, так как при его выводе не делалось никаких предположений о природе напряжений трения  $\tau$ . Давление  $p$ , входящее в (12.49), можно исключить, применив выражение для интеграла Бернуlli внешнего потенциального течения, как это делалось в предыдущем разделе. В результате, используя (12.22), получим

$$\frac{d}{dx} \left( \int_0^\delta u_x^2 dy \right) - u_0 \frac{d}{dx} \left( \int_0^\delta u_x dy \right) = \delta u_0 \frac{du_0}{dx} - \frac{\tau}{\rho}. \quad (12.50)$$

Избавимся в уравнении (12.50) от носящей значительную степень неопределенности величины толщины пограничного слоя  $\delta$ , используя введенные выше понятия толщина вытеснения  $\delta^*$  и толщина потери импульса  $\delta^{**}$ . Для этого предварительно преобразуем второй член в левой части (12.50) следующим образом

$$u_0 \frac{d}{dx} \left( \int_0^\delta u_x dy \right) = \frac{d}{dx} \left( u_0 \int_0^\delta u_x dy \right) - \frac{du_0}{dx} \int_0^\delta u_x dy. \quad (12.51)$$

Подставим (12.51) и (12.50) и перекомпонуем члены

$$\frac{\tau}{\rho} = \left[ \frac{d}{dx} \left( u_0 \int_0^\delta u_x dy \right) - \frac{d}{dx} \int_0^\delta u_x^2 dy \right] + \left( \frac{du_0}{dx} \int_0^\delta u_0 dy - \frac{du_0}{dx} \int_0^\delta u_x dy \right) \quad (12.52)$$

или

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{d}{dx} \left( \int_0^\delta u_x (u_0 - u_x) dy \right) + \frac{du_0}{dx} \int_0^\delta (u_0 - u_x) dy. \quad (12.53)$$

С использованием (12.4) и (12.5) уравнение (12.53) можно представить в виде

$$\frac{d}{dx} (u_0^2 \delta^{**}) + u_0 \frac{du_0}{dx} \delta^* = \frac{\tau}{\rho} \quad (12.54)$$

или, выполняя дифференцирование, получим окончательное выражение для интегрального соотношения Кармана

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{du_0}{dx} \frac{1}{u_0} (2\delta^{**} - \delta^*) = \frac{\tau}{\rho u_0^2}. \quad (12.55)$$

Как уже отмечалось выше оно справедливо как для ламинарного, так и для турбулентного пограничного слоя.

Теперь, используя полученное уравнение, можем выяснить физический смысл толщины потери импульса. Для этого рассмотрим пограничный слой на пластине. В этом случае  $u_0 = \text{const}$  и уравнение (12.55) приобретает вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau}{\rho u_0^2}. \quad (12.56)$$

Интегрируя (12.56) по длине пластины от  $x=0$  до  $x=l$ , получим величину силы сопротивления  $F$ , действующей на пластину

$$F = \rho u_0^2 l \delta_l^{**}, \quad (12.57)$$

где  $\delta_l^{**}$  – толщина потери импульса в конце пластины.

Вспоминая, что (12.57) представляет собой решение уравнения сохранения количества движения, можем заключить, что величина потери количества движения (которая выражается правой частью этого равенства) пропорциональна  $\delta^{**}$ . Этим и объясняется термин «толщина потери импульса». Так как градиент давления при обтекании пластины отсутствует, то следовательно, толщина потери импульса характеризует потерю количества движения потока в пограничном слое, затрачиваемую на преодоление сил трения.

**Решение интегральных соотношений.** Рассмотрим в качестве примера решение интегрального соотношения Кармана при ламинарном обтекании пластины, которое в рассматриваемом случае имеет вид (12.56).

Для решения (12.56) задаемся законом распределения скорости в пограничном слое в виде полинома

$$\frac{u_x}{u_0} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \dots + a_n(x)y^n. \quad (12.58)$$

Число членов полинома определяется количеством достоверных граничных условий, которые можно задать для рассматриваемого типа течения. Очевидными из них являются условия прилипания на стенке:  $u_x = 0$  при  $y = 0$ , а также условия на внешней границе пограничного слоя:  $u_x = u_0$  при  $y = \delta$ . В качестве третьего условия можно задать  $\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$  при  $y = \delta$ . Разработаны и другие дополнительные условия, которые позволяют увеличить количество членов полинома и улучшить тем самым точность аппроксимации. Например, четвертое условие можно получить из уравнения (12.23), учитывая, что при  $y = 0$   $u_x = u_y = 0$ . То есть

$$0 = u_0 \frac{du_0}{dx} + v \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \text{ при } y = 0. \quad (12.59)$$

В качестве пятого условия можно использовать равенство нулю второй производной на внешней границе пограничного слоя:  $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0$  при  $y = \delta$ .

Подстановка в эти условия выражения (12.58) и решение полученной системы уравнений относительно коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ , дает следующее выражение для профиля скорости

$$\frac{u_x}{u_0} = 2 \frac{y}{\delta} - 2 \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 + 3 \left( \frac{y}{\delta} \right)^4. \quad (12.60)$$

Подставив (12.60) в (12.4) и (12.5) и выполнив интегрирование, найдем

$$\delta^* = 0,3\delta, \quad \delta^{**} = 0,1175\delta. \quad (12.61)$$

Напряжение трения  $\tau$  находятся с использованием закона сопротивления Ньютона

$$\tau = 2\mu \frac{u_0}{\delta}. \quad (12.62)$$

С учетом (12.61) и (12.62) уравнение (12.56) принимает вид

$$0,1175 \frac{d\delta}{dx} = 2 \frac{\nu}{u_0 \delta}. \quad (12.63)$$

В результате интегрирования получим

$$\delta = 5,83 \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}}, \quad \tau = 0,343 \sqrt{\frac{\mu \rho u_0^3}{x}}. \quad (12.64)$$

Данное решение получено Польгаузеном и хорошо соответствует точному решению Г. Блазиуса (12.37).

#### **12.4. Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Структура турбулентного пограничного слоя**

Течение в пограничном слое на стенке может быть ламинарным, переходным и турбулентным независимо от режима течения невозмущенного внешнего потока. Рассмотрим, например, пограничный слой на пластине, рис. 12.5.

Проведенные исследования показали, что режим течения в пограничном слое определяется числом Рейнольдса, определенным по характерному размеру пограничного слоя, например, его толщине  $\delta^*$ :

$$Re_\delta = \frac{\rho u_0 \delta}{\mu} = \frac{u_0 \delta}{\nu}. \quad (12.65)$$

При  $Re_\delta > Re_{\delta_{кр}}$  происходит нарушение ламинарного режима течения и возникновение турбулентности. Поэтому вдоль достаточно длинной пластины режим течения в пограничном слое изменяется. На малых расстояниях от передней кромки пластины толщина пограничного слоя мала и пограничный слой сохраняет свое устойчивое ламинарное течение с молеку-

---

\* В качестве характерного размера пограничного слоя могут использоваться также и другие, связанные с  $\delta$  величины: продольная координата  $x$ , отсчитываемая от передней кромки пластины, толщина вытеснения  $\delta^*$ , толщина потери импульса  $\delta^{**}$ .

лярным механизмом переноса. При увеличении толщины ламинарного пограничного слоя до критической величины  $\delta_{kp}$  (на расстоянии  $x_{kp}$  от передней кромки пластины) устойчивость течения в пограничном слое нарушается и появляется участок переходного течения, где хаотически по времени сменяются ламинарный и турбулентный режимы течения.

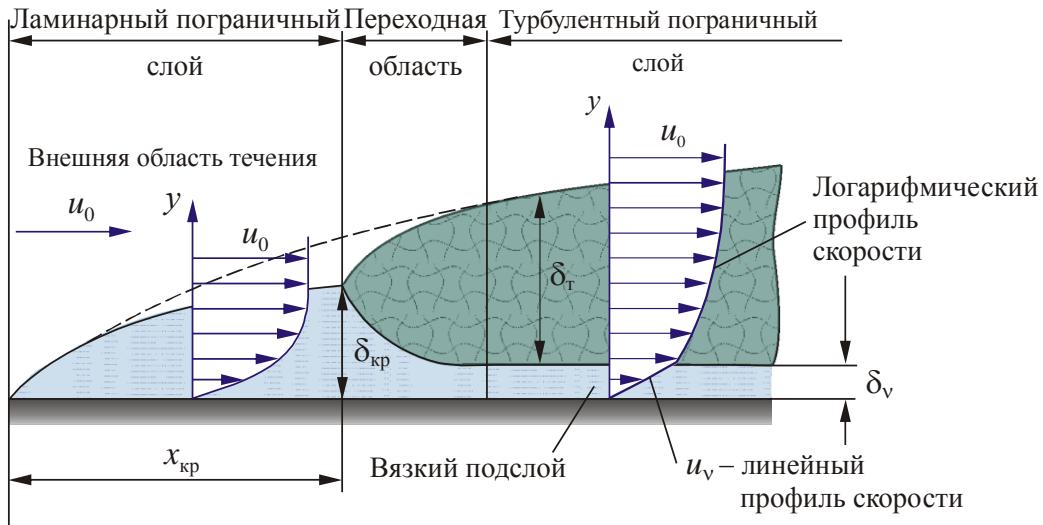


Рис. 12.5. Структура пограничного слоя на пластине

За переходным участком начинается турбулентный пограничный слой с турбулентным механизмом переноса. Характерным признаком перехода является резкое увеличение толщины пограничного слоя и напряжений трения на стенке, так как напряжения трения в этом случае определяются как молекулярной, так и турбулентной вязкостью. Длина переходного участка невелика. Поэтому в расчетах обычно полагают, что ламинарный пограничный слой сразу переходит в турбулентный. При этом, несмотря на турбулентный характер течения в «основном» объеме пограничного слоя, непосредственно вблизи стенки существует тонкий слой практически с ламинарным характером течения – вязкий подслой толщиной  $\delta_v$ , см. рис. 12.5. Распределение скоростей\* в вязком подслое – линейное, как при течении Куэтта. Распределение скоростей в турбулентной зоне пограничного слоя – логарифмическое. Между вязким подслоем и внешней, турбулентной зоной развитого пограничного слоя не существует резкой границы и переход от линейного профиля скорости к логарифмическому происходит плавно, с образованием промежуточной области.

Критическое число Рейнольдса при обтекании пластины равно

$$Re_{\delta_{kp}} = (2,8 \dots 30) \cdot 10^3, \quad (12.66)$$

то есть по порядку величины соответствует критическому числу Рейнольдса  $Re_d$ , определяющему переход от ламинарного к турбулентному режиму

\* Подробно структура и профиль скорости в ТПС рассмотрены в разделе 14.2.2.

течения в трубах. Если в качестве характерного размера пограничного слоя используется не толщина пограничного слоя  $\delta$ , а другие, связанные с ней величины, то соответствующие критические значения чисел Рейнольдса определяются соотношениями

$$Re_{x_{kp}} = (3,2 \dots 30) \cdot 10^5, \quad Re_{\delta_{kp}^*} = (1 \dots 10) \cdot 10^3, \quad Re_{\delta_{kp}^{**}} = (4 \dots 40) \cdot 10^2. \quad (12.67)$$

В общем случае положение точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный зависит от:

- степени турбулентности набегающего потока, характеризуемого величиной  $\sqrt{(u'_0)^2 / u_0}$  (чем выше степень турбулентности внешнего течения, тем скорее ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный);
- градиента давления вдоль обтекаемой поверхности  $d p / d x$  (положительный градиент ускоряет переход к турбулентному пограничному слою, отрицательный – затягивает);
- сстояния (шероховатости) обтекаемой твердой поверхности, которая влияет на переход вследствие внесения в поток дополнительных возмущений.

## 12.5. Пограничный слой при течении с продольным градиентом давления. Отрыв пограничного слоя

Уравнения пограничного слоя были нами получены при допущении о малости его относительной толщины  $\delta/x$ . Однако это допущение может нарушаться, если возникает отрыв пограничного слоя. Для выяснения сущности явления отрыва напомним, что давление поперек слоя практически постоянно и, следовательно, изменение давления вдоль пограничного слоя будет таким же, как и во внешнем потенциальном потоке. Рассмотрим в качестве примера обтекание круглого цилиндра, рис. 12.6.

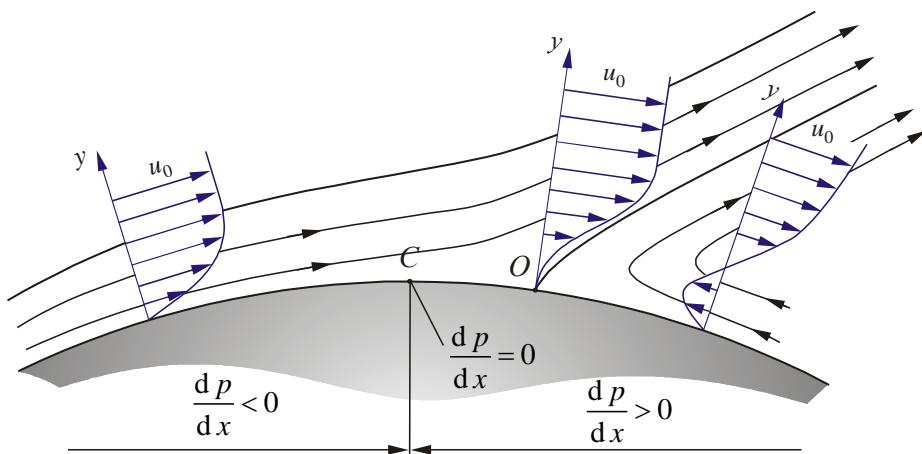


Рис. 12.6. Структура пограничного слоя в зоне отрыва

Начиная от передней критической точки<sup>\*</sup> скорость внешнего потока, обтекающего цилиндр, возрастает, а давление на внешней границе пограничного слоя падает. Минимального значения давление достигает в точке  $C$ , там, где скорость потока становится максимальной  $u_{0\max}$ . Продольный градиент давления в пограничном слое на этом участке отрицательный  $d p / d x < 0$ . Частицы среды, движущиеся на этом участке в пограничном слое, испытывают ускорение, обусловленное падением давления в направлении течения. Этому движению препятствует сила трения, обусловленная действием вязких напряжений. Все же, благодаря прямому перепаду давления, ускорение в потоке наблюдается, по крайней мере, до точки  $C$ .

За точкой  $C$  перепад давления положительный  $d p / d x > 0$ , так как внешний поток тормозится и давление, в соответствии с интегралом Бернулли, возрастает. Частицам приходится двигаться против возрастающего давления. В идеальной жидкости это привело бы лишь к уменьшению кинетической энергии и восстановлению полного давления (до давления в передней критической точке). В действительности в пограничном слое часть энергии затрачивается на компенсацию работы сил трения, оказывающих тормозящее действие. В связи с этим, частицы среды в пограничном слое, имеющие малый запас кинетической энергии, начиная с некоторой точки  $O$  уже не могут преодолеть совокупное действие обратного градиента давления и сил трения, они в точке  $O$  останавливаются. При этом частицы, движущиеся на большем расстоянии от стенки, вытесняются в сторону внешнего потока. Часть жидкости, расположенная ниже точки  $O$  по потоку, под действием обратного градиента давления получает возвратное движение. Это явление называется отрывом пограничного слоя.

На основании описанной картины течения нетрудно сформулировать условия отрыва:

$$\left. \frac{du_x}{dy} \right|_{y=0} = 0 \quad \text{или} \quad \tau = 0. \quad (12.68)$$

Из соотношений (12.68) можно получить координату точки отрыва. Заметим, что отрыв может произойти только за точкой минимума давления, а основным фактором, определяющим отрыв, является градиент давления.

При турбулентном движении в пограничном слое наличие пульсаций скорости приводит к более интенсивному обмену энергией между пограничным слоем и внешним потоком, поэтому кинетическая энергия частиц среды в пограничном слое увеличивается. Последнее является причиной того, что отрыв турбулентного пограничного слоя происходит значительно позже, чем ламинарного. Затягивание точки отрыва (при турбулентном по-

<sup>\*</sup> Точка на поверхности обтекаемого тела, где набегающий поток полностью тормозится.

граничном слое) положительно влияет на снижение величины сопротивления плохо обтекаемых тел.

Отрыв пограничного слоя практически всегда сопровождает течения, которые развиваются вблизи уступов, изгибов, изломов твердых стенок. Только при весьма малых числах Рейнольдса, когда течение относится к классу ползущих, возможно практически безотрывное обтекания вязкой жидкостью таких препятствий.

## 12.6. Сопротивление тел обтекаемых вязкой жидкостью

Тело, движущееся в жидкости, встречает со стороны последней сопротивление, для преодоления которого нужна дополнительная сила. В случае же когда тело неподвижно, а жидкость обтекает его, наоборот тело оказывает сопротивление течению жидкости.

Рассмотрим силу, с которой набегающий поток действует на обтекаемое тело. Эта сила складывается из сил давления и сил трения. Результирующая этих сил является полной гидродинамической (газодинамической) силой  $P$ , которую принято представлять двумя составляющими силой лобового сопротивления  $P_x$  и подъемной силой  $P_y$ , рис. 12.7.

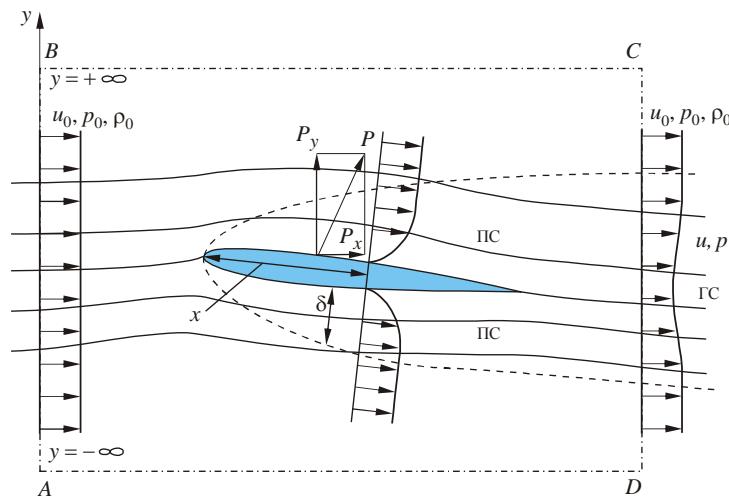


Рис. 12.7. Силы взаимодействия тела с потоком

За обтекаемым телом образуется гидродинамический след. Частицы жидкости, приторможенные в пограничным слое, попадают в след и постепенно смешиваются с основным потоком. Непосредственно за плохо-обтекаемым телом давление в следе может быть существенно ниже давления в невозмущенном потоке. Однако оно очень быстро выравнивается, в то время, как отличие в скорости может сохраняться на больших расстояниях за телом. Применим к контрольному объему  $ABCD$  уравнение сохранения количества движения в проекции на горизонтальную ось, учитывая, что расход жидкости через поверхности  $AB$  и  $CD$  одинаков:

$$\rho_0 \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} (u_0 u - u_0^2) dy = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} p_0 dy - \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} p dy - P_x. \quad (12.69)$$

Откуда найдем силу лобового сопротивления

$$P_x = \rho_0 u_0 \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} (u_0 - u) dy + \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} (p_0 - p) dy. \quad (12.70)$$

Из формулы (12.70) видно, что сила лобового сопротивления связана с падением скорости и давления в следе. Это в соответствии с уравнением Бернулли означает, что возникновение силы лобового сопротивления объясняется рассеянием механической энергии в потоке вследствие вязкости, то есть возрастанием энтропии.

Как уже отмечалось силу лобового сопротивления принято делить на силу сопротивления давления и силу трения. Такое деление условно, так как причиной возникновения, как одной, так и другой силы является вязкость жидкости, но удобно с методической точки зрения.

Для оценки силового взаимодействия между потоком и телом вводятся безразмерные аэродинамические коэффициенты:

- коэффициент лобового сопротивления

$$C_x = \frac{F_x}{\rho_0 u_0^2 / 2}; \quad (12.71)$$

- коэффициент подъемной силы

$$C_y = \frac{F_y}{\rho_0 u_0^2 / 2}. \quad (12.72)$$

Коэффициенты  $C_x$  и  $C_y$  зависят от формы тела, его ориентации в потоке и режима обтекания, характеризуемого числами Рейнольдса и Маха. Обтекание тела сверхзвуковым потоком ( $M > 1$ ) сопровождается образованием ударных волн и волн разрежения. В этом случае сила сопротивления давления называется *волновым сопротивлением*.

Все тела делят на *хорошо обтекаемые* и *плохо обтекаемые*. Тела, обтекаемые без отрыва пограничного слоя называют хорошо обтекаемыми, а с отрывом – плохо обтекаемыми. Обтекаемость тел зависит от тех же факторов, что и аэродинамические коэффициенты и может характеризоваться отношением силы сопротивления давления к силе сопротивления трения. Одно и то же тело при различной ориентации в потоке и при различных режимах течения может быть хорошо и плохо обтекаемым. Плохо обтекаемые тела всегда обтекаются с отрывом. Рассмотрим зависимость коэффициента  $C_x$  шара от числа Рейнольдса  $Re_0 = \rho_0 u_0 d / \mu$ , рис. 12.8.

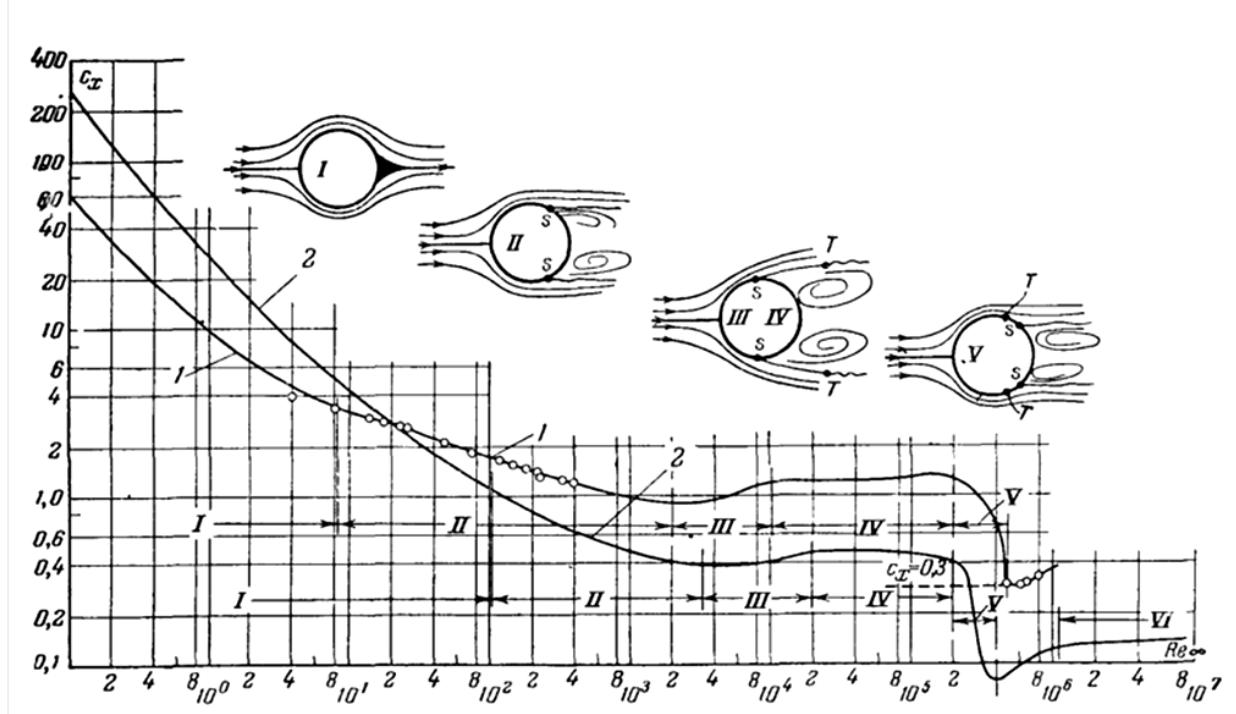


Рис. 12.8. Схемы обтекания и коэффициенты сопротивления шара и цилиндра в зависимости от числа Рейнольдса: 1 – цилиндр; 2 – шар

Здесь можно отметить пять характерных областей, возникновение которых обусловлено изменением картины обтекания, см. рис. 12.8. В области I, при  $Re_0 < 100$ .  $C_x$  уменьшается. Здесь обтекание практически безотрывное. Картина обтекания близка к картине обтекания шара идеальной жидкостью. Сила сопротивления почти исключительно определяется силой сопротивления трения. Резкое снижение  $C_x$  с увеличением числа Рейнольдса показывает, что в этой области сила сопротивления пропорциональна скорости  $u_0$ , что характерно для ламинарного режима течения.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса до  $Re_0 < (2 \dots 3) \cdot 10^3$  (область II) в кормовой части возникает неустойчивое вихревое движение. Это понижает давление в кормовой части и приводит к увеличению сопротивления давления и замедлению падения  $C_x$ .

В области III, где  $(2 \dots 3) \cdot 10^3 < Re_0 < 2 \cdot 10^4$ , ламинарный пограничный слой отрывается от поверхности шара. В области срыва течения поток еще ламинарный и на некотором удалении в кормовой зоне турбулизируется. Коэффициент  $C_x$  слабо возрастает, что объясняется интенсификацией вихревого движения в кормовой области и увеличением сопротивления давления.

При  $2 \cdot 10^4 < Re_0 < 2 \cdot 10^5$  (область IV) коэффициент аэродинамического сопротивления сохраняет приблизительно постоянное значение

$C_x = 0,45 \dots 0,47$  так как положение точки отрыва  $S$  пограничного слоя не изменяется. Эта область называется областью *локальной автомодельности по числу Рейнольдса*. В этой области при увеличении  $Re_0$  увеличивается зона турбулентности в области обратных токов за точкой отрыва и точка  $T$  перехода ламинарного течения в турбулентное в отрывной зоне приближается к точке отрыва  $S$  ламинарного пограничного слоя.

Затем в узкой зоне чисел Рейнольдса  $2 \cdot 10^5 < Re_0 < 4 \cdot 10^5$  коэффициент  $C_x$  кризисным образом уменьшается (область V). В этой области чисел  $Re_0$  точка перехода  $T$  совпадает с точкой отрыва  $S$ . То есть пограничный слой турбулизируется перед отрывом. Турбулентный пограничный слой обладает большей сопротивляемостью отрыву. Поэтому точка отрыва, теперь уже турбулентного пограничного слоя, резко смещается вниз по потоку. Обтекание шара улучшается, сопротивление давления резко падает, что приводит к падению  $C_x$  в 3...5 раз.

Интересно отметить, что в области  $2,5 \cdot 10^3 < Re_0 < 2 \cdot 10^5$  можно снизить  $C_x$  с 0,47 до  $\sim 0,1$  путем искусственной турбулизации основного потока, например, установив перед точкой отрыва  $S$  на поверхности шара тонкое кольцо.

В дальнейшем, при  $Re_0 > 4,5 \cdot 10^5$ , отмечается некоторое увеличение  $C_x$ , после чего коэффициент лобового сопротивления сохраняет практически постоянное значение (область VI). Это вторая область автомодельности по числу Рейнольдса, соответствующая фиксированному положению точки отрыва турбулентного пограничного слоя.

Аналогичная картина реализуется и при обтекании цилиндра.

## 12.7. Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятию гидродинамический след.
2. Дайте определение понятиям толщина вытеснения, толщина потери импульса.
3. Опишите основные гидродинамические особенности течений в пограничном слое по сравнению с течением вдали от стенки, использующиеся при выводе уравнений Прандтля.
4. В чем заключается принцип применения интегральных соотношений при расчете пограничных слоев?
5. Опишите качественную структуру турбулентного пограничного слоя. Каковы критические значения числа Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный?
6. Опишите качественную картину течения в пограничном слое при положительном градиенте давления. В чем состоит причина отрыва пограничного слоя?

7. Дайте определение понятиям сила лобового сопротивления, подъемная сила.

8. Дайте определение понятиям коэффициент лобового сопротивления, коэффициент подъемной силы.

9. Опишите качественную картину течения возле шара при увеличении числа Рейнольдса обтекающего его потока.

## ГЛАВА 13. ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В МЕХАНИКЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Многие задачи механики жидкости и газа, с которыми приходится иметь дело инженерам и исследователям, не поддаются аналитическому решению в силу нелинейности описывающих эти задачи систем уравнений\*. Именно поэтому при решении рассмотренных выше и важных для практики задач использовались упрощения при их математической постановке, например, допущение об одномерности потока, несжимаемости жидкости и пр., а для описания отдельных факторов, влияющих на решение, применялись экспериментальные данные, например, по величине коэффициента гидравлического трения и др. И даже при таких упрощениях, например, такая, казалось-бы тривиальная задача определения расхода в простом трубопроводе при заданном перепаде давлений не имеет аналитического решения. Поэтому единственной возможностью для теоретического анализа сколько-нибудь сложных задач механики жидкости и газа является получение их численного решения.

В данном разделе кратко поясняются основные идеи численного моделирования, дается общее представление о разностных схемах, отражаются некоторые особенности, которые необходимо учитывать при выполнении расчетов и интерпретации полученных результатов.

Для более подробного изучения вопросов численного моделирования отправляем интересующихся к обширной специализированной литературе, в качестве которой может служить, например [6,...,12].

### 13.1. Общие принципы численного моделирования

Численное решение задач МЖГ, описываемых дифференциальными уравнениями, основано на их сведении к задачам решения систем алгебраических уравнений. Для этого расчетная область разбивается на ячейки (формируется расчетная сетка). Непрерывное распределение гидродинамических параметров<sup>\*\*</sup> заменяется дискретным со значениями, привязанными к узлам сетки, либо к центру ячеек. Распределение гидродинамических параметров по времени также заменяется дискретным со значениями, привязанными к каждому временному слою. Пространственная сетка при переходе с одного временного слоя на другой может оставаться как неизменной, так и трансформироваться, адаптируясь под текущее поле гидро-

---

\* Более того, доказательство существования и гладкости решения уравнений Навье-Стокса относится к одной из шести нерешенных до сих пор математических проблем тысячелетия, сформулированных в 2000 г институтом Клэя (Кембридж).

\*\* Здесь имеется в виду, что в расчетной области отсутствуют скачки уплотнения. При наличии скачков возможны подходы, когда они не учитываются при построении пространственной сетки и тогда скачки «размазываются», либо положение скачков специально вычисляется и ячейки сетки «привязываются» к поверхности скачка.

динамических параметров. Таким образом производится пространственно-временная дискретизация поля искомых переменных.

Производные, входящие в математическое описание исследуемого процесса заменяются разностными аналогами. В результате система дифференциальных уравнений заменяется системой алгебраических уравнений, искомыми переменными в которой являются *сеточные функции* – дискретные значения поля гидродинамических параметров исходной задачи МЖГ. Описанная процедура носит название *конечно-разностной аппроксимации*. Полученная система алгебраических уравнений решается каким-либо численным методом.

Имеется несколько методов получения конечно-разностных моделей: разложение функций в ряд Тейлора, интерполяция функций полиномами, интегральный метод, метод контрольного объема. Конечно-разностная модель и метод ее решения представляют собой *разностную схему* решения исходной системы дифференциальных уравнений.

В настоящее время разработано множество разностных схем, отличающихся точностью, с которой они аппроксимируют систему дифференциальных уравнений, и методами решения получившейся системы алгебраических уравнений. Если искомые значения сеточных функций на следующем временном шаге выражаются явно через значения этих функций на текущий и предшествующий моменты времени, то такие разностные схемы называют *явными*. В противном случае разностная схема называется *неявной*. Неявные схемы менее требовательны к ограничениям на шаг интегрирования, но требуют выполнения больше операций для вычисления сеточных функций на новом временном слое.

Выбор той или иной разностной схемы зависит от типа решаемой задачи и располагаемых ресурсов ЭВМ.

Рассмотрим основные этапы численного моделирования и некоторые особенности, которые могут возникнуть при этой работе на примере решения простой задачи распространения ударной волны в сжимаемой жидкости в горизонтальном жестком трубопроводе постоянного сечения.

### 13.2. Математическая постановка задачи

На данном этапе на основе фундаментальных уравнений МЖГ и других физических законов разрабатывается система уравнений, описывающих рассматриваемый физический процесс. При этом обосновываются и принимаются допущения, упрощающие постановку и решение задачи (при необходимости).

В рассматриваемом нами примере течение для простоты будем предполагать одномерным с равномерным распределением гидродинамических параметров по поперечному сечению. Система уравнений для данной задачи, получается путем применения указанных выше допущений к общим уравнениям динамики (4.9), (4.21) и имеет вид:

- уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad (13.1)$$

- уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -a_\mu, \quad (13.2)$$

где  $w$ ,  $\rho$ ,  $p$  – средние по сечению трубопровода скорость, плотность и давление соответственно.

В уравнении (13.2) через  $a_\mu$  обозначена отнесенная к единице массы жидкости сила вязкого сопротивления, то есть осредненная по площади сечения канала величина  $-(\nabla^2 \mathbf{u})_x$ . Выразим ее через напряжение трения на стенках канала  $\tau_w$  следующим образом

$$a_\mu = \frac{\tau_w P dx}{\rho S dx} = \frac{\tau_w P}{\rho S},$$

где  $P$ ,  $S$  – периметр и площадь сечения трубопровода соответственно. С учетом (8.18) последняя формула для круглого трубопровода диаметром  $d$  примет вид

$$a_\mu = \frac{\lambda w^2}{2d} \frac{w}{|w|}. \quad (13.3)$$

Множитель  $w/|w|$  добавлен в последней формуле для того, чтобы сила вязкости действовала противоположно направлению скорости  $w$ . Для определения коэффициента гидравлического трения будем использовать формулы раздела 8.5.

Преобразуем уравнения (13.1), (13.2) к удобному для решения виду. Для учета сжимаемости среды представим первое слагаемое в (13.1) в следующем виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{E} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (13.4)$$

где  $E = \rho dp/dt$  – модуль упругости жидкости. Тогда, учитывая, что  $E/\rho = a^2$  ( $a$  – скорость распространения волн давления в жидкости) уравнение (13.1) запишем следующим образом

$$\frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (13.5)$$

Упростим уравнение (13.2), учитывая, что сжимаемость реальных жидкостей, характеризуемая модулем упругости  $E$ , как правило, незначительна. По крайней мере, в большинстве случаев справедливо соотношение  $E \gg p$ . Тогда имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(p/\rho)}{\partial x} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial(p/\rho)}{\partial x} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial(p/\rho)}{\partial x} + \frac{p}{\rho E} \frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\partial(p/\rho)}{\partial x}.$$

С учетом последнего соотношения и (13.3) уравнение (13.2) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\lambda w^2}{2d} \frac{w}{|w|} = 0. \quad (13.6)$$

Итак имеем систему двух уравнений (13.5), (13.6) относительно двух неизвестных: давления  $p$  и скорости  $w$ . В качестве начальных условий задаем  $w(t=0, x) = 0$ ,  $p(t=0, x) = p_0$ , то есть условия покоящейся жидкости. Для формирования граничных условий при  $x = 0$  будем считать, что трубопровод стыкуется с большим резервуаром, давление в котором постоянно и равно  $p_0$  (сам метод задания левых граничных условий описан ниже). На правом конце трубопровода  $x = L$  зададим переменные по времени граничные условия: при  $t < t_0$ ,  $p(t, x=L) = p_h$  (где  $p_h$  – давление окружающей среды); при  $t \geq t_0$ ,  $w(t, x=L) = 0$ . То есть считаем, что при времени  $t = t_0$  трубопровод в выходном сечении мгновенно перекрывается.

### 13.3. Конечно-разностная аппроксимация и метод решения

Для конечно-разностной аппроксимации рассматриваемой нами задачи используем интегральный метод. Для этого построим сетку с равномерными шагами по координате  $x_j - x_{j-1} = h$  и времени  $\tau$ , рис. 13.1.

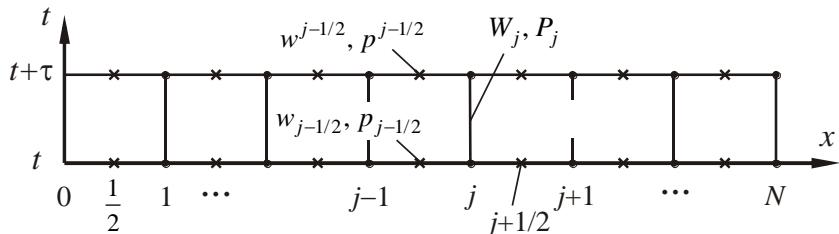


Рис. 13.1. Схема расчетной сетки

Параметры на границах ячеек обозначим прописными буквами. Они имеют целочисленный индекс. Их считаем постоянными на временном интервале интегрирования  $\tau$ . Параметры в середине ячейки (обозначенные строчными буквами и имеющие дробный индекс) считаем не зависящими от координаты в пределах шага сетки  $h$ . Эти параметры, относящиеся к нижнему временному слою, обозначаются с нижним расположением индекса, а относящиеся к верхнему временному слою – с верхним расположением, см. рис. 13.1. Истинные значения скорости и давления в трубопроводе будут аппроксимироваться значениями параметров в серединах ячеек (с дробными индексами).

Проинтегрируем по объему ячейки составленные уравнения (по  $x$  от 0 до  $h$ , по  $t$  от 0 до  $\tau$ ). В частности, для уравнения (13.5) имеем

$$\int_0^h \int_0^\tau \left( \frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt = 0. \quad (13.7)$$

Рассмотрим интеграл от первого слагаемого (13.7)

$$\int_0^h \int_0^\tau \frac{\partial p}{\partial t} dx dt = \int_0^h \int_0^\tau dp dx \approx \int_0^h (p^{j-1/2} - p_{j-1/2}) dx \approx (p^{j-1/2} - p_{j-1/2}) h. \quad (13.8)$$

При интегрировании второго слагаемого скорость  $w$  принимаем равной своему значению в центре ячейки на нижнем временном слое. Тогда имеем

$$\int_0^h \int_0^\tau w \frac{\partial p}{\partial x} dx dt \approx \int_0^\tau w_{j-1/2} (P_j - P_{j-1}) dt \approx w_{j-1/2} (P_j - P_{j-1}) \tau. \quad (13.9)$$

Интегрирование третьего слагаемого дает

$$\int_0^h \int_0^\tau \rho a^2 \frac{\partial w}{\partial x} dx dt \approx \int_0^\tau \rho a^2 (W_j - W_{j-1}) dt \approx \rho a^2 (W_j - W_{j-1}) \tau. \quad (13.10)$$

С учетом (13.8)...(13.10) уравнение (13.7) принимает вид

$$p^{j-1/2} = p_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} [w_{j-1/2} (P_j - P_{j-1}) + \rho a^2 (W_j - W_{j-1})] \quad (13.11)$$

Аналогично интегрируется и уравнение (13.6)

$$w^{j-1/2} = w_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} \left[ \left( \frac{W^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right)_j - \left( \frac{W^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right)_{j-1} \right] - \frac{\lambda_{j-1/2} w_{j-1/2}^2}{2d} \frac{w_{j-1/2}}{|w_{j-1/2}|} \tau. \quad (13.12)$$

Таким образом, формулы (13.11) и (13.12) позволяют вычислить скорость и давление в центрах ячеек сетки на верхнем временном слое (при  $t = t + \tau$ ) по известным своим значениям на нижнем временном слое (при  $t = t$ ), если известны параметры течения на границах ячейки. Для определения этих величин используется решение задачи о распаде разрыва гидродинамических параметров.

**Задача о распаде разрыва.** В рассматриваемой разностной схеме используется кусочно постоянная аппроксимация параметров потока по длине трубопровода. То есть на начало каждого рассчитываемого интервала времени на границах ячейки имеется разрыв параметров. Это разрыв физически не может существовать и должен распасться. Таким образом, если удастся определить, как изменяются давление и скорость при распаде их разрыва, то мы сможем найти необходимые «большие» величины  $P$  и  $W$ .

Вновь рассмотрим уравнения (13.5) и (13.6). Оценим порядок их слагаемых. Так как, в соответствии с (8.76) изменение давления при гидроударе имеет порядок  $\Delta p \sim \rho a \Delta w$ , то справедлива оценка

$$w \frac{\partial p}{\partial x} \sim \rho a w \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Следовательно, можно пренебречь вторым слагаемым уравнения (13.5) по сравнению с третьим. Аналогично оценивая члены уравнения (13.6), получим, что можно пренебречь кинетической энергией потока под знаком производной. Кроме того, при решении задачи распада разрыва не будем учитывать действие сил вязкости, что позволит получить простые алгебраические выражения для «больших величин». После упрощения система (13.5), (13.6) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (13.13)$$

Умножим первое уравнение (13.13) на  $1/\rho a$ . Полученное уравнение сложим со вторым. Затем из второго уравнения вычтем первое, умноженное на  $1/\rho a$ . В результате получается два следующих уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( w + \frac{p}{\rho a} \right) + a \frac{\partial}{\partial x} \left( w + \frac{p}{\rho} \right) = 0; \quad (13.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( w - \frac{p}{\rho a} \right) - a \frac{\partial}{\partial x} \left( w - \frac{p}{\rho} \right) = 0. \quad (13.15)$$

Введем новые переменные  $Y = w + \frac{p}{\rho a}$ ,  $Z = w - \frac{p}{\rho a}$ . С учетом этих обозначений уравнения (13.14), (13.15) примут вид

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + a \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial t} - a \frac{\partial Z}{\partial x} = 0. \quad (13.16)$$

Эти уравнения можно рассматривать, как производные от  $Y$  вдоль направления  $dx/dt = a$  и  $Z$  – вдоль направления  $dx/dt = -a$ . Параметры  $Y$  и  $Z$  носят название *Римановых инвариантов*, а направления  $dx/dt = \pm a$  называются *характеристиками* системы уравнений (13.16). Равенство нулю производных вдоль указанных направлений свидетельствует о том, что Римановы инварианты сохраняют свои значения на соответствующих характеристиках.

Рассмотрим две соседние ячейки расчетной сетки, рис. 13.2.

В момент времени  $t = 0$  гидродинамические параметры на их границах имеют разрыв, который распадается. Условия постоянства Римановых инвариантов на характеристиках имеют вид:

- на характеристике  $dx/dt = a$

$$\frac{P_{j-1/2}}{\rho a} + w_{j-1/2} = \frac{P_j}{\rho a} + W_j; \quad (13.17)$$

- на характеристике  $dx/dt = -a$

$$\frac{P_{j+1/2}}{\rho a} - w_{j+1/2} = \frac{P_j}{\rho a} - W_j. \quad (13.18)$$

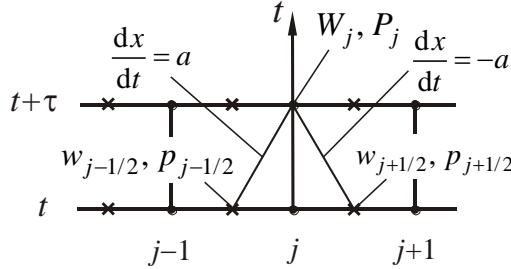


Рис. 13.2. Распад разрыва на границе ячеек

Из (13.17) и (13.18) находим искомые «большие величины»

$$P_j = \frac{1}{2}(p_{j-1/2} + p_{j+1/2}) - \frac{\rho a}{2}(w_{j+1/2} - w_{j-1/2}), \quad (13.19)$$

$$W_j = \frac{1}{2}(w_{j-1/2} + w_{j+1/2}) - \frac{1}{2\rho a}(p_{j+1/2} - p_{j-1/2}). \quad (13.20)$$

Таким образом, получаем следующий алгоритм расчета распределения скорости и давления по длине трубопровода:

1) По известным значениям параметров в середине ячеек на предыдущем временном слое  $w_{j-1/2}, p_{j-1/2}, j = \overline{1, N}$  по формулам (13.19), (13.20) находим параметры течения на границах ячеек  $W_j, P_j, j = \overline{1, N-1}$ .

2) По формулам (13.11), (13.12) вычисляем гидродинамические параметры течения на верхнем временном слое (при  $t = t + \tau$ )  $w^{j-1/2}, p^{j-1/2}, j = \overline{1, N-1}$ .

Приведенный алгоритм численного решения известен, как метод С.К. Годунова [6].

3) Для того, чтобы найти параметры течения в середине первой и последней ячеек на верхнем временном слое  $w^{1/2}, p^{1/2}, w^{N-1/2}, p^{N-1/2}$  необходимо задать граничные условия. Для формирования граничных условий на левой границе канала используем соотношение на характеристике  $dx/dt = -a$ , исходящей из ячейки с индексом  $\frac{1}{2}$ , и соотношение, следующее из уравнения Бернулли, записанное для сечений в резервуаре и на входе в трубопровод:

$$p_0 = P_0 + \zeta_{\text{вх}} \frac{\rho}{2} W_0^2. \quad (13.21)$$

Решая совместно (13.21) и (13.18) (при  $j = 0$ ) находим выражения для «больших» параметров на левой границе трубопровода

$$W_0 = -2a + 2\sqrt{a^2 + (p_0 - p_{1/2})/\rho + w_{1/2}a}, \quad (13.22)$$

$$P_0 = p_0 - \zeta_{\text{вх}} \frac{\rho}{2} W_0^2. \quad (13.23)$$

Для формирования граничных условий на выходе из трубопровода добавим к расчетной сетке справа одну фиктивную ячейку. Параметры в ней при открытом клапане задаем следующим образом  $w_{N+1/2} = w_{N-1/2}$ ,  $p_{N+1/2} = p_h$ , что имитирует истечение жидкости в атмосферу. После закрытия клапана эти параметры принимают значения  $w_{N+1/2} = -w_{N-1/2}$ ,  $p_{N+1/2} = p_{N-1/2}$ , чем моделируется жесткая стенка. Искомые величины  $w^{1/2}$ ,  $p^{1/2}$ ,  $w^{N-1/2}$ ,  $p^{N-1/2}$  теперь могут быть вычислены с использованием описанного в п. п. 1) и 2) алгоритма\*.

### 13.4. Аппроксимация и устойчивость численного решения

Исходя из метода вычисления «больших величин» можно понять, что если вести интегрирование системы (13.5), (13.6) с шагом большим, чем  $\tau^* = h/a$ , мы получим нефизическое решение. Действительно, из схемы рис. 13.2 понятно, что в момент времени  $t' > t + h/a$  пересекутся характеристики  $dx/dt = \pm a$ , исходящие не из соседних ячеек с номерами  $j-1/2$  и  $j+1/2$ , а из ячеек, располагающихся левее первой и правее второй. В результате мы получим неверные значения «больших величин» и тем самым будут нарушены законы сохранения (13.6), (13.7).

Численное решение, полученное при таком шаге интегрирования, в лучшем случае, не будет соответствовать истинному протеканию моделируемого физического процесса и приведет к неверной интерпретации результатов расчетов. В худшем случае решение потеряет устойчивость. Ограничение на шаг интегрирования  $\tau < \tau^* = h/a$  носит название условия Куранта. Выполнение этого условия сопряжено либо с увеличением шага расчетной сетки по пространству  $h$ , либо уменьшением шага интегрирования по времени  $\tau$ . Первое чревато потерей точности решения, второе – увеличением времен, потребного на решение задачи. Число Куранта, определяемое в вычислительной газовой динамике, как

---

\* Заметим, что если для задания граничных условий на входе в трубопровод добавить к нему слева фиктивную ячейку (как это сделано при формировании правых граничных условий) и положить в ней параметры, равные параметрам в резервуаре, результаты расчета будут существенно отличаться от известных экспериментальных данных. Дело в том, что в такой ячейке нельзя задавать скорость равной нулю, так как фактически в прилегающем к трубопроводу объеме резервуара происходит разгон жидкости. Как следует из (13.19), такой подход приведет к существенному занижению давления в начальном сечении трубопровода и, как следствие, к значительному уменьшению скорости течения в нем и уменьшению давления гидроудара.

$$Ku = \frac{\tau}{\min[h/(u+a)]}, \quad (13.24)$$

где операция минимум берется по всей расчетной области, является важной характеристикой эффективности численной схемы. Для явных разностных схем условие устойчивости решения имеет вид

$$Ku < 1. \quad (13.25)$$

В качестве примера, на рис. 13.3 приведены результаты расчетов рассматриваемой модельной задачи. Результаты соответствуют одним и тем же моментам времени, но если результаты расчетов давления на рис. 13.3, *a* ( $Ku = 0,5$ ) качественно верно описывают процесс распространения ударной волны вверх по трубопроводу и обратной волны разрежения, то рис. 13.3, *б* ( $Ku = 1$ ) не поддается никакому физическому трактованию. Причина осцилляций заключается в ошибках округления при работе процессора ЭВМ, что приводит к некоторому нарушению физических законов сохранения в результатах вычислений, так как численная схема находится на границе устойчивости. При  $Ku > 1$  амплитуда осцилляций возрастает и решение полностью теряет устойчивость.

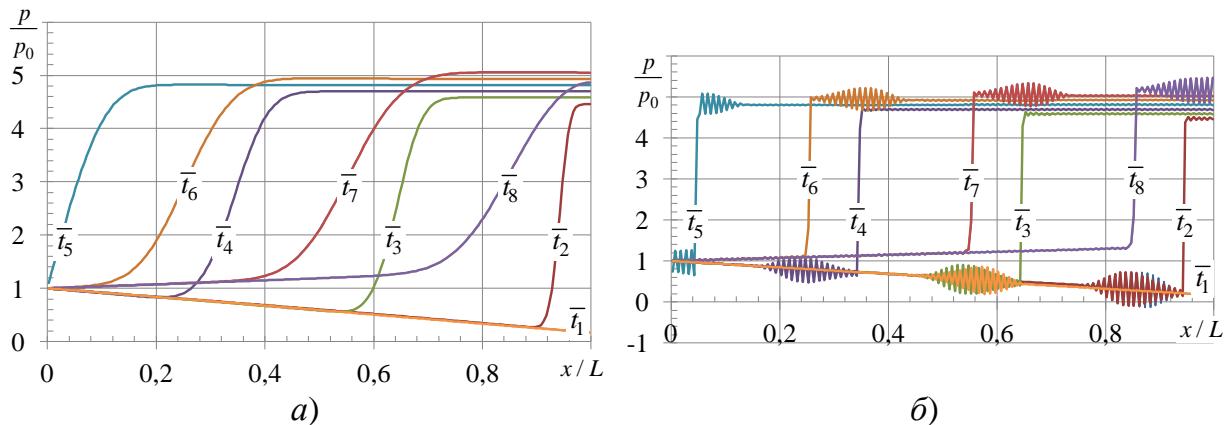


Рис. 13.3. Изменение давления при гидроударе,  $\bar{t} = ta / L$ :  $\bar{t}_1 = 0$ ;  $\bar{t}_2 = 0,065$ ;  $\bar{t}_3 = 0,365$ ;  $\bar{t}_4 = 0,665$ ;  $\bar{t}_5 = 0,965$ ;  $\bar{t}_6 = 1,265$ ;  $\bar{t}_7 = 1,565$ ;  $\bar{t}_8 = 1,865$ ; *a* –  $Ku = 0,5$ ; *б* –  $Ku = 1$

Кроме естественного требования устойчивости численного решения разностная схема, применяемая для решения задачи, должна обладать свойством *аппроксимации*. То есть при уменьшении шагов сетки по времени и пространству разность между дифференциальным оператором исходной системы уравнений и ее разностным аналогом, иначе говоря, *погрешность аппроксимации* должна стремиться к нулю. Оценим эту погрешность для нашей схемы. Для этого разложим разностное решение в ряд Тейлора в окрестности точки  $(w_{j-1/2}, p_{j-1/2})$ . Для скорости имеем выражения

\* Неявные схемы сохраняют устойчивость решения и при  $Ku > 1$ .

$$w^{j-1/2} = w_{j-1/2} + \frac{\partial w}{\partial t} \tau + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^2), \quad (13.26)$$

$$w_{j+1/2} = w_{j-1/2} + \frac{\partial w}{\partial t} h + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} + O(h^2), \quad (13.27)$$

$$w_{j-3/2} = w_{j-1/2} - \frac{\partial w}{\partial t} h + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} + O(h^2), \quad (13.28)$$

где  $O(\tau^2), O(h^2)$  – члены разложения второго порядка малости.

Подставим (13.26)...(13.28) и аналогичные разложения для давления в уравнения разностной схемы (13.11), (13.12), (13.19), (13.20). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + a_\mu &= -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{h}{2} \left( \frac{w}{\rho a} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad \left. = \frac{1}{\rho a} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + O(\tau + h), \end{aligned} \quad (13.29)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{h}{2} \left( \rho a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) + O(\tau + h). \quad (13.30)$$

Из (13.29), (13.30) видно, что погрешность аппроксимации разностной схемы имеет первый порядок малости  $O(\tau + h)$ . При измельчении сетки система (13.29), (13.30) переходит в (13.5), (13.6). Описанная разностная схема называется схемой *первого порядка* аппроксимации. Существуют схемы второго и более высоких порядков, то есть аппроксимирующих исходную систему дифференциальных уравнений с меньшей погрешностью.

Вместе с тем, необходимо отметить, что система (13.29), (13.30), соответствующая разностной схеме, все таки отличается от исходной системы уравнений\*. Следовательно, численному решению будут присущи свойства, отсутствующие в рассматриваемом физическом процессе. В частности, как видно из рис. 13.3, а, фронт ударной волны в численном решении пологий («размазан»), хотя теоретически он должен иметь вид скачка так как разностная схема содержит алгоритм вычисления гидродинамических параметров на скачке (распад разрыва). Выясним причину этого факта.

### 13.5. Течения с разрывами параметров

Используя исходную систему уравнений (13.5), (13.6), заменим производные по времени в правых частях (13.29), (13.30) производными по координате. После преобразований получаем

\* В исходной системе правые части равны нулю.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + a_\mu = & \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial^2 w^2 / 2}{\partial t \partial x} + \frac{\partial a_\mu}{\partial t} \right) + \\ & + \frac{ha}{2} (1 - Ku) \left( \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{w}{\rho a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + O(\tau + h), \end{aligned} \quad (13.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial w}{\partial x} = & -\frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + a_\mu \right] + w \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + w \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) + \right. \\ & \left. + \rho a^2 \left( \frac{\partial^2 w^2 / 2}{\partial x^2} + \frac{\partial a_\mu}{\partial x} \right) \right\} + \frac{ha}{2} (1 - Ku) \left( \rho w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) + O(\tau + h). \end{aligned} \quad (13.32)$$

По аналогии с уравнением Навье-Стокса члены уравнений (13.31), (13.32), включающие вторые производные по координате, можно считать силами вязкости, а множитель

$$v_s = \frac{ha}{2} (1 - Ku) \quad (13.33)$$

следует считать некоторой эффективной вязкостью. Величину  $v_s$  называют *схемная вязкость*. Именно наличие схемной вязкости приводит к размазыванию фронта волны.

Как видно из (13.33), схемная вязкость убывает при  $Ku \rightarrow 1$ . На рис. 13.4 приведены результаты расчета гидроудара при  $Ku = 0,995$ . Остальные данные те же, что и в расчетах, соответствующих рис. 13.3, a.

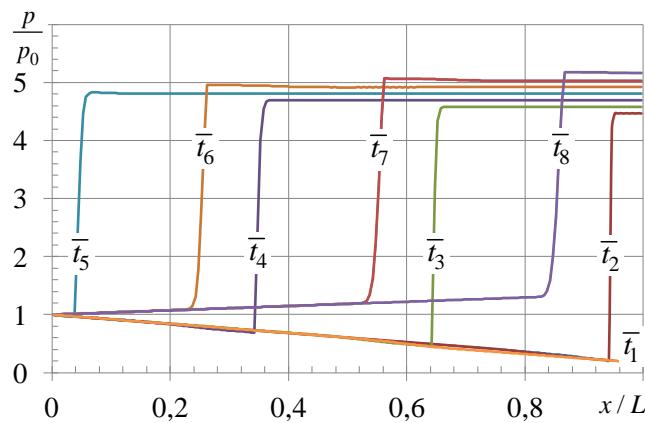


Рис. 13.4. Изменение давления при гидроударе,  $Ku = 0,995$

Приведенные результаты показывают, что, действительно, схемная вязкость исчезла, фронт ударной волны в момент ее возникновения скачкообразный. По мере развития гидроудара фронт волн несколько выплаживается, но это связано с действием коэффициента гидравлического трения  $\lambda$ , имеющегося в математической модели процесса.

Вообще необходимо отметить, что результаты численного моделирования гидрогазодинамических процессов, где возможно образование разрыва параметров (ударных волн, скачков уплотнения), во многих случаях пред-

ставляют реальную картину в искаженном виде с «размазанными» разрывами. Причин здесь может быть несколько. Это и грубая сетка, и применение схем «сквозного счета», базирующихся на выполнении интегральных законов сохранения и не «обрабатывающие» разрывы, и схемная вязкость. Кроме того, в разностные схемы второго и более высоких порядков специально вводится искусственная вязкость (*псевдовязкость*) для подавления осцилляций, так как данным схемам присуща немонотонность решения.

Поэтому, если задачей расчетов является идентификация разрывов параметров, то для этого должны выбираться и соответствующие численные методы.

### 13.6. Нефизическое поведение решения

При численном моделировании возможны ситуации, когда поведение решения не соответствует ожидаемому (исходя из качественных представлений о процессе), либо вообще противоречит физическим законам. Причина этого может, в частности, заключаться в том, что примененная для расчетов математическая модель стала некорректной при реализовавшихся в расчете параметрах. В качестве примера на рис. 13.5 показаны результаты расчетов распространения волны разрежения после прохождения ударной волны в трубопроводе по математической модели, описанной выше.

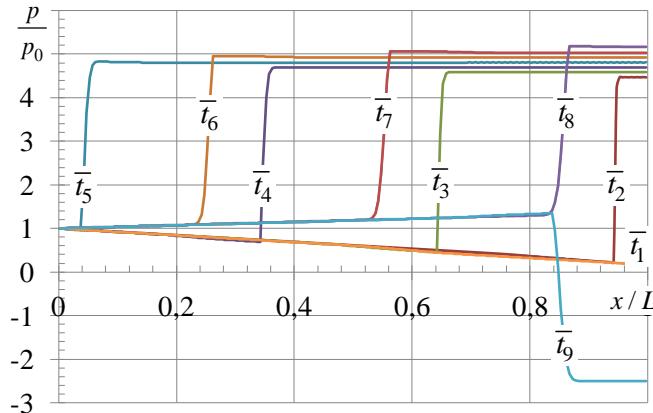


Рис. 13.5. Распространение волны разрежения по трубопроводу:  
 $\bar{t}_9 = 2,165$  (остальные моменты времени те же, что и на рис. 13.3)

Как видим в момент относительного времени  $\bar{t}_9 = 2,165$  на конечном участке трубопровода реализовалось отрицательное давление, что в невозможно в классической термодинамике. Причина этого кроется в том, что использованная математическая модель описывает только сплошную среду, а в данном расчете в наиболее интенсивной области волны разрежения сплошность нарушается вследствие кавитации жидкости. Для корректного описания процесса математическая модель должна учитывать возможность появления перемещающейся свободной поверхности жидкости с постановкой граничных условий на ней, следующих из модели парового объема

кавитационной каверны. Сами уравнения движения жидкости также должны быть изменены для учета потерь массы и количества движения при фазовом переходе.

В настоящей главе затронута только малая часть вопросов, с которыми приходится сталкиваться исследователю при численном моделировании процессов гидрогазодинамики.

Методы численного моделирования интенсивно развиваются уже более 60 лет благодаря существенному прогрессу в области создания ЭВМ. В настоящее время имеется множество специализированных коммерческих программных продуктов, предназначенных для моделирования гидрогазодинамических процессов, например, Ansys Fluent, Ansys CFX, Flow Vision, Gas Dynamics Tool и др. Задача современного инженера заключается в грамотном применении этих инструментов для решения практических задач, для чего и необходимо быть знакомым с принципами получения численного решения.

В заключение заметим, что особенности, присущие численным методам, некоторые из которых отмечены выше, свидетельствуют, что, применение несомненно мощных и полезных инструментов численного моделирования гидрогазодинамических параметров требует вдумчивого и аккуратного подхода. Начиная работу по численному моделированию надо четко представлять цель проведения расчетов, выполнить приближенные оценки диапазона изменения параметров процесса, базируясь на которых следует выбирать математическую и постановку и численный метод, в наибольшей степени отвечающей задаче моделирования. Особено аккуратно следует подходить к моделированию малоизученных процессов, к которым можно отнести, например, турбулентные течения в областях сложной геометрии, течения с химическим реакциями и др.

### **13.7. Контрольные вопросы**

1. Дайте определение понятию конечно-разностная аппроксимация системы дифференциальных уравнений.
2. Дайте определение понятию разностная схема.
3. Что означает термин порядок аппроксимации?
4. Дайте определение понятиям явная и неявная разностная схема.
5. Дайте определение понятию число Куранта.
6. Каково условие устойчивости решения при использовании явной разностной схемы?
7. В чем причина появления схемной вязкости, каковы формы ее проявления?
8. Что означает понятие псевдовязкость?
9. Что может явиться причиной получения численного решения не соответствующего физическим закономерностям?

## ГЛАВА 14. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ЕЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

### 14.1. Возникновение и развитие турбулентности

Причиной появления турбулентности является развитие случайных возмущений гидродинамических параметров, возникающих при взаимодействии жидкости с ограждающими стенками и внутренними неоднородностями потока, с потерей устойчивости слоистого течения. Упрощенно картину формирования турбулентных вихрей можно представить следующим образом. Допустим, в плоском течении возникло отклонение ряда линий тока от первоначально слоистого течения с формированием волны, рис. 14.1, *a*. Такая волнобразная структура неустойчива. Действительно, в зонах расширения трубок тока, согласно уравнению Бернулли (4.61), давление повышается, в зонах сужения – уменьшается. Это приводит к росту амплитуды волны и ее свертыванию в вихрь, см. рис. 14.1, *б*.

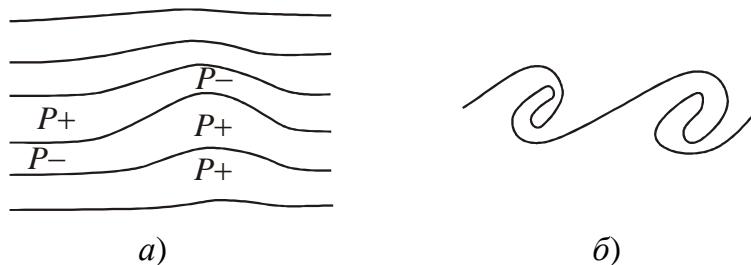


Рис. 14.1. Схема развития возмущения при возникновении турбулентности:  
*а*) возмущение линий тока; *б*) формирование вихря

При этом потеря устойчивости слоистого течения является только началом вихреобразования. Полностью турбулентным течение становится позже (ниже по потоку). Нелинейность газодинамических систем приводит к тому, что амплитуда возмущений оказывается ограниченной и когда она достигает насыщения, говорят, что течение стало *развитым турбулентным*. Формирование развитого турбулентного течения можно проследить по рис. 14.2, где показано возникновение и развитие турбулентности при истечении струи в неподвижную атмосферу и в ламинарном потоке за решеткой.

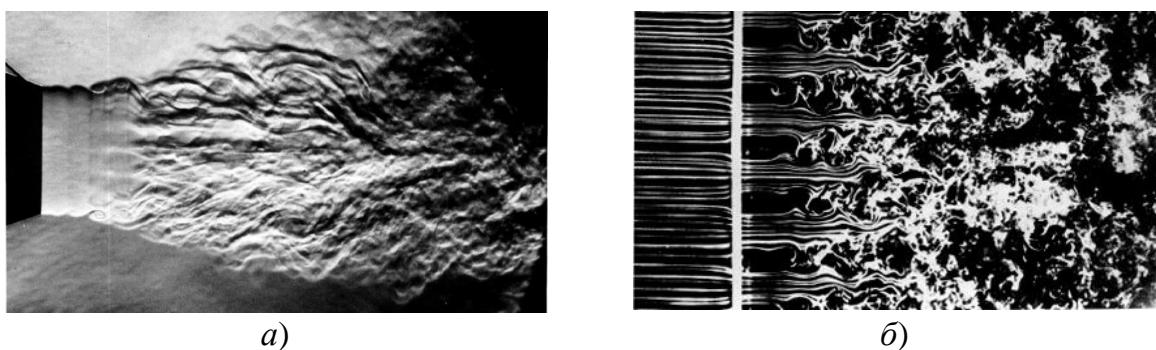


Рис. 14.2. Развитие турбулентности: *а* – затопленная струя;  
*б* – течение за решеткой

Здесь (на левой фотографии) видно, что первоначально ламинарная поверхность струи воздуха становится неустойчивой, ниже по течению возмущения нарастают и, в конечном итоге, струя становится турбулентной. Аналогично, (на правой фотографии) показано, что неустойчивость сдвиговых слоев, сформированных решеткой, приводит к развитию турбулентности вниз по потоку.

В целом турбулентность можно представить, как трехмерное нестационарное движение, в котором вихри различных масштабов вызывают энергичное смешение жидкости, что приводит к возникновению турбулентных напряжений, намного превышающих ламинарные, то есть обусловленных действием молекулярной вязкости.

## 14.2. Структура и основные характеристики турбулентности

Экспериментальные исследования показывают, что структура турбулентности, которая трансформируется по мере развития течения от точки потери устойчивости ламинарного режима, зависит от типа течения: свободные сдвиговые<sup>\*</sup> либо пристенные течения<sup>\*\*</sup>. Но в любом случае турбулентное течение представляет собой совокупность взаимодействующих между собой вихрей различных порядков, различающихся характерными масштабами и скоростями, рис. 14.3. Размер максимальных вихрей соизмерим с характерным размером области течения  $L$ . Размер минимальных, как увидим далее, зависит от вязкости жидкости и уменьшается с увеличением скорости осредненного потока  $\bar{u}$ , но значительно превышает длину свободного пробега молекул.

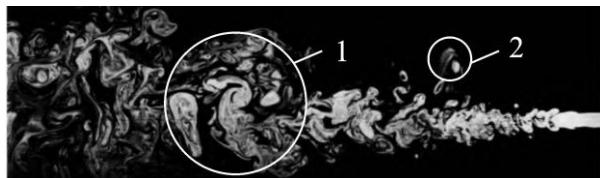


Рис. 14.3. Турбулентные вихри в затопленной струе:  
1 – крупномасштабные; 2 – мелкомасштабные

Мерой интенсивности турбулентных пульсаций служит кинетическая энергия турбулентности  $k$  (отнесенная к единице массы кинетическая энергия турбулентных пульсаций), определяемая равенством

$$k = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}'^2} = \frac{1}{2} \left( \overline{u'_x^2} + \overline{u'_y^2} + \overline{u'_z^2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{u_i'^2} = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}. \quad (14.1)$$

Вследствие действия сил молекулярной вязкости происходит рассеяние кинетической энергии турбулентных пульсаций, которое оценивается ве-

<sup>\*</sup> Течения не ограниченные стенками, например, слои смешения движущихся с разной скоростью жидкостей, затопленные струи, след за плохо обтекаемым телом.

<sup>\*\*</sup> Течение в пограничных слоях.

личиной удельной диссипации кинетической энергии турбулентности  $\varepsilon_s$  – отнесенной к единице массы скоростью превращения энергии турбулентных пульсаций в тепловую энергию. По аналогии с диссипативным членом уравнения сохранения энергии (4.79) диссипацию турбулентности  $\varepsilon_s$  можно определить следующим образом

$$\varepsilon_s = \nu \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}. \quad (14.2)$$

### 14.2.1 Свободная турбулентность

Рассмотрим качественную картину свободного турбулентного течения с числом Рейнольдса  $Re = \bar{u}L / \nu$  значительно превосходящим критическое  $Re_{kp}$ . Обозначим:  $l_i$  – характерный размер турбулентного вихря;  $v_i$  – его характерная скорость (по порядку величины близкая к  $\sqrt{u'^2}$ ). Тогда число Рейнольдса  $Re_i = v_i l_i / \nu$  характеризует отношение сил инерции к силам вязкости при движении жидкости рассматриваемого вихря. Наиболее крупные вихри (вихри первого порядка) подпитываются энергией от осредненного течения. Пульсации гидродинамических параметров, создаваемые ими, носят «отпечаток» осредненного течения и, следовательно, анизотропны и неоднородны, а характерное число Рейнольдса  $Re_1$  по порядку величины совпадает с  $Re$ . То есть силы инерции движения этих вихрей значительно превышают стабилизирующие силы вязкости и они распадаются с образованием более мелких вихрей второго порядка, «заимствующих» кинетическую энергию от вихрей первого порядка. Число  $Re_2$  меньше, чем  $Re_1$ , но при большом  $Re$  еще достаточно высоко, поэтому данные вихри также распадаются с образованием более мелких. Такой *каскадный процесс распада с переносом энергии турбулентных пульсаций от «старших» возмущений «младшим»* продолжается, пока не выполнится условие  $Re_i \sim 1$ . Самые мелкие возмущения характеризуются наибольшими значениями локальных градиентов скорости; поэтому преимущественно в них сосредоточена диссипация кинетической энергии турбулентности в теплоту под действием вязкости, рис. 14.4, *a*.

Так как для крупномасштабных вихрей числа Рейнольдса  $Re_i$  высоки, то силы вязкости движения этих вихрей малы по сравнению с инерционными. То есть кинетическая энергия турбулентности передается ими по каскаду практически без диссипации и только на самых малых вихрях рассеивается в тепло. Следовательно  $\varepsilon_s$  будет равна среднему количеству энергии, поступающей от осредненного течения к наиболее крупным возмущениям. Тогда величина  $\varepsilon_s$  может быть оценена на основании соображений размерности по параметрам осредненного течения: масштабу  $L$  и средней скорости  $\bar{u}$ . Так как  $[L] = \text{м}$ ;  $[\bar{u}] = \text{м}/\text{с}$ ;  $[\varepsilon_s] = \text{м}^2/\text{с}^3$ , то

$$\varepsilon_s \sim \frac{\bar{u}^3}{L}. \quad (14.3)$$

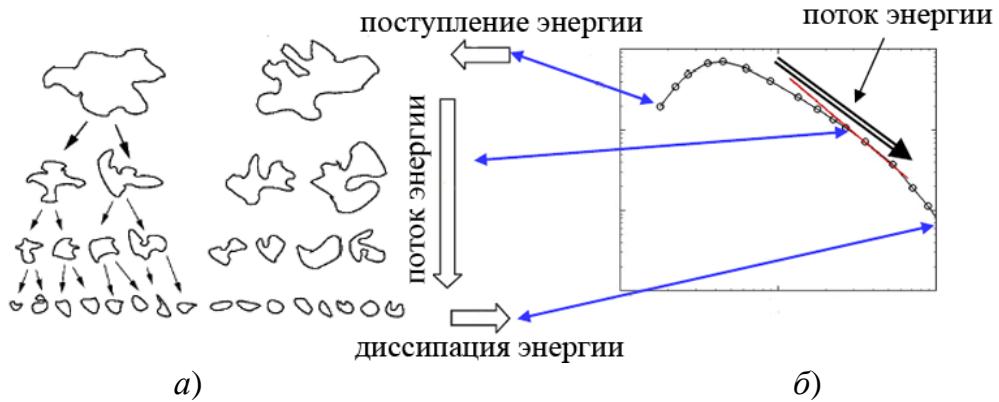


Рис. 14.4. Каскадная структура развитого турбулентного течения:  
а – схематичная структура турбулентности; б – спектральная плотность  
энергии турбулентности

По мере дробления вихревых структур пульсаций, создаваемые ими, становятся все более однородными и изотропными и действительно являются таковыми при достаточно высоком числе  $Re$ , так как вследствие хаотичности передачи энергии, ориентирующее влияние среднего течения при каждом переходе к более мелким возмущениям ослабевает. (Течение с однородной и изотропной мелкомасштабной турбулентностью называется *развитым турбулентным*, а изотропность, выполняющаяся только для определенного масштаба возмущений – называется локальной.) Следующая из этого независимость параметров мелкомасштабной турбулентности от характеристик осредненного течения позволяет предположить, что все параметры мелкомасштабных пульсаций определяются только величиной диссипации энергии турбулентности  $\varepsilon_s$  и кинематической вязкости  $v$ . (Это предположение составляет суть *первой гипотезы Колмогорова*.) Тогда, используя соображения теории размерностей, можем ввести масштабы размера  $l_0$  и скорости движения  $v_{l_0}$  мельчайших вихрей:

$$l_0 = \left( \frac{v^3}{\varepsilon_s} \right)^{\frac{1}{4}}; \quad v_{l_0} = (v \varepsilon_s)^{\frac{1}{4}}. \quad (14.4)$$

Величина  $l_0$  называется *внутренний (Колмогоровский) масштаб турбулентности* и характеризует линейные размеры вихрей, на которые вязкость еще оказывает существенное влияние. Степень многомасштабности турбулентного переноса, с учетом (14.3), оценим как

$$\frac{l_0}{L} \sim \frac{1}{L} \left( \frac{v^3}{\varepsilon_s} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{L} \left( \frac{v^3 L}{\bar{u}^3} \right)^{\frac{1}{4}} = \left( \frac{v^3 L^3}{\bar{u}^3} \right)^{\frac{1}{4}} = Re^{-\frac{3}{4}}. \quad (14.5)$$

Как видим, действительно, чем больше число Рейнольдса осредненного течения, тем меньше размер мелкомасштабных вихрей. Используя (14.5), можем оценить размер минимальных вихрей. Например, при  $L=0,1\text{ м}$ ;  $\text{Re}=10^6$ , получаем  $l_0 \sim 5 \cdot 10^{-6}\text{ м}$ .

При высоких числах  $\text{Re}$  диапазон размеров вихрей  $l_i$  может быть очень широким. Следовательно, в этом случае должен существовать достаточно протяженный интервал порядков однородных и изотропных возмущений, где влияние вязкости пренебрежимо мало, а статистические параметры турбулентности зависят только от величины  $\varepsilon_s$ . Для проверки этого факта обычно рассматривается распределение спектральной плотности энергии турбулентности  $E(\kappa)$  по волновым числам, определяемым, как величина обратная масштабу вихря:  $\kappa_i = 1/l_i$ . Энергия турбулентности, содержащаяся в диапазоне волновых чисел от  $\kappa$  до  $\kappa + d\kappa$  записывается, как  $E(\kappa)d\kappa$  и имеет размерность  $\text{м}^2/\text{с}^2$ . Размерность волнового числа  $[\kappa] = 1/\text{м}$ . Тогда из соображений размерности и отмеченной выше локальной изотропности можем записать

$$E(\kappa) \sim \varepsilon^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}}. \quad (14.6)$$

Зависимость (14.6) носит название «закона пяти третей» и составляет суть *второй гипотезы Колмогорова*. Она имеет принципиальное значение для понимания общих закономерностей переноса в турбулентных потоках. Интервал волновых чисел, для которых справедливо соотношение (14.6) называется *инерционным*. Неявно в идее локальной изотропии содержится предположение о том, что непосредственная связь между крупно и мелкомасштабными возмущениями слабая, а поведение мелких вихрей одинаково во всех турбулентных потоках. Закон «пяти третей» неоднократно подтвержден экспериментально. Пример экспериментальной зависимости типа (14.6) показан на рис. 14.4, б. Со стороны малых масштабов к инерционному интервалу примыкает *область диссипации*, а со стороны больших масштабов – *область энергии*. В области энергии происходит генерация турбулентной энергии. В инерционном интервале энергия передается практически без потерь «вниз по масштабам», а в области диссипации энергия переходит в тепло.

Таким образом, согласно Колмогорову в локально изотропном турбулентном потоке скорость поступления энергии турбулентности  $\dot{k}$  от осредненного течения и передающейся по каскаду не зависит от молекулярной вязкости, а определяется двумя параметрами: кинетической энергией турбулентности  $k$  и линейным масштабом  $l$ . Но так как  $\dot{k}$  равна диссиpации турбулентности на мелкомасштабный вихрь  $\varepsilon_s$ , то из соображений размерности следует

$$\varepsilon_s = C_k \frac{k^{3/2}}{l}, \quad (14.7)$$

где  $C_k$  – безразмерный коэффициент, определяемый из экспериментов (Для развитого турбулентного течения  $C_k = 0,164$ ).

Соотношение (14.7) называется *формулой Колмогорова* и используется в большинстве моделей турбулентности.

Необходимо подчеркнуть, что не всегда свободная турбулентность локально изотропна. Для течений в следе за телом, затопленной струе, в слоях смешения часто характерна *двойная структура турбулентности*: на фоне крупных вихрей, движение которых носит скорее упорядоченный, чем хаотичный характер, развивается мелкомасштабная турбулентность, рис. 14.3, 14.5. Такие организованные вихревые структуры, сравнимые по размеру с масштабом области течения, называют *когерентными*. Они приводят к вовлечению из внешнего потока ламинарных порций жидкости внутрь турбулентной области. При этом через рассматриваемую точку проходит то турбулентный, то ламинарный поток. Данное явление называют *перемежаемостью*.

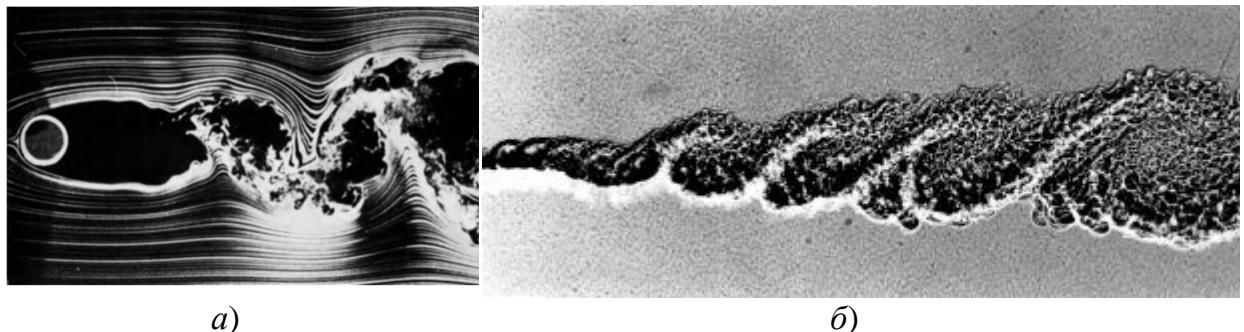


Рис. 14.5. Двойная структура турбулентности: *a* – обтекание цилиндра; *б* – течение в слое смешения

Двойная структура в свободных сдвиговых течениях приводит к тому, что они зачастую оказываются довольно сложными для многих методов расчета и большинство моделей турбулентности не в состоянии хорошо спрогнозировать их параметры.

#### 14.2.2 Турбулентный пограничный слой

В отличие от ламинарного турбулентный пограничный слой обычно имеет отчетливую границу, выше которой турбулентность отсутствует\*. Эта граница имеет неправильные очертания, беспорядочно изменяющиеся во времени. Каждая точка границы колеблется в пределах примерно от  $(0,3\dots 0,4)\delta$  до  $1,2\delta$  (где  $\delta$  – расстояние от стенки, на котором средняя скo-

---

\* Если, конечно, поток, обтекающий стенку ламинарный.

рость равна 0,99 от скорости внешнего потока) со средним значением  $\sim 0,78\delta$ , рис. 14.6.

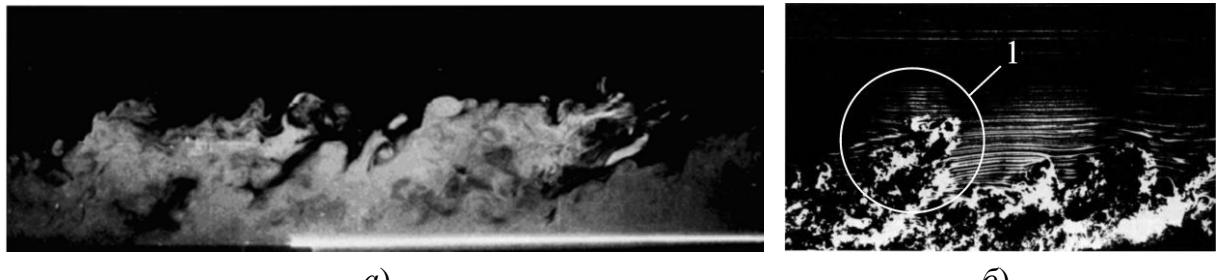


Рис. 14.6. Турбулентный пограничный слой: *а* – пограничный слой на пластине; *б* – внешняя область пограничного слоя; 1 – когерентная структура

В пограничном слое выделяют две области внутреннюю и внешнюю. Толщина внутренней составляет  $\sim 20\%$  от общей толщины пограничного слоя. Но здесь генерируется  $\sim 80\%$  энергии турбулентности. Она населена мелкомасштабными вихрями с характерным размером порядка расстояния до стенки и малым временем «жизни». Внешняя область населена крупномасштабными вихрями с характерным размером порядка толщины пограничного слоя с долгим временем «жизни» – *когерентными структурами*. Эти структуры приводят к появлению *перемежаемости*. Доля времени  $\gamma(y)$ , в течение которого на расстоянии  $y$  от стенки наблюдается турбулентность, убывает с ростом  $y$  и при  $y = \delta$  равняется всего лишь  $\sim 0,06$ .

Найдем распределение осредненной скорости поперек турбулентного пограничного слоя, развивающегося на пластине. Течение будем считать стационарным, двумерным. Ось  $x$  системы координат, направим вдоль платины по потоку, ось  $y$  – перпендикулярно пластине, а пластину будем считать гладкой.

При такой постановке существует только одна компонента осредненной скорости  $\bar{u}_x$  и две пульсационной  $u'_x$  и  $u'_y$ . Уравнение Рейнольдса (4.106) для рассматриваемого случая примет вид

$$\nu \frac{d^2 \bar{u}_x}{dy^2} - \frac{d}{dy} \overline{u'_x u'_y} = 0. \quad (14.8)$$

Интегрируя (14.8) по  $y$ , получим

$$\rho v \frac{d \bar{u}_x}{dy} - \rho \overline{u'_x u'_y} = \text{const} = \tau_0. \quad (14.9)$$

Соотношение (14.9) показывает, что направленный от жидкости к стенке поток  $x$ -компоненты импульса будет одним и тем же при любом  $y$  и, следовательно, равным напряжениям трения на стенке  $\tau_0$ . Проинтегрировать уравнение (14.9) невозможно, так как неизвестно рейнольдсово напряжение  $-\rho \overline{u'_x u'_y}$ . Поэтому для определения профиля осредненной скорости воспользуемся соображениями теории размерностей. Их общефизиче-

ский представлений можно сказать, что  $\bar{u}_x$  будет функцией координаты  $y$ , напряжений  $\tau_0$  и характеристик жидкости  $\rho$  и  $v$ . При этом  $\tau_0$  и  $\rho$  должны входить в исходную зависимость только в виде комбинации  $\tau_0/\rho$  для исключения размерности массы из итогового соотношения. Поэтому составим из них параметр

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad (14.10)$$

имеющий размерность скорости, который будем использовать в качестве масштаба скоростей. Эта величина носит название *динамическая скорость*. Из сформированного набора параметров  $u_*$ ,  $x$ ,  $v$  можно образовать единственную безразмерную комбинацию  $u_* x / v$ . Следовательно, исходная зависимость будет иметь вид

$$\frac{\bar{u}_x}{u_*} = f\left(\frac{yu_*}{v}\right), \text{ или } u_+ = f(y_+), \quad (14.11)$$

где  $u_+ = \bar{u}_x / u_*$ ,  $y_+ = y / y_*$  – безразмерные скорость и расстояние от стенки;  $y_* = v / u_*$  – линейный масштаб, называемый *динамическая длина*;  $f$  – некоторая универсальная функция.

Уравнение (14.11) называется *универсальным законом турбулентности вблизи стенки* или просто *законом стенки*.

Получим вид функции  $f$  для двух предельных случаев: больших и малых значений расстояния от стенки  $y_+$ .

При  $y_+ = 0$   $-\rho \bar{u}'_x \bar{u}'_y = 0$  в силу условий прилипания жидкости. Поэтому при малых  $y_+$  можно пренебречь вторым слагаемым в уравнении (14.9). Тогда имеем

$$\rho v \frac{d\bar{u}_x}{dy} = \tau_0. \quad (14.12)$$

Интегрирование (14.12) дает линейный профиль скорости при малых  $y_+$

$$\bar{u}_x = \frac{\tau_0}{\rho v} y, \text{ или } \bar{u}_x = u_* \frac{u_*}{v} y, \text{ или } \frac{\bar{u}_x}{u_*} = \frac{y}{x_*}. \quad (14.13)$$

То есть  $f(y_+) = y_+$ . Слой жидкости, в пределах которого  $v \frac{d\bar{u}_x}{dy} \gg \bar{u}'_x \bar{u}'_y$

и справедливо уравнение (14.12), называют *вязким подслоем* турбулентного пограничного слоя. Толщину вязкого подслоя  $\delta_v$ , в пределах которой справедливы соотношения (14.13), на основании экспериментальных данных принимают равной пяти динамическим длинам:

$$\delta_v = 5 \frac{v}{u_*}. \quad (14.14)$$

Во втором предельном случае  $y \gg y_*$  можно пренебречь силами молекулярной вязкости по сравнению с реинольдсовыми напряжениями. То есть считать, что  $\nu \frac{d\bar{u}_x}{dy} = 0$  и  $\tau_0 = -\rho \bar{u}'_x \bar{u}'_y$ . В таком случае профиль скорости также не должен зависеть от вязкости, а определяться только тремя параметрами  $y$ ,  $\tau_0$  и  $\rho$ . Из них можно составить единственную комбинацию с размерностью градиента скорости  $\frac{\tau_0^{0,5}}{\rho^{0,5} y} = \frac{u_*}{y}$ . Тогда при  $y \gg y_*$  должно выполняться соотношение

$$\frac{d\bar{u}_x}{dy} = A \frac{u_*}{y}, \quad (14.15)$$

где  $A$  – универсальная безразмерная константа. Интегрирование уравнения (14.15) дает

$$\bar{u}_x = A u_* \ln y + A_1, \quad (14.16)$$

где  $A_1$  – константа интегрирования.

Слой жидкости, в пределах которого выполняется уравнение (14.16), называется *логарифмическим пограничным слоем*. Перейдя в соотношении (14.16) к относительным переменным, придадим ему универсальную форму

$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + B. \quad (14.17)$$

Константы  $\kappa$  и  $B$ , входящие в (14.17), определяют из опытов и обычно принимают равными  $\kappa = 0,41$  ( $0,38\dots 0,44$ ),  $B = 5,5$  ( $4,1\dots 6,3$ ). Логарифмический слой охватывает диапазон относительной координаты, который можно оценить соотношением  $30y_* < y_+ < 500y_*$ . Справедливость полученных выше формул для профиля скорости подтверждается многочисленными опытами.

В диапазоне относительной координаты  $5y_* < y_+ < 30y_*$ , на формирование профиля осредненной скорости оказывают влияние как вязкие, так и турбулентные напряжения. Здесь для описания профиля скорости используют различные аппроксимационные выражения.

Вообще, согласно современным представлениям о турбулентности, в пограничном слое выделяют следующие области: 1 – вязкий подслой; 2 – переходная область; 3 – логарифмический слой; 4 – область следа; 5 – область перемежаемости, рис. 14.7.

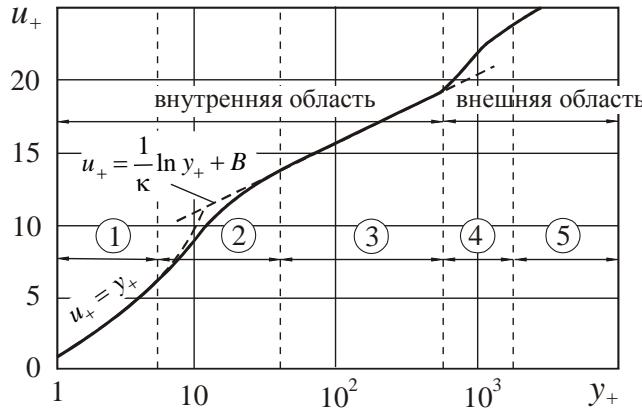


Рис. 14.7. Структура турбулентного пограничного слоя

Рассмотренные выше первые три области образуют *внутреннюю область пограничного слоя*. Описанный выше и действующий в пределах внутренней области закон стенки, как показывают опыты, носит универсальный характер, нечувствителен к изменению внешних условий: продольного перепада давления, степени турбулентности внешнего потока, числа Рейнольдса и других. То есть он применим к расчету турбулентного пограничного слоя при обтекании не только пластин, но и других поверхностей, например, при расчете течений в каналах и трубах и поэтому применяется во многих моделях турбулентности.

Область следа и перемежаемости образуют внешнюю область турбулентного пограничного слоя. Название «область следа» появилось вследствие того, что реализующийся здесь профиль осредненной скорости можно получить, если поместить пластину в область некоторого гипотетического турбулентного следа сразу за точкой отрыва [15].

В области следа профиль скорости отклоняется от логарифмического, что объясняется имеющейся здесь перемежаемостью. В результате значение скорости, получаемое при осреднении по достаточно большому промежутку времени, оказывается средним между значениями скорости, отвечающими турбулентному и ламинарному потокам. Так как в ламинарном потоке обмен импульсом между соседними слоями жидкости гораздо меньше, чем в турбулентном, то во внешней части турбулентного пограничного слоя средняя скорость при удалении от стенки возрастает быстрее, чем в логарифмическом слое.

В трубопроводах и каналах за начальным участком течения пограничные слои смыкаются (см. раздел 8.4). Следовательно, структура внешней области ТПС здесь отличается от структуры пограничного слоя на пластине (отсутствует область следа и перемежаемости). Поэтому для пограничного слоя в трубах и каналах логарифмический закон распределения осредненной скорости (14.17) хорошо выполняется практически до оси течения.

Описанная выше структура и профиль скорости, строго говоря, относится к пограничному слою на пластине и в трубе. Если течение происходит со значительным градиентом давления, имеется существенная кривизна поверхности, вдув в пограничный слой жидкости или ее отсос, то эти факторы должны учитываться дополнительно и требуют корректировки полученных соотношений \*.

### 14.2.3 Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности

Как мы видели ранее важным параметром, характеризующим турбулентность и использующимся во многих моделях турбулентности, является кинетическая энергия турбулентности. Получим уравнение переноса энергии турбулентности, описывающего изменение этого параметра в турбулентном потоке.

Умножим уравнение Навье-Стокса (4.24) скалярно на вектор скорости  $\mathbf{u}$ :

$$u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = u_j f_j - \frac{1}{\rho} u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu u_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i}, \quad i, j = \overline{1, 3}. \quad (14.18)$$

(По повторяющимся индексам  $i$  и  $j$  подразумевается суммирование.)

Выполним осреднение получившегося уравнения по Рейнольдсу, используя свойства (4.99) и считая, что объемная сила  $f$  есть сила тяжести и, следовательно, ее пульсационная составляющая равна нулю

$$\begin{aligned} \overline{u'_j \frac{\partial u'_j}{\partial t}} + \overline{u'_j u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} + \overline{\bar{u}_j u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} + \overline{\bar{u}_j u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} + \overline{u'_j u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} = & - \frac{1}{\rho} \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \nu \overline{u'_j \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_i}} - \\ & - \overline{u'_j} \left[ \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - f_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_i} \right], \quad i, j = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Обозначим через  $k' = \overline{u'_i u'_i} / 2$  – пульсационную составляющую энергии турбулентности. Так как  $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$  в силу уравнения неразрывности, то  $\overline{\bar{u}_j u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} = \overline{\bar{u}_j} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_i}$ . Выражение в квадратных скобках равно  $-\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_i}$  в соответствии с уравнением Рейнольдса

(4.107). Кроме того заметим, что справедливо следующее равенство  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{u'_j \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \right) = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \overline{u'_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$ . Учитывая эти замечания и определение (14.1), уравнение (14.19) перепишем в виде

\* Вообще говоря, описанная выше картина течения в пограничном слое и распределение скоростей в нем соответствуют течениям около гладкой стенки, когда высота бугорков шероховатости значительно меньше динамической длины  $y_*$ . Мы уже касались вопроса влияния шероховатости на параметры течения, когда рассматривали экспериментальные данные по коэффициенту гидравлического трения труб  $\lambda$ , см. разделы 8.4, 8.5. Более подробную информацию по данному вопросу можно найти, например, в [15].

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k'}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} + \bar{u}'_j \bar{u}'_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}'_j p'}{\partial x_j} + v \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_i} - v \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_i}. \quad (14.20)$$

Введем обозначения:

$$D_s = v \frac{\partial k}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \bar{u}'_i p' - \bar{u}'_i k' \text{ — член, учитывающий диффузионный перенос энергии турбулентности, обусловленный молекулярной диффузией, турбулентной диффузией давления посредством корреляций давления и скорости и турбулентной диффузией перемешивания посредством взаимодействия пульсаций скорости;}$$

$$G_s = -\bar{u}'_i \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \text{ — член, учитывающий порождение (генерацию) турбулентности, определяющийся произведением рейнольдсовых напряжений и средних градиентов скорости (характеризует перенос энергии от осредненного течения к пульсационному);}$$

$$\varepsilon_s = v \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_i} \text{ — диссипативный член, характеризующий рассеяние энергии, подведенной к пульсационному течению, то есть, перенос энергии крупномасштабных вихрей к мелкомасштабным диссилирующим вихрям.}$$

С учетом введенных обозначений уравнение (14.20) окончательно принимает вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial D_s}{\partial x_i} + G_s - \varepsilon_s \quad (14.21)$$

и носит название *уравнения переноса энергии турбулентности*.

Полученное уравнение (14.21) является незамкнутым, так как неизвестны величины корреляций пульсаций давления и скорости  $\bar{u}'_j p'$ , двойные  $\bar{u}'_j \bar{u}'_i$  и тройные  $\bar{u}'_i k' = \bar{u}'_i \bar{u}'_j \bar{u}'_j / 2$  корреляции скорости. Замыкание уравнения (14.21) составляет задачу, решаемую в рамках той или иной гипотезы (модели) турбулентности. При этом указанные члены соответствующим образом моделируются с использованием эмпирических данных или иных соображений, подчас эвристического характера.

#### **14.2.4 Уравнение переноса изотропной диссипации энергии турбулентности**

В уравнение переноса энергии турбулентности (14.21) входит слагающееся  $\varepsilon_s$ , которое должно моделироваться исходя из принятой гипотезы турбулентности. Одним из путей моделирования  $\varepsilon_s$  является решение уравнения переноса диссипации.

Для изотропной диссипации уравнение ее переноса может быть получено из уравнения Навье-Стокса (4.24) следующим образом. Продифференцируем (4.24) по  $x_i$  (суммирование по повторяющемуся индексу):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ u_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right] = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + v \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} \right). \quad (14.22)$$

Изменим порядок дифференцирования в первом слагаемом слева, умножим получившееся уравнение на  $v \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}$  и осредним его по Рейнольдсу (суммирование по повторяющемуся индексу):

$$\begin{aligned} v \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} + v \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ u_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right]} &= \overline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} - \frac{1}{\rho} v \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x_j} \right)} + \\ &+ v^2 \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} \right)}, \quad i, j = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (14.23)$$

Первое слагаемое в левой части (14.23) преобразуем следующим образом, используя правила осреднения (4.99).

$$\begin{aligned} v \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} &= v \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right]} = v \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} = \\ &= v \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} = \frac{1}{2} v \overline{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t}. \end{aligned} \quad (14.24)$$

Рассмотрим второе слагаемое в левой части (14.23). Выполним дифференцирование в квадратных скобках и представим проекции скорости в виде суммы осредненной и пульсационной составляющей

$$v \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ u_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right]} = v \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \left[ \frac{\partial (\bar{u}_k + u'_k)}{\partial x_i} \frac{\partial (\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_k} + (\bar{u}_k + u'_k) \frac{\partial^2 (\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_i \partial x_k} \right]}.$$

Или, используя правила осреднения (4.99),

$$\begin{aligned} v \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ u_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right]} &= v \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + v \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}} + v \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \\ &+ v u'_k \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_k}} + v \bar{u}_k \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_k}} + v u'_k \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_k}} = \\ &= v \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right)} + v \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \\ &+ v u'_k \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_k}} + \frac{1}{2} \bar{u}_k \overline{\frac{\partial}{\partial x_k} \left( v \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \right)} + \frac{1}{2} u'_k \overline{\frac{\partial}{\partial x_k} v \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}}. \end{aligned} \quad (14.25)$$

Последнее слагаемое в правой части (14.23) преобразуем следующим образом, используя правила осреднения (4.99).

$$\begin{aligned} v^2 \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} \right)} &= v^2 \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \bar{u}_j + u'_j}{\partial x_k} \right) \right]} = v^2 \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k} \right)} = \\ &= v^2 \overline{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right]} - v^2 \overline{\left( \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_i} \right) \left( \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_k} \right)} = v \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \right) \right]} - \end{aligned}$$

$$-\nu^2 \left( \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_i} \right) \left( \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_k} \right) = \nu \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_k} \right) - \nu^2 \left( \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_i} \right) \left( \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_k} \right). \quad (14.26)$$

Подставляя (14.24)...(14.26) в (14.23), обозначив  $\varepsilon'_s = \nu \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}$  и учитывая определение  $\varepsilon_s$ , окончательно получим уравнение переноса диссипации энергии турбулентности

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_k} = \frac{\partial D_{\varepsilon k}}{\partial x_k} + P_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon, \quad (14.27)$$

где  $D_{\varepsilon k} = \nu \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_k} - u'_k \varepsilon'_k - \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial p'}{\partial x_j}$  – член уравнения, учитывающий диффузию диссипации, обусловленную молекулярным, турбулентным переносом и действием пульсаций давления;  $P_\varepsilon = -2\nu \left[ \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right) + \bar{u}'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right]$  – член уравнения, учитывающий генерацию диссипации, обусловленную турбулентным перемешиванием в осредненном и пульсационном движении;  $\varepsilon_\varepsilon = \nu^2 \left( \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_i} \right) \left( \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_k} \right)$  – диссипативный член уравнения.

## 14.3. Некоторые гипотезы полуэмпирической теории турбулентности

### 14.3.1 Алгебраические модели турбулентности

Данный класс моделей для связи турбулентных напряжений с осредненными параметрами течения используют алгебраические уравнения. В основе их лежит гипотеза о том, что поле осредненной скорости в данной точке пространства в любой момент времени однозначно определяет структуру турбулентности в этой точке.\*

**Гипотеза Буссинеска.** Одно из первых предположений о связи турбулентного напряжения  $\tau_{ij}$  с осредненной скоростью было сделано в *гипотезе Ж. Буссинеска* (1877 г.). Данная гипотеза представляет собой формальную аналогию формулы Ньютона и для одномерного течения выражается следующей зависимостью

$$\tau_{yx} = \rho v_t \frac{d \bar{u}_x}{dy}, \quad (14.28)$$

где  $\bar{u}_x$  – продольная компонента осредненной скорости;  $y$  – координата, направленная поперек потока;  $v_t$  – коэффициент кинематической турбулентной вязкости (введенное Буссинеском понятие).

---

\* Гипотеза о локальном равновесии между структурой турбулентности и полем осредненных скоростей.

В общем случае трехмерного течения гипотеза Буссинеска по аналогии с обобщенной гипотезой Ньютона (3.29) записывается следующим образом

$$-\overline{u'_i u'_j} = 2v_t \bar{\varepsilon}_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (14.29)$$

где  $\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$  – тензор скоростей деформаций осредненного течения;  $k$  – кинетическая энергия турбулентности (линейный инвариант тензора  $\bar{\varepsilon}$ );  $\delta_{ij}$  – тензорная единица.

С учетом (14.29) уравнения Рейнольдса для несжимаемой жидкости принимают вид

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = \bar{f}_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + v \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} v_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial k}{\partial x_i}$$

или, группируя члены, и вводя модифицированное давление  $\bar{P} = \bar{p} + \frac{2}{3} k$ ,

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = \bar{f}_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} + (v + v_t) \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_i}, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (14.30)$$

Большинство полуэмпирических теорий турбулентности используют уравнения Рейнольдса именно в таком виде, так как базируются на понятии турбулентной вязкости  $v_t$ .

Коэффициент кинематической турбулентной вязкости определяется для различных классов течений из опытных данных или исходя из априорных предположений. Простейшим является предположение о постоянстве величины  $v_t$ , которое оправдывается только для ограниченного класса течений, например для свободных турбулентных струй. При расчете течения в ограниченной области допущение  $v_t = \text{const}$  дает поле скоростей течения, существенно отличающееся от опытного, так как в соответствии с условием прилипания, турбулентные пульсации вблизи стенок должны затухать и, следовательно,  $v_t$  должен стремиться к нулю.

Для течений вблизи плоской стенки ( $y = \text{const}$ ) удовлетворительные результаты дает зависимость

$$\varepsilon_t = ky, \quad k = \text{const}. \quad (14.31)$$

Для течений в трубах возможно использование формулы

$$\varepsilon_t = k_1 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{y}{r_0} \right)^2 \right], \quad (14.32)$$

где  $k_1 = \text{const}$ ;  $r_0$  – радиус трубы.

**Гипотеза Прандтля.** Широкое распространение на начальном этапе изучения турбулентности получила *полуэмпирическая теория турбулентности Л. Прандтля*, основанная на понятии *пути смешения*. Поясним ее суть. Рассмотрим стационарное турбулентное течение вдоль плоской стенки. Осредненная скорость такого потока имеет только продольную состав-

ляющую, которая зависит только от координаты  $y$ :  $\bar{u}_x(y)$ . Пульсационные же составляющие скорости имеют две компоненты  $u'_x, u'_y$ . Пусть в начальный момент частица жидкости находилась в слое 1 и имела осредненную скорость  $\bar{u}_x(y)$ . Под влиянием пульсаций она прошла путь  $l'$ , переместившись в слой 2 и приобрела осредненную скорость  $\bar{u}_x(y + l') = \bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} l'$ .

Основное допущение теории Прандтля заключается в том, что частица жидкости, проходя путь  $l'$ , не взаимодействует с другими частицами, то есть ведет себя как молекула на длине свободного пробега. После перемещения в результате смешения с другими частицами нового слоя она приобретет осредненную скорость слоя 2. Следовательно, пульсация продольной скорости в слое 1 равна

$$u'_x = \bar{u}_x(y + l') - \bar{u}_x(y) = \frac{d\bar{u}_x}{dy} l'. \quad (14.33)$$

Тогда, предполагая, что  $u'_x$  и  $u'_y$  – величины одного порядка, можем записать,

$$|u'_x u'_y| \sim \left| l'^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \right| = l'^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \quad (14.34)$$

и модуль касательного турбулентного напряжения трения выразится формулой

$$|\tau_{ij}| = |\rho \bar{u}'_x \bar{u}'_y| = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2, \quad (14.35)$$

где  $l = \sqrt{l' l''}$  – линейная величина, называемая *путем смешения* (длиной пути перемешивания). В механике жидкости и газа эту величину трактуют, как геометрическую характеристику внутренней структуры турбулентного потока или как масштаб турбулентности.

Сравнивая формулу (14.35) с формулой Буссинеска (14.28), находим связь коэффициента турбулентной вязкости с длиной пути смешения

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (14.36)$$

Как видим обе гипотезы и Буссинеска и Прандтля сводят задачу отыскания связи между напряжением турбулентного трения и полем осредненных скоростей к другой задаче – определению некоторой функции координат  $\nu_t(x, y, z)$  или  $l(x, y, z)$ , характерной для рассматриваемого типа турбулентного потока. Для определения пути смешения при течении около пластины Прандтль предложил использовать линейную связь

$$l = \kappa y, \quad (14.37)$$

где  $y$  – расстояние от пластины;  $\kappa$  – универсальная константа.

**Гипотеза Кармана.** Для определения функции  $l(x, y, z)$  Т. Карман использовал гипотезу о подобии пульсаций скорости во всех точках данного турбулентного потока. Согласно гипотезе Кармана, поля турбулентных пульсаций скорости в окрестности каждой точки развитого турбулентного течения подобны друг другу и отличаются лишь масштабами длины и времени (или длины и скорости). На основании этой гипотезы им получена зависимость

$$l = -\kappa \frac{d\bar{u}/dy}{d^2\bar{u}/dy^2}, \quad (14.38)$$

где  $\kappa \approx 0,41$  – константа Кармана.

Нетрудно заметить, что формула Кармана не применима для течений, где профиль осредненной скорости имеет точку перегиба, так как знаменатель в (14.38) в этом случае обращается в ноль.

Вообще, как формула Прандтля, так и Кармана подтверждается опытами лишь для ограниченного класса турбулентных течений – для окрестности плоской стенки.

#### 14.3.2 Дифференциальные модели турбулентности

Существует множество течений, в которых статистические параметры турбулентности в данной точке пространства зависят не только от локальных значений осредненных параметров потока, но и от предыстории течения. Так как равновесие во внутренней структуре турбулентности наступает быстрее, чем равновесие между осредненным течением и турбулентностью, то получили широкое распространение модели турбулентности, в которых устанавливается связь между рейнольдсовыми напряжениями и статистическими моментами турбулентности. В этих моделях связь между ними и осредненными параметрами течения описывается дифференциальными уравнениями, например, приведенными выше уравнениями переноса энергии турбулентности и переноса диссипации турбулентности. Поэтому данные модели называют дифференциальными моделями.

**$k-\epsilon$  модель турбулентности.** Значительный вклад в разработку и развитие данной модели внесли Лаундер, Сполдинг, Джонс и др. Рассмотрим стандартную  $k-\epsilon$  модель, предназначенную для моделирования полностью развитых свободных турбулентных течений и включенную во многие коммерческие программные комплексы для моделирования гидрогазодинамических процессов. В этой модели для определения турбулентной вязкости используется предложенное Колмогоровым и следующее из соображений размерности соотношение

$$v_t \sim k^{\frac{1}{2}} l \quad (14.39)$$

и формула (14.7), из которых следует формула Колмогорова-Прандтля

$$v_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon_s}, \quad (14.40)$$

где для развитого турбулентного течения принимается  $C_\mu = 0,09$ .

Для определения энергии турбулентности  $k$  и диссипации  $\varepsilon_s$  используются дифференциальные уравнения (14.21) и (14.27) соответственно. Входящие в диффузионный  $D_s$  член и в член генерации  $G_s$  турбулентности уравнения (14.21) статистические моменты второго и третьего порядков моделируются следующим образом:

$$-\frac{1}{\rho} \overline{u'_i p'} - \overline{u'_i k'} = \frac{v_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i}, \quad G_s = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = \left( 2v_T \bar{\varepsilon}_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}. \quad (14.41)$$

Первое выражение (14.41) отражает градиентный характер диффузии, второе – использует обобщенную гипотезу Буссинеска (14.29).

При моделировании членов уравнения (14.27), описывающих диффузию  $D_\varepsilon$ , генерацию  $P_\varepsilon$  и диссипацию  $\varepsilon_\varepsilon$  диссипации энергии турбулентности используются общефизические соображения о природе турбулентного переноса. В конечном итоге они оказываются пропорциональными соответствующим членам уравнения переноса энергии турбулентности. Результатирующие выражения стандартной  $k$ - $\varepsilon$  модели имеют вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( v + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + s_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon_s, \quad (14.42)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_1 \frac{\varepsilon}{k} s_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (14.43)$$

$$v_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad s_{ij} = 2v_T \bar{\varepsilon}_{ij} = v_T \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (14.44)$$

$$C_\mu = 0,09, \quad C_1 = 1,44, \quad C_2 = 1,92, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1,3. \quad (14.45)$$

Эта модель, как уже говорилось, справедлива для полностью развитого турбулентного течения (то есть при  $Re \rightarrow \infty$ ), поэтому называется *высокорейнольдсовой моделью*. Ее использование некорректно при расчете пристеночных течений, течений с большими зонами отрыва, градиентами давления, закрученных потоков и некоторых других.

Имеются различные модификации  $k$ - $\varepsilon$  модели расширяющие область ее применения по числу Рейнольдса, например: RNG (на основе техники, заимствованной из теории ренормализованных групп), низкорейнольдсовая (с использованием функций, демпфирующих турбулентность при приближении к стенке), с использованием *пристеночных функций*. Первая и вторая из указанных модификаций требуют значительных ресурсов ЭВМ при расчете пограничных слоев, что ограничивает их использование. Значительно более экономична модель с применением пристеночных функций.

Суть ее состоит в том, что уравнения движения для низкорейнольсовской области пограничного слоя не решаются, а используется универсальный закон стенки, описанный в разделе 14.2.2. С использованием универсального профиля скорости граничные условия для  $k$  и  $\varepsilon$  переносятся со стенки в логарифмическую область пограничного слоя и далее (на больших расстояниях от стенки) решаются уравнения (14.42)...(14.45) стандартной  $k$ - $\varepsilon$  модели.

В целом характеризуя  $k$ - $\varepsilon$  модели можно отметить, что их применение дает хорошие результаты при расчете свободных сдвиговых течений, для расчета пристеночных течений, неплохо «работают» пристеночные функции. К недостаткам моделей относятся ошибки при расчете отрывных течений, течений с большим положительным градиентом давления. Поэтому модели типа  $k$ - $\varepsilon$  постепенно уступают позиции другим моделям.

**$k$ - $\omega$  и двухзонная модель турбулентности.** В  $k$ - $\omega$  модели вторым параметром в дополнение к энергии турбулентности  $k$  рассматривается диссипация на единицу турбулентной энергии  $\omega = \varepsilon/k$ . Параметр  $\omega$  имеет размерность частоты и его можно трактовать и как величину, обратную времени жизни крупных вихрей. Турбулентная кинематическая вязкость в этой модели находится по формуле  $\nu_t = k/\omega$ . Первые работы по использованию удельной скорости диссипации  $\omega$  для описания турбулентности принадлежат Колмогорову, которые были позднее развиты Уилкоксом, Саффменом, Рубезиним и др.

Оказалось, что даже высокорейнольдсовая  $k$ - $\omega$  модель хорошо описывает пристенные течения без введения пристеночных функций, в том числе при больших положительных градиентах давления, однако чувствительна к постановке граничных условий во внешнем потоке, то есть к свободной турбулентности.

SST модель Ментера объединяет достоинства  $k$ - $\varepsilon$  и  $k$ - $\omega$  моделей. В ней во внутренней области используется модифицированная  $k$ - $\omega$  модель, предназначенная для описания пристеночных течений, а во внешней – стандартная  $k$ - $\varepsilon$  модель, ориентированная на свободно-сдвиговые течения. В модели Ментера  $k$ - $\varepsilon$  модель формулируется в переменных  $k$  и  $\omega$ , а затем в полученные уравнения добавляется специальная функция, обеспечивающая переключение с модели  $k$ - $\varepsilon$  на  $k$ - $\omega$  при приближении к стенке. Сшивка решений по этим моделям предполагается в области следа пограничного слоя.

SST модель хорошо зарекомендовала себя в расчётах отрывных течений с небольшой зоной отрыва. Несмотря на некоторые недостатки,  $k$ - $\omega$  модели являются наиболее удачным видом моделей с двумя уравнениями, а модель Ментера SST по качеству предсказания параметров течения является лучшей из моделей, использующих гипотезу Буссинеска. Однако существует ряд течений, которые не может правильно описать даже она.

**Другие модели турбулентности.** Кроме отмеченных выше существуют и другие модели, как использующие концепцию турбулентной вязкости, так и описывающие перенос непосредственно рейнольдсовых напряжений  $-u'_i u'_j$ . Среди них  $k-l$  модель, где в качестве второго параметра используется масштаб турбулентности  $l$ , нелинейная модель турбулентной вязкости, многочисленные модификации рассмотренных выше моделей и другие. В настоящее время разработаны сотни моделей турбулентности, но ни одна из них не является универсальной. Вместе с тем для многих видов течений известны наиболее надежные модели. Поэтому при решении конкретных задач необходимо не только выбрать наиболее подходящую модель турбулентности, но и оценить степень достоверности полученных с ее помощью результатов.

Необходимо заметить, что гипотеза турбулентной вязкости не имеет строгого физического обоснования и в некоторых случаях противоречит экспериментальным данным. Как следствие, ее применение при расчете турбулентных течений может привести к большим ошибкам в пристеночных областях, в случае отрыва потока, в закрученных течениях.

Напомним, что рассмотренные методы расчета турбулентных течений были основаны на решении уравнений Рейнольдса, описывающих изменение осредненных гидродинамических параметров, а пульсационные составляющие моделировались с использованием той или иной модели турбулентности. Данный подход носит название метод RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes).

#### **14.3.3 Новые методы моделирования турбулентности**

Существует достаточно обширный класс течений с двойной структурой турбулентности, низкочастотные пульсации в которых, создаваемые когерентными вихревыми структурами, вносят существенный вклад в энергетический спектр. К ним относятся, например, вихревая дорожка Кармана за плохообтекаемыми телами, «сворачивание» слоев смешения и другие (см. рис. 14.8). Рассмотренный выше метод RANS не в состоянии описать нестационарность данных течений, обусловленную периодическим возникновением когерентных вихрей, так как причина ее появления кроется не в нестационарности граничных условий, а в природе возникновения неустойчивости слоистых течений<sup>\*</sup> и, следовательно, должна воспроизводиться моделью турбулентности. Осреднение же (2.44) гидродинамических параметров предполагает фильтрацию турбулентных пульсаций всего спектра частот, поэтому процесс нестационарной генерации и диссипации когерентных вихрей методом RANS не моделируется. Для решения этой

---

<sup>\*</sup> Нестационарности граничных условий как раз воспроизводится моделью RANS, если, конечно, период осреднения  $T$  в (2.44) существенно меньше характерного времени нестационарности граничных условий.

проблемы разработаны «вихреразрешающие» методы, некоторые из них кратко описаны ниже.

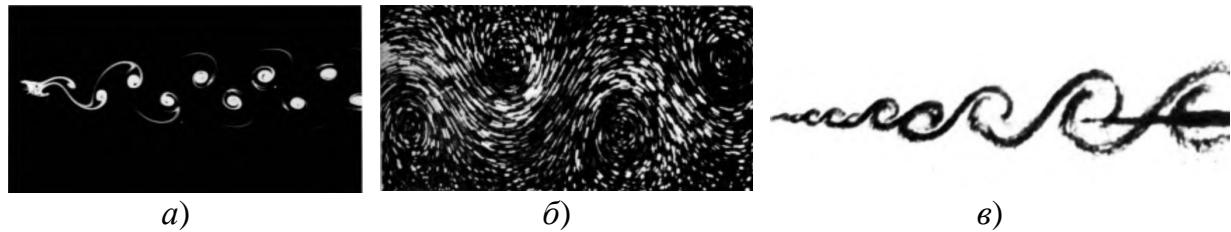


Рис. 14.8. Течения с когерентными структурами:  
a, б – вихревая дорожка Кармана за цилиндром; в – слой смешения

**Метод URANS.** В методе URANS (Unsttady RANS) осреднение гидродинамических параметров проводится по интервалу времени существенно превышающему периоды высокочастотных турбулентных пульсаций, но меньшему периода низкочастотной пульсации когерентных структур, что эквивалентно тройному разложению мгновенного значения гидродинамического параметра. Например, для скорости, при стационарных граничных условиях, можем записать разложение

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{u}'(t), \quad (14.46)$$

где  $\bar{\mathbf{u}}$  – осредненное, независящее от времени значение;  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  – результат осреднения, фильтрующего высокочастотные пульсации, называемый фазовым осреднением,  $\mathbf{u}'(t)$  – пульсационная (высокочастотная) составляющая скорости, рис. 14.9. Таким образом, уравнения Рейнольдса воспроизводят сумму  $\bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}(t)$ , а составляющая  $\mathbf{u}'(t)$  должна моделироваться с использованием какой-либо модели турбулентности, например, одной из рассмотренных выше.

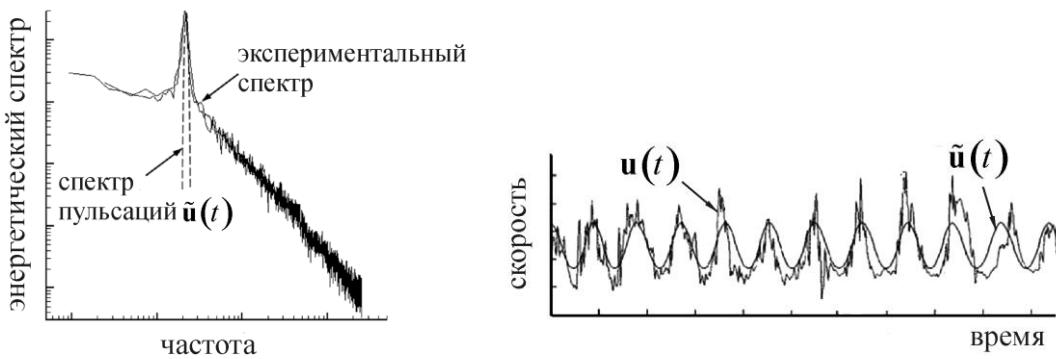


Рис. 14.9. Энергетический спектр турбулентности течения с когерентными структурами и осреднение в методе URANS

Метод URANS при использовании мелкой гидродинамической сетки позволяет разрешать крупные вихревые структуры и прослеживать их изменение по времени. Результаты расчетов достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными. Вместе с тем необходимо заметить, что

сам метод URANS не имеет надежного теоретического обоснования, связанного с определением периода осреднения. Нестационарное поле скорости, получаемое в данном методе, является детерминированным. В реальности мгновенные значения скорости турбулентных потоков представляют собой случайные функции.

**Прямое численное моделирование турбулентности.** Отсутствие универсальных моделей, пригодных для всех типов течений обусловлено как многообразием проявления свойств турбулентности и недостаточностью уровня современных знаний о ее природе, так и ограничениями, накладываемыми использованием гипотезы Рейнольдса. Поэтому с развитием вычислительной техники стало естественным желанием использовать для расчета турбулентных течений непосредственно уравнения Навье-Стокса, не проводя их осреднение. Это метод *прямого численного моделирования* (DNS – Direct Numerical Simulation). Обоснованием допустимости такого подхода является выполнение гипотезы сплошности в турбулентных течениях любой природы, так как минимальные масштабы и периоды турбулентных неоднородностей оказываются во всех случаях на несколько порядков превосходящими масштабы и периоды молекулярных движений.

Однако очень большие потребные вычислительные ресурсы для решения практически важных задач позволяет говорить о его применении в инженерной практике, при реально оцениваемом прогрессе в производительности вычислительной техники, не ранее 2080 г. [17]<sup>\*</sup>. В настоящее время применение DNS метода ограничивается решением модельных задач при относительно невысоких числах Рейнольдса  $Re \sim 10^4$ .

**Моделирование крупных вихрей.** Трудности с реализацией метода DNS послужили стимулом к созданию метода моделирования крупных вихрей (LES – Large Eddy Simulation). Суть его состоит в том, что уравнения Навье-Стокса осредняются не по времени, а по объему ячейки гидродинамической сетки. При этом получаются уравнения, описывающие динамику структур с характерным масштабом, соизмеримым с размером ячейки гидродинамической сетки. Вид этих уравнений формально совпадает с видом уравнений Рейнольдса, то есть они содержат пульсационные составляющие скорости (турбулентные напряжения), но создаваемые вихревыми структурами с масштабом, меньшим размера ячейки сетки. Это, так называемая, *подсеточная турбулентность*, которая должна моделироваться с использованием той или иной модели турбулентности, описанной в предыдущих разделах.

Таким образом, в LES методе характеристики крупных вихревых структур с характерным масштабом, соизмеримым с размером ячейки сет-

---

\* Например, для решения задачи внешней дозвуковой аэrodинамики при обтекании самолета потребуется гидродинамическая сетка с  $10^{16}$  узлами при количестве временных шагов  $10^{7,7}$ .

ки, определяются из решения уравнений движения, а мелкомасштабных (подсеточная турбулентность) моделируются как в методе RANS. Чем мельче ячейки сетки, тем больший диапазон масштабов вихревых структур разрешается путем прямого численного моделирования. К достоинствам метода относится то, что мелкомасштабная (подсеточная) турбулентность по своей природе более универсальна и, следовательно, моделируется точнее.

Широкое применение этого метода в настоящее время сдерживается высокими требованиями к вычислительным ресурсам, хотя не столь значительными, как в методе DNS. Ожидается, что широкое применение в практических задачах данный метод найдет после 2045 г. [17].

**Моделирование отсоединенных вихрей.** Достоинства метода RANS (высокая точность и экономичность при расчете присоединенных пристенных течений) и метода LES (универсальность и приемлемые вычислительные ресурсы при расчете отрывных течений) послужили основой для развития метода моделирования отсоединенных вихрей (DES – Detached Eddy Simulation), который использует тот или иной метод для расчета в соответствующей области течения.

Выбор соответствующего метода производится автоматически в зависимости от соотношения размера ячейки сетки и масштаба турбулентности в рассматриваемой точке пространства. Использование метода RANS для расчета течений в пограничном слое позволяет снять ограничения на размеры ячеек сетки в направлении, перпендикулярном стенке, которые потребовались бы для разрешения мелкомасштабной турбулентности в пограничном слое при использовании метода LES во всей расчетной области течения.

Модель турбулентности, используемая при расчете пристенных течений, автоматически переходит в подсеточную модель турбулентности путем замены масштаба турбулентности на подсеточный масштаб.

Сравнение результатов расчетов по методу DES с экспериментальными данными для широкого круга отрывных течений показало его высокую эффективность и экономичность. С его помощью уже сегодня удается с высокой степенью точности рассчитать весьма сложные отрывные течения, численное моделирование которых в рамках LES и DNS пока невозможно из-за ограниченных возможностей вычислительной техники.

#### 14.4. Контрольные вопросы

1. В чем причина возникновения турбулентности в потоках газа и жидкости?
2. Что означает понятие развитая турбулентность?
3. Что представляет собой турбулентность с точки зрения ее гидродинамической структуры?

4. Дайте определение понятиям энергия турбулентности, диссипация энергии турбулентности.
5. Опишите картину каскадного переноса энергии турбулентности и ее диссипации в свободно-сдвиговых течениях.
6. Сформулируйте суть первой гипотезы Колмогорова о мелкомасштабной турбулентности.
7. Сформулируйте суть «закона пяти третей» (второй гипотезы Колмогорова), каково его значение для моделирования турбулентности?
8. Что означает понятия когерентная структура, перемежаемость?
9. На какие области делится структура турбулентного пограничного слоя?
10. Каков профиль скорости в вязком подслое турбулентного пограничного слоя?
11. В какой области пограничного слоя профиль скорости логарифмический?
12. Что означает понятие универсальный закон стенки?
13. В чем заключается принцип моделирования слагаемых, описывающих генерацию, диффузию, диссипацию в уравнениях переноса энергии и диссипации турбулентности?
14. Охарактеризуйте основные положения алгебраических гипотез турбулентности: Буссинеска, Прандтля, Кармана.
15. Охарактеризуйте основные положения  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности, какова область ее применения?
16. С какой целью в  $k$ - $\varepsilon$  модель турбулентности вводится аппарат пристеночных функций?
17. Опишите основную идею и принцип построения двухзонной (SST) модели турбулентности Ментера. Какова область ее использования?
18. В чем заключается принцип построения нестационарной URANS модели турбулентности. Какова область ее использования?
19. В чем заключается принцип метода прямого численного моделирования турбулентности (DNS), его достоинства и недостатки?
20. В чем заключается принцип моделирования крупных вихрей (LES), его достоинства и недостатки?
21. В чем заключается принцип метода моделирования отсоединенных вихрей (DES). Какова область его применения при расчете турбулентных течений.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автомодельная зона гидравлического сопротивления	126
Адиабата Пуассона	18
Адиабатический процесс	18
Алгебраические модели турбулентности	231
Аппроксимация дифференциального оператора разностным аналогом	213
Архимеда	
закон	86
сила	86
Баротропная жидкость (газ)	52
Бернулли	
трехчлен	55
уравнение	55
Бесконечно малый	
объем	10
промежуток времени	11
Вихреразрешающий метод	238
Внешняя область турбулентного пограничного слоя	227
Внутренний масштаб турбулентности	221
Внутренняя область пограничного слоя	227
Водоизмещение	87
Волна Маха	181
Волновое сопротивление	201
Всасывающий трубопровод	149
Вязкий подслой	225
Газодинамические функции	138
Гидравлически гладкая труба	123
Гидравлический диаметр	121
Гидравлический удар	132
Гидравлическое сопротивление	117
Гидродинамический след	185
Гипотеза Колмогорова	
вторая	222
первая	221
Гипотеза сплошности	9
Гипотеза турбулентности	67
Буссинеска	231
Кармана	234
Прандтля	232
Границные условия	69
Давление	
абсолютное	74
вакуумметрическое	74
весовое	73
гидродинамическое	42, 44
гидростатическое	43
динамическое	115
избыточное	74
полное	115
пьезометрическое	115
статическое	115
Двойная структура турбулентности	223
Двухзонная модель турбулентности	236
Диаграмма	
Никурадзе	125
Динамическая скорость	225
Диссипация кинетической энергии турбулентности	220
Дифференциальные модели	
турбулентности	234
Длина пути смешения	233
Дозвуковое течение	136
Единицы измерения	
основные	97
производные	97
Живое сечение	113
Жидкая частица	12
Закон	
Гука	17
Паскаля	73
трения Ньютона	20
Закон стенки	225
Звуковое течение	136
Идеальная жидкость (газ)	21
Изотермический	
процесс	18
Изотермический коэффициент сжимаемости	17
Изотропная среда	43

Интегральное соотношение Кармана	194
Кавитация	24
Капельные жидкости	22
Квадратичное сопротивление	126
Кинетическая энергия	
турбулентности	219
Когерентные структуры	223, 224
Колмогоровский масштаб	
турбулентности	221
Конечно-разностная аппроксимация	
.....	206, 208
Константа подобия	95
Контрольный объем	10
Косой скачок уплотнения	180
Коэффициент	
лобового сопротивления	201
подъемной силы	201
Коэффициент гидравлического	
трения	118
Коэффициент Кориолиса	114
Коэффициент перемежаемости	121
Коэффициент поверхностного	
натяжения	22
Коэффициент сжатия струи	164
Коэффициент теплового объемного	
расширения	19
Коэффициент турбулентной	
вязкости	231
Краевая задача	70
Критерий подобия	94
Критическая скорость звука	137
Критическое сечение	137
Ламинарное течение	34
Линия тока жидкости	29
Логарифмический пограничный слой	
.....	226
Метастабильное состояние жидкости	
.....	23
Метацентр	88
Метацентрическая высота	88
Метод RANS моделирования	
турбулентности	237
Метод URANS моделирования	
турбулентности	238
Модель турбулентности	67
Нагнетательный (напорный)	
трубопровод	149
Напор	
вакуумметрический	75
геометрический	75
гидродинамический	115
гидростатический (полный)	74
инерционный	132
пьезометрический	75
скоростной	115
Напряжение поверхностных сил	38
Начальные условия	70
Начальный участок	122
Неньютоныкие среды	21
Несжимаемая	
среда (жидкость)	16
Нестационарное течение жидкости	28
Неявная разностная схема	206
Область следа турбулентного	
пограничного слоя	227
Обобщенная гипотеза Ньютона	43
Одномерный	
поток	112
Однородные физические величины	
.....	95
Оператор	
дивергенции	15
Лапласа	50
Остойчивость	87
Отрыв пограничного слоя	198
Перегретая жидкость	23
Перемежаемость	121, 223, 224
Переменные	
Лагранжа	26
Эйлера	26
Пи-теорема	98
Плавноизменяющееся течение	112
Плотность распределения объемной	
силы	39
Пограничный слой	185
Погрешность аппроксимации	213
Подобие	
динамическое	91
кинематическое	91
тепловое	91
Подобия	

числа.....	93
Подсеточная турбулентность.....	239
Показатель адиабаты .....	18
Порядок аппроксимации .....	214
Потенциал скорости.....	53
Потенциальные течения .....	53
Потери напора (давления)	
местные.....	117
на трение.....	117
Потеря напора .....	115
Пристеночные функции .....	235
Производная	
индивидуальная .....	26
местная.....	27
Простой трубопровод .....	142
Прямое численное моделирование	
турбулентности .....	239
Прямой	
гидравлический удар .....	133
Псевдовязкость.....	216
Пуазейля	
закон.....	105
формула .....	120
Рабочая точка .....	151
Развитое турбулентное течение... <td>218,</td>	218,
221	
Размерность .....	97
Разностная схема.....	206
Распад разрыва .....	209
Расход жидкости .....	30
Регулирование расхода	
дресселированием .....	151
изменением частоты вращения	
рабочего колеса насоса .....	152
Рейнольдса	
концепция .....	37
уравнения.....	66
Рейнольдсовы напряжения .....	66
Римановы инварианты.....	210
Самотяга.....	160
Сверхзвуковое течение.....	136
Сеточная функция.....	206
Сжимаемость .....	16
Сила	
лобового сопротивления .....	200
подъемная .....	200
Сифонный трубопровод.....	147
Скачок уплотнения.....	172
косой .....	172
прямой .....	172
Скоростной коэффициент.....	139
Скорость звука .....	19
Сложный трубопровод.....	142
параллельное соединение труб	145
последовательное соединение	
труб.....	144
Смачивание .....	22
Совершенный газ.....	17
Сопло Лаваля .....	137
Спутный поток.....	177
Стационарное течение жидкости...	28
Схемная вязкость.....	215
Сходственные	
моменты времени .....	92
точки пространства .....	92
Тело давления .....	79
Температура	
статическая .....	137
торможения.....	137
Тензор	
напряжений .....	41
скоростей деформаций .....	34
Течение Куэтта .....	105
Течение Прандтля-Майера .....	182
Траектория частицы жидкости .....	29
Трубка тока .....	30
Турбулентность .....	35
Турбулентные напряжения.....	66, 67
Ударная адиабата Гюгонио .....	175
Ударная волна .....	172
Уравнение	
Гюгонио.....	137
Уравнение неразрывности .....	47
Уравнение переноса энергии	
турбулентности .....	229
Уравнение подобия .....	95
Уравнения	
пограничного слоя (Прандтля) 190	
Рейнольдса .....	64
Уравнения Эйлера	
гидростатики.....	51
движения идеальной жидкости..	51

Участок стабилизированного течения .....	121
Фаза гидравлического удара .....	133
Формула	
Альтшуля .....	126
Борда .....	128
Буссинеска .....	231
Вейсбаха .....	120
Дарси-Вейсбаха .....	118
Жуковского .....	135
Кармана .....	234
Колмогорова .....	223
Колмогорова-Прандтля .....	234
Майера .....	18
Остроградского-Гаусса .....	15
Прандтля .....	177, 233
Шифрисона .....	126
Характеристика	
дифференциального уравнения .....	210
нагнетателя .....	150
потока сжимаемой среды .....	181, 183
сети .....	150
Центр водоизмещения .....	87
Центр давления .....	77, 83
Число	
Куранта .....	212
Маха .....	136
Рейнольдса .....	35, 93
Струхаля .....	93
Фруда .....	93
Эйлера .....	93
Элемент	
объема .....	12
поверхности .....	12
Явная разностная схема .....	206

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Валландер, С. В. Лекции по гидроаэромеханике: Учеб. пособие. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978 – 296 с.
2. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с, 311 ил., 22 табл. – (Классики отечественной науки).
3. Механика жидкости и газа: Учебное пособие для вузов. 2-е изд., перераб и доп. / В.С. Швыдкий, Ю.Г. Ярошенко, Я.М. Гордон, В.С. Шаврин и др.; под ред. В.С. Швыдкого. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2003. – 464 с.
4. Седов, Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. – 8-е изд., перерабр. – М.: Наука, 1977. – 440 с.: ил.
5. Идельчик, И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / Под ред. О.М. Штейнберга. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.: ил.
6. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко и др. – М.: Наука, 1976 г. – 400 с.:ил.
7. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2 т. Т.1. / Андерсон Д., Таннхил Дж., Плетчер Э. – М.:Мир, 1990. – 384 с.: ил.
8. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2 т. Т.1. / АНдерсон Д., Таннхил Дж., Плетчер Э. – М.:Мир, 1990. – 392 с.: ил.
9. Самарский, А.А. Теория разностных схем: учебное пособие / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.: ил.
10. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.:Мир, 1990. – 616 с.:ил.
11. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / Патанкар С. – М.:Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.: ил.
12. Алиев, А.В. Математическое моделирование в технике / Алиев А.В., Мищенкова О.В. М.: Институт компьютерных исследований, 2012 – 476 с.
13. Методы расчета турбулентных течений. / Д. Ламли, Ж. Матье, В. Роди и др.; под ред. В. Кольмана. – М.: Мир, 1984. – 464 с.
14. Гарбарук, А. В. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учебное пособие / А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец, М.Л. Шур – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 88 с.
15. Монин, А.С. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. В 2 ч. Ч.1 / А.С. Монин, А.М. Яглом М.: Наука, 1965. – 640 с.: ил.
16. Монин, А.С. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. В 2 ч. Ч.2 / А.С. Монин, А.М. Яглом М.: Наука, 1967. – 720 с.: ил.
17. Волков, К.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений / К.Н. Волков, В.Н. Емельянов. – М.:Физматлит, 2008. – 368 с.

18. Белов, И.А. Моделирование турбулентных течений: учебное пособие / И.А. Белов, С.А. Исаев. – СПб, Изд-во Балт. гос. техн. ун-та, 2001. – 108 с.
19. Гарбарук, А.В. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учебное пособие / А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец, М.Л. Шур. – СПб, Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 88 с.
20. Снегирев, А.Ю. Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: учебное пособие / А.Ю. Снегирев. – СПб, Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – 143 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Глава 1. Введение в дисциплину механика жидкости и газа	
1.1. Модель сплошной среды .....	9
1.2. Производная по времени от количества физической величины в деформируемом объеме. Формула Остроградского-Гаусса .....	13
1.3. Основные физические свойства жидкостей и газов .....	16
1.4. Контрольные вопросы .....	25
Глава 2. Основы кинематики жидкостей и газов	
2.1. Переменные Лагранжа и Эйлера .....	26
2.2. Индивидуальная и местная производные .....	26
2.3. Скорость и ускорение частицы жидкости .....	28
2.4. Стационарные и нестационарные течения. Траектория и линия тока. Трубка тока .....	28
2.5. Деформация жидкой частицы при движении.....	31
2.6. Режимы течения жидкости. Понятие турбулентности.....	34
2.7. Контрольные вопросы .....	37
Глава 3. Напряженное состояние жидкостей и газов	
3.1. Силы, действующие в жидкости и газе.....	38
3.2. Свойства напряжений поверхностных сил.....	40
3.3. Обобщенная гипотеза Ньютона о связи вязких напряжений со скоростями деформаций .....	43
3.4. Контрольные вопросы .....	45
Глава 4. Основные фундаментальные уравнения механики жидкости и газа .....	46
4.1. Общая форма уравнения сохранения количества произвольной физической величины в контролльном объеме .....	46
4.2. Уравнение неразрывности.....	47
4.3. Уравнение сохранения количества движения. Уравнения Навье-Стокса.....	48
4.4. Уравнение Бернулли для трубки тока .....	54
4.5. Уравнение сохранения энергии .....	59
4.6. Уравнения Рейнольдса для развитого турбулентного режима движения несжимаемой жидкости .....	64
4.7. Замыкающие соотношения и условия однозначности .....	67
4.8. Контрольные вопросы .....	70
Глава 5. Гидростатика	
5.1. Дифференциальные уравнения Эйлера для покоящейся жидкости .....	72
5.2. Интеграл уравнений Эйлера. Основная формула гидростатики...	72
5.3. Равновесие газа в поле силы тяжести .....	73
5.4. Абсолютное и избыточное давление, вакуум. Понятие «напор»..	74

5.5. Равновесие несжимаемой жидкости в сообщающихся сосудах.	
Измерение давления.....	75
5.6. Силы давления покоящейся жидкости на криволинейные	
поверхности .....	77
5.7. Силы давления покоящейся жидкости на плоские поверхности ..	80
5.8. Относительное равновесие несжимаемой жидкости.....	83
5.9. Закон Архимеда. Плавание тел.....	86
5.10. Остойчивость плавающих сил .....	87
5.11. Равновесие твердого тела во вращающейся жидкости.	
Центрифugирование .....	88
5.12. Контрольные вопросы .....	90
Глава 6. Основы теории подобия и размерностей .....	91
6.1. Основные положения теории подобия.....	91
6.2. Основные положения теории анализа размерностей .....	97
6.3. Контрольные вопросы .....	101
Глава 7. Течение жидкости в щелях и узких каналах	
7.1. Ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в каналах.	102
7.2. Течение жидкости в тонком слое переменной толщины .....	106
7.3. Контрольные вопросы .....	111
Глава 8. Одномерная гидрагазодинамика	
8.1. Одномерная модель реальных потоков .....	112
8.2. Уравнение Бернулли для одномерного потока вязкой	
несжимаемой жидкости .....	113
8.3. Природа потерь полного давления (напора). Структура	
общих формул для потерь напора .....	117
8.4. Ламинарное и турбулентное течение жидкости в трубах.....	120
8.5. Опытные данные о коэффициенте гидравлического трения .....	124
8.6. Местные гидравлические сопротивления.....	127
8.7. Неустановившееся одномерное течение несжимаемой	
жидкости .....	131
8.8. Прямой гидравлический удар в трубах.....	132
8.9. Условия перехода скорости газа через скорость звука .....	135
8.10. Параметры торможения. Газодинамические функции .....	137
8.11. Контрольные вопросы .....	140
Глава 9. Расчет трубопроводных систем	
9.1. Классификация трубопроводов .....	142
9.2. Расчет простого трубопровода.....	142
9.3. Расчет сложного трубопровода.....	144
9.4. Особенность работы сифонного трубопровода .....	147
9.5. Работа нагнетателя в сети.....	148
9.6. Расчет трубопроводов при движении газов .....	153
9.7. Контрольные вопросы .....	162
Глава 10. Истечение из объема через отверстия и насадки	

10.1. Истечение жидкости через отверстия и насадки при постоянном напоре.....	163
10.2. Истечение жидкости при переменном напоре .....	165
10.3. Течение газа из объема через отверстие.....	167
10.4. Контрольные вопросы .....	170
<b>Глава 11. Скачки уплотнений при сверхзвуковом течении газов</b>	
11.1. Возникновение скачков уплотнений.....	172
11.2. Прямой скачок уплотнений.....	174
11.3. Косые скачки уплотнения .....	180
11.4. Течение Прандтля-Майера.....	182
11.5. Контрольные вопросы .....	183
<b>Глава 12. Гидродинамический пограничный слой</b>	
12.1. Основные физические представления о пограничном слое.	
Толщина пограничного слоя и толщина вытеснения .....	185
12.2. Уравнения Прандтля ламинарного пограничного слоя .....	187
12.3. Интегральные соотношения пограничного слоя .....	192
12.4. Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный.	
Структура турбулентного пограничного слоя .....	196
12.5. Пограничный слой при течении с продольным градиентом давления. Отрыв пограничного слоя.....	198
12.6. Сопротивление тел обтекаемых вязкой жидкостью .....	200
12.7. Контрольные вопросы .....	203
<b>Глава 13. Применение численных методов в механике жидкости и газа.....</b>	205
13.1. Общие принципы численного моделирования .....	205
13.2. Математическая постановка задачи .....	206
13.3. Конечно-разностная аппроксимация и метод решения .....	208
13.4. Аппроксимация и устойчивость численного решения.....	212
13.5. Течения с разрывами параметров.....	214
13.6. Нефизическое поведение решения .....	216
13.7. Контрольные вопросы .....	217
<b>Глава 14. Турбулентность и ее моделирование</b>	
14.1. Возникновение и развитие турбулентности .....	218
14.2. Структура и основные характеристики турбулентности .....	219
14.3. Некоторые гипотезы полуэмпирической теории турбулентности.....	231
14.4. Контрольные вопросы .....	240
<b>Предметный указатель.....</b>	242
<b>Библиографический список.....</b>	246