

ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А. С. Долгаль

ГРАВИМЕТРИЯ
И МАГНИТОМЕТРИЯ:
РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

МОНТАЖНЫЙ МЕТОД
И АДДИТИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

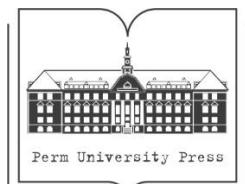
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. С. Долгаль

**ГРАВИМЕТРИЯ И МАГНИТОМЕТРИЯ:
РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ**

МОНТАЖНЫЙ МЕТОД И АДДИТИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки магистров
«Геология»*



Пермь 2024

УДК 550(075.8)

ББК 26.2я73

Д64

Долгаль А. С.

- Д64 Гравиметрия и магнитометрия: решение обратных задач. Монтажный метод и аддитивные технологии [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. С. Долгаль ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2024. – 7,25 Мб ; 120 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Dolgal-Gravimetriya-i-magnitometriya-reshenie-obratnyh-zadach-Montazhnyj-metod-i-additivnye-tehnologii.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-4112-3

Рассмотрены теоретические и практические аспекты количественной интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки. Охарактеризованы основные этапы процесса интерпретации геопотенциальных полей, условия корректности обратных задач, свойства теоретической и практической эквивалентности, проблема устойчивости получаемых решений обратных задач и метод регуляризации А. Н. Тихонова. Приведены краткие сведения о некоторых методах определения параметров источников гравитационных и магнитных аномалий, в т.ч. о методах построения эквивалентных семейств решений и автоматизированного подбора. Особое внимание удалено монтажному методу решения обратной задачи, в котором используются конечноэлементное описание плотностной среды и специальные способы построения приближенного решения в классе сеточных моделей источников поля, не связанные с традиционными методами многомерной оптимизации. Представлены аддитивные технологии количественной интерпретации, применение которых повышает достоверность результатов моделирования геологических тел и структур. Продемонстрированы возможности применения роботизированного интеллекта для построения множества допустимых решений обратной задачи гравиразведки.

Пособие предназначено для студентов геологического факультета, обучающихся по направлению магистратуры «Геология», программе «Геофизические методы исследования земной коры», а также для аспирантов и преподавателей вузов.

УДК 550(075.8)

ББК 26.2я73

*Издается по решению ученого совета геологического факультета
Пермского государственного национального исследовательского университета*

*Рецензенты: кафедра геофизики Воронежского государственного университета (зав.
кафедрой, д-р техн. наук **О. М. Муравина**)*

*доцент кафедры геофизики Уральского государственного горного университета,
канд. геол.-мин. наук **В. Б. Виноградов***

ISBN 978-5-7944-4112-3

© Долгаль А. С., 2024

© ПГНИУ, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОЦЕССА ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ГРАВИРАЗВЕДКИ И МАГНИТОРАЗВЕДКИ.....	7
1.1.Общая схема процесса интерпретации.....	7
1.2.Интерпретационные модели объектов и полей.....	8
1.3.Качественная интерпретация геопотенциальных полей.....	11
1.4.Количественная интерпретация геопотенциальных полей.....	16
2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ.....	25
2.1.Формулировка обратной задачи гравиразведки.	
Классы обратных задач.....	25
2.2. Эквивалентность и единственность решения обратной задачи.....	28
2.3. Понятие о некорректно поставленных задачах.	
Устойчивость решения обратных задач.....	34
3. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКОВ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ.....	43
3.1.Метод характерных точек.....	43
3.2.Метод особых точек.....	45
3.3.Оценка интегральных характеристик.....	48
3.4.Построение эквивалентных семейств решений.....	51
3.5.Метод подбора.....	54
4. МОНТАЖНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ.....	63
4.1.Моделирование источников потенциальных полей в классе конфигурационного распределения масс.....	63
4.2.Решение двухмерной обратной задачи гравиметрии.....	66
4.3.Решение трехмерной обратной задачи гравиметрии.....	71
4.4.Модификации монтажного метода.....	75
4.5.Локализация геологических объектов при неполной информации о физических свойствах.....	79
5. НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ.....	86
5.1.Гарантированный подход.....	86
5.2.Аддитивные технологии.....	95
5.3.Использование метода роя частиц для построения множества допустимых решений обратной задачи.....	102

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	107
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	108
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	114
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	116

ВВЕДЕНИЕ

Обратные задачи – это тип задач, часто возникающий во многих разделах науки, когда значения параметров модели изучаемого объекта или процесса должны быть получены из экспериментальных данных. По мнению Яновской Т. Б. и Пороховой Л. Н., в геофизике обратные задачи заключаются в построении пространственного распределения физических параметров вещества Земли или в определении параметров источника по значениям аномального поля. Решение обратных задач обычно выполняется на заключительном этапе интерпретации результатов полевых геофизических наблюдений. Полученные результаты представляются в виде геолого-геофизических разрезов земной коры (при решении задач геологического картирования) или в виде рекомендаций для бурения заверочных скважин (при решении поисковых задач).

В учебном пособии рассматриваются вопросы, связанные с количественной интерпретацией материалов гравиразведки и магниторазведки. Исторически сложилось так, что большинство теоретических работ было посвящено решению обратных задач гравиразведки. В качестве примера можно привести работы П. И. Балка, Ю. И. Блоха, Е. Г. Булаха, В. Н. Глазнева, Г. Я. Голиздры, В. И. Гольдшмидта, Ф. М. Гольмана, В. И. Исаева, А. И. Кобрунова, В. А. Кочнева, В. В. Ломтадзе, А. К. Маловичко, П. С. Мартышко, А. А. Никитина, Г. Г. Ремпеля, В. И. Старostenко, В. Н. Страхова, А. Н. Тихонова, Н. В. Федоровой, А. В. Цикульского, Н. А. Якимчука и др. В подавляющем большинстве случаев представленные подходы и созданные методы могут быть перенесены в область магниторазведки без каких-либо ограничений. Лишь в случае интенсивных магнитных аномалий с амплитудой более 3000–5000 нТл необходим специфический математический аппарат для вычисления аномальных эффектов тел, учитывающий их размагничивание в собственном аномальном поле и поле соседних объектов. Поэтому в тексте учебного пособия преимущественно используются термины, относящиеся к гравиразведке, но подразумеваются аналогии: «обратная задача гравиразведки – обратная задача магниторазведки», «аномалия силы тяжести – магнитная аномалия», «эффективная плотность – эффективная намагниченность», «масса – магнитная масса» и т.п.

В первой главе характеризуется процесс интерпретации геопотенциальных полей в целом, при этом особое внимание уделено формированию моделей геологических объектов и обусловленных ими полей. Представлены приемы и практические результаты качественной и количественной интерпретации геофизических полей.

Вторая глава посвящена теоретическим вопросам: формулировке обратной задачи гравиразведки, вопросам единственности решения обратных задач, эффектам теоретической и практической эквивалентности. Дано представление о

некорректно поставленных задачах математической физики и методе регуляризации А. Н. Тихонова, обеспечивающем устойчивое решение такого рода задач, а также об имитационном моделировании, которое является основным инструментом верификации компьютерных технологий инверсии физических полей.

Третья глава содержит краткие сведения о некоторых методах определения параметров источников гравитационных и магнитных аномалий. К ним относятся методы характерных и особых точек, оценка интегральных характеристик возмущающих объектов (метод моментов), построение эквивалентных семейств решений обратной задачи и метод автоматизированного подбора (в модификации Е. Г. Булаха).

В четвертой главе излагается суть метода регулируемой направленной кристаллизации (РНК). Его отличительной особенностью является неразрывное единство конфигурационного (конечноэлементного) способа описания плотностной среды и специального способа построения приближенного решения в классе таких моделей, не связанного с нелинейными методами оптимизации, использующимися в алгоритмах автоматизированного подбора. Отмечается важное преимущество монтажных алгоритмов, позволяющих достаточно просто учитывать разнообразные априорные ограничения топологического характера. Приводятся описания применения метода РНК, а также его различных модификаций при работе с синтетическими примерами и с данными полевых геофизических наблюдений.

Новые математические формы представления результатов количественной интерпретации предлагаются в пятой главе: это содержательные инварианты на множестве допустимых решений линейной и нелинейной обратной задачи. В основе их построения лежит гарантированный подход, обеспечивающий неулучшаемую двухстороннюю оценку $D_2 \subset S \subset D_1$ для источника аномалии S , где D_1 и D_2 – некоторые области пространства. Вводится понятие оценочных функций, характеризующих вероятность обнаружения возмущающих масс в пределах элементарных объемов геологической среды. Рассматривается формирование «пакета информации», включающего в себя оценочные функции, а также одну или несколько интерпретационных моделей, отвечающих выбранным критериям оптимальности. Приведены модельные и практические примеры, иллюстрирующие преимущества аддитивных технологий в вопросах повышения достоверности результатов моделирования геологических тел и структур. Продемонстрированы возможности применения искусственного интеллекта – метода роя частиц при построении множества допустимых решений обратной задачи гравиразведки.

В приложении даны пояснения терминов, встречающихся в teste учебного пособия, краткие сведения из теории множеств и дополнительные сведения о системах линейных алгебраических уравнений и методах их решения.

1. КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОЦЕССА ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ГРАВИРАЗВЕДКИ И МАГНИТОРАЗВЕДКИ

1.1. Общая схема процесса интерпретации

В результате гравиметрических и магнитных съемок геофизики получают материалы, в которых в скрытом виде содержится огромная геологическая информация, однако сами по себе карты и графики аномалий силы тяжести и магнитного поля геологической информацией не являются. Извлечение этой информации с целью решения некоторой геологической задачи – основное содержание интерпретации. Вместе с тем, не имея никакой дополнительной информации (геологической, петрофизической и т.п.), только из данных съемок можно в лучшем случае получить лишь формальные распределения плотности (намагниченности) горных пород, объясняющие аномальные поля. Таких формальных распределений можно построить бесконечно много, поэтому для выполнения содержательной интерпретации необходимо использование в этом процессе всей имеющейся по изучаемому объекту геолого-геофизической информации. Эту информацию принято называть априорной от латинского выражения *a priori*, что значит «заранее», «независимо от опыта».

Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий представляет собой упорядоченную совокупность аналитических и синтетических процедур извлечения информации из данных полевых наблюдений при заданном объеме априорной информации с целью решения поставленной геологической задачи.

Таким образом, в процессе интерпретации выполняют два типа процедур. Аналитические процедуры представляют собой преобразование одного числового массива в другой. Они обычно формализуются и выполняются автоматически на компьютерах. Синтетические процедуры связаны с обращением к неформализованной априорной информации, поэтому выполняются человеком-интерпретатором. Естественно, при этом также могут использоваться возможности компьютеров: базы данных, банки знаний, геофизические информационные системы (ГИС) и другие компьютерные технологии, но ведущая роль в синтезе остается за человеком (рис. 1).

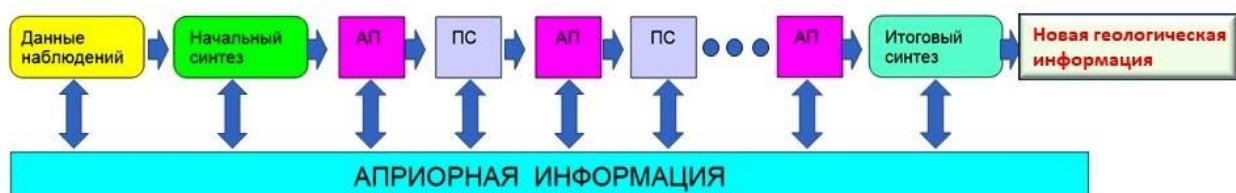


Рис. 1. Обобщенная схема интерпретационного процесса (по Ю. И. Блоху):

АП – аналитическая процедура;

ПС – промежуточный синтез полученных результатов

1.2. Интерпретационные модели объектов и полей

Важнейшим в интерпретации является *принцип модельности*. В соответствии с ним интерпретация неизбежно проводится в рамках определенных модельных представлений. В общем понимании модель – это совокупность принятых интерпретатором упрощений, допущений и т.п. относительно изучаемого предмета или явления. Эти упрощения могут относиться к изучаемому объекту, и тогда говорят о *модели объекта*. Упрощения могут относиться к характеристикам интерпретируемых элементов полей и определяют *модели полей*. Соответственные упрощения приводят также к *моделям помех*, осложняющих интерпретируемые поля.

Рассмотрим основные типы упрощений при составлении моделей изучаемых объектов.

Упрощение размерности. Реальные геологические объекты и создаваемые ими гравитационные аномалии являются трехмерными. Принятым обозначением такой размерности является 3D: от английского слова *dimension* (размерность).

Однако в интерпретации применяются модели и других размерностей, более того, стихийно сложилась некая система терминов, которые широко используются в практике исследований и в специальной литературе, поэтому надо знать, что под ними подразумевают.

Многие геологические образования имеют существенную вытянутость в некотором горизонтальном направлении. К ним можно отнести дайки, зоны разломов и т.д. Для таких объектов при условии неизменности их физических свойств по простиранию характерно слабое изменение аномального поля по простиранию вблизи эпицентра. Если длина объекта более чем в 5 раз превышает его мощность, то такую аномалию и такой объект принято называть двухмерными (2D). 2D-аномалии можно интерпретировать по одному профилю, ориентированному вкrest простирания объекта.

Если относительная вытянутость объекта не столь велика, то вводят модели с так называемой размерностью 2.5D. Они обычно представляют собой горизонтальные призмы, ограниченные по простиранию вертикальными плоскостями, перпендикулярными линии простирания.

В последнее время все шире начинают использоваться модели с размерностью 4D. Эти физико-геологические интерпретационные модели учитывают изменение источников и создаваемых ими полей во времени и применяются при изучении данных, полученных в сериях повторных съемок (в режиме мониторинга).

Упрощение плотностных характеристик. Геологические объекты в большинстве случаев неоднородны, но при интерпретации приходится прибегать к упрощениям распределения их плотности. Чаще всего отдельные геологические

образования полагают однородными по плотности, но если такое допущение чрезчур грубо, то распределение физических свойств описывают каким-либо простым законом, например полиномиальным. В частности, при истолковании гравитационных аномалий на платформах часто считают плотность пород изменяющейся с глубиной по линейному или параболическому закону. Например, плотность σ осадочных пород, изменяющуюся линейно с глубиной h , можно описать формулой: $\sigma(h) = a + bh$, где a, b – параметры распределения физических свойств.

Если к предположению однородности геоплотностной модели добавить предположение об однородности вмещающей среды, то можно от исходной модели перейти к эквивалентной, когда в среде с нулевой плотностью, располагается объект с однородной эффективной плотностью. Эквивалентной называется такая модель, чье аномальное поле совпадает с полем исходной модели или отличается от нее на константу. Для ее получения из плотности объекта вычитают плотность вмещающей среды. Понятно, что эффективная плотность может в результате оказаться и положительной, и отрицательной.

Упрощение формы. Совокупность принятых упрощений образует *интерпретационную модель* объекта исследований. Поскольку модель является упрощением природного объекта, процесс ее создания обычно называют аппроксимацией (от латинского слова *approximo* – приближаюсь). Одна из широко используемых аппроксимационных стратегий базируется на плотном заполнении моделируемых геологических тел прямоугольными призмами, которые соприкасаются боковыми гранями, но не пересекаются друг с другом. Очень важно оптимизировать количество аппроксимирующих прямоугольных призм при сохранении требуемой точности описания геологических границ

В общем случае при аппроксимации следует соблюдать следующие основные принципы:

- 1) объемы объекта и аппроксимирующей его конструкции должны быть равными;
- 2) центры масс объекта и аппроксимирующей его конструкции должны совпадать;
- 3) аппроксимирующая конструкция должна сохранять угол падения, относительную вытянутость и элементы симметрии объекта (рис. 2).



Рис. 2. Пример аппроксимации антиклинальных нефтегазоносных структур (желтый цвет) прямоугольными призмами (черный контур)

Соблюдение этих принципов позволяет при сравнительно небольших затратах машинного времени добиться высокой относительной точности вычислений.

В общем случае сложность формы объекта определяется числом геометрических параметров объекта – чисел, которыми характеризуются его местоположение и форма. Например, форма и местоположение шара описываются всего четырьмя параметрами: тремя координатами центра и радиусом (четырехмерным вектором параметров). В целом построение и использование интерпретационных моделей часто называют *моделированием*.

Упрощения представлений о поле. Как известно, гравиметры измеряют компоненту гравитационного поля, нормальную к уровенной (эквипотенциальной) поверхности в точке наблюдения. Поскольку направление нормали в разных точках Земли различно, гравиметры измеряют в них совершенно разные по отношению к декартовым координатам компоненты. Вместе с тем, если наблюдения проводятся на ограниченной площади, где направления нормалей практически одинаковы, то, упрощая задачу, считают, что измеренная гравитационная аномалия – это 1-я вертикальная производная гравитационного потенциала V_z . При изучении больших территорий, где из-за сферичности Земли такое упрощение недопустимо, полагают, что измерена радиальная компонента V_R , но и это в свою очередь является упрощением (рис. 3).

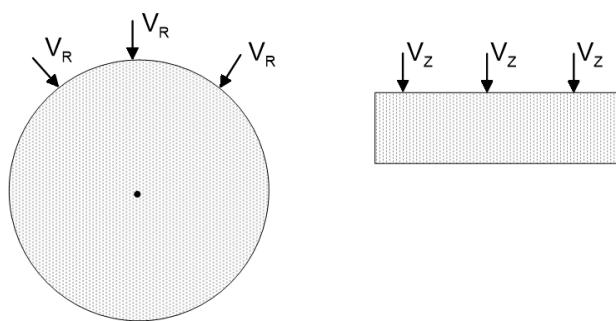


Рис. 3. Аномалии силы тяжести, отвечающие сферической (V_R) и плоской (V_z) моделям Земли

Наконец, при перечислении допущений, лежащих в основе модели поля силы тяжести, нельзя не упомянуть о тех упрощениях, которые определяют вид соответствующих редукций силы тяжести: плоскопараллельный промежуточный слой, нормальный вертикальный градиент и т.п.

Помехи. Наблюденные значения геофизических полей осложнены помехами, среди которых обычно преобладают помехи геологического происхождения и аппаратурно-методические помехи.

Аппаратурно-методические помехи в гравиразведке обычно считаются случайными, некоррелированными и нормально распределенными, поэтому их оценивают в процессе съемок, вычисляя среднеквадратическую погрешность

аномальных значений. Эта важнейшая величина входит в состав априорной информации. Помехи данного происхождения принципиально не могут быть снижены до нуля, поскольку к ним следует относить также погрешности округления.

Гораздо сложнее обстоит дело с помехами геологического происхождения. К ним, в частности, относят влияния приповерхностных геологических образований, которые не включаются в интерпретационную модель объектов. Ясно, что в разных геологических условиях данные помехи могут быть различными, тем не менее их свойства следует учитывать.

1.3. Качественная интерпретация геопотенциальных полей

Принято выделять два вида интерпретации геофизических материалов (в частности, данных гравиразведки): качественную и количественную. Качественная интерпретация преимущественно производится визуально, без расчетов. Однако ей обычно предшествуют процедуры преобразования интерпретируемого поля: его трансформация, формализованная оценка морфологии (например, расчет изменчивости в скользящем окне), разбиение на однородные области (классификация по набору трансформант). На рис. 4. показаны карты гравитационного поля, условно отождествляемые с разноглубинными срезами крупной тектонической структуры, контролирующей процессы рудогенеза на северо-западе Сибирской платформы.

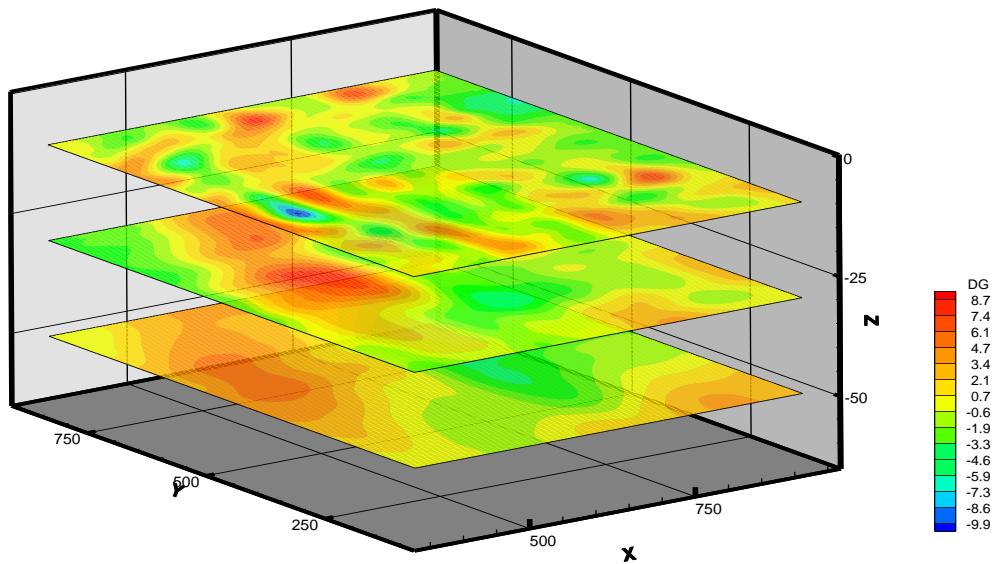


Рис. 4. Отражение Норильско-Игарско-Верещагинской зоны в гравитационном поле (эффективные глубины 10, 30, 50 км)

Результаты площадных гравиметрических съемок представляют в виде карт изоаномал силы тяжести в редукции Буге. Результаты профильных и маршрутных съемок изображают в виде графиков. Первая из задач, решаемых интерпретатором при геологическом истолковании полученных результатов, состоит в

обнаружении на этих картах и графиках достоверных аномалий и их классификации. В любых условиях вначале производится визуальное обнаружение аномалий и лишь, если уровень помех оказывается столь большим, что визуальное обнаружение оказывается невозможным, интерпретатору приходится прибегать к аналитическим методам обнаружения с применением компьютеров.

Визуальное обнаружение аномалий осуществляется в рамках процедуры, называемой морфологическим анализом карт и графиков и включающей два этапа.

Первый этап – оценка достоверности интерпретируемых материалов. При этом принято различать ошибки двух родов. Ошибка первого рода – это ошибка пропуска аномалиеобразующего объекта («пропуск цели»), а ошибка второго рода – ошибка его ложного обнаружения («ложная тревога»). Недостоверными считаются одноточечные, однопрофильные и одномаршрутные аномалии, которые могут появиться как результат случайных ошибок оператора на рядовых или опорных пунктах либо погрешностей прибора. Инструкция по гравиразведке устанавливает несколько критериев достоверности:

1. Аномалия силы тяжести считается достоверной, если она выделена не менее чем на трех пунктах различных звеньев и имеет амплитуду, не меньшую сечения изоаномал отчетной карты.

2. В случае корреляции более слабых аномалий на трех и более профиля они также относятся к достоверным.

3. При обнаружении аномалий по результатам профильной съемки они считаются достоверными, если подтверждаются тремя и более проконтролированными пунктами.

Для характеристики достоверности более слабых аномалий, обнаруживаемых аналитическими способами, предложены разнообразные статистические критерии.

Второй этап морфологического анализа состоит в обнаружении и классификации региональных и локальных аномалий. *Региональная аномалия* обычно занимает сравнительно большую часть площади исследований, совпадает в плане с одним из крупных геологических структурных элементов и даже может выходить за пределы площади исследований. Границы площадных региональных аномалий обычно связаны с разломами. Более мелкие по размерам *локальные аномалии* связаны со сравнительно небольшими по размерам структурами осадочного чехла или кристаллического фундамента, с отдельными геологическими телами, в том числе с месторождениями различных полезных ископаемых.

Процесс морфологического анализа строится по принципу *от общего к частному* и заключается в том, что сначала интерпретатор анализирует структуру аномального поля, выделяет региональные аномалии и лишь затем на их фоне находит локальные аномалии. Существует четыре основных признака, указывающих на возможное наличие разлома, а следовательно, и на границы площадных региональных аномалий (рис. 5).

1. *Наличие ступени в уровнях аномального поля.* Если средние физические свойства пород контактирующих региональных структур резко различаются, на границе между ними возникает аномалия типа ступени. Для нее характерно наличие линейной зоны больших горизонтальных градиентов аномального поля, проявляющихся на карте в виде сгущения изолиний и их вытягивания вдоль какого-либо направления.

2. *Наличие линейных зон локальных аномалий.* Многие разломы, особенно крупные, сопровождаются внедрением по ним интрузий, а также интенсивными процессами метаморфизма. Это приводит к образованию на границе линейных региональных аномалий в виде цепочек максимумов и минимумов. Максимумы обычно отмечают наличие интрузий основного и ультраосновного состава (в т.ч. даек). Минимумы соответствуют интрузиям кислого состава, зонам дробления, катаклаза, милонитизации и т.п.

3. *Смена характерных особенностей аномальных полей.* Если средние физические свойства пород контактирующих региональных структур не различаются, аномалия типа ступени на границе между ними не возникает. Вместе с тем, поскольку геологическое строение этих структур различно, характер аномальных полей, в том числе локальных, по обе стороны границы может быть совершенно разным.

4. *Нарушение корреляции аномальных полей.* Разломы внутри близких по строению структур могут сопровождаться сдвигами, приводящими к нарушению корреляции полей. Такие линейные зоны потери корреляции осей аномалий также уверенно обнаруживаются на картах изолиний.

Выделение границ региональных аномалий является весьма ответственным этапом, поскольку при дальнейшем геологическом истолковании результатов в пределах одной такой аномалии пользуются принципом аналогии, который обычно действует лишь в пределах одной региональной аномалии.

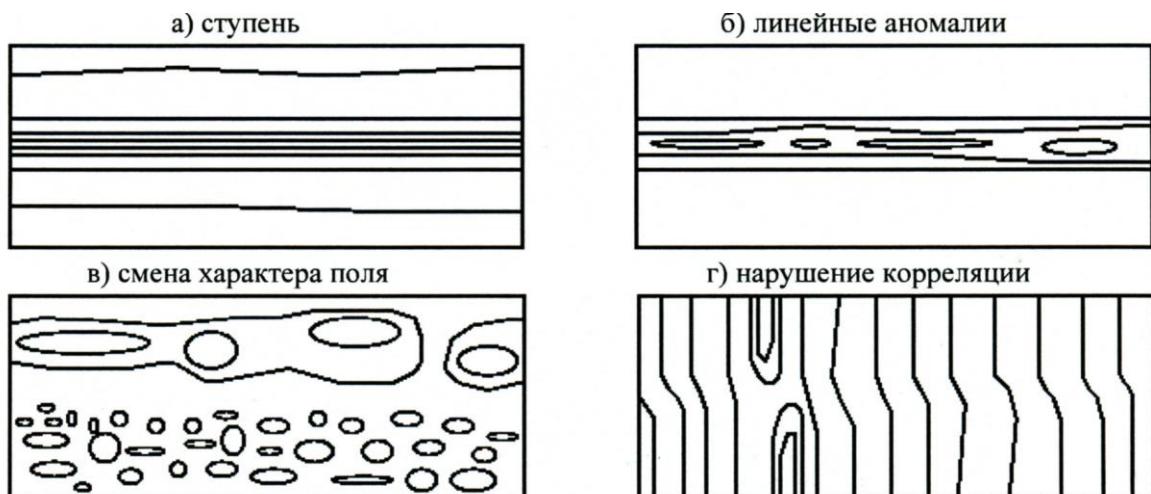


Рис. 5. Основные признаки границ региональных аномалий силы тяжести: горизонтальная граница проходит через центр карты (по Ю. И. Блоху)

После анализа общей структуры аномального поля, выделения и оконтуривания региональных аномалий интерпретатор переходит к обнаружению на их фоне и классификации достоверных локальных аномалий. Большинство локальных аномалий относится к четырем основным морфологическим типам. Контурами замкнутых изолиний обычно отмечаются наиболее интенсивные локальные аномалии при слабо градиентном региональном фоне. Если градиент регионального поля достаточно велик, то в зависимости от амплитуды локальная аномалия проявляется либо как местный изгиб изолиний, либо как их миндалевидное расширение. Наконец, в виде малых градиентных зон или местных ступеней проявляются на картах небольшие структуры типа флексур, либо сравнительно небольшие разломы (рис. 6).

Интерпретационные построения характеризуют геологическое строение района исследований и проводятся непосредственно по наблюденному гравитационному полю и его трансформантам с учетом всех имеющихся физико-геологических сведений и материалов других методов (не только геофизических, но и геологических, данных бурения, геохимических данных и т.п.). Качественная интерпретация преимущественно производится визуально, без расчетов. При этом обычно руководствуются следующими принципами:

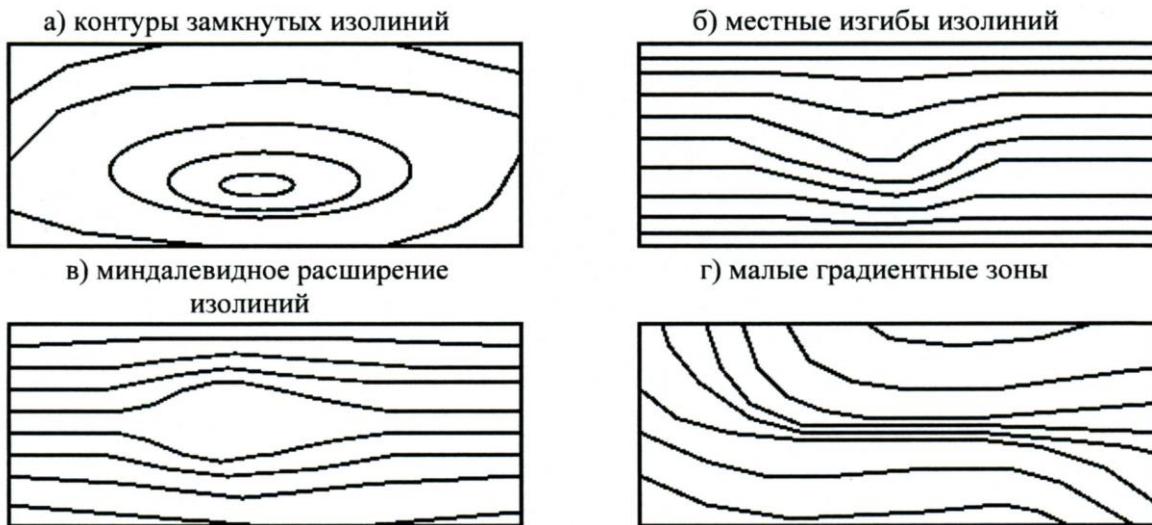


Рис. 6. Основные признаки локальных аномалий (по Ю. И. Блоху)

1. На участках, где наблюдается увеличение силы тяжести, развиты геологические тела с повышенной плотностью относительно вмещающих их горных пород. Наоборот, если отмечается минимум силы тяжести, то на этом участке должны быть развиты более легкие (низкоплотные) породы.

2. Максимум (или минимум) силы тяжести располагается в районе эпицентра объекта, состоящего из тяжелых (или легких) горных пород.

3. Контакт горных пород, обладающих различной плотностью, находится в том месте, где имеется наибольший градиент аномалии силы тяжести.

4. Простижение изолиний аномального гравитационного поля соответствует простирианию геологических тел и структур.

5. Если аномалии силы тяжести симметричны, то возмущающие массы имеют приближенную симметрию относительно соответствующей вертикальной плоскости. Наоборот, асимметрия поля свидетельствует об асимметричной форме геоплотностных неоднородностей.

6. Если конфигурация изоаномал поля в плане имеет сложный характер или графики аномалии силы тяжести вдоль определенных направлений имеют несколько экстремумов, это свидетельствует о наличии нескольких возмущающих тел.

На этапе качественной интерпретации определяют количество и оценивают формы аномалиеобразующих тел. Существенную помощь в этом процессе оказывает рассмотрение не только наблюденного поля силы тяжести, но и его трансформант. Используются поля вертикальных и горизонтальных производных, модуль полного горизонтального градиента, результаты пересчета поля верхнее полупространство, локальные (остаточные) аномалии (рис. 7).

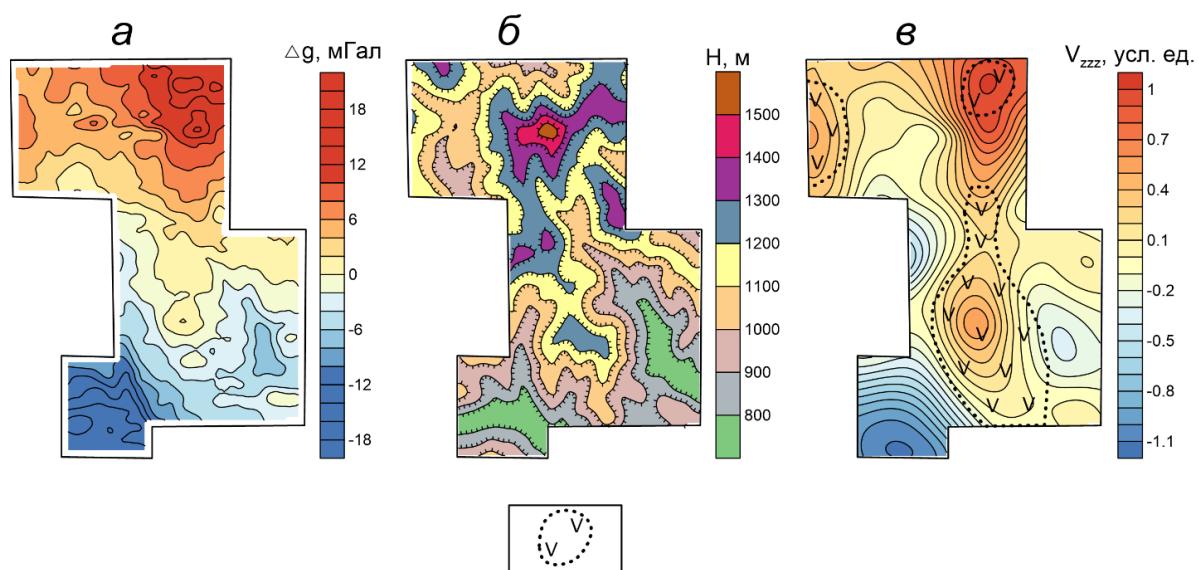


Рис. 7. Карты изолиний: а – гравитационного поля; б – высотных отметок рельефа местности; в – 2-й вертикальной производной силы тяжести V_{zz} на уровне $H = 1800$ м. Кузнецкий Алатау, Балахчинский золоторудный узел.

Условное обозначение: контуры интрузий габбро-диоритов, перспективные на золотое оруденение

На стадии качественной интерпретации может быть предварительно решен вопрос о возможности использования 2D-приближений при дальнейшей количественной интерпретации аномалий. Обычно это делают по изолинии, отметка которой равна половине максимального значения амплитуды аномалии. Если длин-

ная ось изолинии в пять-шесть раз больше короткой, то считают, что возмущающий объект сильно вытянут, поэтому дальнейшие расчеты можно вести в предположении бесконечного простирания.

1.4. Количественная интерпретация геопотенциальных полей

Вычисление аномалий силы тяжести и вторых производных потенциала от тел известной формы, размера глубины залегания и плотности носит название *прямой задачи гравиразведки*. В общем случае *обратная задача* – тип задач, часто возникающий во многих разделах науки, когда значения параметров модели должны быть получены из наблюдаемых данных. Определение местоположения, формы, глубины залегания, размеров и плотности возмущающих объектов по известным аномалиям силы тяжести или вторых производных потенциала называется *обратной задачей гравиразведки*.

Прямая задача позволяет изучить морфологию поля, создаваемого источниками; аналитически исследовать поведение полей; создать вычислительные алгоритмы расчетов необходимых элементов полей от заданных распределений плотностей и намагниченостей; создать алгоритмы и вычислительные программы решения обратной задачи. Специфическими особенностями обратной задачи являются отсутствие единственности ее решения и неустойчивость получаемых результатов. Такие задачи в математической физике носят название «некорректных».

Количественная интерпретация геопотенциальных полей основана на решении прямых и обратных задач и сводится к локализации и определению геометрических (конфигурация и местоположение) и (или) физических (эффективная плотность, эффективная намагниченность) параметров аномалиеобразующих геологических тел и границ.

Локализация слабоконтрастных и глубокозалегающих тел и границ осуществляется путем геологического редуцирования. Геологическое редуцирование – это способ разделения аномальных полей от известных и неизвестных объектов. Он состоит в вычислении поля известных объектов, то есть в решении прямой задачи для них и вычитании рассчитанного поля из наблюденного. Для применения геологического редуцирования требуется иметь полную информацию об этих объектах, то есть знать их местоположение, форму, строение, элементы залегания, физические свойства и т.д. Если такая информация имеется, применение геологического редуцирования для разделения полей является наиболее оправданным.

При решении различных геологических задач применение геологического редуцирования имеет специфические особенности, однако можно выделить и общие подходы к нему. Обычно геологическое редуцирование начинают с учета верхних границ раздела сред, перекрывающих изучаемый объект. Эти границы

достаточно часто бывают известны по данным геологической съемки, по материалам горно-буровых работ, сейсморазведки или электроразведки. Физические свойства пород получают путем измерений на отобранных образцах или по материалам каротажа. Плотность рыхлых отложений изучают гамма-гамма методом в скважинах, канавах и шурфах, а также путем подземной регистрации космического излучения. Надо отметить, что плотностная граница между рыхлыми отложениями и коренными породами создает довольно интенсивные гравитационные аномалии, поскольку она находится на небольшой глубине, а перепад плотности между ними иногда достигает $1 \text{ г}/\text{см}^3$ и более. В пределах больших магматических провинций, где верхняя часть геологического разреза представлена высокомагнитными горными породами, а рельеф местности является сильно расчлененным, выделение магнитных аномалий от глубинных объектов крайне затруднительно. Для этой цели также целесообразно использовать геологическое редуцирование.

Процесс геологического редуцирования обычно состоит из следующих этапов:

- 1) построение геоплотностной (геомагнитной) 3D-модели перекрывающих слоев по геолого-геофизическим данным;
- 2) решение прямой задачи гравиразведки (магниторазведки) для этой модели;
- 3) вычисление разностного гравитационного (магнитного) поля;
- 4) трансформации и качественная интерпретация разностного поля.

Известно множество примеров успешной реализации различных технологий интерпретации геопотенциальных полей, базирующихся на объемном моделировании, однако при решении поисковых задач эти технологии применяются пока недостаточно широко. Учет имеющейся информации о геологической среде в процессе интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки на изученных бурением площадях нередко позволяет получить принципиально новые поисковые результаты.

Например, для Талнахского месторождения платино-медно-никелевых руд в результате геологического редуцирования было получено разностное гравитационное поле, обусловленное преимущественно глубинными геоплотностными неоднородностями. В северной части рудного узла была выделена рудоперспективная Тангаралахская аномалия, отождествляемая с эффектом от глубокозалегающих интрузий габбро-долеритов (рис. 8).

Полученные результаты убедительно свидетельствуют о превалирующем влиянии плотностных неоднородностей туфолововой толщи на характер наблюденного поля силы тяжести Δg . Следовательно, в физико-геологических условиях Норильского района целесообразно проводить исключение влияния известных (пусть даже приближенно) объектов из наблюденного гравитационного поля.

Решение 2.5D обратной задачи гравиразведки. По профилю АБ, пересекающему центральную часть Тангаралахской аномалии в субширотном направлении, выполнялся подбор плотностных и геометрических параметров. Подбираемые тела аппроксимировались горизонтальными призмами конечного простирания, т.е. задача решалась в 2.5D-постановке. Результативная модель геологического разреза включает в себя два пластинообразных тела вертикальной мощностью до 300 м, залегающие в пределах девонских отложений на глубине около 3000 м, отождествляемые с интрузиями габбро-долеритов (рис. 9). Несколько повышенные по сравнению с реальными, значения эффективной плотности тел 0.36–0.38 г/см³ связаны, предположительно, с мощными оклонинтрузивными ореолами уплотненных метаморфических пород.

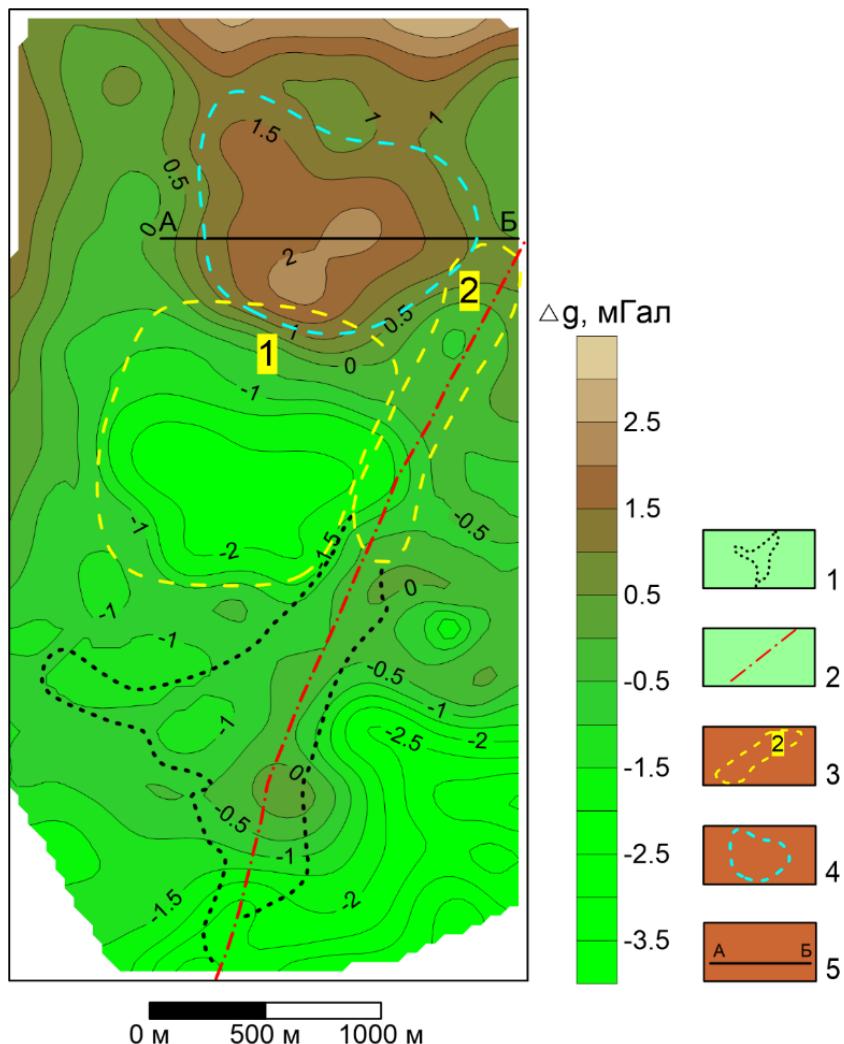


Рис. 8. Разностное поле силы тяжести Талнахского рудного узла, осредненное в скользящем окне радиусом $R = 2$ км:
 1 – контур Талнахской интрузии; 2 – Норильско-Хараелахский разлом;
 3 – рудоперспективные зоны, выделенные по наблюденному гравитационному полю, их номера; 4 – Тангаралахская аномалия;
 5 – интерпретационный профиль, представленный на рис. 9

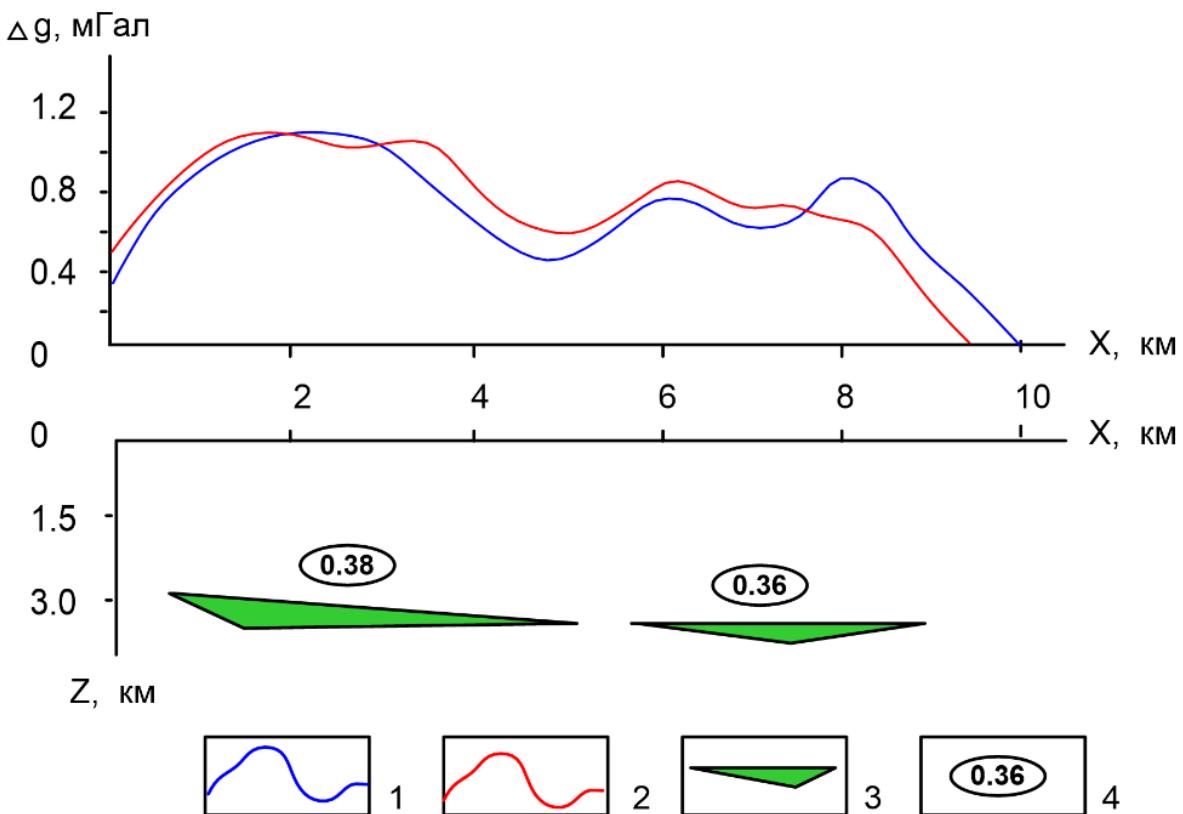


Рис. 9. Результаты автоматизированного подбора источников поля по интерпретационному профилю АБ: графики гравитационного поля:

- 1 – разностного;
- 2 – модельного;
- 3 – возмущающие объекты;
- 4 – эффективная плотность источников, г/куб. см

Решение 2.5D обратных задач гравиразведки и магниторазведки с целью использования глубинных геофизических критериев для прогнозирования рудного золота иллюстрирует приведенный ниже пример по Коммунаровскому золотоносному району (Южная Сибирь). Первоначально были обобщены имеющиеся данные о физических свойствах района и построена петрофизическая модель (рис. 10), которая послужила основой моделирования геологического разреза Коммунаровского золотоносного района по гравитационному и магнитному полям. Геометрические параметры модели неоднократно корректировались в процессе решения обратных задач с помощью диалогового метода подбора. После каждой корректировки осуществлялось решение прямых задач гравиразведки и магниторазведки, а также визуализация наблюденного и модельного полей. На основе построенной интерпретационной модели (рис. 11) удалось выделить участки, перспективные на оруденение различных морфогенетических типов.

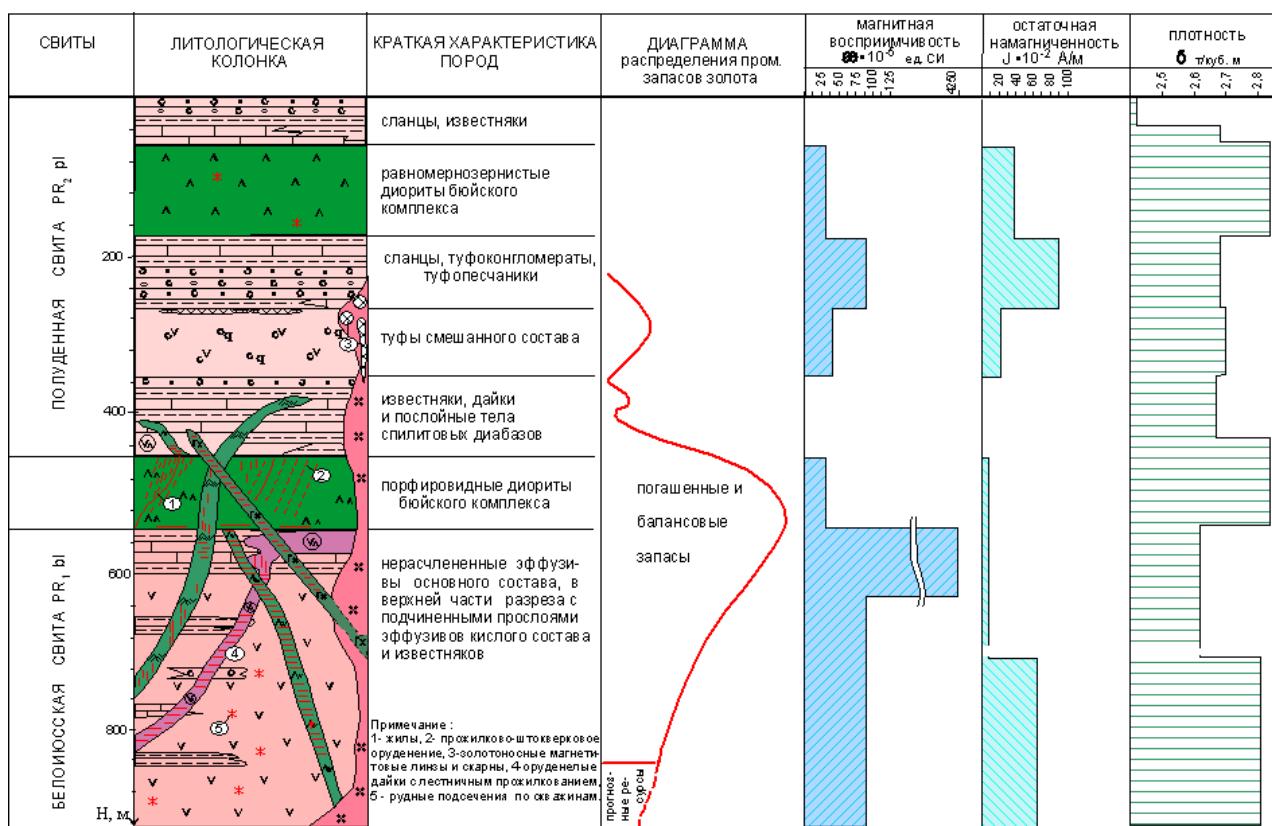


Рис. 10. Петрофизическая характеристика разреза Коммунаровского рудного поля

Участок Кузнецовский является наиболее близким по характеру геофизических полей Коммунаровскому рудному полю. Интенсивные положительные гравитационные и магнитные аномалии, приуроченные к сводовой части горст-антклинали и несэродированным туфогенно-осадочным отложениям полуденной свиты, развитой на восточном склоне свода, позволяют предположить сохранность здесь продуктивного стратиграфического интервала, в котором локализуется золотое оруденение штокверкового типа.

Особый интерес представляет зона тектонического контакта карбонатно-терригенно-эфузивных отложений Чебаковского грабена и зеленокаменных порфиритов Кузнецкого Алатау шириной до 1–1.5 км. В ее пределах развиты интенсивно рассланцованые, трещиноватые и дробленные горные породы, встречаются образования линейной коры выветривания и карста. По комплексу геофизических признаков эта зона близка к уникальному золоторудному Олимпиадинскому месторождению, расположенному в нескольких сотнях километров к северу.

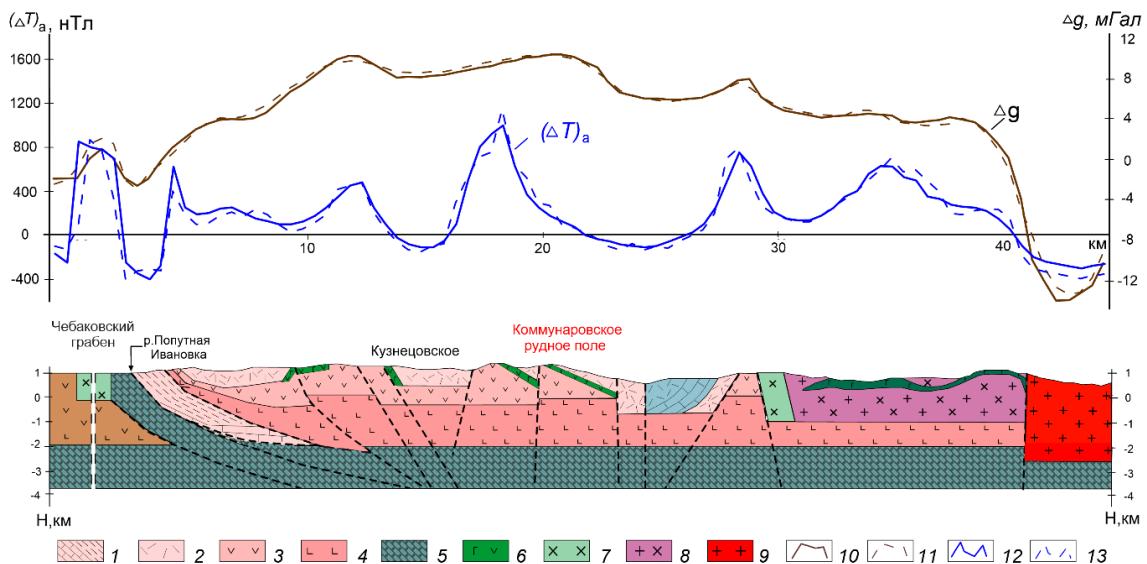


Рис. 11. Геолого-геофизическая модель Коммунаровского золоторудного района:

- 1 – терригенно-карбонатная формация; 2 – туфогенно-карбонатная формация;
- 3 – вулканогенно-терригенно-карбонатная формация;
- 4 – спилит-диабазовая формация; 5 – карбонатно-кремнистая формация;
- 6 – зеленокаменная габбро-диоритовая формация; 7 – диориты;
- 8 – граниты; 9 – гранодиориты; 10–13 – графики геофизических полей:

10 – наблюденное гравитационное поле Δg , 11 – модельное гравитационное поле $\Delta g_{\text{мод}}$,

12 – наблюденное магнитное поле (ΔT)_a,

13 – модельное магнитное поле $\Delta T_{\text{мод}}$

Трехмерная модель пространственного распределения плотности пород кристаллического фундамента до глубины 16 км позволила получить принципиально новую информацию о геологическом строении верхней коры юго-восточной части Воронежского кристаллического массива (рис. 12).

Представленные результаты подтверждают возможное пространственное взаимоотношение Донского и Лосевского террейнов как области надвиговых структур земной коры на юго-востоке Сарматии. Модель была построена на основе инверсии локальных аномалий гравитационного поля в значения аномальной плотности с учетом всей имеющейся геолого-геофизической информации. Изучаемый объем геологической среды аппроксимировался набором горизонтальных слоев различной мощности, которая увеличивалась с глубиной от 0.1 до 4 км. Было использовано 17 горизонтальных слоев от поверхности кристаллического фундамента до глубины 16 км. Значения плотности в стартовой (исходной) модели среды задавались в соответствии с петроплотностной картой кристаллического фундамента и распространялись до глубины, соответствующей мощности «гравиактивного» слоя верхней коры. Поле стартовой модели существенно отличалось от наблюденного, величина среднеквадратической невязки составляла 13.42 мГал. После итерационного решения 3D обратной задачи была достигнута среднеквадратическая невязка наблюденного и модельного полей 0.49 мГал, соизмеримая с точностью использованных материалов гравиметрической съемки.

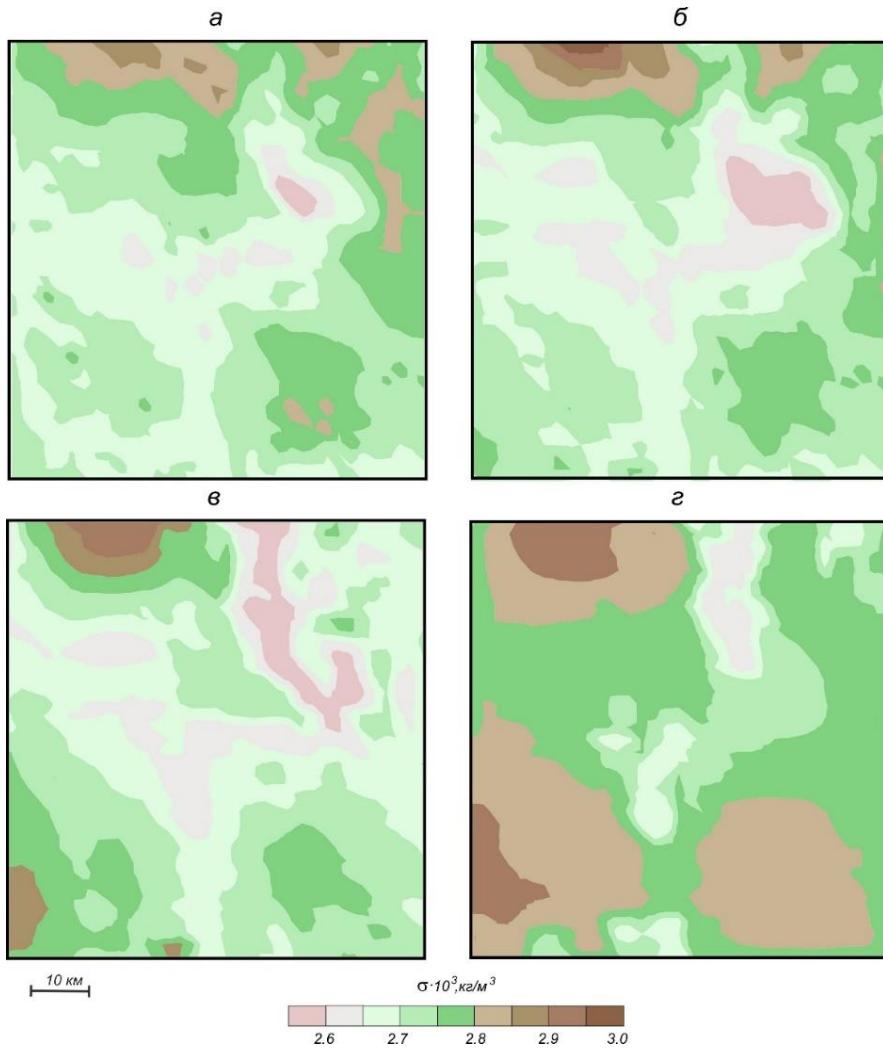


Рис. 12. Схемы распределения плотности на глубинах: 0.2 км (*а*), 3 км (*б*), 10 км (*в*), 16 км (*г*) (по материалам Вороновой Т. А., Муравиной О. М., Глазнева В. Н., Березневой С. И.)

Построение 3D геоплотностной модели по серии 2D-разрезов для южной части полуострова Камчатка. Модель создана по данным интерпретации аномалий Буге и глубинных зондирований методами сейсморазведки и электроразведки. На первом этапе территория исследуется по сети пересекающихся профилей, на которых методом подбора моделируются глубинные плотностные разрезы в 2D-варианте. Априорными данными служат материалы геологических, геофизических, петрофизических исследований, а также результаты определения глубины до особых точек методом деконволюции Эйлера. На следующем этапе из 2D-моделей разрезов формируется 3D-матрица плотности. Создается файл базы данных плотности разрезов. Затем рассчитывается 3D-сеть элементарных кубических ячеек объемного (voxel) изображения плотности геосреды, фрагмент которой с размером ребра элементарных кубов 1 км показан на рис. 13. Изоповерхность 2.75 г/см³ отображает морфологию кровли кристаллического фундамента, изоповерхность 2.9 г/см³ дает представление о границе между нижней и

верхней корой, а изоповерхности 3.2 и 3.33 г/см³ вероятную форму раздела кора – верхняя мантия. Выделена зона пониженной плотности, которая прослеживается на всю мощность коры и объясняется деструкцией горных пород вдоль глубинного разлома. Зона охватывает питающие системы вулканов соп. Асача, Мутновская Сопка, соп. Горелая, Вилючинская Сопка. Модель дает дополнительную информацию для геодинамических реконструкций, а также позволяет приблизенно определять форму скрытых геологических структур и их объемы.

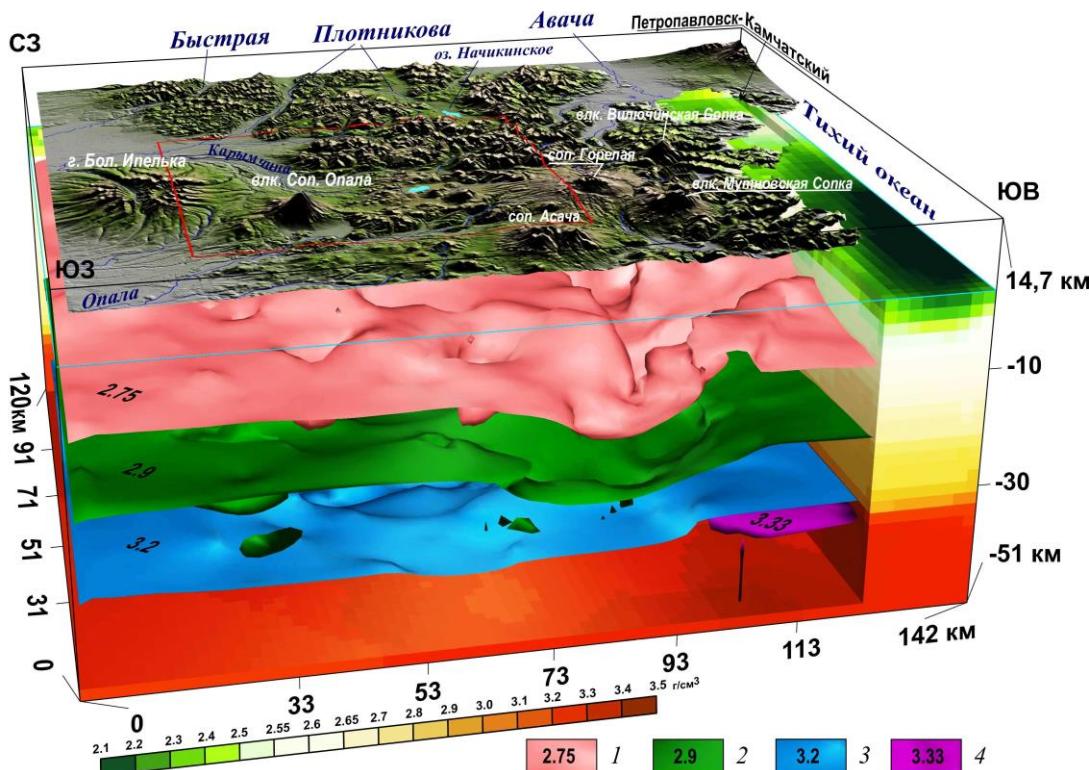


Рис. 13. Блок-диаграмма плотностной модели земной коры южной части полуострова Камчатка (по материалам Сидорова М. Д., Нурмухamedова А. Г.).
Вертикальный масштаб рельефа земной поверхности увеличен в два раза,
истинный уровень моря показан линией голубого цвета:
границы слоев, выделенных по модели с плотностью
2.75 г/см³ (1), 2.9 г/см³ (2), 3.2 г/см³ (3), 3.33 г/см³ (4) соответственно

Решение обратной задачи неоднозначно, так как одинаковые аномалии силы тяжести могут быть созданы геологическими объектами разной формы, размеров и плотности. Тем не менее после проведения качественной интерпретации и при наличии достаточного объема априорной геолого-геофизической информации количественную интерпретацию можно провести с достаточной долей достоверности. Как правило, решение обратных задач является заключительной аналитической процедурой в интерпретационном процессе (рис. 1). Однако в некоторых случаях этап качественной интерпретации может отсутствовать – примерами являются результаты исследований, представленные на рис. 11, 12.

Заключительным этапом качественной и количественной интерпретации данных гравиразведки является геологическое истолкование (итоговый синтез – рис. 1), которое сводится к сопоставлению выделенных аномалий и соответствующих плотностных неоднородностей с имеющейся геологической информацией и данными о плотностных характеристиках горных пород и руд изучаемого района. Такое сопоставление обычно проводят на эталонных участках, где есть достаточноный объем геолого-геофизических данных. Затем полученные закономерности и выводы о геологической природе составляющих аномального гравитационного поля распространяют на всю территорию геофизической съемки.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

2.1. Формулировка обратной задачи гравиразведки. Классы обратных задач

Приведем еще одно определение (по Т. В. Яновской, Л. Н. Пороховой): «обратная задача геофизики состоит в формировании модели геологической среды по результатам измерений геофизического поля при условии, что известен оператор прямого преобразования модели среды в соответствующие характеристики поля». Моделирование геологического строения по гравиметрическим данным, по Е. Г. Булаху, сводится к следующей задаче. На основании всех имеющихся сведений о геологическом строении площади исследований и петрофизической информации, а также с учетом результатов визуального анализа аномального поля и его трансформант осуществляется построение начальной схемы геологического строения. Местоположение и размеры геологических объектов характеризуются параметрами p_1, p_2, \dots, p_m , а значения плотности σ будем считать априорно известными. Таким образом получим m -мерный вектор $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ параметров среды. Можно говорить о функциональном пространстве Q , где каждой конкретной схеме соответствует своя точка $\mathbf{P}: \mathbf{P} \in Q$. Значения аномального поля можно представить как некоторый n -мерный вектор $\mathbf{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Пространство W объединяет различные совокупности $\mathbf{V}: \mathbf{V} \in W$.

Функциональные пространства W и Q связаны между собой. Установлено некоторое правило, по которому для значений параметров среды однозначно определяются значения аномального поля – алгоритм решения прямой задачи. В общем виде прямую задачу можно описать оператором L , который каждой точке пространства Q ставит в соответствие определенную точку из пространства W :

$$\mathbf{V} = L(\mathbf{P}), \mathbf{V} \in W, \mathbf{P} \in Q. \quad (1)$$

Обратная задача состоит в том, чтобы по заданным значениям компонент поля \mathbf{V} определить вектор \mathbf{P} . Таким образом, обратная задача в операторной форме может быть записана так:

$$\mathbf{P} = L^{-1}(\mathbf{V}), \mathbf{P} \in Q, \mathbf{V} \in W. \quad (2)$$

В общем, уравнение (2), использующее обратный оператор L^{-1} , не всегда имеет решение и требует привлечения дополнительных сведений, обеспечивающих устойчивость вычислительного процесса и геологическую содержательность результатов. Таким образом, обратная задача гравиразведки (в наиболее

важной для практики нелинейной постановке) состоит в нахождении пространственного распределения масс P с априорно заданными значениями плотности по заданному гравитационному полю V этих масс.

Согласно М. С. Жданову (рис. 14):

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА: модель (параметры модели P) \rightarrow данные V .

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА: данные V \rightarrow модель (параметры модели P).

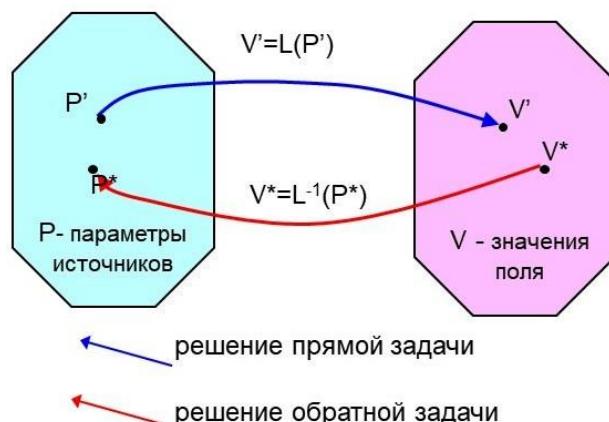


Рис. 14. Операторные уравнения для прямой и обратной задачи геофизики

В математике обратные задачи подразделяются на *линейные* и *нелинейные* в соответствии с типом оператора прямой задачи (1). В геофизике к линейным обратным задачам обычно относят те из них, где оценке подлежат физические характеристики изучаемых геологических объектов, а к нелинейным – обратные задачи, в которых искомыми величинами являются их геометрические параметры (рис. 15). На практике часто приходится иметь дело со смешанными постановками задач: неизвестны как геометрические, так и физические характеристики источников поля.

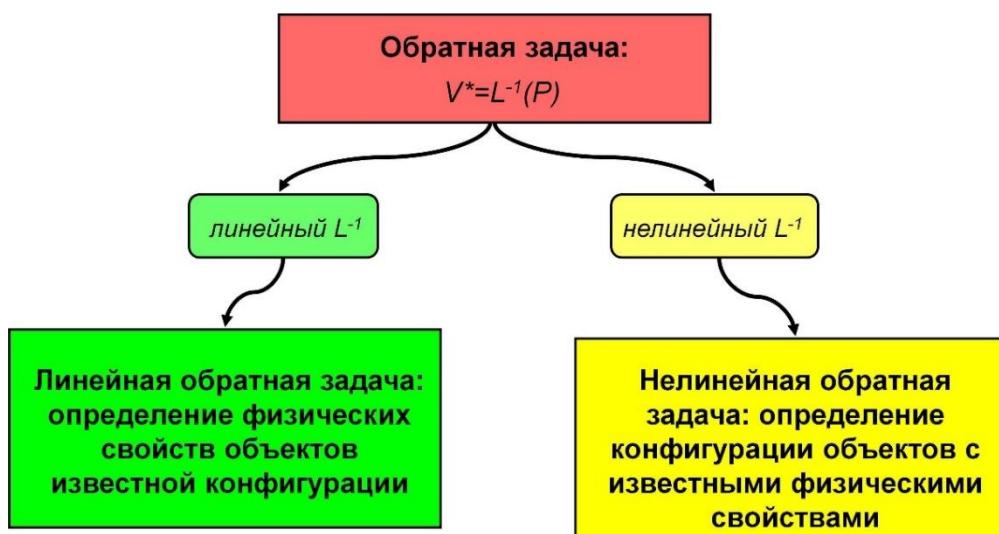


Рис. 15. Классификация обратных задач в гравиразведке и магниторазведке по типу оператора L^{-1}

Если задано внешнее гравитационное поле (случай, наиболее важный для гравиразведки), говорят о *внешней* обратной задаче гравиразведки, если задано внутреннее поле (например, измерения выполнены в подсеченном скважиной теле) – о *внутренней* обратной задаче.

В различных классах распределений масс характер связи аномалий элементов гравитационного поля и степень трудности решения обратных задач гравиразведки различны. Выделяются три идеализированных класса обратных задач: а) задачи типа рудных; б) структурные задачи; в) задачи со сложным распределением масс.

Задачи рудного типа – это задачи, в которых аномалиеобразующими объектами являются конечные односвязные (попарно не пересекающихся) тела с постоянной или переменной плотностью σ , находящиеся в однородной по плотности вмещающей среде.

Структурные задачи – задачи, в которых носителем масс является слоистая среда. Иными словами, нижнее полупространство есть совокупность слоев, не имеющих общих точек. Каждый из слоев заполнен массами постоянной или переменной плотности.

Задачи со сложным распределением масс – это задачи, в которых словно объединяются распределения масс, характерные для структурных задач и задач рудного типа. По сути, это модели сложнопостроенных слоисто-блочных сред с включениями (рис. 16).

Задачи типа рудных, с которыми чаще всего приходится встречаться при поисках и разведке рудных месторождений (железных, хромитовых и др.), в теоретическом плане более просты. Структурные задачи, которые чаще всего встречаются при изучении структур осадочного чехла платформенных областей и главным образом в связи с поисками залежей нефти и газа, существенно более трудные по сравнению с предыдущим типом задач.

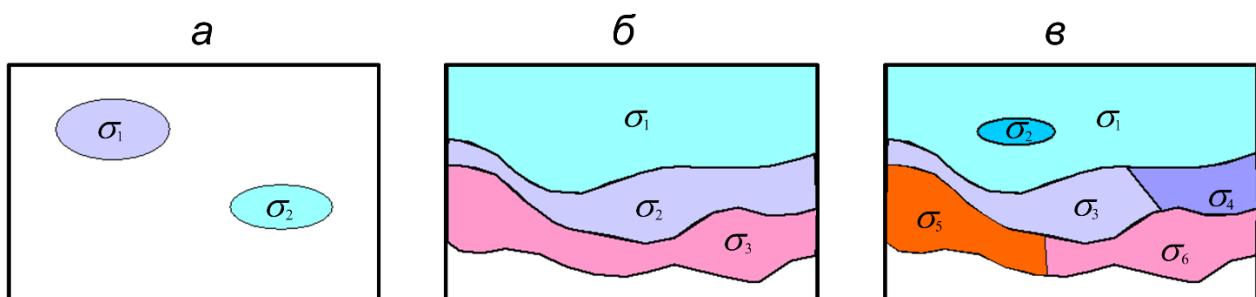


Рис. 16. Пространственные распределения аномалиеобразующих масс, отвечающие трем классам обратных задач гравиразведки: а – рудного; б – структурного типов; в – задачам со сложным распределением масс

Следует обратить внимание на два факта:

1. В формулировке обратной задачи используются функциональные бесконечномерные пространства, т.е. требуется, чтобы гравитационное поле было задано на бесконечном множестве точек. Примерами множеств единственности для внешних гравитационных полей могут служить: а) внешность сферы радиуса R (S_R) с центром в начале координат, внутри которой сосредоточены массы; б) плоскость $z = 0$, если массы расположены в нижнем полупространстве $z > 0$. На практике это условие никогда не выполняется, поскольку в силу дискретности гравиметрических наблюдений число наблюденных значений поля всегда конечно.

2. В формулировке обратной задачи требуется, чтобы было точно задано поле именно тех масс, которые подлежат определению. В реальности это условие не выполняется, так как интерпретируемые значения поля содержат помехи и влияния сторонних объектов.

2.2. Эквивалентность и единственность решения обратной задачи

При решении любой обратной задачи всегда встают три важных вопроса:

1. Существует ли решение?
2. Является ли оно единственным?
3. Устойчиво ли оно?

Вопрос существования решения связан с математической формулировкой обратной задачи. С физической точки зрения, некоторое решение должно существовать, поскольку мы изучаем реальные геологические объекты, находящиеся в земных недрах. Однако с математической точки зрения в рамках заданного модельного множества источников аномалий может и не существовать адекватной численной модели, которая бы удовлетворяла нашим наблюдённым данным.

Вопрос единственности решения в общем случае можно проиллюстрировать следующим примером. Предположим, что у нас есть две различные модели источников, \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 , которые генерируют одно и то же гравитационное поле \mathbf{V}_0 :

$$L(\mathbf{P}_1) = \mathbf{V}_0, L(\mathbf{P}_2) = \mathbf{V}_0. \quad (3)$$

В этом случае невозможно различить эти две модели по имеющимся данным.

Обратная задача гравиметрии, по М. С. Жданову, является обратной задачей источника, потому что сами массы являются источниками гравитационного поля. Эта задача имеет бесконечное множество эквивалентных решений. Например, все шары с одним и тем же центром и одинаковой общей массой (но разными радиусами) порождают одинаковое внешнее гравитационное поле. Очевидно,

плотности σ_1 и σ_2 шаров B_1 и B_2 с разными радиусами R_1 и R_2 при их одинаковой массе должны различаться:

$$M = \sigma_1 \frac{4\pi}{3} R_1^3 = \sigma_2 \frac{4\pi}{3} R_2^3. \quad (4)$$

Если рассмотреть сферическое материальное тело, полученное выбрасыванием меньшего шара B_1 из большого шара B_2 , то такое сферическое тело будет генерировать нулевое внешнее гравитационное поле. Тела, генерирующие нулевое внешнее поле, называются *аннигиляторами* (рис. 17).

Отметим, что распределение плотности $\Delta\sigma$ внутри сферического тела имеет вид

$$\Delta\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_2 - \sigma_1 < 0, & \text{при } r \leq R_1 \\ \sigma_2, & \text{при } R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases}. \quad (5)$$

Таким образом, тело будет состоять из двух сферических слоев: внутреннего шара с отрицательной плотностью и внешнего слоя с положительной плотностью. Отметим, что в действительности плотность (как и масса) всегда положительная. Однако в геофизике обычно рассматривается эффективная плотность, величины которой могут быть как положительными, так и отрицательными.

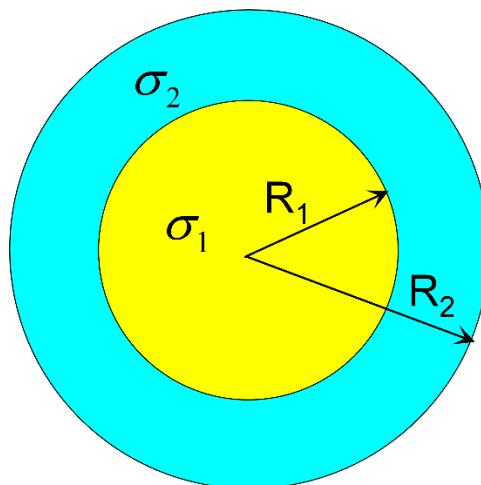


Рис. 17. Пример неединственности решения в обратной задаче гравиметрии
(по М. С. Жданову)

Эта идея является краеугольным камнем принципа *отсутствия единственности решения обратной задачи гравиразведки*. К любой заданной модели пространственного распределения плотности можно прибавить распределение

плотности, генерирующее нулевое внешнее поле (аннигилятор), и получить другую плотностную модель, создающую тот же гравитационный эффект.

Существование нескольких решений, соответствующих одному аномальному полю, называют **эквивалентностью**. Если поля моделей совпадают с абсолютной точностью во всем внешнем пространстве, то эти модели называют теоретически эквивалентными (*t*-эквивалентными). Можно сказать, что теоретическая эквивалентность порождает отсутствие единственности решения обратных задач. В основе этого явления лежит существование распределений физических свойств, которые не порождают внешних аномальных полей.

Предположим, что в результате интерпретации каким-то образом построена геоплотностная модель, полностью объясняющая наблюденную сложную гравитационную аномалию от реального геологического объекта. Если на эту модель наложить шар-аннигилятор, то есть поточечно сложить эффективные плотности модели и шара (рис. 18), то получится другая модель, но ее поле также будет полностью совпадать с наблюденным, поскольку поле добавленного шара нулевое. Помещая центр шара-аннигилятора в разные точки нижнего полупространства, мы можем получить бесконечное множество пространственных распределений плотности в изучаемом геологическом разрезе, объясняющих одну и ту же наблюденную аномалию.

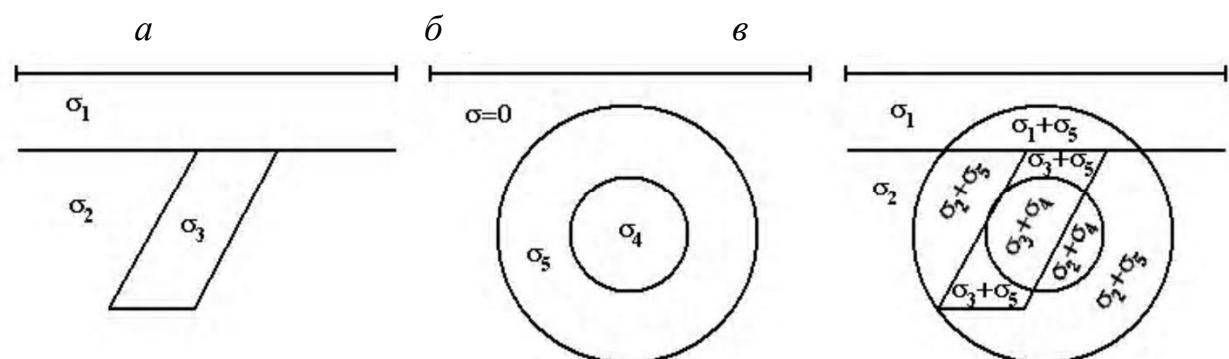


Рис. 18. Получение эквивалентного разреза путем поточечного сложения плотностей с аннигилятором (по Ю. И. Блоху): а) исходный разрез; б) аннигилятор, создающий нулевое аномальное поле; в) суммарный эквивалентный разрез, поле которого абсолютно совпадает с полем исходного разреза

Для понимания вопросов единственности большое значение имеет так называемая лемма П. С. Новикова, в соответствии с которой распределение масс, ортогональное к произвольной гармонической функции, не порождает внешнего потенциального поля. Приведем ее формулировку полностью. Пусть V – конечный объем, ограниченный достаточно гладкой поверхностью S , и в нем задано распределение масс с плотностью $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$. Тогда, если для любой функции

$U(\xi, \eta, \zeta)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа $\Delta U = 0$ в объеме V и ограниченной на поверхности S , выполняется условие ортогональности:

$$\iiint_V \sigma(\xi, \eta, \zeta) U(\xi, \eta, \zeta) dV = 0, \quad (6)$$

то данное распределение масс не порождает внешнего поля. Очевидно, что множество таких распределений масс бесконечно.

Однако вопросы единственности решения обратной задачи на теоретическом уровне все-таки рассматриваются. Под единственностью обычно понимают возможность однозначного нахождения источников по аномальному полю при определенных допущениях об этих источниках. Обратные задачи могут иметь различные степени неединственности, поэтому принято различать сильную и слабую (параметрическую) единственность. Если задача имеет единственное решение при условии наличия лишь качественных допущений об источниках аномального поля, то такая единственность называется сильной. Если же для получения единственного решения помимо качественной априорной информации надо привлекать и количественную, то есть задавать заранее некоторые из параметров интерпретационной модели, то такая единственность называется слабой.

Проведенные многими геофизиками исследования показали, что для обратной задачи гравиразведки в классе уединенных однородных замкнутых тел предельно возможна однопараметрическая неоднозначность. Это значит, что для получения единственного решения в данном классе необходимо иметь следующий объем априорной информации:

- 1) качественную информацию о том, что интерпретируемая аномалия создается уединенным однородным замкнутым телом;
- 2) количественную информацию об одном из параметров, например о плотности тела или о расположении одной из точек его границы.

Достаточные условия единственности в этом классе дает теорема П. С. Новикова. Он доказал, что решение обратной задачи гравиразведки единственно в классе уединенных однородных замкнутых тел с известной постоянной избыточной плотностью, звездных относительно заданной точки. Звездным относительно внутренней точки называется тело, если любой луч, проведенный из данной точки, пересекает поверхность тела лишь единожды. Практическое значение этой теоремы велико, поскольку именно к такому классу относятся многие распространенные модели геологических объектов, в том числе пласти.

Существуют и другие теоремы единственности – теорема И. М. Раппорта, Л. Н. Сретенского, В. Н. Страхова, Д. П. Зидарова, В. М. Новоселицкого и т.д. В частности. В. Н. Страхов доказал, что если известно положение левой и правой асимптот 2D контактной поверхности и эта поверхность является звезд-

ной относительно бесконечно удаленной точки, то обратная задача имеет единственное решение. Это решение также будет однозначным, если известны значение скачка плотности и положение одной точки на границе или же положение 2 точек на границе (рис. 19).

Дальнейшее развитие теории единственности решения обратных задач получила в работах В. К. Иванова, М. М. Лаврентьевса, А. И. Прилепко, В. И. Страстенка, В. В. Васина и др.

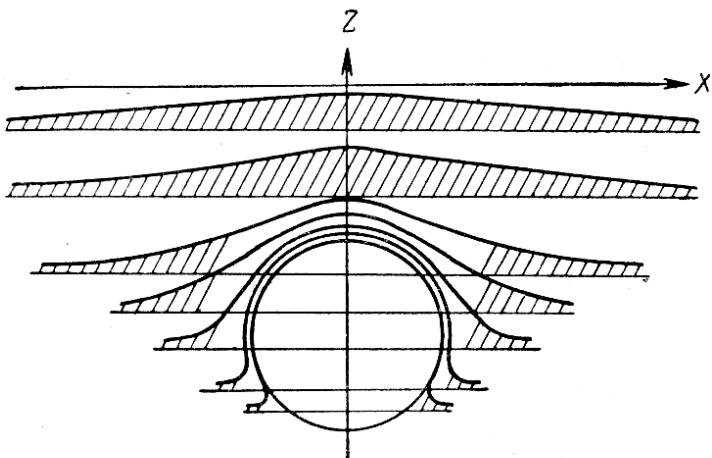


Рис. 19. Теоретическая эквивалентность по внешнему полю семейства границ раздела с одинаковым скачком плотности (по В. Н. Страхову)

Эти результаты могут быть распространены и на обратную задачу магниторазведки. Отличия связаны лишь с тем, что плотность источника поля является скаляром, в то время как его намагниченность – вектором. Поэтому для двумерных обратных задач магниторазведки, где намагниченность описывается двумя компонентами, неоднозначность становится двупараметрической, а для трехмерных обратных задач магниторазведки – трехпараметрической. Аналогичное увеличение степени неединственности решения обратной задачи магниторазведки по сравнению с обратной задачей гравиразведки справедливо и в других модельных классах.

Необходимо отметить, что, если физические свойства не заданы, всегда можно построить бесконечное семейство тел, создающих эквивалентные внешние поля – так называемое эквивалентное семейство решений обратной задачи. Вообще говоря, при стремлении избыточной плотности или намагниченности к нулю, тела в любых эквивалентных семействах для задач рудного типа, увеличиваясь в размерах, стремятся по форме к шару. Этот факт вытекает из условия регулярности потенциала на бесконечности и строго доказан В. К. Ивановым.

Очевидно, что в общем случае обратные задачи не имеют единственного решения, поскольку существуют теоретически эквивалентные модели. Еще го-

раздо шире развита так называемая *практическая эквивалентность*, когда разные модели создают очень близкие, но не абсолютно совпадающие внешние поля. Практическая эквивалентность, которую еще иногда называют ε -эквивалентностью, порождает *неустойчивость* решения обратных задач. На рис. 20 приведен пример практической эквивалентности 2D горизонтальных цилиндров по аномалиям вертикальной составляющей магнитного поля ΔZ . На уровне полумаксимума с абсциссами $\pm x_{1/2}$ аномалии ΔZ совпадают, что влечет за собой неизбежные ошибки в определении глубины h центра возмущающего тела методом характерных точек по формуле $h \approx x_{1/2}$.

Различают ε -эквивалентность двух типов: 1) во многих элементах внешнего поля на больших множествах их задания; 2) в одном элементе поля на узких множествах его задания. Для первого типа разность между двумя ε -эквивалентными распределениями масс практически совпадает с распределением масс нулевого внешнего потенциала (рис. 21а). Преодоление такой эквивалентности возможно только за счет учета дополнительной информации, за счет сужения модельных классов источников поля на основе введения дополнительных ограничений на решение.

Во втором классе разность между двумя ε -эквивалентными распределениями масс не очень близка по свойствам к распределениям масс нулевого внешнего потенциала: даже значения суммарной массы и координат центра тяжести могут быть для ε -эквивалентных распределений в этом классе заметно различными (рис. 21б). С такой ε -эквивалентностью можно бороться, расширяя площадь съемки и дополняя измерения одного элемента поля измерениями других элементов (например, измерения поля Δg измерениями вторых производных потенциала).

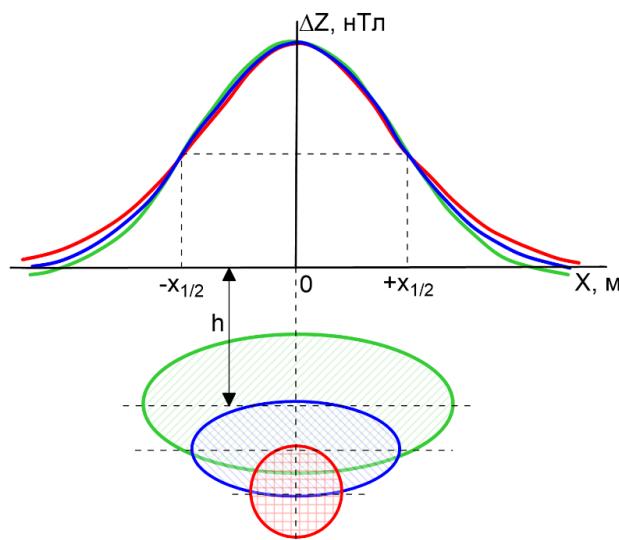


Рис. 20. Практическая эквивалентность цилиндрических тел по аномалиям вертикальной составляющей магнитного поля

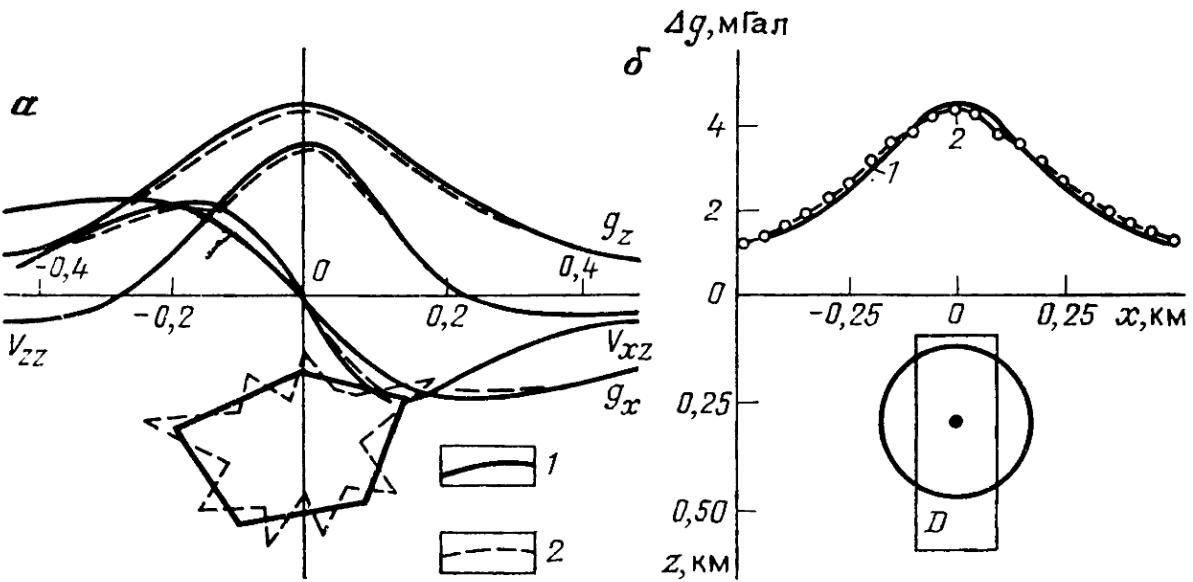


Рис. 21. Примеры ε -эквивалентности в гравиразведке (по «Справочнику геофизика. Гравиразведка»): а – эквивалентность связана с высокочастотными возмущениями контура тела постоянной плотности:
 1 – контур звездного тела и производные гравитационного потенциала от этого тела;
 2 – возмущенный контур звездного тела и те же производные от него; б – эквивалентность поля призмы (1) и шара (2)

2.3. Понятие о некорректно поставленных задачах. Устойчивость решения обратных задач

Выше уже отмечалось, что практическая эквивалентность является причиной *неустойчивости* решения обратных задач. Доказанные математиками теоремы о единственности решения обратных задач весьма слабо связаны с реальной геофизической практикой. Все эти теоремы доказаны при трёх идеализированных условиях:

1. поле задано точно;
2. поле задано на поверхности (или прямой) от $-\infty$ до $+\infty$;
3. поле задано непрерывно.

В геофизике измеренное поле никогда не является полем только целевого объекта, оно всегда задано дискретно – некоторым числом точек на ограниченном участке площади или отрезке профиля. Проблема устойчивости решения обратной задачи возникает обычно в связи с тем, что исходные данные получены в результате измерений и определены с некоторыми погрешностями δ . Вместо точных входных данных u нам известны приближенные значения u^* . Погрешность измерений иногда можно оценить довольно точно, устанавливая, что метрика $p(u, u^*) \leq \delta$. Возникает вопрос: какой может быть разница между приближенным решением $z = R(u)$ и точным значением $z^* = R(u^*)$. Для этого нужно оценить значение ε , где $p(z, z^*) \leq \varepsilon$.

Понятие устойчивого решения обычно формулируется так: задача является устойчивой, если для любой точности ε найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что как только $p(u, u^*) \leq \delta$, то $p(z, z^*) < \varepsilon$. Величину $\delta = \delta(\varepsilon)$ обычно называют модулем устойчивости. Она определяет точность задания исходных данных для получения нужной точности решения. Оценка этой величины на практике бывает очень затруднительной. Таким образом, *в устойчивой задаче решение непрерывно зависит от исходных (или входных) данных. Малым погрешностям исходных величин будут соответствовать малые отклонения в решении.*

Принимая во внимание важность этих трёх вопросов для решения обратной задачи, знаменитый французский математик Жак-Саломон Адамар (Jacques Salomon Hadamard) в 1902 г. выразил мнение, что некоторая математическая задача сформулирована корректно, если все три вопроса, перечисленные ниже, имеют положительный ответ:

1. Существует ли решение?
2. Является ли оно единственным?
3. Устойчиво ли оно?

Другими словами, математическую задачу называют *корректно поставленной*, если её решение существует, единственно и устойчиво.

В соответствии с терминологией Адамара задача являлась *некорректно поставленной*, если решение или не существовало, или не было единственным, или не являлось непрерывной функцией данных (то есть, если малому возмущению данных соответствовало произвольно большое возмущение решения). Адамар полагал, что некорректно поставленная математическая задача не является физически и/или математически значимой (поэтому её можно было бы назвать «плохой» задачей).

Однако оказалось, что большинство задач математической физики и геофизики (равно как и большинство естественно-научных задач) являются некорректно поставленными. Обратные задачи гравиразведки и магниторазведки являются некорректными по Адамару. К счастью, впоследствии было показано, что Адамар ошибся: некорректно поставленные задачи являются физически и математически значимыми и могут быть решены.

В середине XX в. российский математик Андрей Николаевич Тихонов разработал основы теории решения некорректно поставленных задач. Он ввёл в решение обратной задачи метод регуляризации, который был основан на приближении некорректно поставленной задачи некоторой последовательностью корректно поставленных задач.

Рассмотрим подход А. Н. Тихонова на примере 2D обратной задачи гравиразведки: если направление бесконечного простирания носителя масс совпадает с осью Oy , то распределение масс по носителю не зависит от координаты y . В этом случае элементы гравитационного поля являются функциями только двух

координат x и z : $\Delta g = \Delta g(x, y)$. В случае двухмерного поля применяется специальная терминология: считается, что поле определено в плоскости xOz и порождается массами, распределенными в этой плоскости, хотя на самом деле речь идет о следах трехмерных распределений масс в указанной координатной плоскости.

Идеализация плоской задачи широко используется в практике интерпретации гравиразведочных данных даже тогда, когда интерпретируемые аномалии не обладают высокой степенью вытянутости. Во-первых, интерпретация в рамках плоского поля гораздо экономичнее в вычислительном плане, во-вторых, теория плоской задачи в силу ее сравнительной простоты разработана гораздо полнее и глубже и, в-третьих, применение идеализации может приводить к удовлетворительным с точки зрения практики результатам даже для 2.5D-моделей.

Среда состоит из масс с плотностями σ_1 и σ_2 . Эффективная плотность σ равна разности $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$. Положим, что массы разделены границей – контактной поверхностью $z = z(x)$. Эту функцию представим таким образом: на оси абсцисс отметим отрезок $[a, b]$, пусть $z = H$, если $x < a$ либо $x > b$, и $z = H - h(x)$, если $a \leq x \leq b$ (рис. 22).

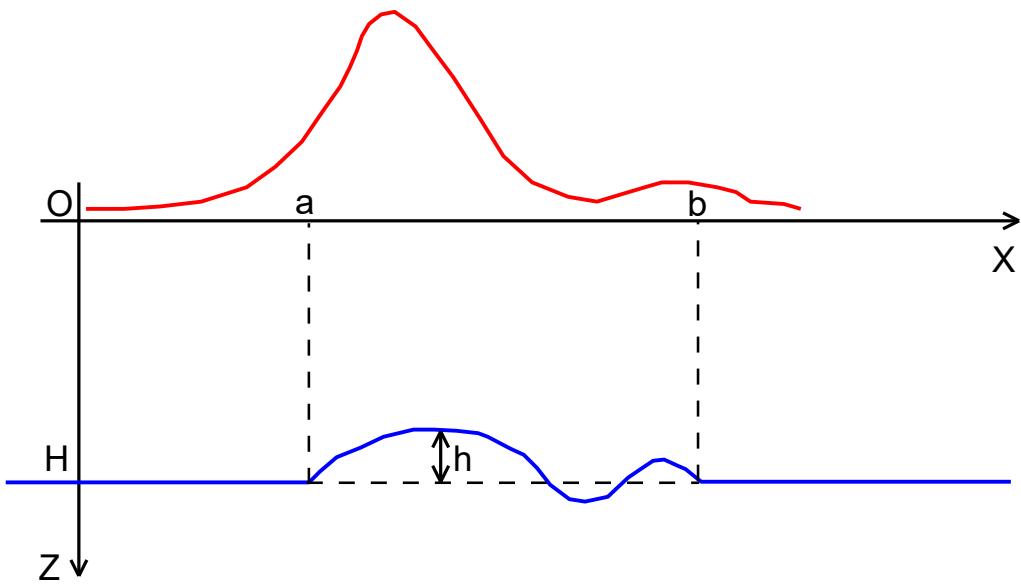


Рис. 22. Пример контактной поверхности в вычислительном эксперименте А. Н. Тихонова

Такое положение масс вызывает аномалию силы тяжести

$$\Delta g = \int_a^b \int_{H-h(\xi)}^H \frac{\zeta d\xi d\zeta}{(\xi-x)^2 + \zeta^2} = G\sigma \int_a^b \ln \frac{(\xi-x)^2 + H^2}{(\xi-x)^2 + (H-h(\xi))^2} d\xi, \quad (7)$$

где $h = h(\xi)$ – отклонение границы раздела $z = z(x)$ от плоскости $z = H$. Если $h > 0$, то граница раздела расположена выше этой плоскости, если же $h < 0$, то уровень контактной поверхности раздела двух сред опускается ниже фиксированного уровня.

Рассмотрим случай, когда $h(x) \ll H$. В этом варианте обратная задача обычно решается в линейном приближении. Подынтегральная функция раскладывается в ряд по степеням $\frac{h}{H}$. Если ограничиться только линейной частью, то можно записать так: $f\left(\frac{h}{H}\right) = f(0) + f'(0)\frac{h}{H} = \frac{2hH}{(\xi-x)^2+H^2}$. Теперь приходим к соотношению $\Delta g(x) = G\sigma \int_a^b \ln \frac{Hh(\xi)d\xi}{(\xi-x)^2+H^2} d\xi$. Задача сведена к линейному интегральному уравнению Фредгольма первого рода:

$$\int_a^b K(x, \xi) h(\xi) d\xi = u(x), u(x) = \frac{\Delta g(x)}{2G\sigma}. \quad (8)$$

Такое уравнение наиболее часто решают следующим образом. Интеграл в уравнении заменяют интегральной суммой. Это отвечает разбиению отрезка $[a, b]$ на n равных частей. При $\Delta s = \frac{b-a}{n}$ точное уравнение заменяется приближенным: $\sum_{j=1}^n K(x, \xi_j) h_j \Delta s = u(x)$. Величина ξ_j может быть абсциссой середины интервала разбиения. Предполагается, что внутри каждого интервала величина $h(\xi)$ не изменяется и принимает постоянное значение h_j .

Если теперь зафиксировать аномальное поле в m точках, то интегральное уравнение перепишется как система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно h_j :

$$\sum_{j=1}^n K(x_j, \xi_j) h_j \Delta s = u(x_j), j = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

В случае, когда $m > n$, имеет место переопределенная система уравнений.

Такая задача у А. Н. Тихонова иллюстрируется одним примером. Контактную поверхность представим в виде: $h(\xi) = (1 - \xi^2)^2$, $a = -1$, $b = 1$. Путем решения прямой задачи и вычисления функции $u(x_j)$ определяется правая часть рассматриваемой системы (9). На практике она получается по результатам измерений, в вычислительном эксперименте нужно брать $u_j^* = u_j + \Delta$, где Δ – нормальная случайная величина с математическим ожиданием, равным нулю, и с фиксированной дисперсией (обычно сопоставимой с точностью съемки); u_j – точное значение аномального эффекта.

В эксперименте А. Н. Тихонова была взята система сорока уравнений, правая часть системы вычислялась с сохранением девяти значащих цифр. В результате получена пилообразная последовательность, причем h_j отличается от точного значения в десятки и сотни раз (рис. 23). При прямой подстановке этих величин в алгебраическую систему значения правой части восстанавливались с точностью до 10^{-4} мГал.

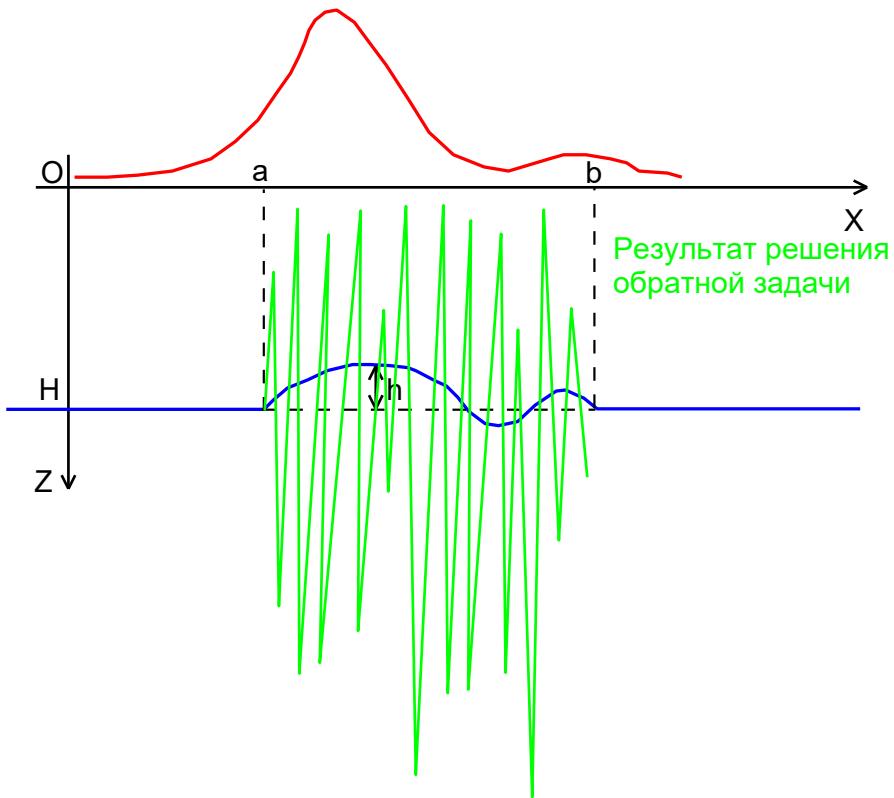


Рис. 23. Результат решения обратной задачи гравиразведки, полученный А. Н. Тихоновым

Если правую часть СЛАУ заменить иным приближенным значением поля, то пилообразность сохранится, но амплитуда и частота резко изменятся. Этот пример показывает, что в обратной задаче нет непрерывной зависимости результатов решения от исходных данных. Малым погрешностям исходных величин δ соответствуют большие отклонения в решении ε . Оказалось, что не очень сложная обратная задача гравиразведки в такой общей постановке является неустойчивой, а ее численное решение – бессодержательным с геологической точки зрения.

Подход А. Н. Тихонова заключается в применении специальных методов решения неустойчивых задач – *регуляризующих алгоритмов*. Суть этого подхода заключается в том, что исследователь, изучая физические явления, находит некоторые характеристики, которые могут ограничить искомые величины. Найденные характеристики формализуются – описываются математически и включаются в условие задачи. Таким образом, отыскивается не точное решение, а новое, с учетом формальных ограничивающих факторов.

В рассмотренном выше примере стояла задача определить форму контактной поверхности. При этом не вводились какие-либо ограничения на ее глубины и конфигурацию. В результате найдена пилообразная кривая, форма которой сильно изменяется при незначительном изменении гравитационного поля в правой части системы уравнений. Откажемся от столь общего решения и поставим задачу так: нужно найти функцию $h = h(\xi)$, которая входит в наши уравнения при некотором начальном приближении h^0 . Построим стартовую модель этой

функции, т.е. установим некоторую последовательность $\{h_j^0\}, j = 1, 2, \dots, n$. Теперь будем искать такие величины h_j , которые удовлетворяли бы исходной системе уравнений и мало отличались от заданной модели. Критерием малого отличия может являться условие минимального значения функционала:

$$T = \sum_{j=1}^n a_j (h_j - h_j^0)^2 \rightarrow \min. \quad (10)$$

Здесь множители a_j играют роли весовых коэффициентов. Теперь в решении СЛАУ уже не может появиться пилообразная кривая со значительными амплитудами. Этому способствует функционал $T = \sum_{j=1}^n a_j (h_j - h_j^0)^2$, регуляризующий решение задачи. Можно подойти к решению задачи иначе: будем искать такую функцию $h = h(\xi)$, которая удовлетворяла бы системе уравнений (9), а ее производная по переменной абсциссе ξ была бы минимальной.

Фактически регуляризованное решение является искомым приближенным решением обратной задачи. Таким образом, получение приближенного решения обратной задачи, устойчивого к помехам в наблюдаемых полях, сводится, по А. Н. Тихонову, к следующим двум этапам: 1) к построению регуляризующего оператора; 2) к определению параметра регуляризации по априорной информации.

Такой метод построения приближенных решений и носит название метода регуляризации. Уже говорилось, что построение регуляризующего оператора возможно при наличии качественной априорной информации о решении (в частности, о его гладкости). Априорную информацию формулируют в виде вариационного принципа отбора возможных решений обратной задачи. Для этого составляют специальную функцию, называемую стабилизатором. Выбор стабилизатора неоднозначен и определяется характером решаемой задачи. Фактически стабилизатор является штрафом, который интерпретатор накладывает на решение за его нежелательные свойства, в том числе и негладкость.

При постановке, исследовании и решении физических задач оказалось необходимым ввести новые условия, отличные от классических требований корректности. Принято считать, что задача математической физики поставлена корректно по А. Н. Тихонову, если выполняются следующие условия:

1. Априори известно, что решение задачи существует для некоторого класса исходных данных L и принадлежит некоторому функциональному множеству M .
2. Решение единственno в том же классе исходных данных и в классе решений, принадлежащих M .
3. Малым вариациям исходных данных, которые не выводят решения из множества M , соответствуют малые отклонения в решении задачи.

Построенное таким образом множество M называется множеством корректности. Отметим отличия сформулированных условий от условий Адамара.

Первое условие. В классической постановке оно требует установления теоремы существования решения. В условиях по А. Н. Тихонову существование решения доказывать не нужно. Это положение особенно важно в геофизических задачах. Обратная задача геофизики состоит в том, что по наблюденному полю необходимо определить местоположение, размеры и физические свойства геологических объектов. Аномальное поле отражает объективную реальность, и нет сомнений в том, что существуют конкретные геологические объекты, которые создали наблюденное поле. Класс решений может быть установлен на основании геологических и физических соображений.

Второе условие. По содержанию оно совпадает и в классической постановке, и по А. Н. Тихонову. Однако здесь следует усматривать одну особенность. По А. Н. Тихонову, требуется единственность решения (или существование обратного оператора L^{-1}) лишь на множестве M . В практике интерпретации геофизических данных это свойство весьма важное.

Третье условие. Если обратные геофизические задачи поставлены в самом общем виде, то не существует непрерывной зависимости между исходными данными и решением. Для того чтобы устойчивость задачи была обеспечена, необходимо выбрать определенный (иногда довольно узкий) класс функций. В указанном классе и находят решение. Отличительная особенность третьего условия, по А. Н. Тихонову, как раз и состоит в том, что в постановке нет признаков принадлежности исходных данных к классу L , но устанавливается принадлежность решения к классу корректности M . Это условие сужает общую задачу.

Поэтому задачу, корректную по А. Н. Тихонову, часто называют *условно корректной*, а третье условие – *требованием условной устойчивости*.

Теорема А. Н. Тихонова. Как отмечалось выше, один из подходов к решению обратных задач состоит в том, что на основе априорных факторов отыскивается решение в специально отобранном модельном классе. Этим задача приводится к устойчивой. Теоретическим обоснованием такого подхода является теорема А. Н. Тихонова (1943 г.), доказательство которой основано на свойстве непрерывных отображений. Предварительно рассмотрим одно важное понятие функционального анализа – компактные множества. Необходимым и достаточным условием компактности множества A из n -мерного евклидова пространства является его ограниченность.

А. Н. Тихоновым четко сформулирована прямая задача гравиразведки. Пусть задано некоторое тело T с постоянной эффективной плотностью σ . Требуется вычислить на поверхности $z = 0$, не принадлежащей области T , потенциал V или его производные (элементы гравитационного поля).

Рассмотрим обратную задачу. Допустим, что о положении возмущающего тела T можно сделать некоторые суждения. Например, пусть известно, что оно

располагается внутри заданной поверхности S , лежащей в области $z > 0$. В определенный класс R включим совокупность всех тел $\{T\}$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) каждое тело T принадлежит области, ограниченной поверхностью S ; 2) каждое тело T звездно относительно своего центра тяжести P (уравнение поверхности, которая ограничивает тело T , может быть представлено в сферической системе координат с центром в точке P в виде $r = f(\phi, \theta)$); 3) функция $r = f(\phi, \theta)$ имеет производные, модуль которых ограничен числом M , общим для всех тел класса R .

Степень близости двух различных тел T_1 и T_2 из класса R определим следующим образом:

$$\rho(T_1, T_2) = \max\{\rho(P_1, P_2), \max|f_1(\phi, \theta) - f_2(\phi, \theta)|\}. \quad (11)$$

Напомним, что P_1 и P_2 – центры тяжести тел T_1 и T_2 , а f_1 и f_2 – уравнения поверхностей этих тел в сферических системах координат.

Теперь обратимся к теореме А. Н. Тихонова об условиях устойчивого решения обратных задач: каковы бы ни были степень точности ε и класс R , можно указать число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что если значение потенциалов или их производных $V_1(x, y)$ и $V_2(x, y)$ двух каких-либо тел T_1 и T_2 класса R отличаются при $z = 0$ меньше, чем на δ : $|V_1(x, y) - V_2(x, y)| < \delta(\varepsilon)$, то сами тела отстоят друг от друга меньше, чем на ε , т.е. $\rho(T_1, T_2) < \varepsilon$.

Можно получить и другие теоремы устойчивости. В самом общем случае теорема об устойчивом решении обратной задачи свидетельствует о следующем. Постановка задачи должна быть такой, чтобы удовлетворялись два условия: обратная задача должна иметь единственное решение и функциональное пространство M , где отыскивается решение, должно быть компактно. Это значит, что параметры геологической схемы определяются на ограниченном замкнутом множестве.

В заключение нужно сказать еще несколько слов о неоднозначности решения обратных задач с физико-геологической точки зрения. Горные породы представляют собой сложные гетерогенные образования и имеют фракталоподобное строение. Соответственно, усредненные свойства горной породы на каждом из масштабов будут различными. Метровый куб гранита в своих проявляющихся, наблюдаемых свойствах – совершенно иное, чем сантиметровый образец или километровые массивы. Скачкообразные изменения физических параметров на геологических границах отмечаются далеко не всегда. Например, каждое интрузивное тело имеет внутреннюю часть, зону эндоконтакта и ореол экзоконтактовых изменений вмещающих горных пород.

Постоянные петрофизические характеристики и резкостные границы в интерпретационных моделях являются загрубленными модельными представлениями. Поэтому первым фактором, определяющим неоднозначность количественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, являются допущения, используемые при формировании геологических и петрофизических моделей изучаемых объектов. Вторым фактором является практическая эквивалентность решения обратной задачи в выбранном модельном классе источников поля, рассмотренная в этой главе.

Следует также добавить, что далее будут рассматриваться результаты имитационного моделирования, иллюстрирующие возможности разных методов количественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Имитационное моделирование является основным инструментом тестирования компьютерных технологий решения обратных задач геофизики. Согласно В. Н. Стражову, оно заключается в следующем:

1. Создание набора адекватных реальности числовых моделей изучаемого фрагмента геологической среды или геологического объекта (синтетических примеров);
2. Расчет аномальных эффектов для каждой из построенных моделей путем решения прямой задачи геофизики;
3. Осложнение полученных модельных полей искусственной помехой с некоторыми ожидаемыми на практике параметрами;
4. Решение целевых задач интерпретации для полученного набора данных, имитирующих изучаемый фрагмент среды или объект;
5. Сопоставление результатов, полученных для набора различных моделей и помех во входных данных;
6. Оценка на качественном уровне надежности и точности решения поставленной интерпретационной задачи.

3. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКОВ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

3.1. Метод характерных точек

Для приближенной экспресс-оценки параметров источников аномалий гравитационного поля в гравиразведке важнейшую роль играет метод характерных точек (МХТ), позволяющий определять геометрические параметры 2D-источника аномалии по выбранным определенным образом координатам точек на кривой $\Delta g = f(x)$, где Δg – амплитуда, x – расстояние от центра аномалии (табл. 1). Кроме того, в зависимости от типа источника, с помощью МХТ можно определять массу или плотность (линейную, поверхностную или объемную) возмущающего объекта. Отличительными особенностями МХТ являются простота аналитических выражений и высокая скорость вычислений. Благодаря этому метод находит широкое применение в оценке параметров источников моногенических аномалий до настоящего времени. Определение параметров аномалообразующих тел с помощью МХТ легко выполняется как в ручном, так и в автоматическом режиме.

Результаты количественной интерпретации МХТ будут близки к истинным (с точностью до 10–20 %), если возмущающие массы близки по форме к телам правильной геометрической формы, а расстояния между отдельными аномалиями заметно превышают их размеры. Однако если эти условия не выполняются, МХТ позволяет оценить глубины и полную аномальную массу лишь приближенно (с погрешностью до 30 % и больше).

Для интерпретации магнитных аномалий существуют формулы, подобные приведенным в табл. 1, которые можно найти в литературе (в частности, в «Справочнике геофизика. Магниторазведка»). Приведем пример применения МХТ для магнитной аномалии ΔZ , обусловленной вертикально намагниченным 2D тонким пластом (рис. 24). График ΔZ будет иметь максимум над центром пласта и асимптотически стремиться к нулю при удалении от него. В плане над пластом будут вытянутые аномалии ΔZ одного знака. Глубина залегания верхней кромки пласта $h = x_1$, линейная магнитная масса $m = Il = Z_{max}\mu h/2$, при наличии сведений о намагниченности I можно рассчитать горизонтальную мощность пласта $l = Z_{max}\mu h/2I$. Здесь $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м – магнитная проницаемость.

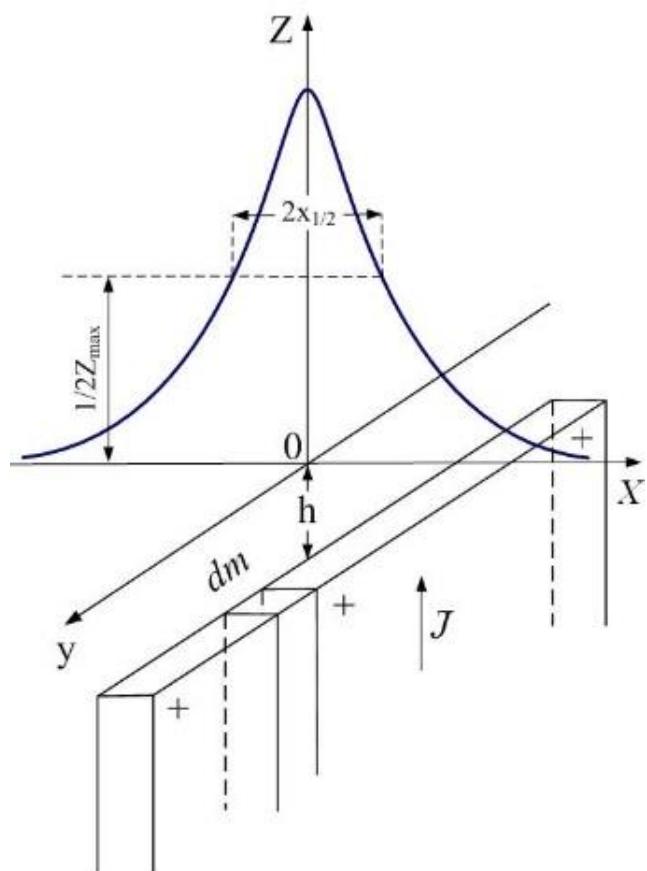


Рис. 24. Магнитное поле тонкого пласта бесконечного простирания
(по В. И. Костицыну, В. К. Хмелевскому)

Таблица 1
Соотношение между параметрами источника и аномалии гравитационного поля
(Булычев и др., 2017)

Тип источника	Характерная точка	Параметр источника	Формула
Точечный или сферический источник	$x_{\frac{1}{2}}$	Глубина центра масс	$h = \pm 1.305 x_{\frac{1}{2}}$
		Масса	$M = \frac{V_{zmax} h^2}{G}$
Вертикальный полубесконечный тонкий стержень	$x_{\frac{1}{2}}$	Глубина верхней кромки	$h = \pm \frac{x_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}$
		Линейная плотность	$\sigma_L = \frac{V_{zmax} h}{G}$
Бесконечный горизонтальный тонкий стержень	$x_{\frac{1}{2}}$	Глубина центра масс	$h = \pm x_{\frac{1}{2}}$
		Линейная плотность	$\sigma_L = \frac{V_{zmax} h}{2G}$

Окончание табл. 1

Тип источника	Характерная точка	Параметр источника	Формула
Вертикальный тонкий пласт	$x_1, x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{1}{4}}$	Глубина верхней кромки	$m = \frac{x_1^2 - x_{\frac{1}{2}}^2}{2x_{\frac{1}{2}}^2}$ $h_1 = m - \sqrt{m^2 - x_{\frac{1}{2}}^2}$
		Глубина нижней кромки	$h_2 = m + \sqrt{m^2 - x_{\frac{1}{2}}^2}$
		Поверхностная плотность	$\sigma_s = \frac{V_{zmax}}{2G \ln \frac{h_2}{h_1}}$
Горизонтальный тонкий пласт	$x_1, x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{1}{4}}$	Глубина центра масс	$h = \frac{x_1^2 - x_{\frac{1}{2}}^2}{2x_{\frac{1}{2}}^2}$
		Ширина пласта	$d = 2 \sqrt{x_{\frac{1}{2}}^2 - h^2}$
		Поверхностная плотность	$\sigma_s = \frac{V_{zmax}}{4G \pi r \operatorname{arctg} \frac{d}{h}}$
Уступ	$x_{\frac{1}{2}}$	Глубина центра масс	$h = \pm x_{\frac{1}{2}}$

Примечания: x_1 – расстояние от точки максимума аномалии Δg_{max} до точки с амплитудой поля $0.5\Delta g_{max}$; $x_{\frac{1}{4}}$ – до точки с амплитудой поля $0.25\Delta g_{max}$ соответственно.

3.2. Метод особых точек

Системой параметров, однозначно определяемых по аномальному полю без привлечения какой-либо априорной информации, является система особых точек функций, описывающих аномальные поля. Понятие особенности как точки, в которой функция теряет свою аналитичность, известно из курса теории функций комплексной переменной. Оказывается, особые точки функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, теснейшим образом связаны с создающими их объектами и могут нести информацию об их местоположении и форме. Концепция особых точек для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий впервые предложена В. Н. Страховым и независимо, но несколько позднее, Г. Я. Голиздрой. Дальше в ее развитии участвовали многие отечественные и зарубежные геофизики.

Для локализации особых точек можно аналитически продолжить поле или его производные на ряд уровней в вертикальной плоскости и экстраполировать

их до пересечения вниз. При этом выбирается для продолжения такой элемент поля, для которого ожидаемый тип особенностей будет удобен. В. Н. Страховым разработан способ локализации особых точек путем аналитического продолжения в горизонтальный слой, включающий все верхнее полупространство и часть нижнего полупространства до глубины H ближайшей к дневной поверхности особой точки. Инструментом для такого продолжения является Фурье-преобразование. Выбранный элемент с помощью описанного алгоритма продолжают на несколько уровней вверх и вниз, причем общее число уровней должно быть не меньше 5. Так как параметр H определен с некоторой погрешностью, продолжение вниз обычно проводят вплоть до глубины, равной 0.7 H . По результатам продолжения строят изолинии выбранного элемента в вертикальной плоскости интерпретационного профиля.

Завершающим этапом локализации является экстраполяция изолиний вниз вплоть до пересечения. Точки пересечения изолиний и являются особыми точками функции, описывающей аномальное поле. На рис. 25 показано выделение застывшей питающей магматической системы подводного вулкана Эдельштейна с использованием метода особых точек.

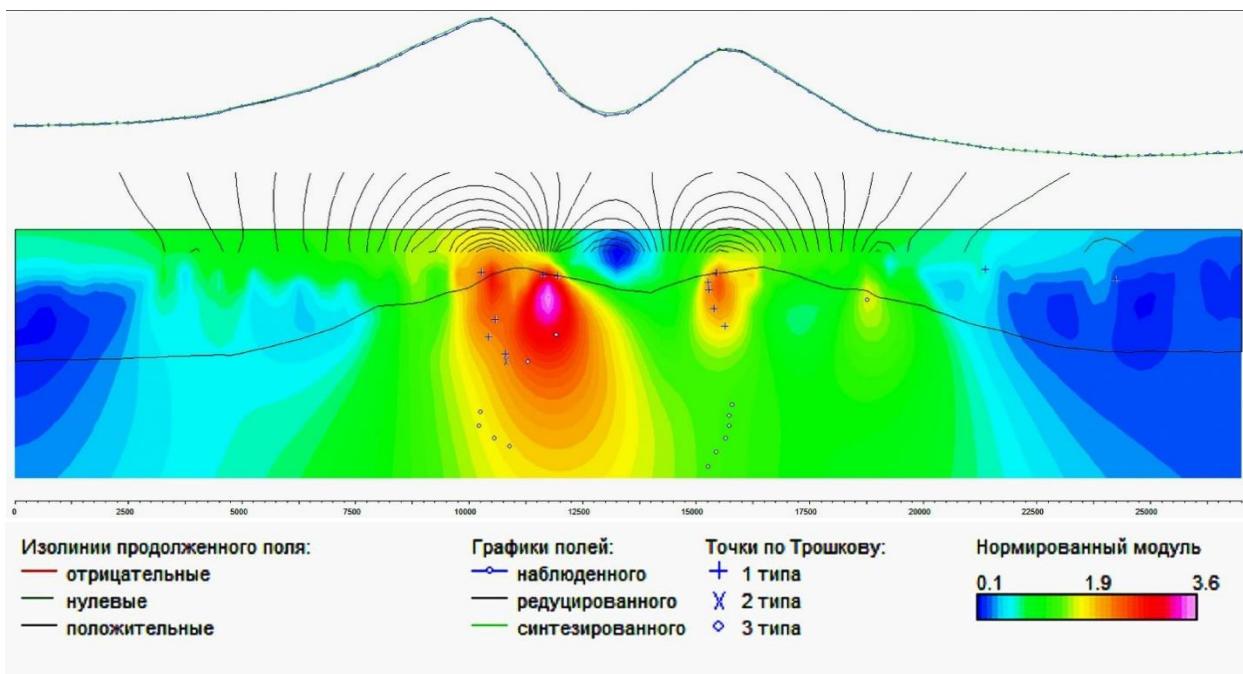


Рис. 25. Интерпретация результатов гидромагнитной съемки над подводным вулканическим массивом Эдельштейна методом особых точек (по Ю. И. Блоху)

В данном случае дополнительно использовался способ нормированных функций, предложенный В. М. Березкиным и теоретически обоснованный В. Н. Страховым. Осуществляется продолжение вниз двух компонент магнитного поля (горизонтальной X и вертикальной Z), на нескольких уровнях вычисляется модуль магнитного поля, после чего полученная функция нормируется, то есть в каждой из точек делится на среднее ее значение на данном уровне.

Эти операции проводятся не на больших глубинах, в том числе и в области, занятой источниками, куда невозможно осуществить аналитическое продолжение в его строгом понимании. Выражение для нормированного модуля магнитного поля имеет следующий вид:

$$T_n(x, z) = \sqrt{X^2(x, z) + Z^2(x, z)} / \frac{1}{M} \sum_1^M \sqrt{X^2(x, z) + Z^2(x, z)}, \quad (12)$$

где M – число точек наблюдений на интерпретационном профиле.

Конкретная геологическая идентификация локализованных особенностей должна опираться на априорную информацию, но знание местоположения и типа особых точек значительно упрощает работу интерпретатора, особенно на ранних стадиях работы с геофизическими материалами. Для однозначного определения местоположения и типа особенностей необходимо знать абсолютно точное, с бесконечным числом значащих цифр интерпретируемое поле в бесконечном числе точек. На практике подобной точности достичь невозможно, поэтому важнейшее значение приобретают вопросы устойчивости локализации особенностей. При локализации особых точек неустойчивость может приводить не только к погрешностям в определении их местоположения, но и к изменению типа.

Рассмотрим пример: исходный объект представляет собой 2D прямоугольную призму (рис. 26). Если поверхность измерений аномального поля отвечает небольшой глубине ее залегания (помеченной на рисунке цифрой 1), то достаточно устойчиво локализуются особенности на верхней кромке, являющиеся для гравитационного поля степенно-логарифмическими, а для магнитного – логарифмическими точками ветвления (также отмеченными цифрами 1).

Если поверхность измерений отвечает большей глубине залегания призмы (помеченной на рисунке цифрой 2), то локализуются особенности на уровне центра масс, отвечающие краям эквивалентной пластинки и обозначенные цифрой 2. Для гравитационного поля они являются логарифмическими точками ветвления, а для магнитного – полюсами первого порядка.

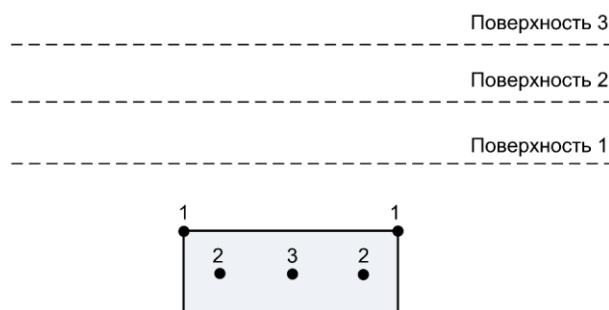


Рис. 26. Изменение местоположения и типа локализуемых особых точек в зависимости от глубины залегания источника (по Ю. И. Блоху)

Наконец, с поверхности, помеченной цифрой 3, для которой глубина залегания объекта сопоставима с его видимой мощностью, устойчиво локализуется лишь точка в центре масс (обозначенная на рисунке цифрой 3). Для гравитационного поля это полюс первого порядка, а для магнитного – полюс второго порядка.

3.3. Оценка интегральных характеристик

Впервые метод определения интегральных характеристик изолированных возмущающих тел (суммарной массы, координат центра тяжести и т.д.) по гравитационным аномалиям был предложен Г. А. Гамбурцевым. Затем метод развивался и обобщался многими учеными – А. А. Заморевым, В. К. Ивановым, А. П. Казанским, К. Ф. Тяпкиным, Д. С. Миковым, В. Н. Страховым, Е. Г. Булахом, П. И. Балком и др.

Существует система параметров (гармонические моменты объектов), определяемая по полю единственным образом. Это не противоречит установленным фактам отсутствия единственности решения обратных задач, т.к. по этим параметрам в общем случае невозможно построить единственное решение. Однако определение гармонических моментов помогает значительно сократить область неопределенности, словно создать каркас искомого решения.

Гармоническим моментом масс с плотностью $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$, сосредоточенных в объеме V , называется интеграл вида:

$$L_n = \int_V \sigma(\xi, \eta, \zeta) D_n(\xi, \eta, \zeta) d\nu, \quad (13)$$

где $D_n(\xi, \eta, \zeta)$ – гармонический, т.е. удовлетворяющий уравнению Лапласа полином степени n . Аналогичное выражение можно записать и для намагниченных объектов. Гармонические моменты взаимно однозначно связаны с коэффициентами разложения поля в ряд по сферическим функциям. В двумерном случае они связаны с коэффициентами разложения поля в ряд Лорана. При $n = 0$, $D_n(\xi, \eta, \zeta) = 1$ получим гармонический момент нулевого порядка:

$$L_0 = \int_V \sigma(\xi, \eta, \zeta) d\nu = M, \quad (14)$$

определяющий суммарную массу тела. При $n = 1$, $D_n(\xi, \eta, \zeta) = \xi$ получим гармонический момент первого порядка:

$$L_1 = \int_V \sigma(\xi, \eta, \zeta) \xi d\nu = \xi_0 M, \quad (15)$$

представляющий собой произведение координаты центра тяжести ξ_0 на назначение его суммарной массы.

Аномальные поля и системы комплексных гармонических моментов связаны взаимно однозначным соответствием. Устойчивость определения гармонических моментов по полю различна. Наибольший вклад в аномальное поле вносят нулевые моменты, следовательно, они определяются по полю наиболее устойчиво. С ростом номера n устойчивость определения гармонических моментов по полю уменьшается.

Параметры двухмерных объектов по гравитационной аномалии V_z через гармонические моменты выражаются следующим образом:

$$\lambda = 1/2\pi G \int_{-\infty}^{\infty} V_z dx, \quad (16)$$

$$\xi_0 = 1/2\pi G \lambda \int_{-\infty}^{\infty} x V_z dx, \quad (17)$$

$$\zeta_0 = 1/2\pi G \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 V_{zz} - x V_z) dx, \quad (18)$$

где λ – линейная масса, S – площадь фигуры, ограниченной сверху кривой V_z , а снизу осью абсцисс ОХ (рис. 27).

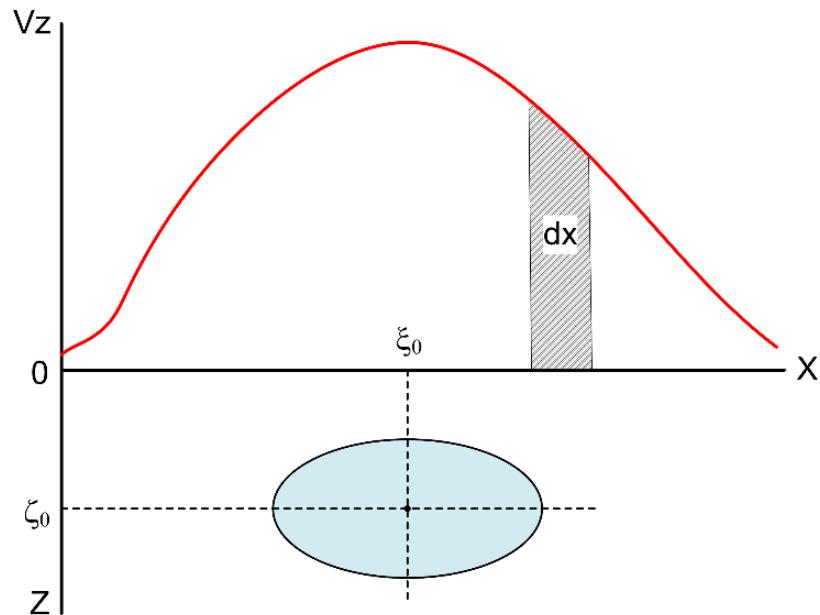


Рис. 27. Схема определения параметров 2D возмущающего объекта по аномалии силы тяжести V_z : dx – элемент разбиения при интегрировании

Созданы различные модификации интегральных методов, предназначенных для определения параметров 3D гравитирующих и магнитовозмущающих

объектов. Как очевидно, основные сложности в реализации этих методов представляет вычисление интегралов в бесконечных пределах. В 2005 г. автором учебного пособия была разработана модификация интегрального метода, использующая сеточные модели источников поля и адаптивный алгоритм вычисления двойных несобственных интегралов 1-го рода от сравнительно медленно убывающих функций, базирующийся на методе Монте-Карло. Данная модификация была реализована в компьютерной программе INTEGRAL.

Общие представления о точности и помехозащенности интегральных методов количественной интерпретации позволяют получить результаты синтетического примера. В пределах участка размером 50×50 км на криволинейной поверхности с перепадом высот от 164 до 367 м было рассчитано поле Δg , обусловленное тремя сферами (аномалии № 1, 2, 3). Значения Δg были осложнены случайной помехой, распределенной по закону Гаусса с дисперсией $D = 0.25$ мГал, а также нелинейным региональным фоном интенсивностью до 3.33 мГал.

Таблица 2

Результаты тестирования программы INTEGRAL

Дан- ные	Название пара- метра	Значение параметра и относительная погрешность его определения					
		Аномалия № 1		Аномалия № 2		Аномалия № 3	
		Значе- ние	Погреш- ность, %	Значе- ние	Погреш- ность, %	Значе- ние	Погреш- ность, %
Модель	Масса M , $\times 10^9$ т	1.26	-	6.70	-	26.79	-
	x_u , км	10	-	20	-	35	-
	y_u , км	40	-	20	-	30	-
	z_u , км	4	-	5	-	10	-
Тест	Масса M , $\times 10^9$ т	1.22	3.2	7.90	17.9	12.39	53.8
	x_u , км	10.59	5.9	21.67	8.4	37.50	7.1
	y_u , км	40.29	0.7	20.32	1.6	30.58	1.9
	z_u , км	4.25	6.3	5.31	6.2	8.91	10.9

Примечание: x_u , y_u , z_u – координаты центра тяжести сферы.

Программа INTEGRAL применялась при интерпретации данных гравиметрической и магнитной съемок по территории Юрзано-Сылвенской депрессии. При интерпретации поля силы тяжести данной территории удалось разбраковать аномалии, связанные с глубинными магматическими телами и с зонами разуплотнения (уплотнения) горных пород в осадочном чехле (рис. 28). Источники крупных магнитных аномалий все без исключения локализуются в пределах фундамента и, предположительно, являются интрузивными телами основного или ультраосновного состава. Одно из этих тел имеет суммарную намагниченность, направленную против современного магнитного поля Земли.

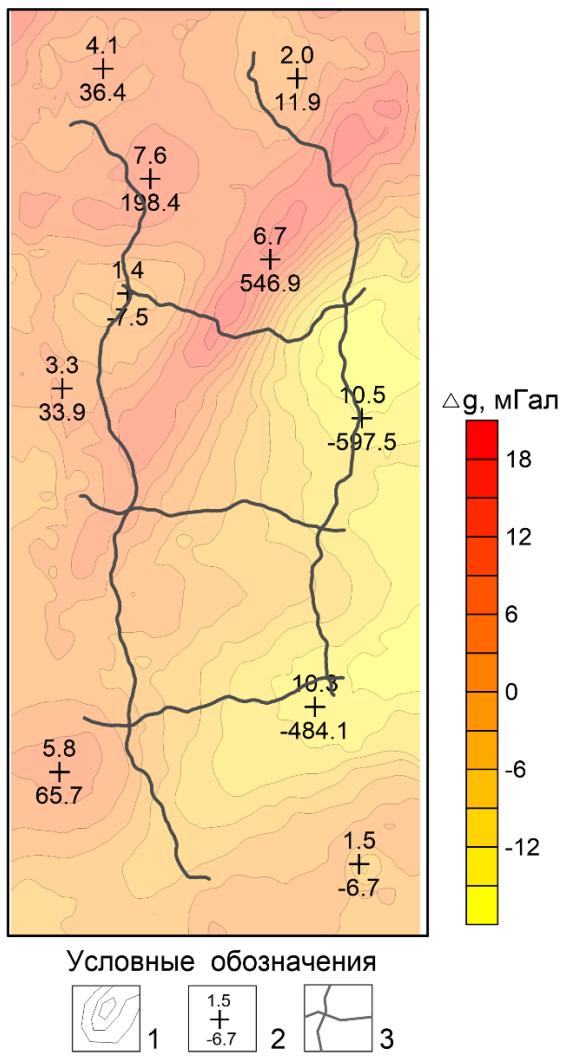


Рис. 28. Результаты интерпретации гравитационного поля Юрзано-Сылвинской депрессии интегральным методом: 1 – изоаномалии поля; 2 – центр тяжести источника (вверху – значение $z_{ц}$, км, внизу – $M, \times 10^9$ т); 3 – сейсмические профили

3.4. Построение эквивалентных семейств решений

Математический аппарат этой группы методов базируется на теории функций комплексных переменных и впервые предложен А. В. Цирульским. На первом этапе наблюденное поле аппроксимируется полем некоторого количества сингулярных источников из нижней полуплоскости. При этом никаких предположений о количестве источников и их плотности не используется. На втором этапе близлежащие сингулярные источники предполагаются принадлежащими полю одного однородного объекта, причем могут быть опробованы различные варианты объединения. Для каждого «объединения» сингулярных источников, в зависимости от решаемой задачи, может быть построено как эквивалентное семейство однородных ограниченных объектов, так и эквивалентное семейство границ раздела (рис. 29).

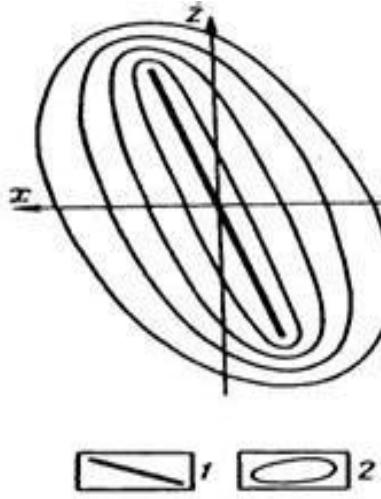


Рис. 29. Сингулярный источник – материальный отрезок (1) и семейство эквивалентных ему областей (2) с различными значениями постоянной плотности

Задача, которую при этом необходимо решить, состоит в следующем: по заданной в явном виде какой-либо из производных потенциала требуется найти эквивалентное семейство решений, т.е. решить теоретическую обратную задачу (ТОЗ). В качестве исходного параметра в 2D-варианте используется аналог логарифмического потенциала – комплексная напряженность поля $V(z)$:

$$V(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\sigma(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\zeta - z}. \quad (19)$$

В окрестностях бесконечно удаленной точки $V(z)$ раскладывается в ряд $V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}$, где $c_n = \frac{1}{\pi} \iint_D \zeta^n \sigma(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$ называются комплексными моментами источников. Носитель масс ограничен кривой, заданной параметрическим уравнением $L(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$.

Использование в качестве аппроксимационных классов потенциалов, для которых ТОЗ разрешима в конечном виде, приводит к существенному упрощению второго этапа интерпретации, поскольку в этих случаях ТОЗ сводится к решению конечной системы трансцендентных уравнений. Для используемого в упомянутом методе аппроксимационного класса логарифмических потенциалов $V(z)$ его величина определяется формулой:

$$V(z) = \sum_{k=1}^n A_k [\ln(z - a_k) - \ln(z - b_k)]. \quad (20)$$

Отметим, что каждый член в сумме есть комплексная напряженность сингулярного источника – материального отрезка с постоянной линейной плотностью. В случае нахождения семейства ограниченных областей искомая функция $z(t)$

имеет вид $z(t) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sigma} [\ln(z - c_k t) - \ln(z - d_k t)]$, причем $2N$ определяющих ее параметров находятся из следующей системы $2N$ -уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sigma} [\ln(1 - c_k c_m) - \ln(1 - d_k c_m)] = a_m \\ \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sigma} [\ln(1 - c_k c_m) - \ln(1 - d_k c_m)] = b_m \end{cases}. \quad (21)$$

Плотность σ входит в эту систему в качестве параметра. Система при каждом фиксированном σ может иметь не более одного решения. Этот факт является следствием теоремы единственности при заданной постоянной плотности. Решение системы начинается при достаточно малом значении плотности σ , а выбор нулевого приближения основан на следующем теоретическом результате, являющемся следствием теоремы В. К. Иванова: во всяком эквивалентном однородном семействе области, соответствующие достаточно малым значениям плотности, сколь угодно мало отличаются от кругов. Далее реализована следующая схема: решение системы находится по методу Ньютона, который обладает квадратичной сходимостью, но требует хорошего нулевого приближения. В случае нахождения семейства границ раздела необходимо также задавать скачок плотности на границе и ее асимптоты.

Метод построения эквивалентных семейств решений может также применяться при моделировании магнитного разреза. Рассмотрим пример такого моделирования по участку профиля «Кварц» протяженностью более 1000 км (от 48 до 68° в.д.), пересекающему Северный Урал, которое было выполнено В. В. Колмогоровой, Н. В. Федоровой. В результате аппроксимации магнитных аномалий найдены сингулярные источники. Для локальных источников, расположенных в верхней части разреза до глубины 20 км, геометрия контуров рассчитана для намагниченности 3 А/м. Для источников, расположенных глубже 20 км, построена эквивалентная граница раздела: скачок намагниченности составляет 3 А/м, направление вектора намагниченности совпадает с современным геомагнитным полем. Средняя глубина до поверхности раздела слоев (20 км) задана в соответствии с результатами сейсмических исследований. Главные носители намагниченности глубинных пород – минералы титаномагнетитового ряда и прежде всего магнетит. Поэтому нижняя граница магнитоактивного слоя литосферы может быть ограничена по изотерме Кюри 580°C . По результатам аппроксимации магнитного поля не выделены аномалии, которые могли бы соответствовать рельефу границы Мохо. Скорее всего, породы вблизи подошвы земной коры имеют слабые магнитные свойства, поэтому намагниченный нижний слой был ограничен снизу горизонтальной плоскостью, расположенной на глубине 35 км (рис. 30).

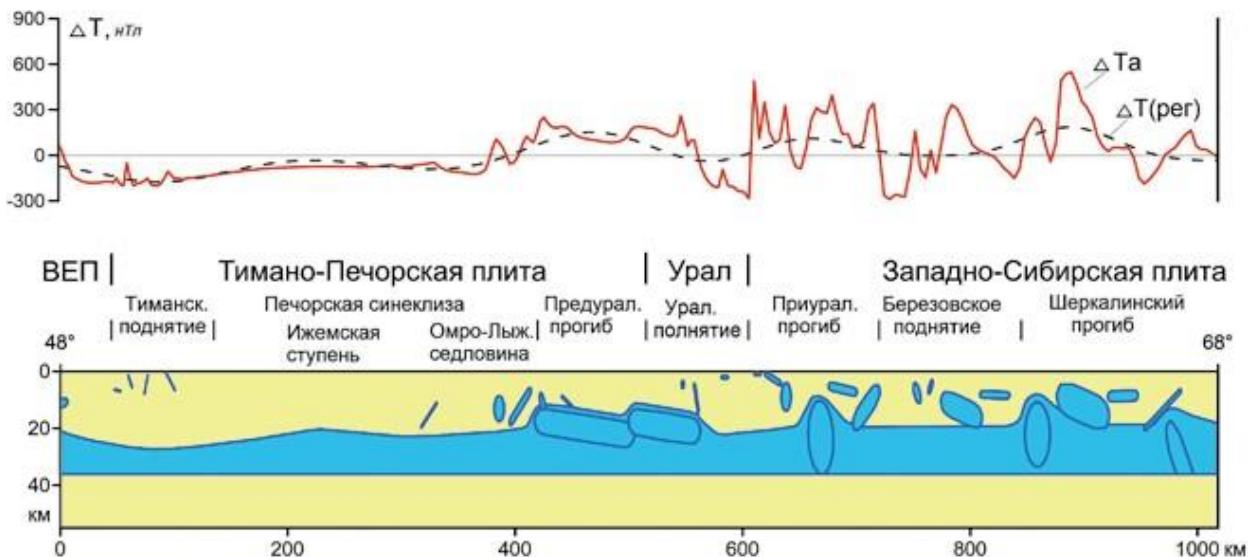


Рис. 30. Геомагнитная модель участка профиля «Кварц» (по В. В. Колмогоровой, Н. В. Федоровой): графики аномального магнитного поля ΔT_a , его региональной составляющей $\Delta T(\text{рег})$ и модель распределения намагниченности в земной коре

3.5. Метод подбора

Технологии решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки методом автоматизированного подбора начали интенсивно разрабатываться и внедряться в практику геофизических исследований с 70-х гг. XX в. Это было обусловлено развитием вычислительной техники и совершенствованием теории интерпретации геопотенциальных полей.

Широко применяемым методом интерпретации гравитационных и магнитных аномалий является метод подбора, заключающийся в построении интерпретационной модели, удовлетворяющей априорной информации и создающей поле, которое в некотором смысле является минимально отличающимся от наблюденного. Применение метода подбора связано с выбором критерия качества подбора наблюденного поля полем модели из заданного класса и разработкой алгоритма оптимизации модели в соответствии с выбранным критерием качества подбора.

В рамках метода подбора интерпретатор может учесть все априорные сведения о геологическом строении изучаемого региона. Методом подбора пользуются тогда, когда исследователь может составить модель-гипотезу геологического строения и указать приближенное значение параметров, которые характеризуют эту модель. Таким образом, фиксируется вектор $\mathbf{P} = \{p_x, p_z, \dots, p_m\}$. Иногда интерпретатор имеет возможность определить область изменения $p_i^H \leq p_i \leq p_i^B$, т.е. установить нижнюю и верхнюю границы каждого параметра стартовой интерпретационной модели.

Построенная так совокупность \mathbf{P} принадлежит определенному множеству M ($P \in M$). Этим фиксируется класс возможных решений. По численным значениям вектора \mathbf{P} может быть решена прямая задача $V_{meop} = L(\mathbf{P})$. Интерпретатор сопоставляет теоретическое и наблюденное поля, добиваясь минимального расхождения между ними. Для этого необходимо изменять значения компонент вектора \mathbf{P} .

В качестве решения обратной задачи берут такой элемент \mathbf{P} ($\mathbf{P} \in M$), для которого невязка полей достигает минимума $\rho(L(\mathbf{P}), V_{набл.}) = \inf_{P \in M} (L(\mathbf{P}), V_{набл.})$, что соответствует условию:

$$\|V_{набл.} - V_{meop}\| \rightarrow \min . \quad (22)$$

На основании теоремы А. Н. Тихонова справедливо следующее. Пусть установлено, что обратная задача удовлетворяет критерию единственности решения. Если при этом множество M компактно, то обратный оператор $\mathbf{P} = L^{-1}(V)$ непрерывно зависит от исходного поля. Для решения задач множеству M выбирается таким, чтобы элементы \mathbf{P} зависели от конечного числа параметров, изменяющихся в ограниченных пределах. В этом случае M будет замкнутым конечномерным компактным пространством.

Практически всегда вместо точного значения наблюденного поля $V_{набл.}$ мы знаем приближенное его значение $V_{набл.}^\delta$, и для них можно установить $\rho(V_{набл.}, V_{набл.}^\delta) \leq \delta$. В этом случае мы имеем приближенное решение обратной задачи, если элементы отыскиваются на компакте M , а исходное поле принадлежит множеству $L(M)$. Сейчас мы не располагаем какими-либо эффективными критериями, которые позволяли бы установить, что $V_{набл.}^\delta$ принадлежит множеству $L(M)$. Иногда это предполагают априори известным, но часто значение $V_{набл.}^\delta$ может не принадлежать множеству $L(M)$.

Например, интерпретационная модель представляет собой совокупность конечного числа призматических тел. Параметры $\mathbf{P} \in M$ устанавливают множество $L(M)$. Вполне очевидно, что зафиксированное наблюденное поле $V_{набл.}^\delta$ может не принадлежать множеству $L(M)$. Как бы ни варьировали параметры призматической модели, можно не добиться полного совпадения наблюденного и вычисленного полей в результате решения прямой задачи гравиразведки (рис. 31). Для устранения возникших затруднений, когда исходные данные содержат погрешности, приходят к понятию квазирешения обратной задачи.

Квазирешением называется такой элемент $\mathbf{P} \in M$ при заданном $V_{набл.}^\delta$, для которого $\|V_{набл.} - V_{meop}\|$ достигает минимума на множестве M . Если M – компакт, то квазирешение существует для любого $V_{набл.}^\delta$. Если $V_{набл.}^\delta \in L(M)$, то квазирешение совпадает с точным решением.

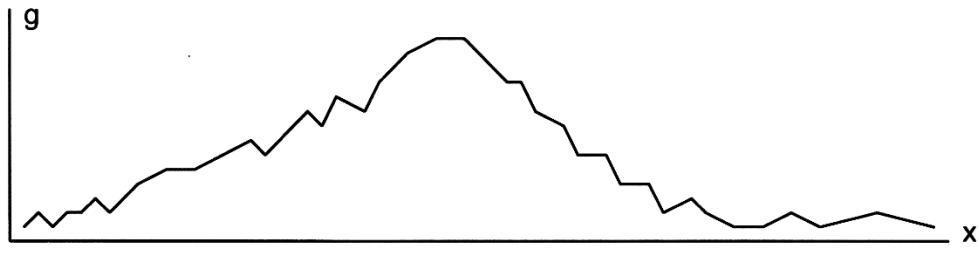


Рис. 31. Гравитационная аномалия, решения обратной задачи для которой в классе шаров не существует (по Ю. И. Блоху)

Метод подбора используют в сложных физико-геологических условиях при интерференционном характере аномального поля, обусловленного наличием многих геологических тел и/или границ. На начальном этапе интерпретации необходимо построить модель-гипотезу геологического строения и наделить ее предполагаемыми значениями плотности. В процессе решения обратной задачи осуществляется уточнение численных значений параметров этой модели. Критерием подбора является достижение требуемой степени близости наблюденного и вычисленного полей (22). Нужно пояснить, что любая реальная геологическая ситуация намного сложнее, чем наше представление о ней. Каждая модель только отражает степень изученности территории и является некоторым приближением к реальной геологической среде.

Для решения обратной задачи мы располагаем двумя типами исходной информации: наличием наблюденных аномалий поля силы тяжести, обусловленных неоднородностями геологического строения, и начальной моделью геологического строения. Зафиксируем в наблюдаемом поле n точек с координатами (x_i, y_i) и подбор значений поля в дальнейшем будем производить в этих зафиксированных точках.

Модель всегда формируется так, чтобы гравитационный эффект от нее можно было записать в аналитическом виде, т.е. она должна быть представлена набором тел правильной геометрической формы. Если геологические тела аппроксимировать набором уступов, ограниченных по простираннию, то самую сложную схему строения можно собрать из таких элементарных объектов.

Таким образом, с одной стороны, мы имеем наблюденную аномалию $V_{\text{набл}}(x_i, y_i)$, с другой – теоретическую $V_{\text{теор}}(p_1, p_2, \dots, p_m, x_i, y_i)$. Здесь под функцией V можно понимать любой элемент (составляющую) гравитационного поля (Δg , V_{xz} и др.). Если интерпретационная модель включает в себя m элементарных тел, то результатом решения прямой задачи будет теоретическая аномалия:

$$V_{meop}(x, y) = \sum_{j=1}^m V(\mathbf{P}_j, x, y). \quad (23)$$

В технологии автоматизированного подбора, разработанной под руководством Е. Г. Булаха, геологическое строение участка аппроксимируется набором прямых уступов, ограниченных по простиранию. Параметры, которые определяют местоположение и размеры каждого уступа, следующие: σ – избыточная плотность; h и H – глубины до верхней и нижней граней; l_1 и l_2 – параметры, характеризующие размеры уступа по простиранию; d – положение вертикальной грани относительно выбранного начала координат (рис. 32).

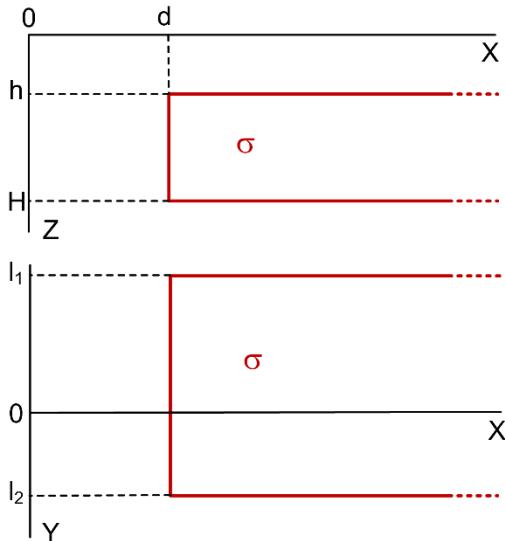


Рис. 32. Параметры прямого уступа бесконечного по оси ОХ

Совокупность векторов $\mathbf{P}_j = (\sigma_j, h_j, H_j, l_1^j, l_2^j, d_j)$ характеризует геоплотностную модель участка исследований. Требуется найти значения параметров \mathbf{P}_j , при которых функция $V_{\text{теор}}$ наилучшим образом совпадала бы с $V_{\text{набл}}$.

Зафиксируем n точек и каждому наблюденному значению поля поставим в соответствие теоретическую функцию от построенной модели. Таким образом, получаем систему уравнений

$$V_{meop}^i(\mathbf{P}) = V_{\text{набл}}^i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

Левые части этой системы уравнений зависят от аппроксимации геоплотностных неоднородностей системой прямых уступов. Она обычно является приближенной и точного соответствия между левой и правой частями не обеспечивает. Правая часть – свободные члены системы – есть результат измерений, в которых присутствует случайная погрешность. Можно считать, что измерения являются равноточными, т.е. случайные ошибки распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием.

В общем случае не существует такой совокупности векторов $\sum_{j=1}^m \mathbf{P}_j$, которые при подстановке в систему уравнений обращали бы уравнения в тождество. Для любой совокупности \mathbf{P} устанавливаются величины $\varepsilon_i = V_{\text{набл}}^i - V_{\text{meop}}^i(\mathbf{P})$, которые представляют собой остаточные погрешности. Как правило, они выбираются со-поставимыми с точностью определения аномалий Буге для использующихся гравиметрических данных.

Построим функционал $F = \sum_{i=1}^n [V_{\text{набл}}(x_i, y_i) - V_{\text{meop}}(\mathbf{P}, (x_i, y_i))]^2$, который зависит только от \mathbf{P} , так как точки задания поля с координатами (x_i, y_i) зафиксированы: $F = F(\mathbf{P})$.

Задача интерпретатора состоит в том, чтобы выбрать такой вектор \mathbf{P} , для которого функционал F принимал бы минимальное значение. Таким образом, обратная задача гравиразведки сводится к экстремальной задаче для функции многих переменных.

Построенный на основании априорной геолого-геофизической информации вектор \mathbf{P} является конечномерным, а пространство возможных решений – ограниченным. При этом сами ограничивающие условия могут и не включаться в условие задачи. Следовательно, вектор параметров \mathbf{P} принадлежит компактному множеству, т.е. устойчивость решения есть следствие теоремы А. Н. Тихонова.

Допустим, что известны начальные значения геологических параметров $\mathbf{P}^0 = \{p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0\}$. Разложим функцию $V_{\text{meop}}(\mathbf{P})$ в ряд Тейлора и ограничимся только линейной частью. Тогда $V_{\text{meop}}(\mathbf{P}) = V_{\text{meop}}(\mathbf{P}^0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial p_j} V_{\text{meop}}(\mathbf{P}) \Big|_{P=P^0} (p_j - p_j^0)$. Введем дополнительные ограничения. Они будут играть роль параметров регуляризации по Тихонову. Потребуем, чтобы при минимизации искомые параметры не столь сильно отличались от своих начальных значений. Для этого в функционал F включим еще член $\sum_{j=1}^m \mu_j (p_j - p_j^0)^2$, где μ_j – коэффициенты, играющие роль весовой функции. Окончательной минимизации подлежит функционал

$$F = \sum_{i=1}^n [V_{\text{набл}}(x_i, y_i) - V_{\text{meop}}(\mathbf{P}, (x_i, y_i))]^2 + \mu_j (p_j - p_j^0)^2. \quad (25)$$

Он зависит не только от параметров p_j , но и от параметров регуляризации μ_j . Таким образом, решение обратной задачи гравиразведки методом подбора сводится к минимизации функционала (25).

Одним из методов ее решения является метод наискорейшего градиентного спуска. Для минимизации функционала Е. Г. Булах использует градиентный метод скорейшего спуска. Вычисляется вектор $\text{grad } F(\mathbf{P}) = \{F'_{p_1}, F'_{p_2}, \dots, F'_{p_m}\}$. Известно, что в направлении вектора-градиента функция F возрастает, значит, в противоположном направлении она убывает. Основные расчеты выполняются по формуле:

$$p_j^{k+1} = p_j^k - \lambda_k (F'_{p_j})_k, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (26)$$

где k – номер итерации. Шаг спуска λ_k определяется, исходя из условия $\arg \min F = F(\mathbf{P} - \lambda \text{grad}(\mathbf{P}))$.

Суть метода подбора состоит в последовательном построении различных геоплотностных моделей (нулевого, первого, второго и т.д. приближения к реальной ситуации), расчета с помощью ЭВМ гравитационного эффекта $V_{meop}(\mathbf{P})$ от каждой модели с помощью решения прямой задачи, сопоставлении полученных значений теоретического поля $V_{meop}(\mathbf{P})$ с наблюденным полем $V_{\text{набл}}$ с последующим изменением параметров модели \mathbf{P} в автоматическом режиме. Процесс завершается после достижение требуемого значения невязки полей ε или в случае выполнения заданного количества итераций минимизации функционала F . Также процесс может быть остановлен в случае резкого замедления убывания значений F с ростом итераций.

На рис. 33а приведены исходные данные синтетического примера, а на рис. 33б – результаты подбора формы контактной поверхности. Как очевидно, морфология исходной и подобранной границы раздела плотностей весьма близки, а использованный алгоритм позволил получить вполне достоверное решение обратной задачи.

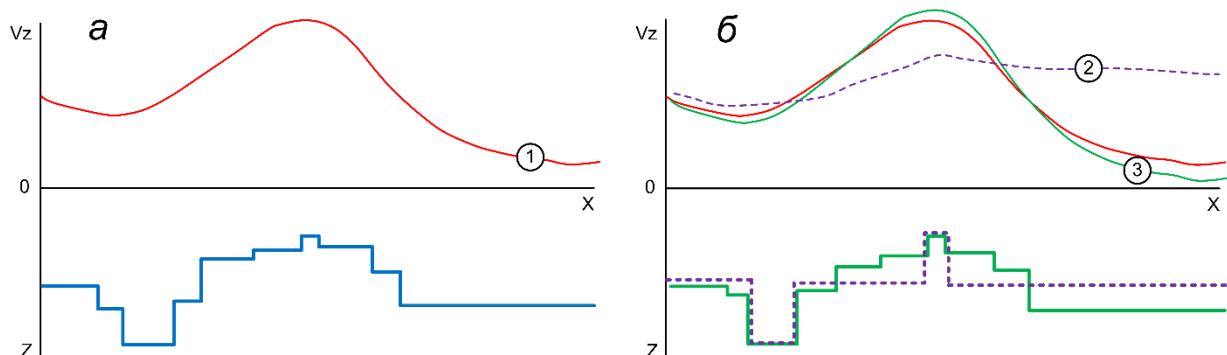


Рис. 33. Подбор формы контактной поверхности (по Е. Г. Булаху):
а – исходная модель; б – модель начального приближения
и подобранная модель: 1 – поле исходной модели; 2 – поле модели
начального приближения; 3 – поле подобранной модели

Представляющие поисковый интерес геологические результаты были получены при моделировании соленосной толщи в районе купола Сартсай в Прикаспийской впадине. Было установлено, что в широтном сечении западная часть купола на глубине около 2 км нависает в виде козырька над подстилающими породами. Такой элемент структуры может рассматриваться как перспективный на обнаружение залежей углеводородов (рис. 34).

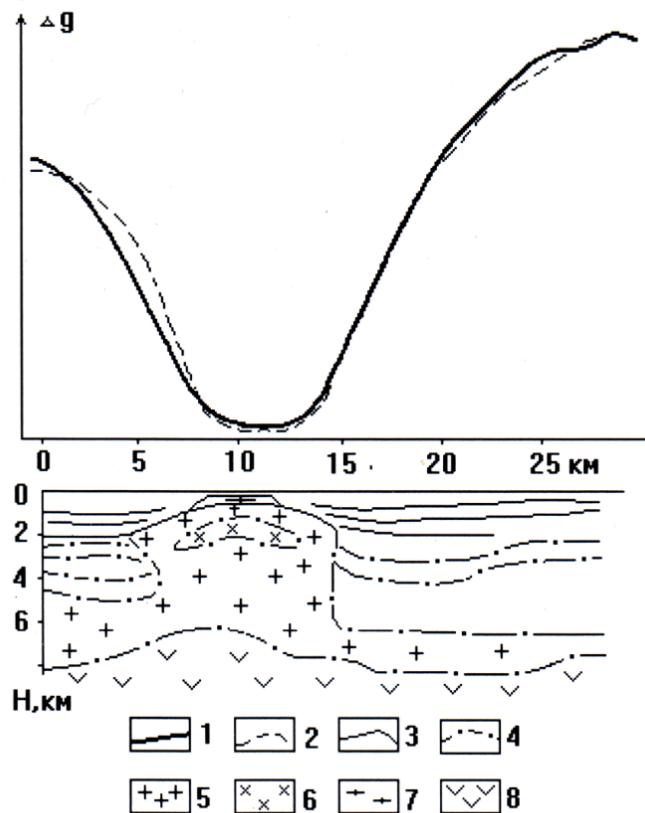


Рис. 34. Геологический разрез соляного купола Сартсай, построенный с помощью автоматизированного подбора (по Е. Г. Булаху и др.):

- 1 – интерпретируемая аномалия силы тяжести; 2 – подобранная аномалия силы тяжести; 3 – плотностные границы, закрепленные по данным сейсморазведки; 4 – подобранные плотностные границы; 5 – отложения соленосного комплекса; 6 – плотные включения; 7 – кепрок; 8 – отложения подсолевой толщи

Разработано большое количество компьютерных технологий, реализующих метод автоматизированного подбора, в т.ч. по комплексу гравиметрических, сейсмических и др. данных. Создание математической модели системного анализа геолого-геофизических данных представляет собой следующий этап развития интерпретационного обеспечения и основу для создания технологии интегрированной интерпретации. Одним из примеров интегрированной интерпретации является алгоритм, реализованный в программном модуле EvDynInversion (авторы – А. И. Кобрунов и др.). Он представляет собой итерационную схему решения обратной задачи с применением уравнений движения материи в качестве составляющей критерия оптимальности.

На первом этапе выполняется компенсация невязки за счёт сдвиговых деформаций. На втором этапе невязка компенсируется за счёт дивергенции. Модели, полученные в результате работы модуля, удовлетворяют наблюденным потенциальным полям и соответствуют заложенным в процесс решения геодинамическим характеристикам. При итерационном процессе в каждом приближении к решению сохраняются основные черты тектонического строения и распределение плотностных неоднородностей.

На представленной модели (рис. 35) выделены слои, характеризующиеся типичными для исследуемого участка величинами плотностей. Максимум гравитационного поля в интервале пикетов 7500–10000 отображает сближение карбонатных толщ палеозойской системы и выход пород с плотностью 2.70–2.74 г/см³ на дневную поверхность. Региональная составляющая гравитационного поля отражает влияние кристаллического фундамента с плотностью 2.90–2.95 г/см³. Полученное значение невязки 1.8 мГал свидетельствует о достаточной степени близости наблюденного и рассчитанного гравитационных полей и сбалансированности гравитирующих масс.

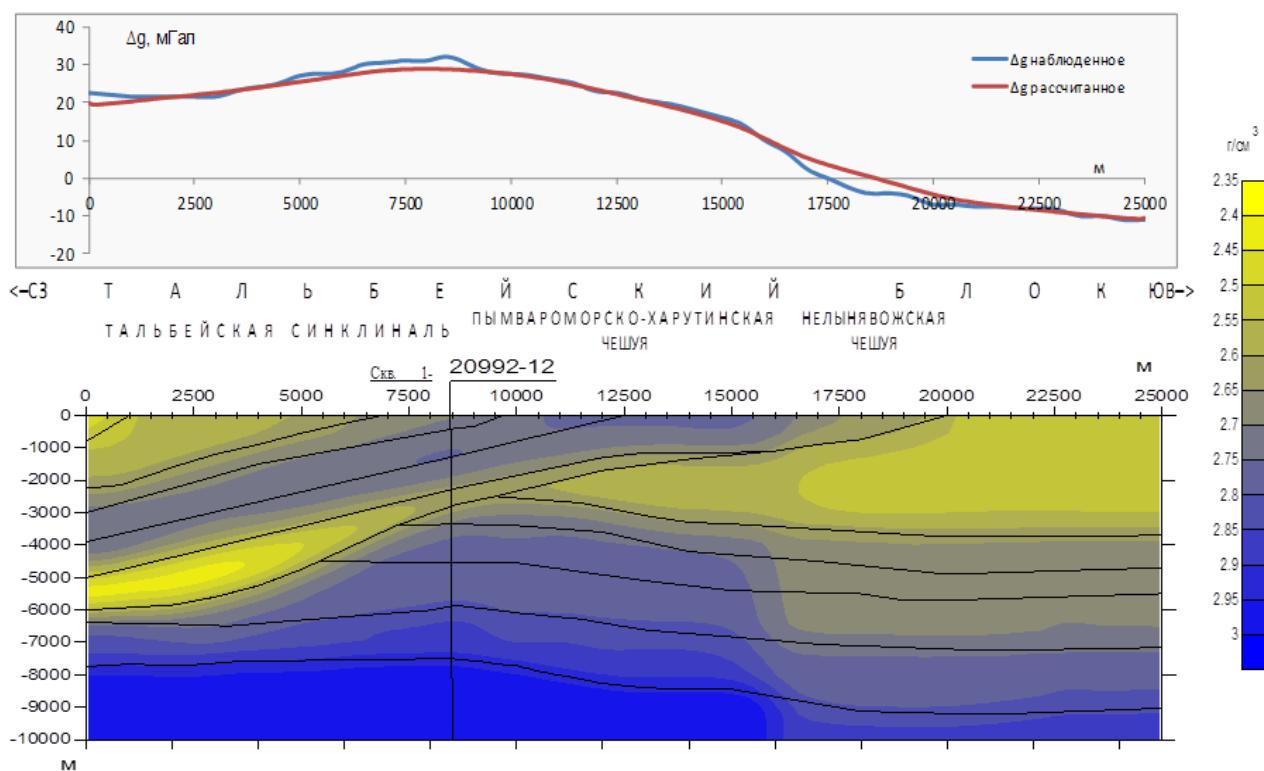


Рис. 35. Результат решения обратной задачи гравиразведки по сейсмическому профилю 20992-07 с использованием эволюционно-динамических представлений о геологической среде (по А. И. Кобрунову, С. Г. Куделину, Е. Н. Мотрюк)

В заключении раздела нужно отметить, что «ручной вариант» метода подбора многие годы успешно использовался в процессе количественной интерпретации геофизических аномалий. При этом основным инструментом для решения прямых задач от моделируемых объектов являлись различные палетки. До настоящего времени применяются компьютерные технологии неформализованного подбора, реализующие диалоговый режим работы с визуализацией интерпретационной модели, а также графиков наблюденного и теоретического полей. Корректировка параметров интерпретационной модели осуществляется непосредственно геофизиком-интерпретатором, от опыта и интуиции которого во многом зависит достоверность конечного результата. Как правило, методом неформализованного подбора решаются сравнительно простые задачи, имеющие 2D- и 2.5D-размерность.

4. МОНТАЖНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

4.1. Моделирование источников потенциальных полей в классе конфигурационного распределения масс

Метод конечных элементов (МКЭ) – численный метод, использующийся для решения широкого круга задач механики твердого тела, теплообмена, гидродинамики и др. Суть МКЭ заключается в приближенной замене континуальной задачи математической физики на дискретную, что позволяет более полно представить себе весь процесс ее решения, избежать многих возможных ошибок и объективно оценить получаемые результаты. Однако В. Н. Страховым отмечалось, что «в развитии теории и практики интерпретации потенциальных полей в СССР и России (да и во всем мире) не было уделено должного внимания использованию конечно-элементного описания изучаемой геологической среды».

Применение МКЭ в гравиразведке базируется на использовании дискретного (сеточного) описания геоплотностной среды, когда объем (носитель) аномалиеобразующих масс представляется в виде объединения некоторого числа элементарных геометрических фигур (к примеру, призм), плотность каждой из которых принимается постоянной.

Наиболее интенсивные исследования по созданию методов решения обратных задач гравиразведки, базирующихся на использовании сеточных моделей среды, проводились в конце 60-х – начале 70-х гг. XX в. Следует отметить, что им предшествовали работы А. А. Юнькова и Е. Г. Булаха. В середине 1970-х гг. с небольшим интервалом по времени выходят работы А. В. Овчаренко и В. Н. Страхова, М. Н. Лапиной, в которых предлагался, по существу, новый метод решения нелинейной обратной задачи в сеточных классах источников поля, названный монтажным. Конструктивно этот принцип был реализован в алгоритме регулируемой направленной кристаллизации (РНК).

В дальнейшем различные аспекты монтажных алгоритмов рассматривались в работах П. И. Балка, Е. Г. Булаха, И. Н. Корчагина, А. С. Долгаля, У. Шеффера.

Сущность монтажного метода составляет неразрывное единство конфигурационного (конечноэлементного) способа описания плотностной среды и специального способа построения приближенного решения в классе таких моделей, не связанного с нелинейными методами оптимизации, использующимися в алгоритмах автоматизированного подбора. Необходимо пояснить, что *регулярным замощением* плоскости называется представление этой плоскости совокупностью правильных замкнутых многоугольников (элементов замощения) ω_α , плотно прилегающих друг к другу по целой стороне; *конфигурационным распределением масс* называется распределение масс постоянной плотности σ по области Ω , являющейся объединением некоторого числа элементов замощения ω_α .

Основные операции в классе конфигурационных распределений масс выполняются с использованием понятий ядра $\mathcal{Y}[\Omega]$, оболочки $O[\Omega]$, внутреннего ядра $\mathcal{Y}_0[\Omega]$ и границы $\Gamma[\Omega]$ конфигурации $\Omega : \mathcal{Y}[\Omega]$ – суть множество элементов $\omega_\alpha \in \Omega$; $O[\Omega]$ – множество всех элементов $\omega_\alpha \notin \mathcal{Y}[\Omega]$, граничащих с элементами ядра $\mathcal{Y}[\Omega]$; $\mathcal{Y}_0[\Omega]$ – множество элементов $\omega_\alpha \in \Omega$, граничащих только с элементами этого же ядра; $\Gamma[\Omega]$ – множество элементов $\mathcal{Y}[\Omega]$, не вошедших в $\mathcal{Y}_0[\Omega]$ (рис. 36).

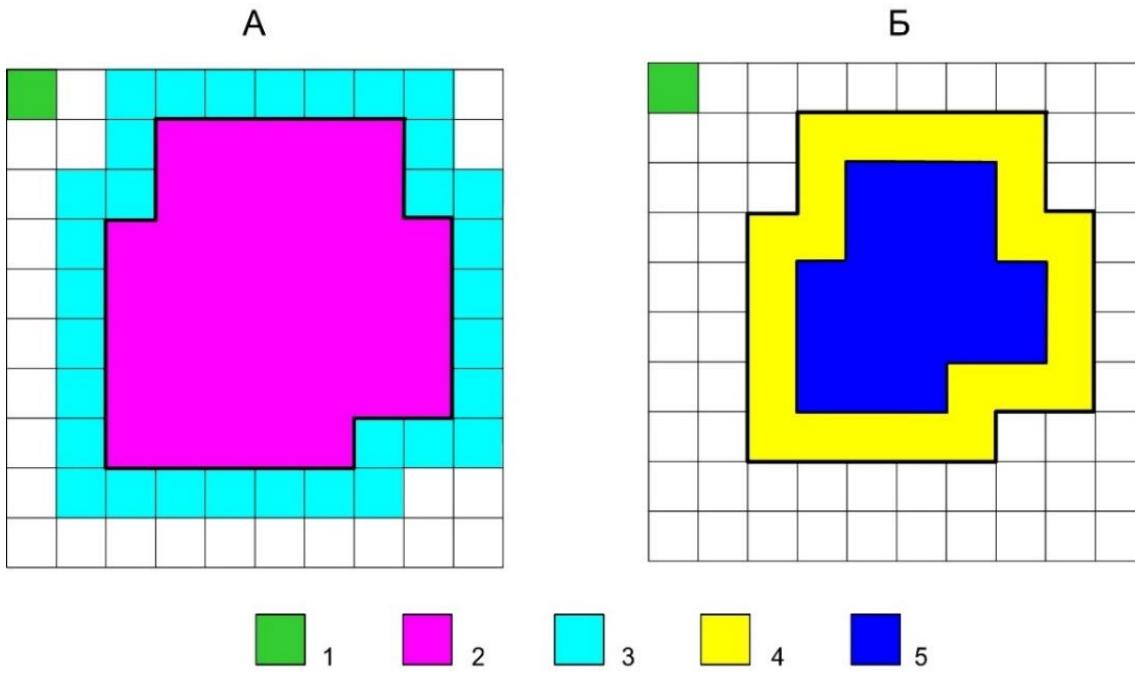


Рис. 36. Графическая иллюстрация основных понятий, используемых в монтажном методе: оболочка $O[\Omega]$ и ядро $\mathcal{Y}[\Omega]$ (А); граница $\Gamma[\Omega]$ и внутренность $B[\Omega]$ двухмерной конфигурации Ω (Б):

1 – отдельный элемент замощения ω_α ; 2–5 – элементы замощения ω_α , принадлежащие: 2 – ядру $\mathcal{Y}[\Omega]$, 3 – оболочке $O[\Omega]$, 4 – границе $\Gamma[\Omega]$, 5 – внутреннему ядру $\mathcal{Y}_0[\Omega]$ конфигурации Ω

Проблема выбора замощения $\Omega = \bigcup \omega_\alpha$ аналогична традиционной проблеме выбора класса и параметрической размерности модели источников поля и также требует компромиссного решения: с одной стороны, увеличение размеров элементов замощения ω_α снижает вычислительные затраты на поиск допустимого решения и повышает его устойчивость; с другой – степень дискретизации геологического пространства должна быть такой, чтобы при оценке допустимого значения невязки подбора поправкой за неадекватность конечноэлементного представления источников можно было пренебречь. Опыт показывает, что общие соображения и интуиция вполне достаточны для выбора приемлемого замощения.

В простейшей постановке ОЗГ для изолированного тела Ω^T известной плотности $\sigma^T > 0$ монтажный принцип решения обратной задачи состоит в том,

чтобы, отправляясь от заданной связной конфигурации Ω^0 , выстроить конечную последовательность $\Omega^0, \Omega^1, \Omega^2 \dots$, имеющую пределом некоторую конфигурацию Ω^* , поле которой при подобранной плотности $\sigma^* \approx \sigma^T$ согласуется с измерениями гравитационного поля Δg_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Поясним, что в монтажных алгоритмах *связность* помогает разделять в геологическом пространстве области, занятые массами с различными значениями физического параметра. *Односвязность* аномалиеобразующих тел предполагает отсутствие в них пустот.

В модификации РНК очередное приближение Ω^n образуется путем внесения в ядро $\mathcal{Y}[\Omega^n]$ какого-то одного элемента из $O[\Omega^{n-1}]$, обеспечивающего наименьшую среднеквадратическую невязку подбора. При переходе от конфигурации Ω^{n-1} к конфигурации Ω^n учитывается основная априорная информация, которой обычно располагает интерпретатор о местоположении, форме и размерах аномалиеобразующих тел.

Используя простейшие логические операции с индексами α элементов замощения $\omega_\alpha \in \Gamma[\Omega]$ можно легко осуществлять эффективный контроль за соблюдением различных априорных ограничений, в том числе: на область, заведомо содержащую источник поля Ω^T и заведомо не содержащую его; на минимально и максимально возможные глубины залегания кровли и подошвы аномалиеобразующего объекта Ω^T ; на вертикальную H_z и горизонтальную H_x мощности объекта Ω^T , а также на степень гладкости поверхности объекта Ω^T и т.д. В частности, при решении 2D обратной задачи требование к выпуклости возмущающего объекта обеспечивается соблюдением простого условия: любая вертикальная и горизонтальная прямая должна пересекать его границу не более двух раз.

Обеспечение условия гладкости в процессе моделирования контролируется по величине максимально допустимого числа элементов замощения ω_α в отдельных фрагментах конфигураций $\Omega^0, \Omega^1, \Omega^2 \dots \Omega^*$. В самом простом случае построение гладкой, геологически содержательной границы сводится к выполнению требования безотростковости носителя масс Ω^n , заключающегося в том, что оболочки $O[\omega_\alpha]$ элементов ω_α границы $\Gamma[\Omega^n]$ должны содержать хотя бы по одному элементу внутреннего ядра $\mathcal{Y}_0[\Omega^n]$ (Балк, 1989, 1993).

Число L элементов замощения, составляющих ядро $\mathcal{Y}[H]$ отростка H , назовем длиной этого отростка. Отношение $\nu(\Omega)$ числа элементов, входящих в оболочку $O[\Omega]$ конфигурации Ω , к числу элементов, входящих в ядро $\mathcal{Y}[\Omega]$, назовем индексом компактности этой конфигурации (рис. 37).

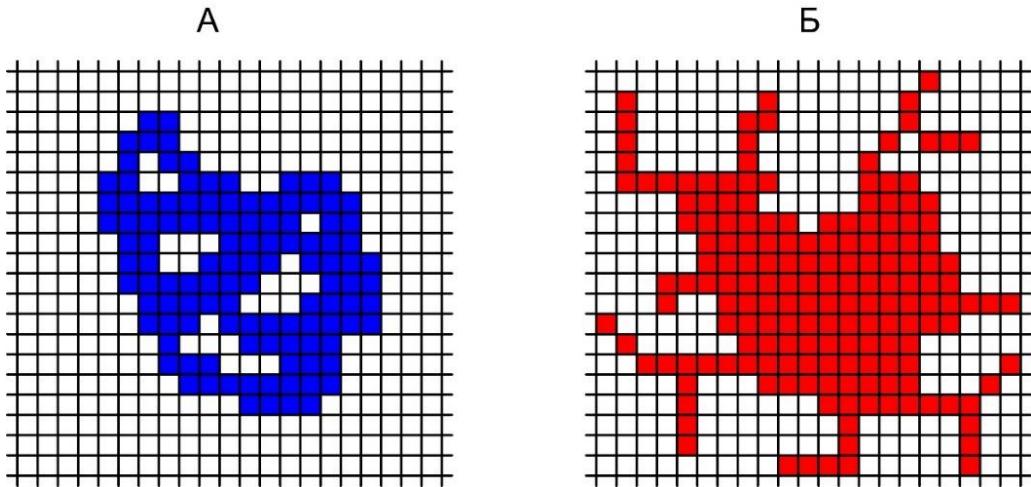


Рис. 37. Топологические особенности конфигураций Ω : А – неодносвязная безоотростковая конфигурация, $\nu(\Omega) = 0.56$; Б – односвязная конфигурация с отростками, $\nu(\Omega) = 1.02$

При формализации условия гладкости решения можно потребовать, чтобы длина отростков в модельном носителе не превышала заданного L_0 , а значение $\nu(\Omega)$ можно использовать как интегральную характеристику гладкости носителя масс.

4.2. Решение двухмерной обратной задачи гравиметрии

Применительно к обратной задаче гравиразведки основные условия для реализации алгоритма РНК сводятся к следующему.

1. Предполагается, что интерпретатор до начала работы алгоритма задает замощения изучаемой области D пространства, в пределах которой расположены источники аномалии.

2. Считается, что он же называет число m локальных однородных тел, создающих аномалию гравитационного поля Δg , и указывает их эффективные плотности.

3. Интерпретатор обязан также задать пространственные области S_j^+ , $j = 1, 2, \dots, m$, которые наверняка (например, по результатам бурения) либо предположительно (исходя из морфологии поля) являются фрагментами локальных тел. Области S_j^+ могут быть достаточно малыми; в частном случае, их аппроксимацией может быть всего лишь один элемент замощения.

4. Известным считается максимально возможный уровень помех в измерениях гравитационного поля, на основании которого устанавливается допустимая невязка ε в одной из классических метрик.

В генерализованном виде блок-схема алгоритма РНК приведена на рис. 38.

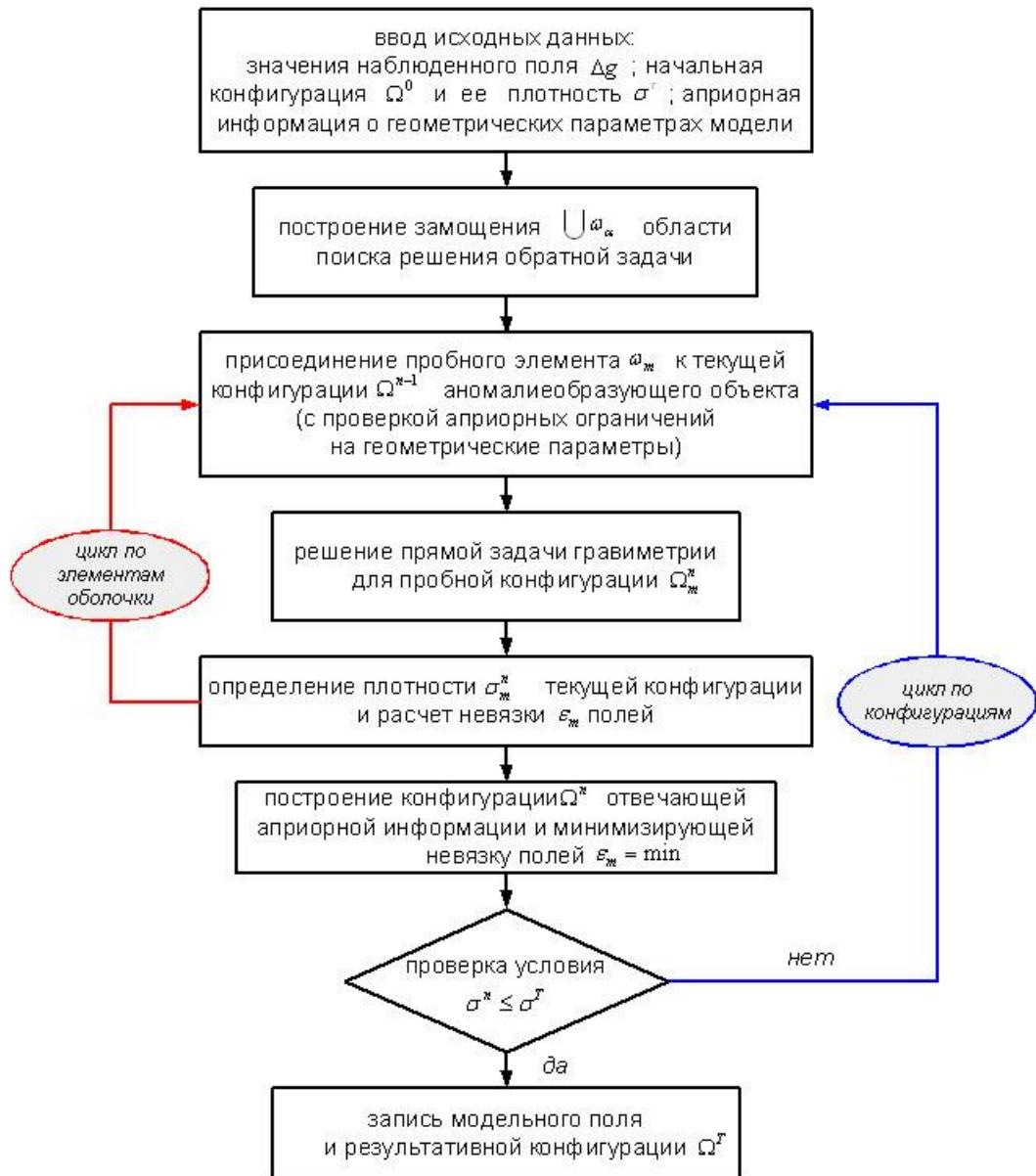


Рис. 38. Блок-схема алгоритма решения нелинейной трехмерной обратной задачи гравиразведки методом РНК

Рассмотрим модельную ситуацию, когда в роли носителя масс эффективной плотности $\delta = 0.3 \text{ г}/\text{см}^3$ выступает бесконечно протяженная горизонтальная призма, сечением которой (вкрест простирания) служит конфигурация $\bar{\Omega}$ мощности $|\mathcal{Y}(\bar{\Omega})| = 88$, собранная из квадратных элементов замощения с длиной стороны 25 м. Таким образом, при оценке того, сколь велика (или мала) достигнутая невязка, мы исключаем необходимость введения поправок за неадекватность модельного класса источников поля. Приближенные (условно говоря, измеренные) значения $\Delta \tilde{g}_i = \Delta \tilde{g}(x_i)$ аномалии Δg заданы на профиле в $m = 36$ точках $x_i = 50(i-1)$ (в метрах) и отягощены помехой ξ , имеющей достаточно близкое к нулю среднее значение. Ее среднеквадратическое значение составляет чуть более 2 % от максимума аномалии и приблизительно равно 0.015 мГал (рис. 39).

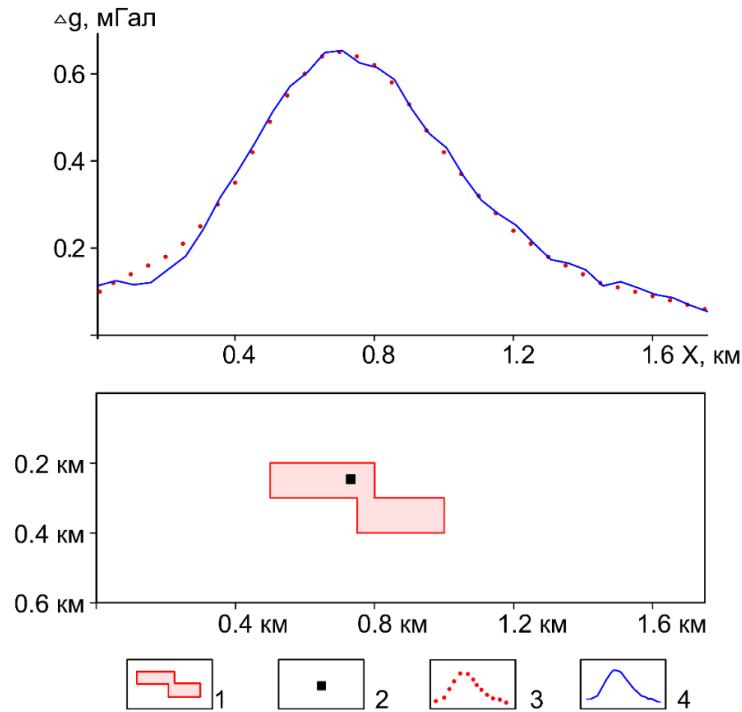


Рис. 39. Геоплотностная модель: 1 – аномалиеобразующий объект; 2 – центр кристаллизации; 3 – точное поле Δg ; 4 – заданное («наблюденное») поле $\Delta \tilde{g}$

Априори предполагается, что носитель масс является односвязным, его мощность не превышает 1 км по латерали и 0.5 км по вертикали, а глубина залегания нижней кромки не превосходит 1 км. На рис. 40 представлены графики изменения невязки ε_k^* и оптимизируемой плотности δ_k^* с ростом номера итерации k .

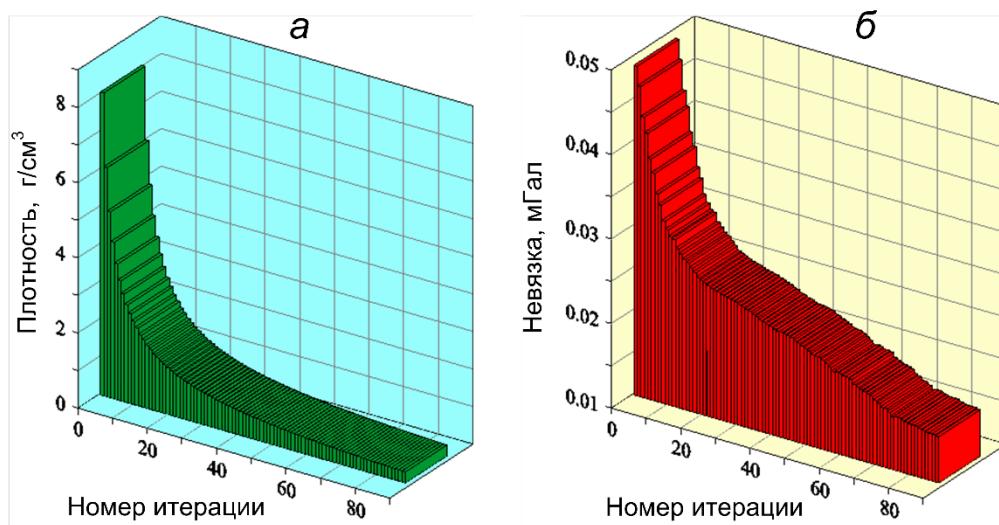


Рис. 40. Графики поведения локально оптимальных значений плотности δ_k^* масс, распределенных по текущим конфигурационным приближениям Ω_k (а), и невязки ε_k^* (б)

Метод РНК справился с поставленной задачей – итерационный процесс вышел на невязку, величина которой практически совпала с нормой помех в значениях поля. На рис. 41 приведены несколько промежуточных приближений Ω_k , включая само решение Ω^* обратной задачи.

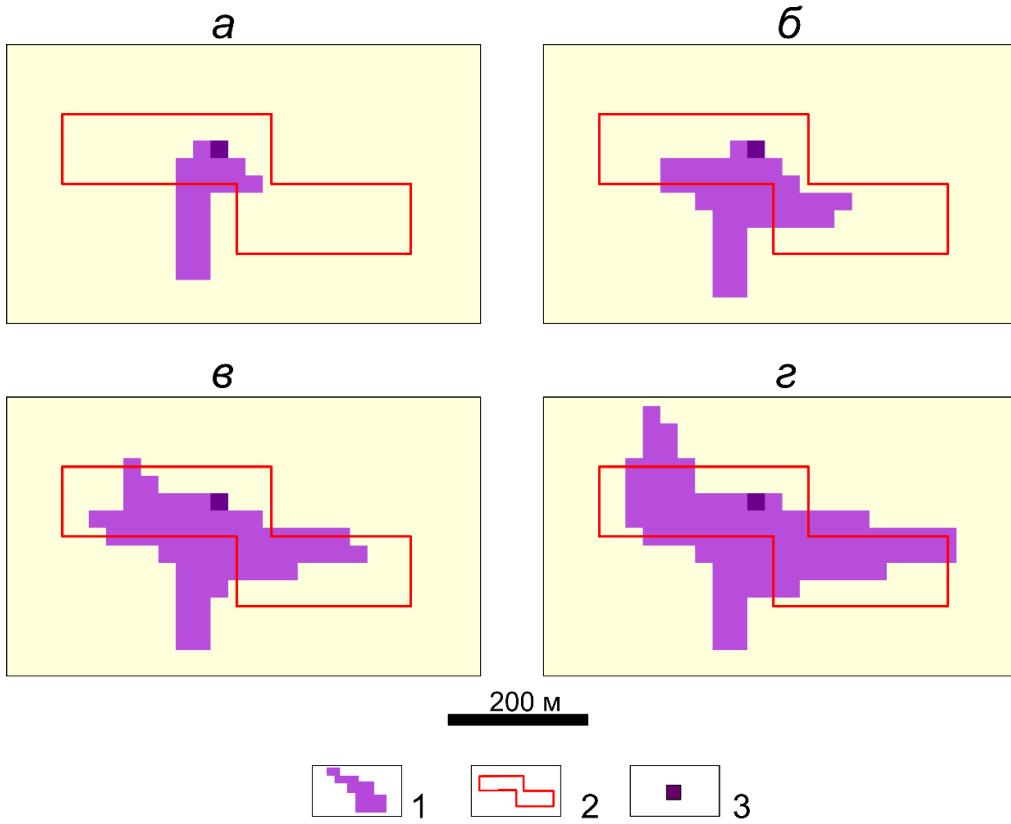


Рис. 41. Текущие приближения к решению обратной задачи методом РНК, достигнутые за различное число k итераций: а – $k = 20$ ($\delta_{20}^* = 1.248$) г/см³, $\varepsilon_{20}^* = 0.026$ мГал); б – $k = 40$ итераций ($\delta_{40}^* = 0.656$ г/см³, $\varepsilon_{40}^* = 0.023$ мГал); в – $k = 60$ итераций ($\delta_{60}^* = 0.439$ г/см³, $\varepsilon_{60}^* = 0.020$ мГал); г – итоговый результат интерпретации ($\delta^* = \delta_{88}^* = 0.298$) г/см³, $\varepsilon^* = \varepsilon_{88}^* = 0.016$) мГал):
1 – текущее приближение Ω_k ; 2 – аномалиеобразующий объект;
3 – центр кристаллизации (нулевое приближение Ω_0)

Приведем результаты применения алгоритма РНК при интерпретации данных профильной гравиразведки на Боотанкагской площади (п-в Таймыр). Основной целью интерпретации было выделение и оконтурирование в разрезе объекта повышенной плотности – интрузивного тела ультрабазитового состава, перспективного на платино-медно-никелевое оруденение. При построении модели каждого разреза учитывался довольно обширный объем априорной информации. Конкретно использовались данные поискового бурения, предположение о направлении падения тел и ожидаемой форме интрузий, считалось, что имеет место достаточно гладкий характер границ соприкосновения магматических пород

с вмешаемой средой (терригенными отложениями). Задавались ограничения на максимальную мощность возмущающих тел, которые предполагались односвязанными. Исходя из геологических соображений, было принято решение использовать 2D-модель возмущающих объектов.

Результаты гравитационного моделирования подтвердили возможность уверенно проводить оконтуривание в разрезе основного возмущающего объекта – дифференцированной интрузии базит-гипербазитов, состоящей из нескольких ветвей (рис. 42). Из пяти рекомендованных по геофизическим данным скважин четыре вскрыли искомые геологические объекты.

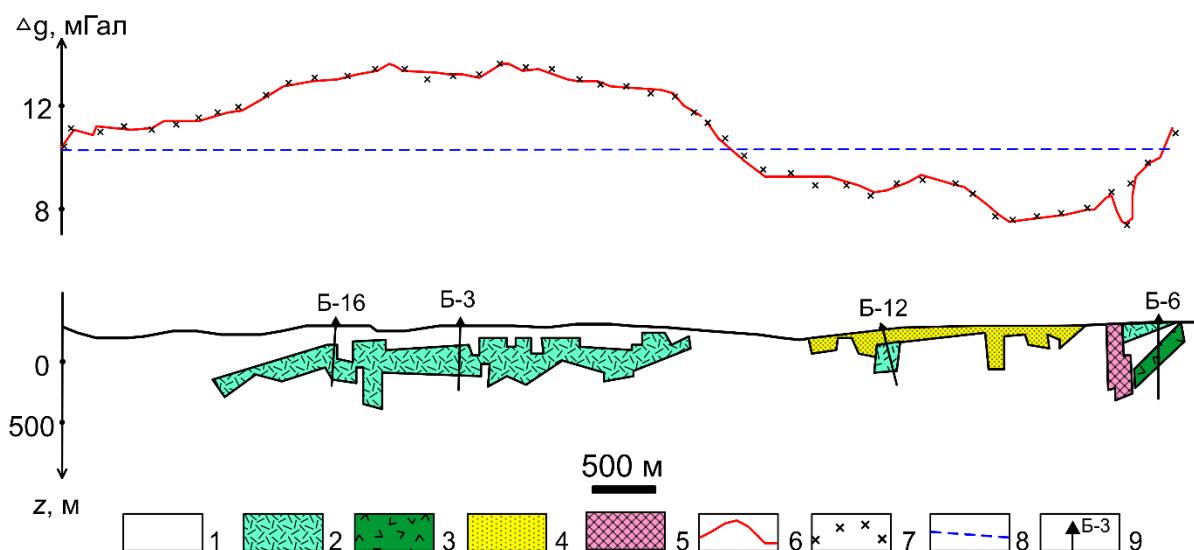


Рис. 42. Результаты моделирования геологического разреза по гравитационному полю с помощью метода РНК. Боотанкагская площадь:
1 – осадочные породы; 2 – интрузии габбро-долеритов; 3 – силлы долеритов;
4 – рыхлые отложения; 5 – зоны дробления горных пород; 6 – наблюденное поле;
7 – поле построенной модели геологического объекта;
8 – фоновая составляющая поля; 9 – буровые скважины

Отличительные особенности метода РНК перечислены ниже:

1. Метод РНК, если его рассматривать как специализированный метод решения определенного класса экстремальных задач, обладает некоторым сходством с методами минимизации нулевого порядка, т.к. не использует вычисления производных минимизируемой функции. Вместе с тем метод РНК имеет пять важных особенностей, перечисленных ниже.
2. В итерационном процессе используется такой необычный для классических методов решения условно-экстремальных задач прием, как перевод *известного параметра* – эффективной плотности σ^* – в число *оптимизируемых*.

3. Критерием завершения итерационного процесса является значение эффективной плотности (оптимизируемой переменной) $\sigma^* \cong \sigma$, а достигнутое значение невязки ε является лишь индикатором для отнесения построенного решения Ω^* к допустимым.

4. Первоначальная конфигурация Ω^0 (starting model), в предельном случае это единичный элемент замощения ω_0 , может быть весьма далека от геометрии и по эффективной плотности σ^0 от искомого аномалиеобразующего тела S . Благодаря тому, что эффективная плотность σ в методе РНК является свободным параметром, удается довольно быстро подобрать эффективную массу и с первых шагов итерационного процесса выйти на достаточно малые значения невязки ε^* наблюденного и модельного полей.

5. Отсутствие привычного представления о размерности условно-экстремальной задачи, которая остается неизменной на протяжении всего итерационного процесса. В методе РНК корректным является понятие «плавающей» размерности задачи на шаге итерационного процесса, подразумевая, что это число элементов замощения из $O[\Omega^{n-1}]$, непосредственно участвующих в оптимизации на итерации n . «Плавающая» размерность – это одно из достоинств метода РНК, благодаря которой он в меньшей мере подвержен «проклятию размерности», которое, по Р. Беллману, негативно влияет на численное решение всех нелинейных многоэкстремальных задач.

6. Нелинейная по постановке обратная задача становится линейной. Если считать, что роль вектора геометрических параметров в описании модели возмущающего объекта здесь играет множество α индексов элементов замощения ω_α , составляющих ядро конфигурационного носителя Ω , то $\Delta g(\alpha_1 \cup \alpha_2) = \Delta g(\alpha_1) + \Delta g(\alpha_2)$.

4.3. Решение трехмерной обратной задачи гравиметрии

Рассмотрим опробованный на модельных и практических примерах обобщенный 3D монтажный метод решения обратной задачи гравиразведки для группы возмущающих объектов, рассчитанный на применение при изучении сугубо трехмерных геологических тел и структур: гранитоидных батолитов, вулкано-тектонических депрессий, рифогенных образований, соляных куполов, астроблем и т.п.

Базовая конфигурация разработанного программно-математического обеспечения позволяет осуществлять решение трехмерной обратной задачи, включающей следующие типы априорной информации (как обязательной, так и просто допустимой).

К обязательным, задаваемым интерпретатором, данным (помимо значений наблюденного гравитационного поля и координат x, y, z пунктов измерений) относятся:

- размер кубического элемента замощения ω_α ;
- число m однородных тел S_k^T в модели источников поля и их плотности δ_k^T ;
- фрагменты каждого из тел S_k^T (как минимум по одному элементу ω_α на каждое тело);
- пороговое значение ε_0 среднеквадратического расхождения наблюденного и модельного полей.

К необязательным (но повышающим надежность результатов интерпретации) относятся следующие данные:

- область, заведомо содержащая источники поля;
- область, заведомо не содержащая источники поля;
- минимально и максимально возможные глубины залегания верхней и нижней кромок тел S_k^T ;
- ограничения на мощность каждого из тел S_k^T ;
- любые (помимо обязательных) фрагменты тел S_k^T ;
- бинарная матрица, определяющая допустимость контактирования отдельных тел S_k^T ;
- условие гладкости поверхностей аномалиеобразующих тел (в самом простом случае – требование безотростковости подобранных носителей, заключающееся в том, что оболочки $O[T_n]$ любого элемента T_n границы $\Gamma[\Omega_k^*]$ содержат хотя бы по одному элементу внутреннего ядра $\mathcal{Y}_0[\Omega_k^*]$).

Приведем пример применения монтажного метода с целью интерпретации локальной аномалии, зафиксированной при выполнении гравиметрической съемки масштаба 1:50 000 в пределах южной части Енисейского кряжа – одной из наиболее значимых золоторудных провинций нашей страны. Данная аномалия отрицательного знака имеет амплитуду до -3.1 мГал, эллипсовидную форму, размеры ее составляют примерно 9.2×3.6 км (рис. 43). С высокой степенью вероятности можно предположить, что интерпретируемая аномалия создается мощной корой выветривания. Объекты такого типа оцениваются как весьма перспективные на обнаружение золотого оруденения, однако в этой части Енисейского кряжа они до настоящего времени остаются недостаточно изученными.

При решении обратной задачи гравиметрии использовались значения поля, заданные на площади в 451 точке, элементом замощения являлся куб со стороной 200 м. Избыточная плотность аномалиеобразующего объекта принималась равной -0.4 г/см 3 (в абсолютном выражении это около 2.35 г/см 3). После выполнения 393 итераций была достигнута невязка наблюденного и модельного полей ± 0.15 мГал, сопоставимая с точностью задания исходных данных. Время решения составило около 2 минут.

Построенный аномалиеобразующий объект северо-западного простирания имеет крутое падение, вытянутую форму и характеризуется максимальной глубиной залегания нижней кромки около 1.2 км (в юго-восточной части). По своим

морфологическим особенностям и петроплотностным параметрам данным объект вполне соответствует древней коре выветривания, перекрытой рыхлыми отложениями (рис. 44).

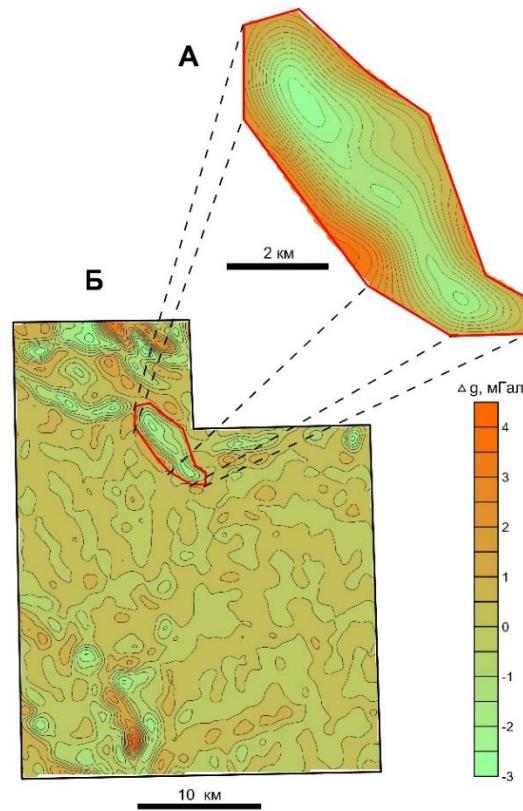


Рис. 43. Локальная аномалия силы тяжести, предположительно обусловленная древней корой выветривания (А), и ее местоположение на карте гравитационного поля (Б).
Енисейский кряж

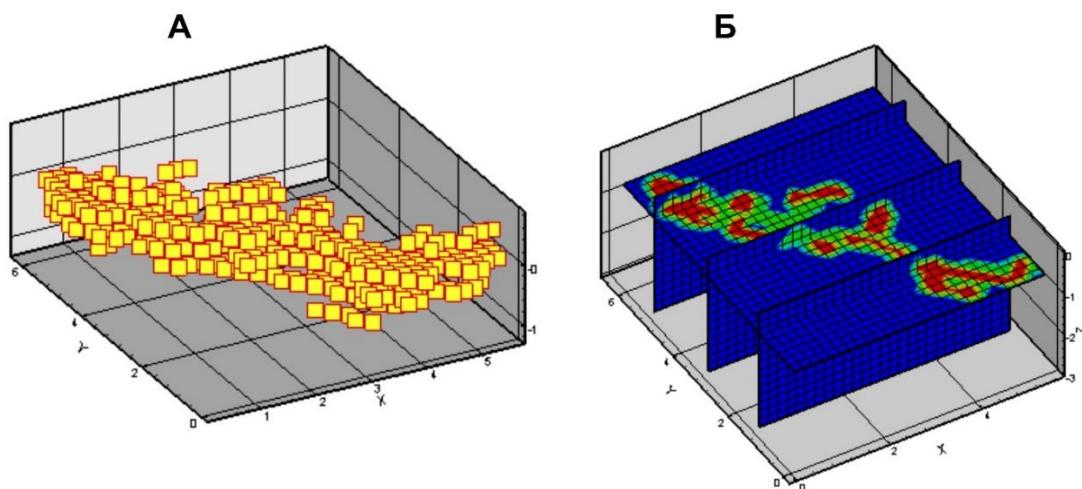


Рис. 44. Объемная модель древней коры выветривания (А), построенная по результатам количественной интерпретации гравитационного поля и сечения этой модели плоскостями $Y = 1.36$ км, $Y = 3.20$ км, $Y = 5.18$ км, $Z = 0.61$ км (Б)

Рассмотрим результаты применения алгоритма РНК при интерпретации материалов площадной гравиметрической съемки масштаба 1:25000, выполненной на Урале с целью поисков хромитов. Вытянутая в меридиональном направлении положительная локальная аномалия гравитационного поля с амплитудой более 2 мГал предположительно связана с интрузивным массивом ультраосновного состава каледонского возраста, перспективным на хромитовое оруденение (рис. 45а).

Решение обратной задачи получено с использованием регулярного замещения кубическими элементами со стороной 0.25 км. Достигнутая невязка полей составила 0.16 мГал. Построена модель аномалиеобразующего объекта с эффективной плотностью $0.25 \text{ г}/\text{см}^3$, отождествляемого с крутопадающим перидотитовым массивом. Морфология массива охарактеризована серией меридиональных и широтных разрезов, а также горизонтальными срезами при шаге глубин 250 м (рис. 45б-г).

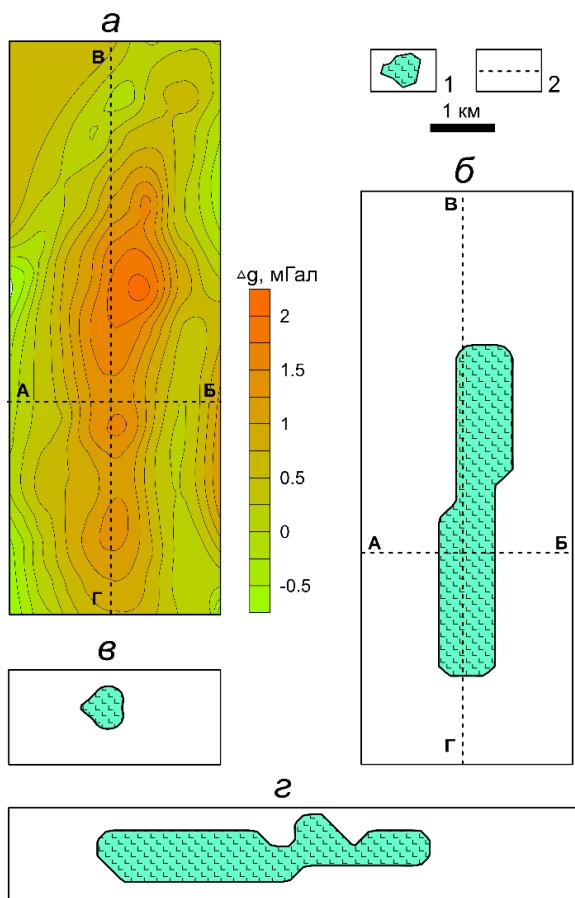


Рис. 45. Интерпретация гравитационного поля интрузивного массива, перспективного на хромитовое оруденение: а – карта локальной составляющей гравитационного поля; б – горизонтальный срез геологической среды на глубине 875 м; в – разрез по линии АБ; г – разрез по линии ВГ (1 – контур массива перидотитов; 2 – интерпретационные профили)

Согласно расчетам, кровля массива залегает на глубинах 0.1–0.4 км, подошва – на глубинах 1.2–1.5 км; его блоковое строение предположительно обусловлено развитием постинтрузивных субширотных дизъюнктивных нарушений. Также следует отметить, что участки сравнительно неглубокого залегания кровли перидотитов, установленные по гравиметрическим данным, отвечают аномалиям магнитного поля ΔT с интенсивностью до 300–500 нТл. Это свидетельствует о развитии процессов серпентинизации пород в верхней части массива, что является благоприятным признаком для обнаружения хромитов.

Монтажный подход к решению обратных задач гравиразведки и магниторазведки снимает проблему неустойчивости в ее классическом понимании, так как конечная размерность модели и природные ограничения на ее плотностные и геометрические параметры изначально приводят к компактному множеству возможных решений, а учет определенного объема априорной информации обеспечивает надежное решение поставленной геологической задачи.

4.4. Модификации монтажного метода

В 2009 г. была впервые реализована модификация регулируемой направленной раскристаллизации (РНР), в которой начальное приближение к решению обратной задачи гравиразведки заведомо содержит источник поля, а очередное приближение к искомому аномалиеобразующему объекту возникает путем удаления из границы ядра одного элемента замощения.

Проиллюстрируем работу РНР на модельных примерах. Во всех случаях источником гравитационного поля Δg являлась прямоугольная призма размером 2×0.5 км, обладающая избыточной плотностью $0.2 \text{ г}/\text{см}^3$; поле призмы вычислялось с шагом 250 м в 26 точках профиля, диапазон изменения значений Δg составил 0.23–2.49 мГал. Начальная конфигурация Ω^0 представляла собой прямоугольник размером 4×1.6 км, внутри которого находился аномалиеобразующий объект.

На модельном примере были проведены исследования, направленные на изучение устойчивости алгоритма РНР к уровню помех в исходных данных. Распределение помех δg_i , $i = 1, 2, \dots, n$ отвечало нормальному закону с нулевым средним значением и среднеквадратическим отклонением ± 0.113 , ± 0.226 , ± 0.452 мГал, что составляло примерно 5, 10 и 20 % от максимальной амплитуды поля Δg (т.е. соответствовало «низкому», «среднему» и «высокому» уровням помех). Результаты вычислительных экспериментов, представленные на рис. 46, свидетельствуют о высокой устойчивости алгоритма РНР относительно уровня помех в исходных данных, так как все варианты решений обратной задачи дали близкие между собой результаты по пространственному совпадению между ис-

ходным аномалиеобразующим объектом и подобранной конфигурацией. Показатели качества решения задачи в зависимости от уровня помех в «наблюденном поле» представлены в табл. 3.

Анализ проведенных исследований алгоритма РНР показал его устойчивость относительно изменений размеров элемента замощения ω_α . Также очевидно, что в данной модификации число итераций N является обратно пропорциональным размеру ω_α (табл. 3).

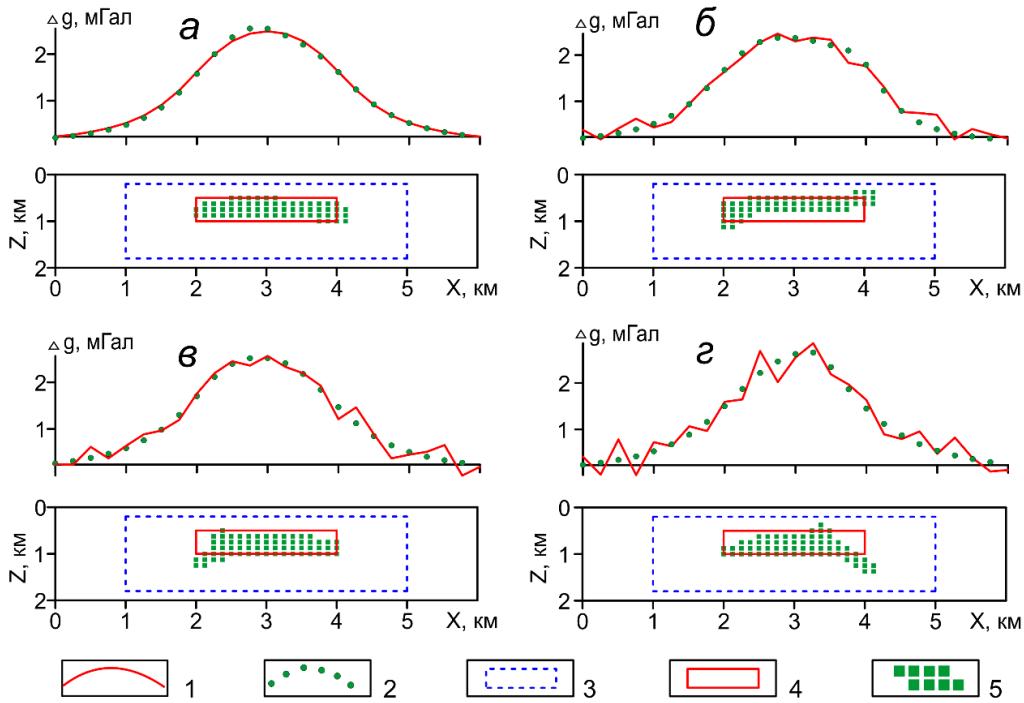


Рис. 46. Результаты применения РНР при решении обратной задачи для прямоугольной призмы при фиксированном размере элемента замощения $L = 125$ м и различном уровне помех δg в «наблюденном» поле Δg : А – без помех; Б – низкий; В – средний; Г – высокий: 1 – «наблюденное» поле; 2 – модельное поле; 3 – начальная конфигурация Ω^0 ; 4 – аномалиеобразующее тело Ω^T ; 5 – подобранная конфигурация Ω^*

Таблица 3
Характеристики решений обратной задачи гравиразведки для прямоугольной призмы с помощью алгоритма РНР

Решения по полю, осложненному помехой			Решения по точным значениям поля		
Уровень помех, %	Число итераций N	Точность решения, мГал	Размер элемента замощения, м	Число итераций N	Точность решения, мГал
0	346	± 0.044	31.25	5816	± 0.002
5	345	± 0.150	62.5	1500	± 0.005
10	341	± 0.159	125	366	± 0.044
20	342	± 0.249	250	104	± 0.150

Примечание: точность решения – расхождение «наблюденного» и модельного полей в евклидовой метрике.

На рис. 47 приведены характеристики итерационного процесса для варианта решения обратной задачи по полю с интенсивными помехами, представленного на рис. 46г. На графике зависимости плотности от числа итераций наблюдается монотонное увеличение плотности подбираемого объекта с возрастанием количества итераций. Достижение в процессе решения априорно заданной плотности служит критерием прекращения работы алгоритма РНР.

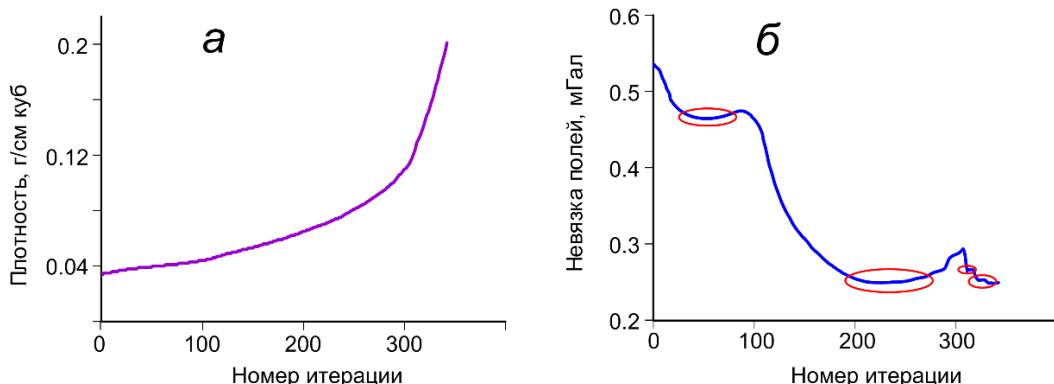


Рис. 47. Характеристики итерационного процесса для решения обратной задачи по осложненному интенсивной помехой полю:

А – изменение плотности подбираемого объекта; Б – изменение невязки исходного и модельного полей (в евклидовой метрике):
1 – локальные минимумы целевой функции

На графике зависимости невязки полей от количества итераций наблюдается наличие малых по амплитуде возмущений, обусловленных, в числе прочего, дискретным характером преобразования носителя масс. По сути, такое немонотонное поведение невязки иллюстрирует возможности монтажных алгоритмов преодолевать локальные минимумы целевой функции, что в современной теории решения многоэкстремальных задач само по себе считается важным показателем состоятельности алгоритма. Указанная возможность, в свою очередь, обусловлена совершенно нехарактерным для «классических» методов теории решения обратной задачи приемом, когда критерий останова итерационного процесса минимизации функции (в нашем случае – невязки) не привязан, собственно говоря, к последовательности значений этой функции, достигнутых в ходе этого процесса.

Рассмотрим еще одну модификацию монтажного метода – регулируемую направленную перекристаллизацию (РНП). В рамках данной модификации на отдельно взятой итерации возможно как увеличение, так и уменьшение ранее построенной конфигурации Ω^i за счет добавления или удаления одного (или даже одновременно нескольких) элементов замощения ω_α из $O[\Omega]$ или $\Gamma[\Omega]$ соответственно. В процессе программной реализации алгоритм РНП был дополнен возможностью работы на сетках разного размера (масштаба).

Проведем сравнительный анализ трех модификаций монтажного метода (РНК, РНР и РНП на сетках разного масштаба) на модельных примерах. В качестве «наблюденного» поля было выбрано гравитационное поле Δg призмы, обладающей избыточной плотностью $0.2 \text{ г}/\text{см}^3$; поле призмы вычислялось с шагом 250 м в 25 точках профиля, диапазон изменения значений Δg составил 0.64–3.92 мГал. Область поиска решения (для варианта РНК и РНП на сетках разного масштаба) и начальная конфигурация (для варианта РНР) представляли собой прямоугольник размером 4×2.8 км, внутри которого находился аномалиеобразующий объект. Размер элемента замощения был принят равным $1/8$ шага сети задания поля, в случае модификации РНП на сетках разного масштаба этот размер был принят как конечно заданный размер монтажного элемента. Все решения ОЗГ приведены в табл. 4.

Таблица 4

**Характеристики решений ОЗГ с помощью алгоритмов
РНК, РНРК, РНП на сетках разного масштаба**

Наименование модификации	Число итераций, N	Размер Начального элемента замощения (конечного), м	Продолжительность вычислительного процесса, сек	Точность решения, мГал
/РНК	2051	31.25	11	± 0.0019
РНР	9653	31.25	89	± 0.0035
РНП на сетках разного масштаба	308	125 (31.25)	9	± 0.0033

Примечание: точность решения – расхождение «наблюденного» и модельного полей в евклидовой метрике ε .

Отметим, что при одинаковых элементах замощения ω_α все модификации монтажного метода обеспечивают достижение близких значений невязки «наблюденного» и модельного полей при числе итераций N , обратно пропорциональном размеру ω_α . Число итераций N для РНР существенно зависит от размера начальной конфигурации Ω^0 и для разных соотношений площадей фигур Ω^0/Ω^* может быть различным. Модификация РНР может иметь определенные технологические преимущества перед модификацией РНК при моделировании эшелонированных по вертикали геоплотностных неоднородностей, локализованных в определенных горизонтах геологического разреза. Приуроченность этих неоднородностей к определенным слоям или структурам определяется уже на начальной стадии – при построении начальных («стартовых») конфигураций Ω^0 . При решении задач большой размерности целесообразно использовать наиболее быстродействующую модификацию монтажного метода – РНП на сетках разного масштаба.

Для решения обратной задачи магниторазведки с использованием представленных выше алгоритмов применительно к одиночным объектам достаточно заменить процедуру вычисления гравитационного эффекта от единичного элемента замещения ω_a на вычисление магнитного поля ΔZ или ΔT при заданных значениях вектора намагниченности.

4.5. Локализация геологических объектов при неполной информации о физических свойствах

Напомним, что в геофизике к линейным обратным задачам обычно относят те из них, где оценке подлежат физические характеристики изучаемых геологических объектов, а к нелинейным – обратные задачи, в которых искомыми являются их геометрические параметры. Попытки создания алгоритмов решения обратных задач с неполной априорной информацией как о геометрических, так и о физических параметрах аномалиеобразующих тел (будем называть такие задачи смешанными) на основе классических методов условной минимизации уже предпринимались, но обнаружилось, что такие алгоритмы не в состоянии учесть весь объем априорной информации, имеющейся в распоряжении интерпретатора. Известные автоматизированные технологии интерпретации гравиметрических и магнитных данных в смешанных постановках представляют собой крупноблочные итерационные схемы, в которых процедура уточнения физических параметров (при закрепленных геометрических параметрах) и процедура уточнения геометрических параметров (при фиксированных физических параметрах) поочередно сменяют друг друга.

Ниже будет рассмотрен не практиковавшийся ранее подход к совместной оценке физических и геометрических параметров геологических объектов по результатам измерений гравитационного (или магнитного) поля. В его основе лежит идея модификации монтажного метода решения нелинейной обратной задачи «рудного» типа за счет замены предположения об известных точных значениях плотности (намагниченности) тел на более слабое условие, по которому информация о петрофизических параметрах носит размытый характер, что, как отмечалось, в большей степени отвечает реалиям геофизической практики.

Как известно, горные породы – это сложные гетерогенные образования, а сложенные ими геологические тела являются, по современным представлениям, неоднородными по физическим характеристикам мультифрактальными объектами – плотностные и магнитные характеристики однородных по вещественному составу объектов далеко не всегда являются константами. Так, намагниченность однородных по составу магнитовозмущающих тел, обладающих высокой магнитной восприимчивостью, зависит от их формы и может быть различной для отдельных фрагментов таких тел. Иначе говоря, в реальных условиях интерпретации неопределенность значений физических параметров – это обязательный

атрибут любой постановки обратной задачи, даже если сами значения физических параметров при этом играют роль мешающих факторов. Постоянную плотность (намагниченность), фигурирующую во многих известных постановках обратных задач, следует, скорее всего, рассматривать как некое условное «среднее» значение физического параметра, порождающее приблизительно то же самое поле, что и неизвестное истинное. Существование такого «среднего» значения обеспечивает фактор ε -эквивалентности. Но если подобная идеализация и допустима, то безошибочно установить априори это «среднее» значение невозможно по некоторым причинам, в числе которых различие физических свойств горных пород, определенных на образцах и в естественном залегании. Можно добавить, что в настоящее время в России резко сократились объемы поисково-картировочных буровых работ и петрофизических исследований. Таким образом, отказ от предпосылки об известных точных значениях физических параметров следует рассматривать как едва ли не обязательный элемент любой постановки обратной задачи, претендующей на адекватность реалиям геофизической практики.

Пусть аномалия гравитационного поля $\Delta\hat{g}$ задана своими приближенными значениями $\Delta\tilde{g}_i = \Delta\hat{g}(X_i) + \xi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ на множестве точек X_i произвольного рельефа и обусловлена массами, распределенными с избыточными плотностями $\hat{\delta}_k > 0$ по K связным односвязным объемам (парциальным носителям) \hat{S}_k , а априорные сведения о свойствах помех ξ_i , векторе плотностей $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \dots, \hat{\delta}_K)$, пространственном расположении и геометрии тел \hat{S}_k содержат неопределенность, свойственную практическим постановкам задач количественной интерпретации геофизических данных. Точные значения $\hat{\delta}_k$ плотностей неизвестны, однако с высокой степенью достоверности можно задать диапазоны их возможных значений: $\delta'_k \leq \hat{\delta}_k \leq \delta''_k$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Для решения обратной задачи гравиразведки в смешанной постановке создан экономичный адаптивный алгоритм, в котором условно-экстремальная задача решается лишь один раз. Введем в рассмотрение вспомогательный (опорный) вектор $\lambda = (1, \lambda_2, \dots, \lambda_K)$, определяющий очередьность и направление разрастания ядер парциальных носителей $\Omega_{k,j}^*$. На каждой итерации j вектор λ подлежит корректировке, что служит признаком адаптивности предлагаемого алгоритма. В качестве λ_0 можно взять вектор, компоненты которого принимают произвольные значения из интервалов $[\delta'_k, \delta''_k]$, например $\lambda_{k,0} = (\delta'_k + \delta''_k)/2$, $k = 2, 3, \dots, K$. На каждом шаге j из числа допустимых пробных вариантов перехода от Ω_{j-1}^* к Ω_j^* выбирается тот, на котором достигается минимум функционала невязки $\Phi(\delta_1) = \sum_{i=1}^n \left(\Delta\tilde{g}(X_i) - \sum_{k=1}^K \Delta g(\Omega_{k,j}^*; X_i) (\lambda_{k,j} \delta_1) \right)^2$ при условии, что плотность δ_1 тела $\Omega_{1,j}^*$ является (единственным) свободным параметром, а плотности δ_k других тел жестко связаны с δ_1 функциональной зависимостью $\delta_k = \lambda_{k,j} \delta_1$ (здесь $\Delta g(\Omega_{k,j}^*; X_i)$

– поле масс единичной плотности, распределенных по объему $\Omega_{k,j}^*$). Предположим, что среди опробованных минимум $\Phi(\delta_1)$ достигнут в некотором варианте $\Omega_j^* = \{\Omega_{1,j}^*, \Omega_{2,j}^*, \dots, \Omega_{K,j}^*\}$ при $\delta_1 = \delta_{1,j}^*$. Полагая, что $\langle \Omega_{k,j}^* \rangle_{k=1}^K; \delta_{1,j}^* \rangle$ – не подлежащий пересмотру фрагмент j -го приближения к решению обратной задачи, берем в качестве оптимальных значений плотностей масс, заполняющих носители $\Omega_{2,j}^*, \Omega_{3,j}^*, \dots, \Omega_{K,j}^*$, значения $\delta_k = \delta_{k,j}^*$, минимизирующие функционал $\Phi(\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_K) = \sum_{i=1}^n \left(\Delta \tilde{g}(X_i) - \left(\delta_{1,j}^* \Delta g(\Omega_{1,j}^*) + \sum_{k=2}^K \Delta g(\Omega_{k,j}^*; X_i) \delta_k \right) \right)^2$ при ограничениях $\delta_k'' \leq \delta_k \leq \varphi_k(\delta_{1,j}^*)$, где φ_k – монотонно убывающие и непрерывные на интервале $(-\infty, \delta_1'')$ функции, удовлетворяющие условию $\varphi_k(\delta_1'') = \delta_k''$; $k = 2, 3, \dots, K$, в случае $\delta_{1,j}^* \geq \delta_1''$ и $\delta_k' \leq \delta_k \leq \delta_k''$, $k = 2, 3, \dots, K$, в случае $\delta_1' \leq \delta_{1,j}^* < \delta_1''$. Итерация завершается корректировкой опорного вектора для использования на следующей итерации $\lambda_{k,j+1} = \delta_{k,j}^* / \delta_{1,j}^*$, $k = 2, 3, \dots, K$.

При обсуждении модельных примеров степень близости приближенного решения $\langle \Omega^*, \delta^* \rangle$ к истинному $\langle \hat{S}, \hat{\delta} \rangle$ будем характеризовать средним значением показателей точности $\rho_k^{(S)}, \rho_k^{(\delta)}$ оценивания парциальных носителей и плотностей, соответственно:

$$\begin{aligned} \rho^{(S,\delta)} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \rho_k^{(S,\delta)}, \\ \rho_k^{(S,\delta)} &= \sqrt{\rho_k^{(S)} \rho_k^{(\delta)}}, \\ \rho_k^{(S)} &= \mu(\hat{S}_k \cap \Omega_k^*) / \mu(\hat{S}_k \cup \Omega_k^*), \\ \rho_k^{(\delta)} &= 1 - |\delta_k^* - \hat{\delta}_k| / (\delta_k'' - \delta_k'). \end{aligned}$$

Глобальные и парциальные показатели являются нормированными величинами; $[0,1]$ – интервал их возможных значений, причем максимальное значение $\rho^{(S,\delta)} = 1$ соответствует идеализированному случаю совпадения точного и приближенного решений.

Рассмотрим модельный пример: аномалия Δg обусловлена тремя однородными бесконечно протяженными призмами, плотности которых $\hat{\delta}_1 = 0.2 \text{ г/см}^3$, $\hat{\delta}_2 = 0.3 \text{ г/см}^3$, $\hat{\delta}_3 = 0.5 \text{ г/см}^3$, и задана своими точными значениями в $n = 26$ точках оси x (рис. 48). Элементы замещения – квадраты со стороной 0.25 км. Задействовано большинство ограничений, перечисленных в постановке задачи. Считается известным, что $K = 3$ и все три не соприкасающиеся друг с другом тела \hat{S}_k – односвязные связные области, заполненные массами избыточной плотности $\delta_1 \in [0.1; 0.3]$, $\delta_2 \in [0.1; 0.4]$, $\delta_3 \in [0.2; 0.7]$. Предполагается, что возмущающие тела заключены в интервале глубин $z = 1 \text{ км}$ и $z = 12 \text{ км}$. В качестве их априори известных фрагментов S_k^+ выступают три элемента замещения T_n – по одному элементу на каждое тело (при реализации модифицированного алгоритма РНК они принимаются за центры кристаллизации).

Контроль за невязкой наблюденного и подобранных полей – это всего лишь косвенный способ оценки достигнутой невязки неизвестного точного и подобранных полей, которая и представляет основной интерес. В этом смысле результаты модельных расчетов, выполненные по точному полю и свободные от особенностей выборки случайных чисел, используемых при конструировании «наблюденного» поля, имеют свои преимущества: все выводы в отношении возможностей алгоритма можно будет сделать, исходя из сравнения достигнутого значения невязки и предполагаемого уровня помех, которые могли бы содержаться в «измеренных» значениях поля.

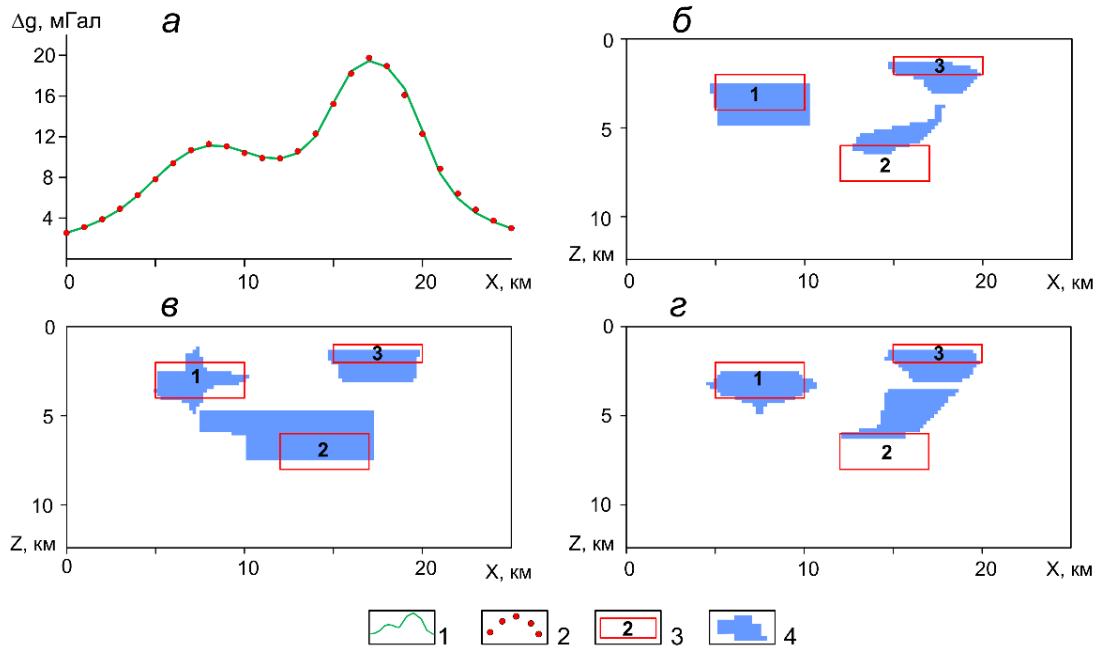


Рис. 48. Сравнительная характеристика решений обратной задачи для группы тел при разных исходных предпосылках: а – графики наблюденного и подобранных модельных полей; б – результаты решения смешанной обратной задачи; в, г – результаты решения обратной задачи при верно и не верно заданных значениях эффективной плотности, соответственно:

- 1 – график наблюденного поля;
- 2 – дискретные значения модельного поля;
- 3 – аномалиеобразующие тела и их номера;
- 4 – приближенные решения обратной задачи (подобранные носители)

Минимум невязки при решении обратной задачи по предложенному методу, достигнутый при плотностях $\delta_1^* = 0.235 \text{ г}/\text{см}^3$, $\delta_2^* = 0.106 \text{ г}/\text{см}^3$, $\delta_3^* = 0.486 \text{ г}/\text{см}^3$, составляет $\varepsilon = 0.347 \text{ мГал}$ (при этом $\rho^{(S,\delta)} = 0.486$), и это означает, что при интенсивности помех не менее 1.5 % от максимального значения поля метод позволяет выйти на допустимое решение. Для сравнения, при заданных истинных значениях плотностей невязка составила 0.258 мГал, а точность решения обратной задачи $\rho^{(S,\delta)} = 0.507$. При ошибочно заданных значениях плотностей $\tilde{\delta}_1 = 0.3 \text{ г}/\text{см}^3$, $\tilde{\delta}_2 = 0.15 \text{ г}/\text{см}^3$, $\tilde{\delta}_3 = 0.4 \text{ г}/\text{см}^3$ невязка оказалась наименьшей из всех трех вариантов – 0.161 мГал, тогда как качество решения $\rho^{(S,\delta)} = 0.403$ – наихудшее.

Дополнительные выводы можно сделать из анализа зависимостей, приведенных на рис. 49 (чтобы избежать необходимости введения логарифмических шкал, на графике не представлены результаты первых итераций, на которых плотности и невязка имеют достаточно высокие значения).

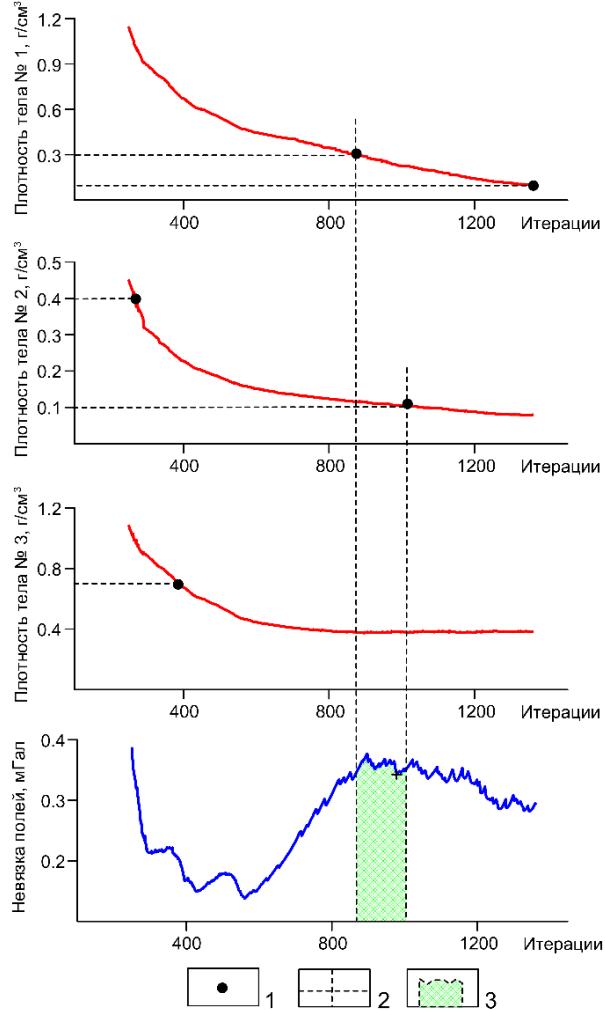


Рис. 49. Графики изменения плотности тел и невязки полей в процессе решения обратной задачи: 1 – граничные точки интервалов допустимых изменений плотности; 2 – соединительные линии; 3 – область допустимых решений обратной задачи, внутри которой плотности всех призм не выходят за пределы заданных значений и невязка полей не превышает 0.4 мГал

Следует отметить, что аналогичный алгоритм создан для решения обратной задачи магниторазведки (при амплитуде аномалий ≤ 5000 нТл) и в нем вместо скалярных значений плотностей используются векторные характеристики эффективной намагниченности аномалиеобразующих тел. Проиллюстрируем его возможности на практическом примере, связанном с изучением подводного вулкана 6.1, расположенного в пределах Охотоморского склона Курильской островной дуги.

Решение нелинейной ОЗМ осуществлялось по трем пересекающимся галсам (рис. 50а). Предварительно наблюденное геомагнитное поле ΔT_a было преоб-

разовано в вертикальную составляющую ΔZ_a с помощью алгоритма истокообразной аппроксимации, при этом учитывались величина и направление вектора нормального поля \mathbf{T}_0 для региона исследований. Подбор конфигурации проводился монтажным методом в модификации РНК с размером элемента замощения 0.25 км, соответствующим среднему шагу измерений по профилю. В процессе подбора также осуществлялось уточнение намагниченности объекта и определение линейного регионального фона.

В результате моделирования удалось локализовать в пространстве субвертикальный конусообразный магнитовозмущающий блок, обладающий поперечными размерами от 0.5 до 2.5 км (рис. 50а, б, г). Верхняя кромка этого блока находится на глубине около 2.5, нижняя – 15.5 км. Среднее значение намагниченности близко к 2 А/м для всех профилей. Максимальная невязка между модельным и наблюденным полями ± 21.5 нТл сопоставима с точностью гидромагнитной съемки. Следует отметить, что на всех профилях имеются остаточные положительные аномалии ΔZ_a , связанные, вероятно, с влиянием периферийных магматических очагов. На основе результатов 2.5D-моделирования путем интерполяции была построена объемная модель локализованного блока, отождествляемого с застывшей питающей системой вулкана.

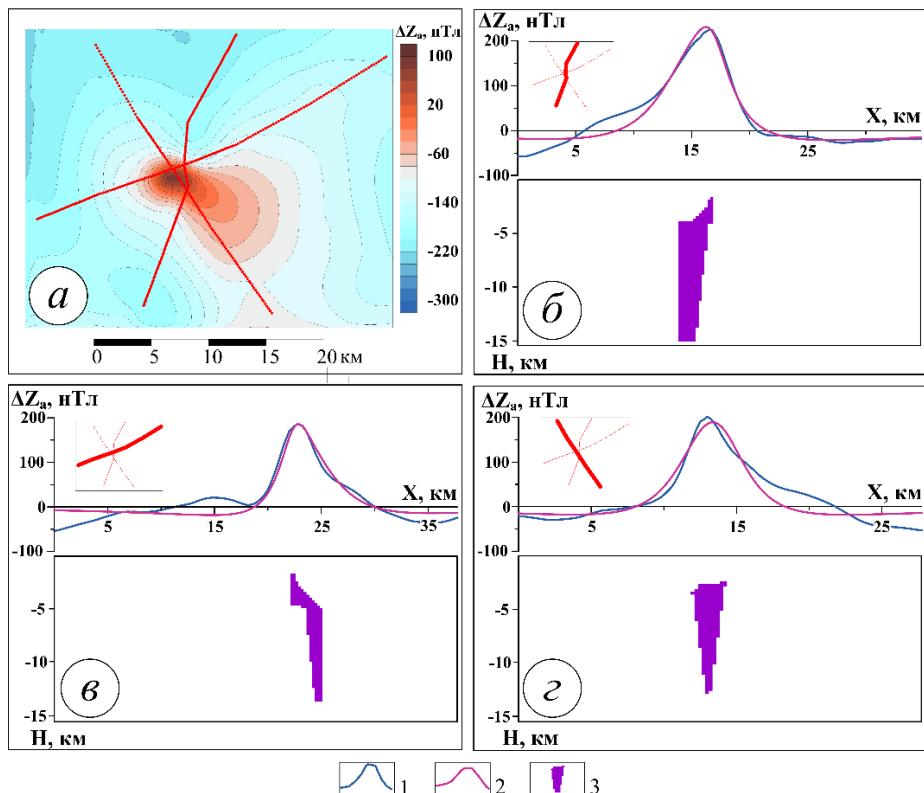


Рис. 50. Наблюденное магнитное поле подводного вулкана 6.1 (а) и результаты решения обратной задачи магниторазведки с помощью монтажных технологий для трех галсов (б-г): 1 – исходное поле; 2 – модельное поле; 3 – аномалиеобразующий объект

Предложенный алгоритм позволяет строить допустимые решения при неполной априорной информации о геометрических и физических свойствах изучаемого объекта. Полученные результаты расчетов можно рассматривать и как предостережение от чрезмерной абсолютизации свойств «оптимальности» решений обратной задачи по критерию минимума невязки. Минимизация невязки в итерационных алгоритмах подбора должна использоваться для выхода в область допустимых решений обратной задачи, тогда как сам выбор допустимого решения, отвечающий минимуму невязки, должен рассматриваться просто как один из возможных.

5. НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

5.1. Гарантированный подход

Напомним еще раз некоторые сведения об обратных задачах. В области математического моделирования традиционно выделяются два класса задач: прямые и обратные. В первом случае при известных причинах требуется определить следствия, во втором случае нужно найти причины, приведшие к определенным следствиям. В большинстве случаев обратные задачи являются некорректно поставленными. Это означает, что для этих задач одно или несколько из трех условий корректности по Ж. Адамару (существование решения, его единственность решения и устойчивость) могут не выполняться.

Обратная задача гравиразведки (2) состоит в том, чтобы по заданным значениям компонент гравитационного поля \mathbf{V} определить вектор параметров аномалиеобразующих объектов \mathbf{P} : $\mathbf{P} = L^{-1}(\mathbf{V})$. В математике обратные задачи подразделяются на линейные и нелинейные в соответствии с типом оператора L^{-1} . Линейный оператор может почленно применяться к сумме аргументов $L^{-1}(\mathbf{V}^1 + \mathbf{V}^2) = L^{-1}(\mathbf{V}^1) + L^{-1}(\mathbf{V}^2)$, а скаляр с можно выносить за знак оператора $L^{-1}(c\mathbf{V}) = cL^{-1}(\mathbf{V})$. В гравиразведке и магниторазведке к линейным обратным задачам обычно относят те из них, где оценке подлежат физические характеристики изучаемых геологических объектов, а к нелинейным – обратные задачи, в которых искомыми являются их геометрические параметры. В первом случае оператор L^{-1} является матрицей. Если оператор $L^{-1}: V \rightarrow P$ инъективен, то существует множество приближенных решений обратной задачи, входящих в множество Q_δ :

$$Q_\delta = \{\forall \mathbf{P}: \|\mathbf{V} - L(\mathbf{P})\| \leq \varepsilon\}. \quad (27)$$

На практике часто приходится иметь дело со смешанными постановками обратных задач для геопотенциальных полей: неизвестны как геометрические, так и физические характеристики источников поля. Такие задачи обычно не рассматриваются в математической теории решения некорректных задач, однако вполне могут решаться численными методами.

Существование решений обратной задачи, соответствующих одному аномальному полю, называют эквивалентностью. Если поля моделей совпадают с абсолютной точностью во всем внешнем пространстве, то эти модели называют теоретически эквивалентными. Можно сказать, что t -эквивалентность порождает отсутствие единственности решения обратных задач.

В реальных физико-геологических условиях широко проявляется т.н. практическая эквивалентность, когда разные модели источников $\mathbf{P} \in Q_\delta$ создают

очень близкие, но не абсолютно совпадающие внешние поля (3). Практическая эквивалентность, которую еще иногда называют ε -эквивалентностью, порождает неустойчивость решения обратных задач.

В середине XX в. российский математик Андрей Николаевич Тихонов разработал основы теории решения некорректно поставленных задач. Он ввёл в решение обратной задачи метод регуляризации, который был основан на приближении некорректно поставленной задачи некоторой последовательностью корректно поставленных задач. Получение приближенного решения обратной задачи (2), устойчивого к помехам в наблюдаемом поле, сводится по А.Н. Тихонову к построению регуляризующего оператора $L^{-1}: V \rightarrow P$ и последующему определению параметра регуляризации α по априорной информации. Выполняется минимизация многопараметрического функционала:

$$F(\mathbf{P}) = \|\mathbf{V} - L(\mathbf{P})\|^2 + \alpha \|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0\|^2, \quad (28)$$

где $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ – параметр регуляризации, зависящий от точности задания интерпретируемого поля; \mathbf{P}_0 – фиксированный элемент пространства Q . Решение уравнения (28) существует и единственno при любом уровне помех ε , при $\varepsilon \rightarrow 0$ оно стремится к точному.

Возможность построения устойчивого среднего квадратического приближения к решению обратной задачи (2) легла в основу множества компьютерных технологий количественной интерпретации геопотенциальных полей, обеспечивших получение новой геологической информации. Использование гипотезы о нормальном законе распределения помех в интерпретируемом поле \mathbf{V}_ε позволяет считать наилучшим решением обратной задачи вектор параметров $\mathbf{P}_\delta^{\text{опт}}$, отвечающий минимуму функционала $F(\mathbf{P})$. Принято считать, что вектор оценок параметров модели источников поля является безальтернативной математической формой представления результатов количественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

Однако какими бы замечательными свойствами (в нашем случае – свойством оптимальности) ни обладал элемент множества (в нашем случае – единичное приближенное решение обратной задачи), он не способен сколь-нибудь полно представить собой все множество (в нашем случае – множество допустимых решений Q_δ). Как правило, наше интуитивное представление об информативности результатов интерпретации каким-то образом связано с «остаточной» неопределенностью, которая остается после получения ее результатов. Можно процитировать Клода Шеннона, которому принадлежит следующее, не претендующее на полноту понятие: «информация – это снятая неопределенность наших знаний о предмете исследования». В таком случае под информацией, которую несет в себе построенная модель источника поля S^* , логично считать его фрагмент S_0^* , одновременно являющийся и фрагментом истинного носителя \widehat{S} : $S_0^* \subseteq S^* \cap \widehat{S}$. Меру Лебега $\mu(S_0^*)$ можно принять за меру достоверной информации, которую несет

приближенное решение в конкретных условиях интерпретации. Если область S_0^* указать невозможно (она существует, но не известно, где именно располагается в пространстве), логично назвать ее *скрытой достоверной* информацией об изучаемом объекте. Область S^*/\hat{S} , которая представляет собой предполагаемый фрагмент аномалиеобразующего объекта, но в действительности им не является, назовем *ложной* информацией. Фрагмент S^*/\hat{S} области, заполненной возмущающими массами, но не нашедшей отражения в решении S^* обратной задачи можно считать *потерянной* информацией (рис. 2). Отчетливо просматриваются аналогии между потерянной информацией и ошибкой I рода, ложной информацией и ошибкой II рода. Однако предлагаемые информационные параметры являются чисто детерминистскими характеристиками, в отличии от вероятностных оценок соответствующих ошибок.

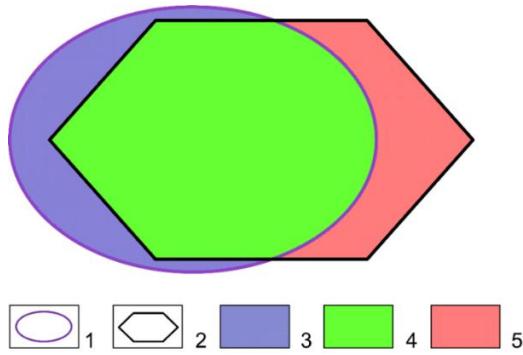


Рис. 51. Информационная модель, отражающая взаимосвязь аномалиеобразующего объекта и решения обратной задачи гравиразведки:

- 1 – геологический объект (источник поля); 2 – модель объекта (результат интерпретации); информация: 3 – потеряная,
4 – скрытая достоверная, 5 – ложная

Решение обратной задачи в рамках концепции методов автоматизированного подбора всегда связано с противоречием, возникающим при попытке представить множество ее допустимых решений Q_δ одним из его элементов $\mathbf{P}_\delta^{\text{опт}}$. Эта концепция по своей сущности не предполагает суммирование информации, которую несут все решения из множества Q_δ . Развитие этого подхода обычно связывается с учетом новых типов априорных ограничений (актуальность этой проблемы не подвергается сомнению) и выявлением более эффективных критериев выбора оптимального решения из множества Q_δ .

Решение задачи многомерной оптимизации (28) с ограничениями на результирующие параметры в виде системы равенств и неравенств еще 20–30 лет назад требовало достаточно больших вычислительных ресурсов. Возможности современных компьютеров позволяют сравнительно легко сформировать подмножество допустимых решений обратной задачи $Q_o \subset Q_\delta$, содержащее до 1000 элементов и более. Эффективным инструментом для построения подмножества Q_o является монтажный метод.

Концепция гарантированного подхода в гравиразведке, впервые озвученная в работах П. И. Балка, возникла из осознания того, что единичное решение

обратной задачи, каким бы свойством оптимальности оно ни обладало, не в состоянии охватить тот объем информации об объекте исследования, которую несут данные измерений поля в совокупности с сопутствующими априорными ограничениями и которая находит свое выражение в множестве допустимых вариантов интерпретации Q_0 . Основное достоинство гарантированного подхода состоит в том, что он позволяет дать объективную оценку разрешающим возможностям геофизического метода в конкретных физико-геологических условиях.

Благодаря этому алгоритмы интерпретации, реализующие идею гарантированного подхода, представляют собой эффективный математический инструмент для извлечения информации об источниках поля, которая в принципе недоступна методам, реализующим концепцию оптимального решения. Другим достоинством данного подхода является его способность дифференцированно оценивать относительный вклад отдельных типов априорной информации об источниках аномалии в качестве результатов интерпретации. Гарантированный подход никак не привязан к свойству потенциальности интерпретируемого поля, тем более к специфике того или иного класса обратных задач гравиразведки.

Чисто детерминистским инструментом к анализу структуры Q_0 является гарантированный подход, использующийся с целью построения геологически содержательных инвариантов:

1) в рудной обратной задаче – максимальный общий фрагмент D_2 всех допустимых носителей S^* модельных возмущающих масс, и минимальную область пространства D_1 , содержащую эти массы;

2) в линейной обратной задаче гравиразведки для модели источников аномалии в виде априори зафиксированного «набора» призм $S_k, k = 1, 2, \dots, m$ – общие двухсторонние оценки σ_k^{min} и σ_k^{max} для допустимых значений эффективной плотности σ_k^* каждой из этих призм.

3) в структурной обратной задаче для границы раздела $\hat{\varphi}(x), x \in [a, b]$ – внутреннюю $\varphi_2^*(x)$ и внешнюю $\varphi_1^*(x)$ огибающие семейства всех допустимых границ $\varphi^*(x)$, характеризующих предельные (минимальную и максимальную) глубины их залегания в каждой точке интервала $[a, b]$.

Смысл же самой инвариантности состоит в следующем:

а) в рудной обратной задаче все приближенные решения $S^* \in Q$ обладают общим свойством, которое находит свое выражение в двухстороннем включении $D_2 \subset S^* \subset D_1$;

б) в линейной обратной задаче все допустимые решения $\delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_m^*)$, объединяет неравенство $\delta_k^{(min)} \leq \delta_k^* \leq \delta_k^{(max)}, k = 1, 2, \dots, m$;

в) в структурной обратной задаче все границы раздела $\varphi^*(x)$ двух плотностных сред, отвечающие априорной информации, удовлетворяют одному и тому же (функциональному) неравенству $\varphi_2^*(x) \leq \varphi^*(x) \leq \varphi_1^*(x), x \in [a, b]$.

Суть гарантированного подхода в рудной обратной задаче поясним двумя примерами. В модельном примере аномалия Δg обусловлена двумя однородными призмами \hat{S}_1 и \hat{S}_2 (рис. 52), плотности которых, равные 0.15 и 0.1 г/см³, считаются известными. Чтобы исключить фактор неадекватности модельных представлений, поиск допустимых решений обратной задачи ведется среди пар однородных призм с прямоугольным сечением. Чтобы исключить неопределенность в отношении того, действительно ли в построениях использовалось реальное подмножество Q_0 допустимых решений обратной задачи, осуществлялся прямой перебор геометрических параметров призм на достаточно густой сетке их возможных значений с последующей отбраковкой (по значению невязки) неприемлемых решений.

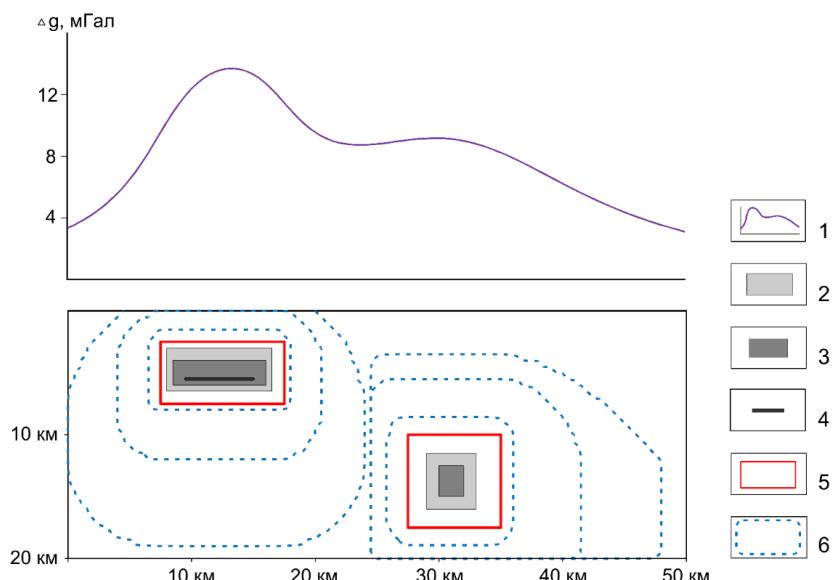


Рис. 52. Результаты решения рудной обратной задачи на основе гарантированного подхода. 1 – поле Δg ; 2, 3, 4 – фрагменты среды, гарантированно принадлежащие источникам поля при условии, что уровень помех в измерениях не превосходит: 0.4 мГал (2), 0.7 мГал (3), 1.2 мГал (4); 5 – границы аномалиеобразующих тел; 6 – границы областей, гарантированно содержащих источники аномалии в предположении, что уровень помех в измерениях не превосходит 0.4 мГал, 1.5 мГал и 2.5 мГал

Представлены решения обратной задачи при различных предположениях относительно максимально возможного уровня ε^{\max} помех в измерениях. Подтвердилось, что в некотором диапазоне значений ε^{\max} уровень неопределенности позволяет выявить фрагмент лишь одного, менее глубоко залегающего тела \hat{S}_1 . Если бы не априорное ограничение, согласно которому тело \hat{S}_1 лежит левее плоскости $x = 25$ км, а тело \hat{S}_2 – правее этой плоскости, то можно было бы отметить, как, начиная с некоторого ε^{\max} , области $D_1^{(1)}$ и $D_1^{(2)}$ начинают пересекаться. Это означало бы, что достигнут такой уровень неопределенности, при котором некоторая часть геологического пространства могла бы быть фрагментом либо первого, либо второго аномалиеобразующего тела.

На рис. 53 приведены результаты решения обратной задачи гравиразведки по данным крупномасштабной гравиметрической съемки, выполненной над месторождением медно-никелево-платиновых руд Норильск-1.

В основу модели среды положены следующие допущения: аномалия в основном обусловлена рудоносной интрузией базит-гипербазитового состава, обладающей эффективной плотностью (по отношению к вмещающим породам трапповой формации) $\delta = 0.2 \text{ г/см}^3$. С помощью монтажного метода при различных центрах кристаллизации (начальных приближениях) было построено около 400 различных вариантов конфигурационных распределений масс, удовлетворяющих априорным допущениям. Их синтез позволил выделить область D_2 (рис. 53), которая, как мы полагаем, с высокой степенью достоверности принадлежит источнику аномалии при предполагаемом уровне помех $\varepsilon = 0.15 \text{ мГал}$ (что примерно отвечает точности гравиметрической съемки).

Смещение этой области в верхнюю часть разреза (относительно фактического положения рудоносной интрузии) связано с неучтенным ореолом уплотнения вмещающих эфузивных пород, что весьма характерно для надинтрузивных зон месторождений Норильского района.

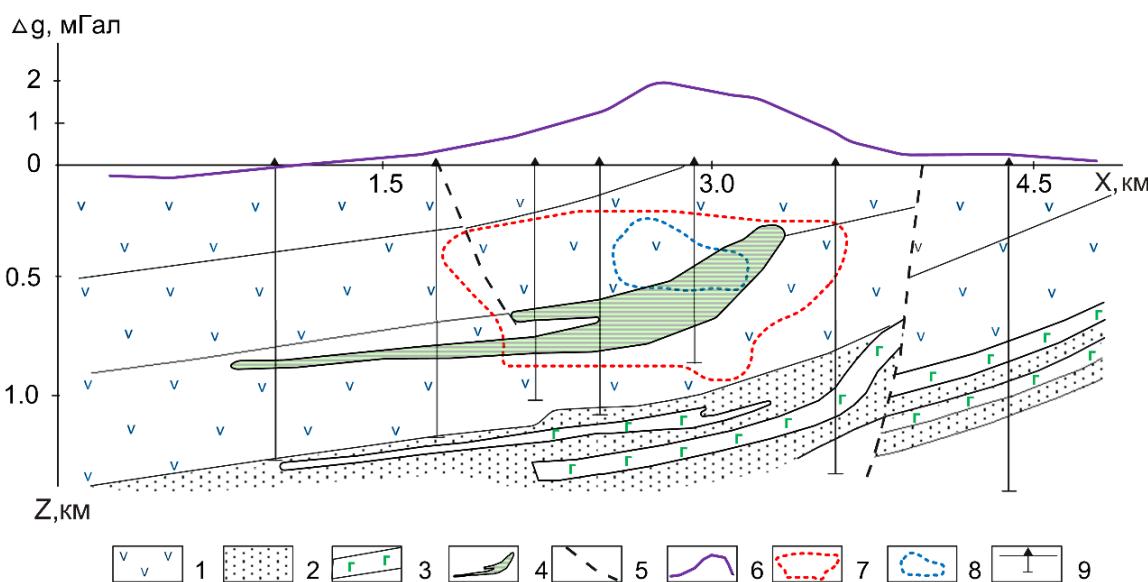


Рис. 53. Результаты интерпретации гравитационного поля месторождения медно-никелево-платиновых руд Норильск-1: 1 – породы туфовой толщи; 2 – отложения тунгусской серии; 3 – силлы габбро-долеритов; 4 – рудоносная интрузия; 5 – дизъюнктивные нарушения; 6 – локальная составляющая наблюденного поля; фрагменты пространства: 7 – построенная оценка области D_1 ; 8 – построенная оценка области D_2 ; 9 – буровые скважины

Перейдем к линейной обратной задаче, когда геометризация носителей источников выполнена исходя из каких-то априорных данных. По результатам численных расчетов обсудим ситуацию, когда задача прогнозирования имеет целью

установить максимальный пороговый уровень ε_{nop} помех в проектируемых измерениях гравитационного поля Δg , при котором гарантия решения поставленной геологической задачи еще будет обеспечена.

Прототипом плотностной модели послужил укрупненный геологический разрез на одном из полиметаллических месторождений Восточного Казахстана. Считается, что в имеющихся геологических условиях можно ожидать, что на глубинах 800–1000 м может находиться оруденение (рис. 54, тело 6). Цель заключается в установлении максимально допустимого уровня ε_{nop} помех в проектируемых измерениях $\Delta \tilde{g}(x_i)$ в 20 точках с шагом 300 м, по результатам которых тело \hat{S}_6 будет строго идентифицировано как рудоносный объект.

На практике границы эффективных плотностей пород в схожих с рассматриваемым случаем геолого-геофизических условиях устанавливаются по данным петрофизических исследований. В нашем примере все варианты возможных значений эффективных плотностей $\hat{\delta}_k$ масс, распределенных по парциальным носителям \hat{S}_k с номерами $k = 1,2,3,4,5$, определяются по табл. 7.9. Соответственно, считается, что при интерпретации гравитационной аномалии ограничения на допустимые значения (теперь уже не природных, а модельных) эффективных плотностей $\hat{\delta}_k$, $k = 1,2,3,4,5$ будут выбраны также в соответствии с табл. 5. Особая ситуация возникает с плотностями $\hat{\delta}_6$ и $\tilde{\delta}_6$. Значение $\hat{\delta}_6$ мы подчинили неравенству $0.63 \leq \hat{\delta}_6 \leq 0.67$ (в $\text{г}/\text{см}^3$), что на практике могло бы соответствовать гипотезе о наличии оруденения с эффективной плотностью $0.65 \pm 0.02 \text{ г}/\text{см}^3$. Подчеркнем, что эффективные плотности первых пяти тел \hat{S}_k , отвечающих за вмещающую среду, играют в нашем случае роль мешающих параметров.

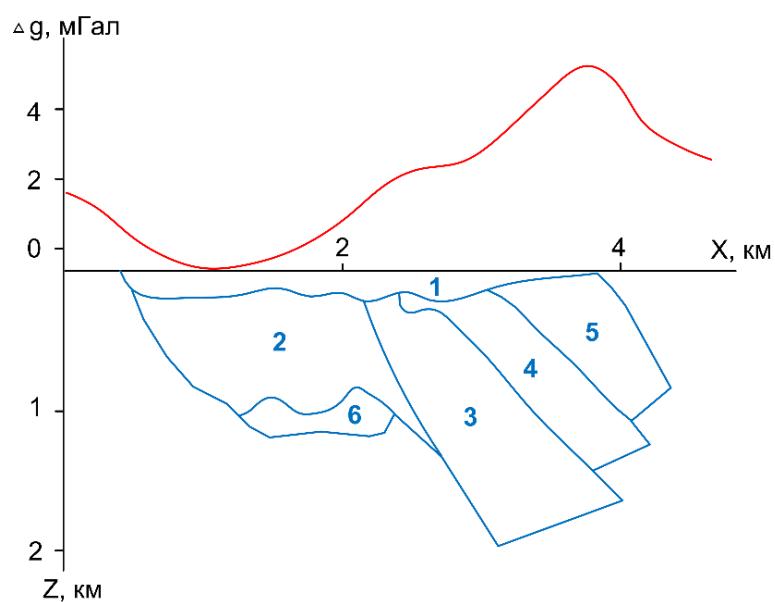


Рис. 54. Геоплотностная модель для иллюстрации методики построения прогнозных оценок качества результатов интерпретации (цифрами показаны номера геологических тел)

Предположим, что геофизик задался нижней границей (пороговым значением) эффективной плотности $\delta_{pyd}^{(\min)}$ оруденения, превышающей эффективные плотности более легких пород, которые заполняют области \hat{S}_k , $k=1,2,3,4,5$. Тогда поставленная задача прогнозирования будет заключаться в отыскании такого (максимального) уровня помех ε_{nop} в планируемых измерениях $\Delta\tilde{g}(x_i)$, что при *всех вариантах* возможного распределения плотностей $\hat{\delta}_k$ и любом раскладе помех ξ_i в гравиметрических измерениях среди *всех множеств* допустимых решений обратной задачи $\tilde{\delta}$, отвечающих каждому из этих вариантов, не найдется *ни одного* такого, где $\tilde{\delta}_6 < \delta_{pyd}^{(\min)}$. Опробуя различные значения уровня помех в измерениях, было установлено, что $\varepsilon_{nop} = 0.03$ мГал.

Таблица 5

Априорные оценки допустимых значений плотностей, в г/см³

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6
δ_{\min}	-0.22	-0.12	0.16	-0.12	0.15	0.63
δ_{\max}	-0.18	-0.08	0.20	-0.08	0.19	0.67

Рассмотрим особенности применения гарантированного подхода к структурной обратной задаче гравиразведки на примере его практического использования при интерпретации гравитационного поля одной из впадин Байкальской рифтовой зоны – Тункинской. Континентальные рифтовые зоны, в число которых входит и Байкальская, относятся к наиболее активным тектоническим областям и могут рассматриваться в качестве природных полигонов для изучения геодинамических процессов на материалах. Одним из параметров, количественно характеризующих эти процессы, является мощность осадков во впадинах, отражающая скорость прогибания кристаллического фундамента. Тункинская кайнозойская впадина проявляется четким минимумом гравитационного поля благодаря существенному контрасту в плотностях слаболитифицированных осадков, заполняющих впадину, и подстилающих ее глубоко метаморфизованных и магматических пород преимущественно докембрийского возраста (кристаллический фундамент). Размеры Тункинской впадины по простиранию в несколько раз пре-вышают ее ширину, что позволяет аппроксимировать впадину двухмерным объ-ектом типа линзы, верхняя граница которой совпадает с дневной поверхностью. На коротких профилях вкрест простирания впадины региональный фон доста-точно уверенно может быть приближен полиномом первой степени. Плотность пород кристаллического фундамента определяется как средневзвешенная в пре-делах горного обрамления впадины и принимается постоянной. Эффективная плотность σ рыхлых отложений изменяется с глубиной z по экспоненциальному закону: $\delta(z) = - (0.08 + 0.84e^{-0.41z})$.

В качестве модельного класса M источников поля, элементами которого аппроксимируется осадочная толща, в выбран «пакет» бесконечно протяженных (вдоль оси y) прямоугольных призм Ω_k , $k = 1, 2, \dots, K$. В результате первичной обработки измерений был снят линейный фон. При изучении морфологии подошвы осадочной толщи, гарантированный подход может предложить в качестве решения обратной задачи *внутреннюю* $\Gamma^{(\min)}(x)$ и *внешнюю* $\Gamma^{(\max)}(x)$ огибающие семейства допустимых контактных границ.

Расчеты, выполненные для Тункинской впадины, показали, что в данных гравиметрических измерений содержится информация, достаточная для уверенного определения флангов плотностной границы между осадочными породами и кристаллическим фундаментом (рис. 55). С точностью до заранее оговоренной ошибки аппроксимации истинной границы раздела модельной границей (она не превышала 200 м) внешняя и внутренняя огибающие семейства допустимых границ совпали на флангах с границей, отвечающей минимуму среднего значения модуля невязки поля – 0.8 мГал.

Независимо от выводов, которые следуют из результатов интерпретации, надежность оценивания глубин контакта на периферийных участках была подтверждена данными бурения в Тункинской долине (скважина Р-1). Как и следовало ожидать, проявление приближенной эквивалентности, присущей обратным задачам гравиразведки, усиливается по мере приближения к участкам более глубокого залегания фундамента. Реалистичность полученных оценок глубин залегания изучаемых границ подтвердила скважина Р-2. Пройденная до отметки 2100 м, она пересекла «оптимальную» границу, но фундамент так и не встретила.

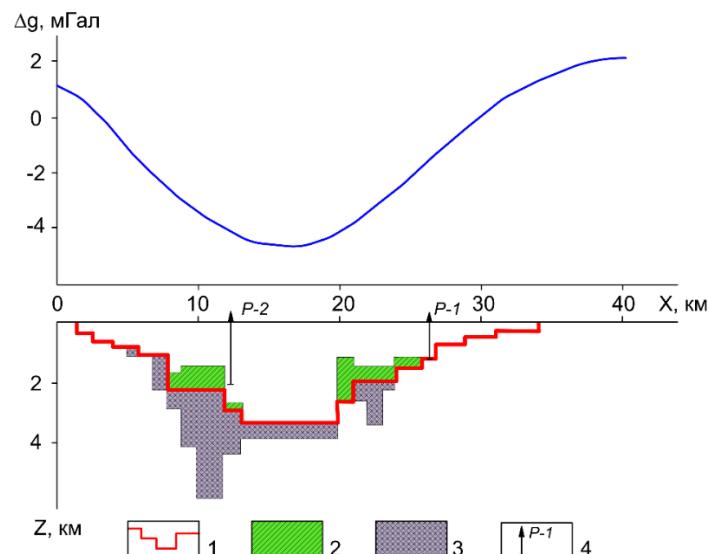


Рис. 55. Результаты применения гарантированного подхода к решению структурной обратной задачи. Тункинская впадина: 1 – контактная граница, отвечающая минимуму невязки среди всех допустимых границ; 2, 3 – область, заключенная между огибающими допустимого множества контактных границ; 4 – скважины, их номера

5.2. Аддитивные технологии

Аддитивные технологии решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки в условиях неопределенности позволяют извлекать из измерений поля информацию об изучаемых геологических объектах, недоступную распространенным методам количественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Их можно рассматривать как продукт дальнейшего развития идей, заложенных в гарантированный подход к решению обратных задач, рассматриваемый нами в предыдущем разделе. Концепция аддитивных методов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий исходит из объективного факта существования множества Q допустимых решений обратной задачи и также использует отличные от известных математические формы представления результатов интерпретации. Как и в случае гарантированного подхода, основной предпосылкой к тому, что концепция аддитивных методов интерпретации может быть реализована на практике, является наличие полностью автоматизированных алгоритмов построения достаточно представительного подмножества $Q_0 \subset Q$ допустимых решений обратной задачи.

Аддитивные методы интерпретации – это очередной шаг в направлении повышения информативности геофизических методов разведки. Собственно идея аддитивных методов решения обратных задач заключается в том, чтобы, отправляясь от подмножества Q_0 , построить распределение некоторого параметра $\lambda(X)$, $X \in D$, ассоциируемого с оценкой вероятности обнаружения источников поля в точках изучаемой части D геологического пространства. Если такое распределение «приложить» к любой пространственной области, претендующей на роль истинного носителя аномалиеобразующих масс, то получим обобщенное допустимое решение обратной задачи с ранжированием отдельных фрагментов модельного носителя по степени вероятности обнаружения в них возмущающих масс. Таким образом, если гарантированный подход, ориентированный на извлечение достоверной информации об источниках поля, следует отнести к детерминистскому направлению в теории интерпретации, то аддитивные методы скорее тяготеют к статистическим приемам обработки информации (в нашем случае – множества допустимых решений обратной задачи).

Аддитивные технологии позволяют провести оценку вероятности p наличия возмущающих масс в пределах области $D_1 \setminus D_2$. Путем прямой проверки для каждого «элементарного» объема ω_i геоплотностной среды можно установить число m_i построенных носителей $S_m \in Q_0$, фрагментом которых он является. Если неизвестный истинный носитель масс \hat{S} находится среди этих носителей, то $\omega_i \subset \hat{S}$. Соответственно, частоту, с которой среди всех n найденных допустимых решений обратной задачи встречаются те, которые включают в себя область

ω_i , можно принять за оценку искомой вероятности $p_i = m_i/n$. Функцию пространственных координат $\lambda_1(\omega) = p(x, y, z)$ с областью определения $[0, 1]$ назовем функцией локализации, характеризующей структуру множества Q_0 .

Рассмотрим синтетический пример: измерения гравитационного поля, выполненные по горизонтальному профилю длиной 40 км с шагом 500 м, обусловлены тремя телами S_1 , S_2 и S_3 эффективной плотности $\delta_1 = 0.15$, $\delta_2 = 0.2$ и $\delta_3 = 0.3$ ($\text{г}/\text{см}^3$) соответственно. Можно провести аналогию между выбранной плотностной моделью и некоторыми интрузивными телами, залегающими в гравиактивном слое мощностью до 10 км (рис. 56).

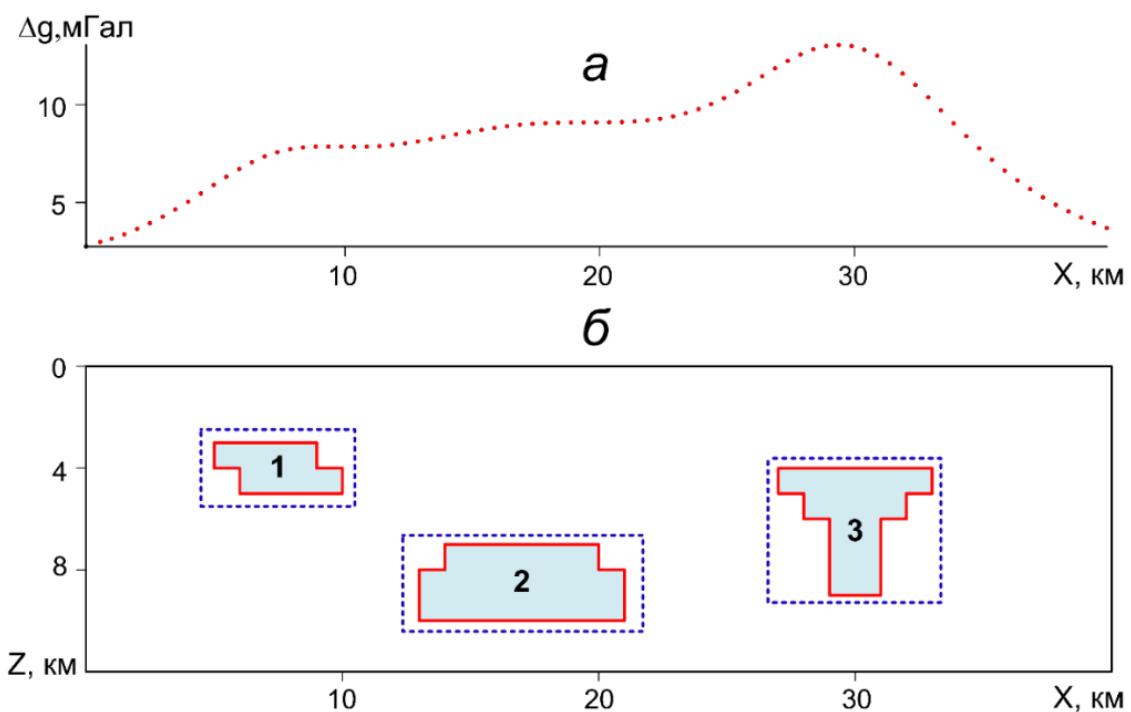


Рис. 56. Модельный пример: гравитационное поле и возмущающие объекты.

Синий пунктир: области, в которых находились центра кристаллизации при построении допустимых решений обратной задачи методом РНК

С помощью метода РНК для уровня помех в измерениях поля 0.1 мГал было построено 1189 допустимых решений обратной задачи, достаточно заметно различающихся друг от друга (рис. 57).

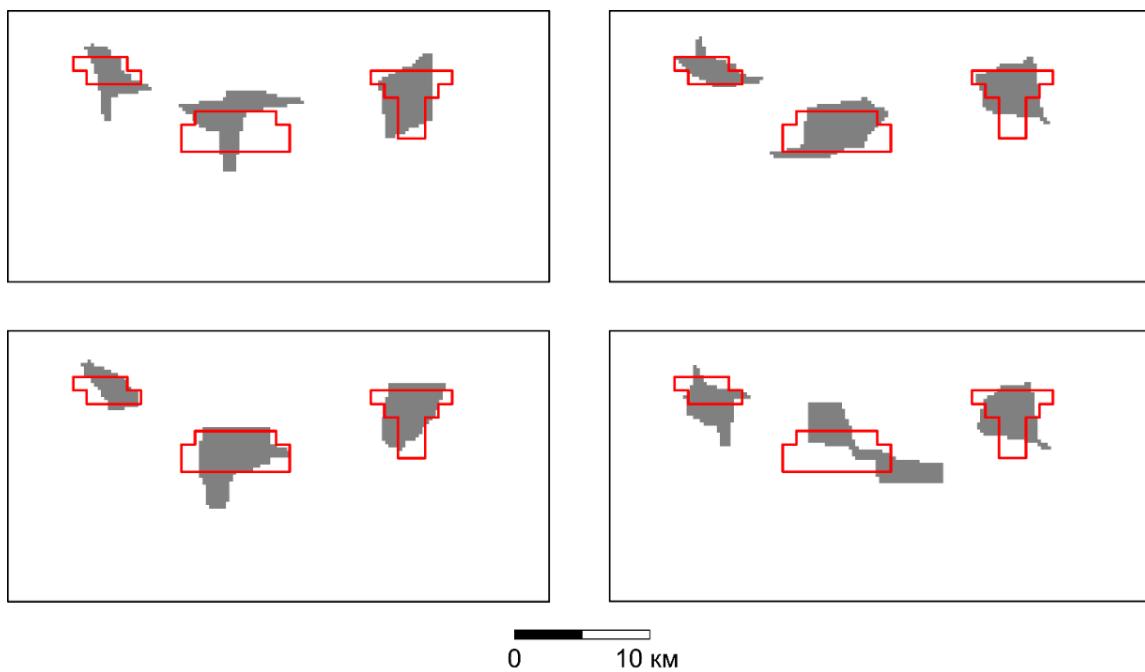


Рис. 57. Случайно выбранные допустимые решения обратной задачи гравиразведки и истинные возмущающие объекты

На рис. 58 представлена вертикальная карта изолиний функции локализации λ_1 . Характерно, что она имеет три экстремума – по числу источников аномалии, которые приурочены к этим источникам. Функция локализации принимает значения, близкие к максимальному, в точках, тяготеющих к центрам тяжести каждого из трех тел \hat{S}_t . Для первого и второго тел эти значения равны 0.992 и 0.902 соответственно. Максимально возможное значение 1.0 функция локализации принимает вблизи центра тяжести третьего тела.

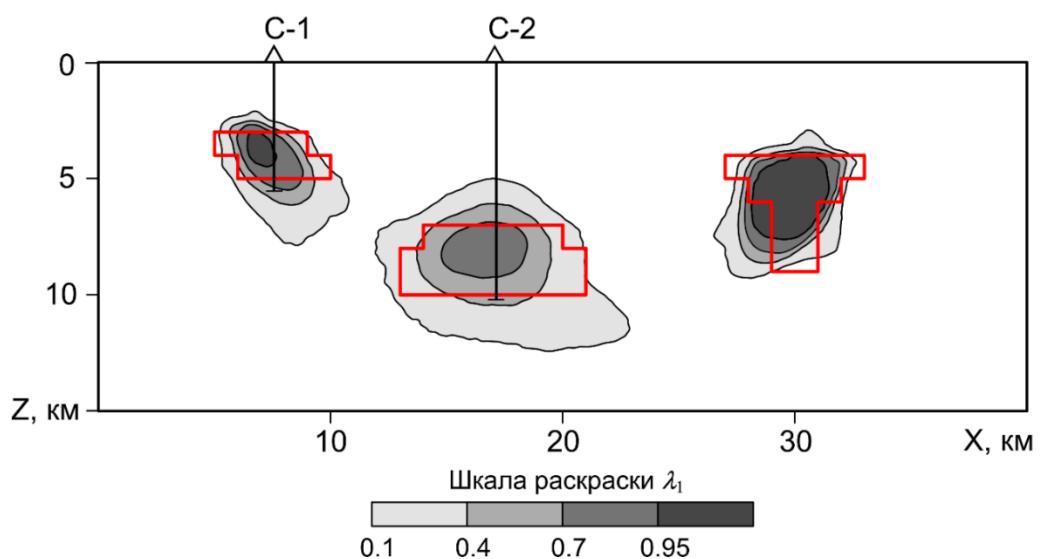


Рис. 58. Вертикальная карта изолиний функции локализации λ_1 и планируемые скважины C-1, C-2

Можно предложить и другие оценочные функции, в частности функцию обнаружения λ_2 , представляющую собой оценку вероятности пересечения возмущающего объекта ломанной линией с заданными пространственными координатами. На рис. 59 приведены графики функции обнаружения λ_2 возмущающих масс, построенные на отрезках прямых, проходящих вдоль полотна планируемых скважин С-1, С-2. На отрезке, пересекающем тело 1, оно проявлено в гравитационном поле более контрастно, чем тело 2, так как значения функции уже в районе его верхней кромки близки к единице и далее с глубиной достигают значения 0.992. На отрезке, пересекающем тело 2, максимальное значение функции обнаружения лишь слегка превышает 0.8. Можно рекомендовать бурение заверочной скважины С-1 и с вероятностью 99.2 % ожидать успех. Соответственно, с вероятностью, превышающей 80 %, можно прогнозировать подсечение тела 2 скважиной С-2.

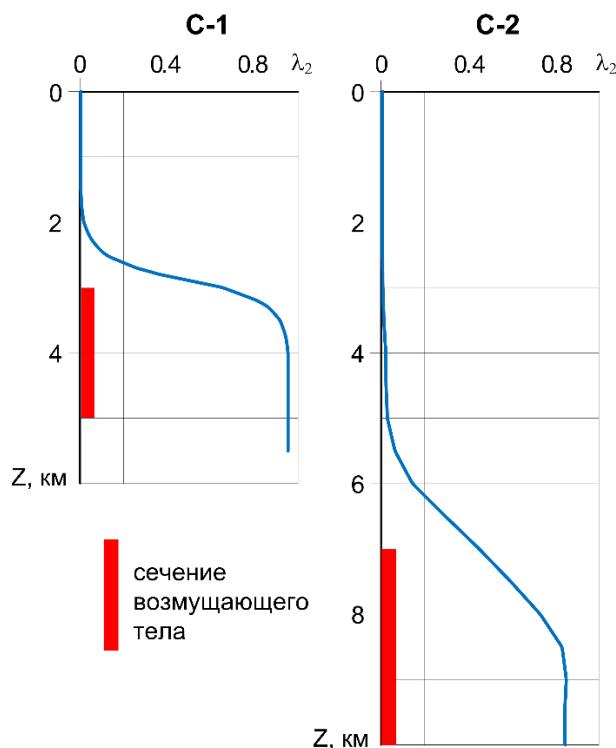


Рис. 59. Графики функции обнаружения λ_2 вдоль полотна скважин С-1 и С-2

При работе с множеством допустимых решений обратной задачи можно использовать различные критерии принятия решений в условиях неопределенности, а не только традиционный критерий минимума среднего квадрата невязки наблюденного и модельного полей. Таким образом можно выбрать несколько частных решений обратной задачи, каждое из которых будет являться оптимальным S^{opt} (т.е. предположительно наиболее информативным) относительно всех прочих. Окончательный выбор одного «наилучшего» решения обратной задачи гравиразведки остается прерогативой интерпретатора и не может быть строго формализован.

Рассмотрим модельный пример: на профиле длиной 10 км с равномерным шагом задано поле Δg , обусловленное тремя 2D-объектами с избыточной плотностью $\delta_1 = 0.15 \text{ г}/\text{см}^3$, $\delta_2 = 0.45 \text{ г}/\text{см}^3$, $\delta_3 = 0.25 \text{ г}/\text{см}^3$ (слева направо), общая площадь B_s сечений которых составила 3.11 км^2 . Точное гравитационное поле амплитудой до 3.5 мГал было осложнено нормально распределенной помехой с нулевым средним значением и среднеквадратическим отклонением 0.35 мГал. Решение ОЗГ проводилось монтажным методом, число локальных источников считалось известным. При поиске каждого очередного допустимого носителя местоположения трех элементов ω_a , служащих начальными приближениями для каждого связного парциального носителя, выбирались случайным образом. При пороговом значении невязки «наблюденного» и модельного полей $\varepsilon = 0.35 \text{ мГал}$ было получено 974 допустимых решения обратной задачи. Приведены допустимые решения, оптимальные по трем критериям: минимаксному, минимуму невязки, максимуму апостериорной вероятности (критерий Лапласа), и их характеристики (табл. 6, рис. 60). Как очевидно, широко использующийся при решении обратных задач гравиразведки критерий минимума невязки заметно уступает по эффективности двум другим критериям.

Таблица 6

Характеристика решений обратной задачи гравиразведки

Критерий выбора решения обратной задачи	Площадь B_p	Площадь $B_p \cap B_s$	Площадь $B_p \cup B_s$
Минимум невязки	2.99 км^2	1.09 км^2	35 %
Минимакс	3.03 км^2	1.71 км^2	55 %
Максимум апостериорной вероятности	3.35 км^2	1.83 км^2	59 %

Примечание: B_p – площадь вертикальных сечений подобранных объектов.

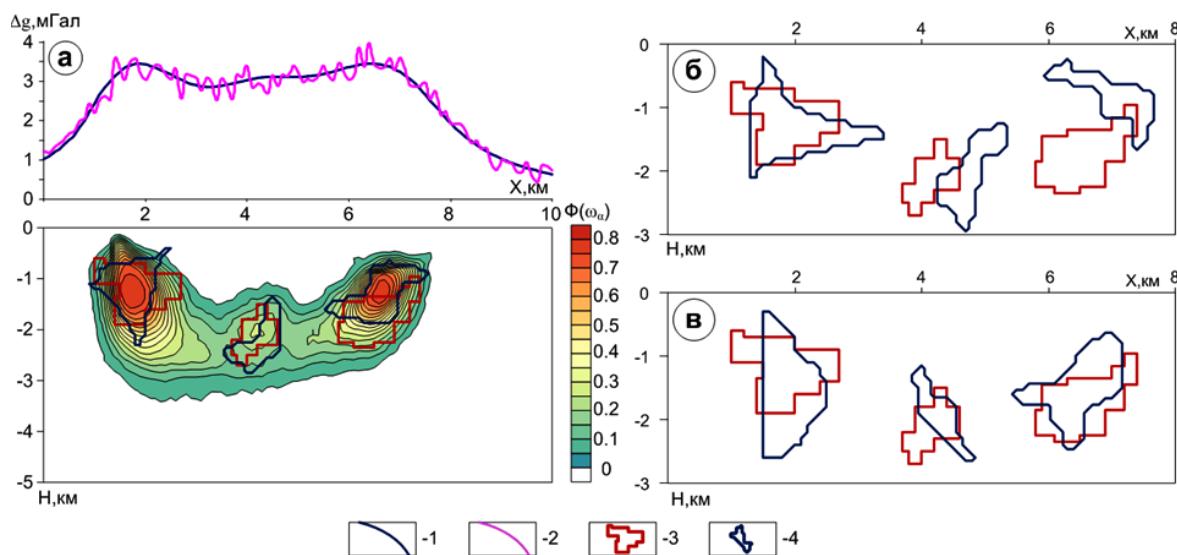


Рис. 60. Решения обратной задачи гравиразведки монтажным методом, отвечающие: критерию минимакса (а); минимуму невязки полей (б); максимуму апостериорной вероятности (в): 1 – модельное поле; 2 – «наблюденное» поле; 3 – источники поля; 4 – подобранные объекты

Представленные процедуры выбора базируются на оценке степени пространственной близости интерпретационных моделей и предполагают равную вероятность соответствия каждой из них реальным источникам поля. Как показали вычислительные эксперименты, использование этих процедур позволяет получить более достоверные результаты, чем алгоритмы многомерной оптимизации, традиционно использующиеся в методе автоматизированного подбора.

В качестве новой математической формы представления результатов решения нелинейной обратной рудной задачи гравиразведки (в т.ч. и смешанной) предлагается использовать «пакет информации», включающий в себя несколько оценочных функций $\lambda(\omega)$, а также одну или несколько интерпретационных моделей $S_{\text{опт}}^*$, отвечающих выбранным критериям оптимальности (рис. 61). Это представление обеспечивает не только выявление скрытой информации, но и приближенную оценку точности интерпретации.

Существует принцип дополнительности, сформулированный Нильсом Бором в 1927 г., согласно которому для полного описания квантово-механических явлений необходимо применять два взаимоисключающих («дополнительных») набора классических понятий, совокупность которых даёт исчерпывающую информацию об этих явлениях. В дальнейшем появилась концепция дополнительности, охватывающая не только физику, но и биологию, психологию, культурологию и др. гуманитарные науки. С методологических позиций предлагаемые математически формы представления результатов интерпретации геопотенциальных полей могут рассматриваться как еще одно естественно-научное воплощение данной концепции.

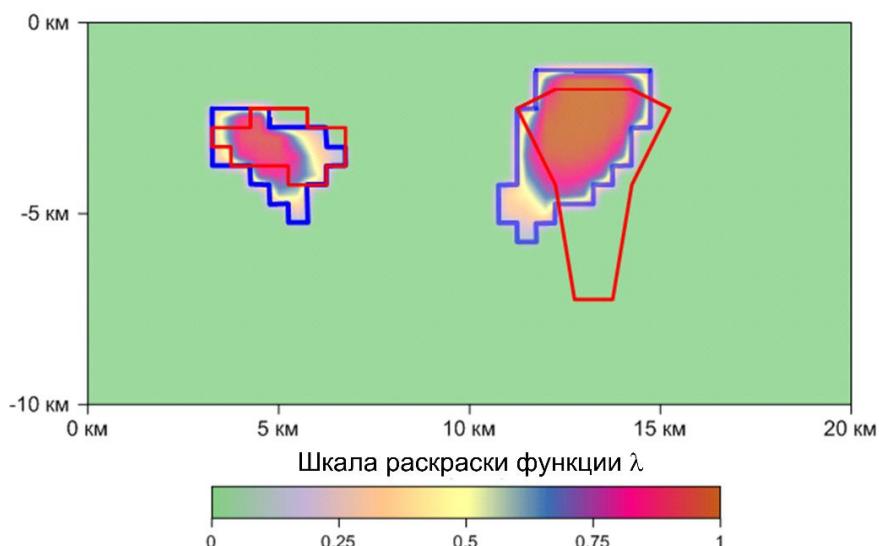


Рис. 61. Новая математическая форма представления результатов интерпретации гравитационного поля для модели двух интрузивных тел: пространственное распределение функции локализации $\lambda(\omega)$, совмещенное с частным решением обратной задачи $S_{\text{опт}}^*$, отвечающим максимуму критерия Лапласа.

Примечание: красный контур – аномалиеобразующие объекты;
синий контур – результат решения обратной задачи

Весьма перспективным направлением использования аддитивных технологий является интерпретация мониторинговых гравиметрических наблюдений. С целью выявления вариаций силы тяжести, связанных с техногенным воздействием на геологическую среду, на Верхнекамском месторождении калийно-магниевых солей проводятся повторные и мониторинговые гравиметрические наблюдения, которые выявляют динамику процессов деформации породных масс и позволяют осуществить прогноз опасных и катастрофических ситуаций. По результатам повторных наблюдений рассчитывается динамическая аномалия силы тяжести $\Delta g_{\text{дин}}$, определяемая как разность между последующими и предыдущими значениями силы тяжести. Динамические аномалии не искажены влиянием рельефа местности и не отражают неизменные плотностные неоднородности геологического разреза. Поскольку все неизменные составляющие гравитационного поля в равной степени присутствуют в любой паре наблюдений, динамическая аномалия отражает только конкретный горнотехнический или быстротекущий геологический процесс, происходящий в определенном интервале времени. Таким образом, источник динамической аномалии $\Delta g_{\text{дин}}$ представляет собой изолированную область, где произошли изменения плотности пород, расположенную в однородной вмещающей среде (рис. 62).

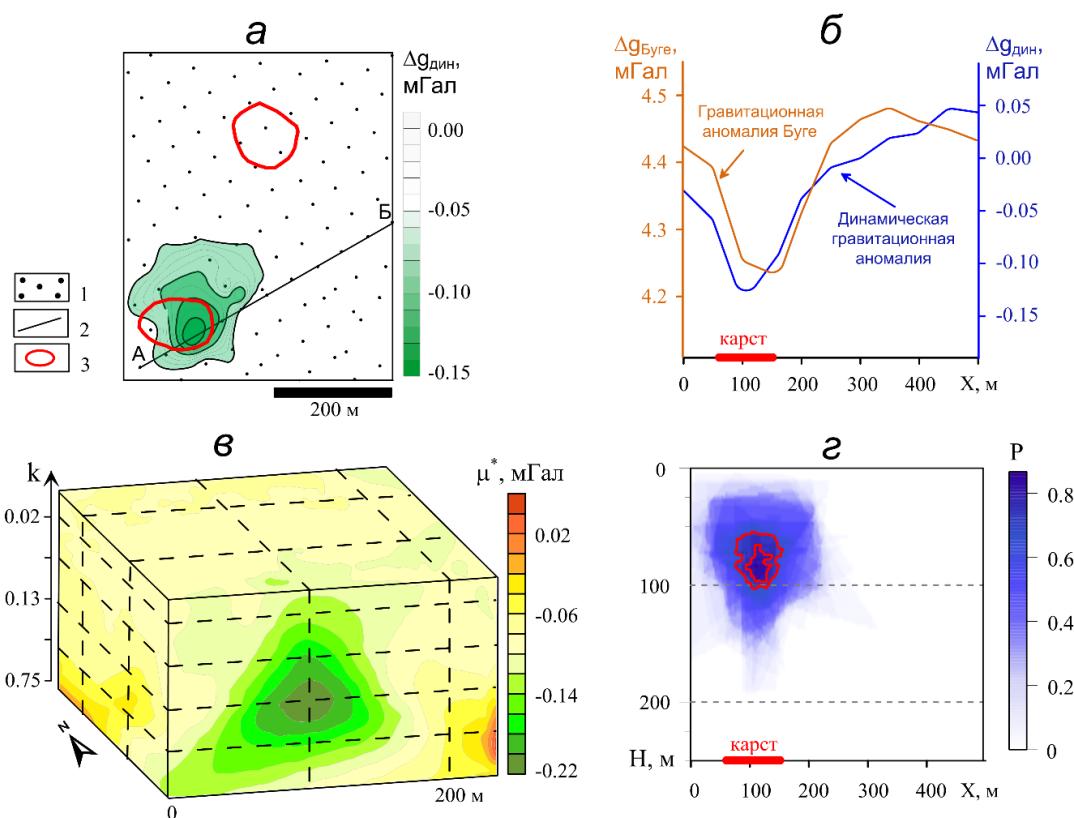


Рис. 62. Интерпретация данных гравиметрического мониторинга на Верхнекамском месторождении калийно-магниевых солей:
а – участок гравиметрической съемки; б – гравитационные аномалии;
в – куб квазиплотностей; г – функция локализации:
1 – пункты гравиметрических наблюдений; 2 – профиль АБ;
3 – провалы земной поверхности

Отмечается пространственное совпадение динамической и локальной отрицательной аномалий силы тяжести (рис. 62б), что позволяет предположить существование природных зон разуплотнения пород, к которым приурочены техногенные карстовые процессы, приводящие к провалам земной поверхности. Интерпретационная томография – построение куба квази плотностей μ^* в системе ВЕКТОР – свидетельствует о наличии зоны разуплотнения пород, приуроченной к водозащитной соляной толще (рис. 62в). Параметр μ^* не имеет размерности физического параметра плотности, а шкала глубин построенных разрезов и 3D-диаграмм поля не отвечает истинной и оцифровывается в коэффициентах трансформации (k). Построение функции локализации λ_1 в трехмерном варианте с использование 126 допустимых решений обратной задачи позволяет оценить параметры зоны развития соляного карста. В частности, по профилю АБ интервал ее глубин составляет 50–100 м, а величина разуплотнения пород – 0,10 г/см³ (рис. 62г).

В заключении нужно еще раз подчеркнуть, что монтажный метод является лишь *одним из возможных* инструментов реализации аддитивных технологий интерпретации.

5.3. Использование метода роя частиц для построения множества допустимых решений обратной задачи

В настоящее время методы искусственного интеллекта (ИИ) являются одним из приоритетных направлений развития науки в России и в мире. В английском языке термин *artificial intelligence*, в русском переводе означающий ИИ, означает лишь *искусственное умение рассуждать разумно*, а не «интеллект» (*intellect*). Единого определения для ИИ не существует. Согласно А. В. Смолину, «интеллектуальной называется система, способная целеустремленно, в зависимости от состояния информационных входов, изменять не только параметры функционирования, но и сам способ своего поведения». Академик В. Н. Страхов еще в конце XX в. писал, что в будущем необходимо «создание основ специализированного искусственного интеллекта как базовой позиции в становлении автоматической компьютерной интерпретации». Следует отметить, что геофизика является хорошо структурированной предметной областью, в которой уже существуют апробированные надежные методы, и некоторые из задач, тесно связанные с ИИ, в ней уже успешно решаются. В качестве примера можно привести алгоритмы классификации многомерных данных и распознавания образов.

Метод роя частиц (МРЧ, англ. *particle swarm optimization, PSO*) рассматривается в теории ИИ как метод эволюционной оптимизации и позволяет моделировать поведение децентрализованной самоорганизующейся системы. Первоначально этот метод был предложен для описания движения птичьих стай с целью выяснения законов, управляющих синхронным движением и быстрой сменой

направления полета. С этих позиций стая птиц рассматривается как система роевого интеллекта (англ. *swarm intelligence*), состоящая из множества частиц, локально взаимодействующих между собой и окружающей средой.

Текущее состояние частицы характеризуется координатами в пространстве решений, а также вектором скорости перемещения. Оба этих параметра выбираются случайным образом на этапе инициализации. Кроме того, каждая частица хранит координаты лучшего из найденных ей решений, а также лучшее из про найденных всеми частицами решений – этим имитируется мгновенный обмен информацией между птицами. В итоге локальные и в некоторой степени случайные взаимодействия приводят к возникновению интеллектуального группового поведения, неконтролируемого отдельными особями.

В настоящее время МРЧ широко применяется в задачах машинного обучения, параметрической и структурной оптимизации в области проектирования, в областях робототехники, биохимии, биомеханики и др. Основной теоретической предпосылкой для решения обратных задач гравиразведки с использованием МРЧ является существование множества равновероятных (в общем случае) допустимых решений, отвечающих априорным представлениям о геометрических параметрах и эффективной плотности источников поля, а также обеспечивающих требуемое значение невязки наблюденного и модельного полей ε_0 . Рассмотрим возможность решения нелинейной обратной 2D-задачи гравиразведки рудного типа для простейшей ситуации (одиночный изолированный объект с известной эффективной плотностью) с использованием МРЧ. В частности, таким объектом может быть интрузивное тело или рудная залежь, которые требуется локализовать в разрезе.

Рассмотрим синтетический пример: на профиле длиной $l = 25$ км зафиксирована аномалия гравитационного поля $\Delta g^{\text{набл}}$ с амплитудой до 22 мГал, обусловленная двухмерной горизонтальной восьмиугольной призмой, обладающей эффективной плотностью $0.5 \text{ г}/\text{см}^3$. Значения поля осложнены нормально распределенной помехой с интенсивностью до 5 % от максимума аномалии. Шаг Δx между точками составляет 1 км. В области поиска решения обратной задачи D размером 25×10 км (разрезе) разместим $N = 100$ призм с плотностью $0.5 \text{ г}/\text{см}^3$ (частиц). Координаты x_0, z_0 центра тяжести C призмы и расстояния r от него до угловых точек – равномерно распределенные случайные числа. Величина угла при точке C между r_j и r_{j+1} всегда составляет 45° . Таким образом, каждая призма характеризуется вектором параметров $\mathbf{p}_i = \{x_0, z_0, r_1, r_2, \dots, r_8\}, i = \overline{1, N}$, которому соответствуют модельное поле $\Delta g_i^{\text{мод}}$ и функционал $F2 = \|\Delta g^{\text{набл}} - \Delta g_i^{\text{мод}}\|_{L^2}$. При генерации случайных призм выполнялось условие их принадлежности подобласти $D_0 \subset D$.

Состояние всего роя характеризуется наилучшим состоянием его частиц, таким образом задача локализации источника поля сводится к минимизации

функционала $\min_{p \in D} F_2(\mathbf{p})$, которая осуществляется в течение некоторого времени, разбитого на $k = \overline{1, M}$ интервалов. Скорость частицы $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{10}$ в текущий момент времени $k+1$ определяется суммой трех слагаемых:

$$\mathbf{v}_i(k+1) = \alpha \mathbf{v}_i(k) + \beta \mathbf{U}_1 \otimes [\mathbf{L}(k) - \mathbf{p}(k)] + \gamma \mathbf{U}_2 \otimes [\mathbf{G}(k) - \mathbf{p}(k)], \quad (30)$$

т.е. инерционной, когнитивной и социальной компонент. Инерционная компонента зависит от скорости частицы в предыдущий момент времени $\mathbf{v}_i(k)$, когнитивная отражает стремление частицы к собственному наилучшему положению (локальному рекорду) $\mathbf{L}(k)$, социальная показывает ее движение к лучшему положению роя (глобальному рекорду) $\mathbf{G}(k)$. Символ \otimes означает прямое (покомпонентное) произведение векторов. Длины случайных векторов \mathbf{U} равномерно распределены в интервале $[0, 1]$, α, β, γ – коэффициенты, которые являются постоянными величинами или зависят от времени k . В данном случае значения коэффициентов являлись константами и составляли $\alpha = 0.7298$, $\beta = \gamma = 1.4962$.

Устойчивость процесса оптимизации в МРЧ обеспечивает ввод ограничений на максимальные значения скорости частиц $\mathbf{v}_i < \mathbf{v}_{max}$. Выбор величины \mathbf{v}_{max} столь же важен, как выбор параметра регуляризации в классических методах решения обратной задачи гравиразведки. В общем случае для рассматриваемой задачи целесообразно опираться на соотношение $\mathbf{v}_{max} \leq 0.5\Delta x$ для параметров $\{x_0, z_0\}$ и условие $r_j^M \leq 0.9r_j^{M-1}$, $1 \leq j \leq 8$.

На рис. 63 представлены исходные данные и конечное положение используемого роя частиц. После выполнения $M = 50$ итераций была достигнута сопоставимая с уровнем помех величина невязки $F_2 = 1.29$ мГал (рис. 64) для всех частиц. Таким образом было получено 100 допустимых решений обратной задачи гравиразведки. Далее для тех значений интерпретируемого поля $\Delta g^{\text{набл}}$ были выполнены 32 цикла МРЧ при $N = 50$, $M = 50$. Суммарное время работы компьютера с процессором Intel Core i5-1035G1 CPU @ 1.00GHz составило около 15 с. Для каждого из этих циклов выбиралось единственное наилучшее решение, отвечающее минимальному значению F_2 . Таким образом было сформировано Ω допустимых решений обратной задачи: $card(\Omega) = 32$, использованное для построения функции локализации, представленной на рис. 65.

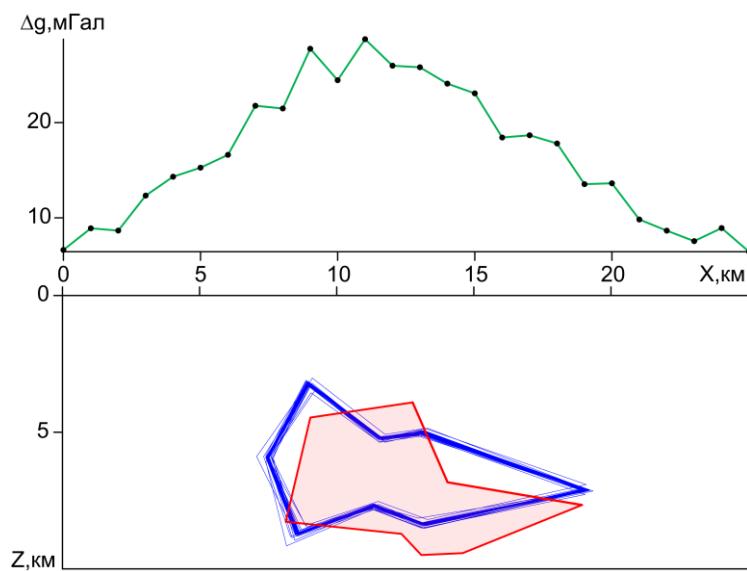


Рис. 63. График аномалии силы тяжести, исходная аномалиеобразующая призма (красный контур с заливкой) и подобранные объекты (100 синих контуров)

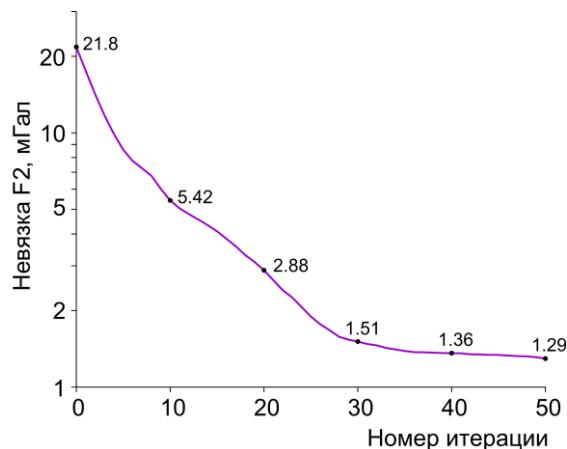


Рис. 64. График изменения среднего значения невязки роя частиц в процессе оптимизации

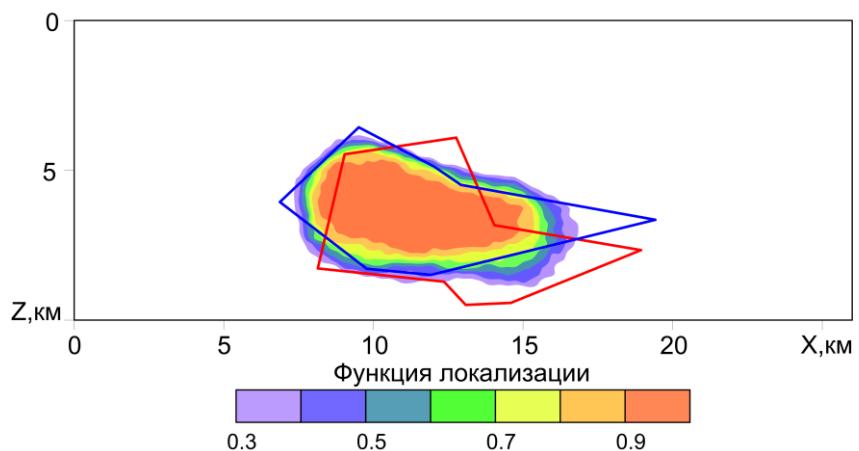


Рис. 65. Функция локализации по 32 лучшим решениям обратной задачи гравиразведки, аномалиеобразующий объект (красный контур) и подобранный объект, отвечающий минимуму невязки (синий контур)

Полученные результаты подтверждают высокую перспективность применения МРЧ в области прикладной геофизики для моделирования источников аномалий геопотенциальных полей. Разработанный алгоритм обладает высокой скоростью сходимости, что делает возможным получение приемлемого по качеству решения обратной задачи гравиразведки даже при небольшом числе итераций. Нужно отметить, что для получения близких результатов с помощью метода Монте-Карло требуется примерно в 100 раз больше пробных решений прямой задачи гравиметрии. Особый интерес представляет синтез МРЧ и аддитивных технологий количественной интерпретации геопотенциальных полей, один из примеров которого представлен выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возросшая сложность геологических задач, решаемых с помощью гравиразведки и магниторазведки, требует повышения достоверности результатов количественной интерпретации. Само по себе повышение точности измерений еще не в состоянии обеспечить требуемый рост качества, так как многое зависит от эффективности методов решения обратных задач. В учебном пособии представлены теоретические сведения, а также модельные примеры и практические результаты, связанные с решением обратных задач, частично выходящие за рамки курсов «Гравиразведка» и «Магниторазведка». Приводятся основные сведения из классической теории решения некорректных задач, определившей на многие годы основное направление развития методов решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки.

Однако в условиях существования множества априори равноправных и допустимых вариантов интерпретации неразумно представлять его каким-то одним из его элементов (оптимальным решением) обратной задачи. Идея использовать новые математические формы представления результатов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, в которых не отдавалось бы предпочтение ни одному из допустимых решений обратной задачи, воплощена в аддитивные технологии решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки. Эти технологии интерпретации позволяют охарактеризовать отдельные элементарные объемы изучаемой геоплотностной среды по значению оценки вероятности наличия в них какой-то части возмущающих масс.

Основной вычислительной особенностью аддитивных технологий является потребность в полностью автоматизированных методах поиска отдельных допустимых решений обратной задачи. Поэтому в учебном пособии достаточно подробно рассмотрены монтажные методы построения допустимых вариантов интерпретации в конечноэлементных классах источников поля. Еще одним инструментом для этого могут являться интеллектуальные компьютерные технологии, в частности метод роя частиц.

При написании пособия использовалась информация из работ П. И. Балка, Ю. И. Блоха, Е. Г. Булаха, В. Н. Глазнева, М. С. Жданова, А. И. Кобрунова, О. М. Муравиной, В. Н. Страхова и др. При изложении материала сделан акцент на практическое применение рассмотренных подходов и методов решения обратных задач, в качестве ряда примеров представлены результаты геофизических исследований, выполненных с участием автора. При выполнении расчетов использованы компьютерные технологии, разработанные в Горном институте УрО РАН. В учебное пособие вошли результаты исследований, полученные при работе по грантам РФФИ (проекты 20-15-00014, 19-15-00012, 15-05-01823, 18-05-70094 «Ресурсы Арктики»).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Математические термины, встречающиеся в тексте

Вектор – 1) направленный отрезок прямой в евклидовом пространстве; 2) элемент векторного пространства.

Матрица – прямоугольная таблица, заполненная числами. Важнейшие характеристики матрицы – число строк m и число столбцов n . Если у матрицы одинаковое число строк и столбцов, ее называют квадратной. Обозначают матрицы большими латинскими буквами. Сами числа называют элементами матрицы и характеризуют их положением в матрице, задавая номер строки и номер столбца и записывая их в виде двойного индекса, причем сначала записывают номер строки, а затем столбца. Например, a_{14} есть элемент матрицы, стоящий в первой строке и четвертом столбце, a_{32} стоит в третьей строке и втором столбце.

Минимизация функции или функционала – нахождение точек минимума и/или значений функции в этих точках функции или функционала.

Метрика – неотрицательная функция $\rho(x,y)$ двух точек множества, удовлетворяющая трем аксиомам 1). $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$ (аксиома тождества); 2). $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$ (аксиома треугольника); 3) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (аксиома симметрии). Метрика вводит понятие расстояния между элементами множества.

Мера – неотрицательная аддитивная функция множества, равная нулю на пустом множестве; является обобщением понятий длины, площади, объема. Обозначается для множества A через $\text{mes } A$. В частности, мера Лебега отрезка на вещественной прямой равна его длине, мера Лебега многоугольника на плоскости равна его площади.

Множество – объединение в единое целое вполне различаемых элементов, задается либо перечислением его элементов, либо указанием их характеристического свойства. Конечное множество – либо пустое множество, либо множество, содержащее n элементов, где n – натуральное число. Ограниченнное множество – точечное множество, для которого существует шар, целиком его содержащий. Точечное множество – множество, элементами которого являются точки прямой, плоскости или пространства.

Норма – неотрицательное число $\|x\|$, сопоставляемое каждому элементу x некоторого векторного пространства и удовлетворяющая следующим условиям: 1) $\|x\|=0$ только при $x=0$; 2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$, где λ – любой скаляр; 3) $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$. Норма обобщает понятие длины вектора или абсолютного значения числа.

Оператор – 1) отображение векторного пространства на векторное пространство; 2) отображение множества, наделенного структурой, на другое такое множество.

Линейный оператор – отображение одного векторного пространства в другое, при котором сумма отображается в сумму, а произведение на скаляр в произведение на тот же скаляр.

Обратный оператор необходим для отображения множества, определенного заданным оператором $P: X \rightarrow Y$, это оператор $P^{-1}: Y \rightarrow X$, ставящий каждому элементу множества Y его прообраз X .

Отображение – соответствие, при котором каждому элементу одного множества сопоставляется единственный элемент другого множества; обозначается $\phi: A \rightarrow B$.

Взаимно-однозначное отображение (инъекция) – однозначное отображение множества A в множество B ; при этом каждый элемент из A имеет образ в B , однако некоторые элементы из B могут не иметь прообраза в A .

Оптимизация (от лат. *optimum* – наилучшее) – процесс нахождения экстремума (глобального максимума или минимума) определённой функции или выбора наилучшего (оптимального) варианта из множества возможных.

Многомерная оптимизация – процесс нахождения экстремума целевой функции, которая зависит от нескольких аргументов (причем иногда их число может быть весьма большим).

Пространство – логически мыслимая структура, служащая средой, в которой осуществляются другие структуры, формы или те или иные конструкции, а также фиксируются отношения между ними. Евклидово пространство – конечномерное действительное векторное пространство, в котором определено скалярное произведение для любых двух векторов, причем скалярный квадрат ненулевого вектора положителен; трехмерное евклидово пространство является пространством нулевой кривизны. Метрическое пространство – точечное множество с определенной на нем метрикой.

Функциональное пространство – пространство, элементы которого можно интерпретировать как функции.

Функционал – однозначное отображение произвольного числа множества (обычно множества функций) в числовое множество.

Функция – одно из основных понятий математики, соответствие между элементами множеств X ($x \in X$ – аргумент), Y ($y \in Y$ – значение функции), обозначаемое $f: X \rightarrow Y$ $y = f(x)$; обычно к этому добавляется требование однозначности; чаще всего подразумевается также, что функция является численнозначной. Неявная функция – функция, заданная уравнением $F(x,y) = 0$ для функции одного переменного, $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ для функции нескольких переменных. Целевая функция – функция нескольких переменных, подлежащая оптимизации (минимизации или максимизации) в целях решения некоторой задачи.

Элементы теории множеств

Множества представляют собой исходный объект, на котором строятся те либо иные тематические конструкции. Это одно из наиболее общих понятий, не поддающихся определению. Например, можно говорить о множестве всех натуральных чисел, множестве геологических структур, литологических либо стратиграфических разностей горных пород.

Множества обозначаются заглавными буквами $A, B, C \dots$. Элементы множеств, как правило, обозначаются соответствующими малыми: $a, b, c \dots$. Иногда эти малые буквы снабжены индексами i, j, k, \dots , которые могут иметь значения из некоторого другого множества, например множества натуральных чисел. Тем самым осуществляется идентификация конкретных элементов множества. Иногда множество, состоящее из элементов $a_i, i = 0, 1, \dots$, обозначается (a) .

Применительно к множествам используются следующие обозначения:

- 1) \emptyset – пустое множество;
- 2) $a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A ;
- 3) $a \notin A$ – элемент a не принадлежит множеству A ;
- 4) $A \subset B$ – множество A есть подмножество в B ;
- 5) $A \subseteq B$ – то же, что и 4, но возможно равенство A и B ;
- 6) $G = A \cup B$ – G есть объединение (сумма) A и B , т.е. состоит из элементов, принадлежащих A и B (рис. 66);

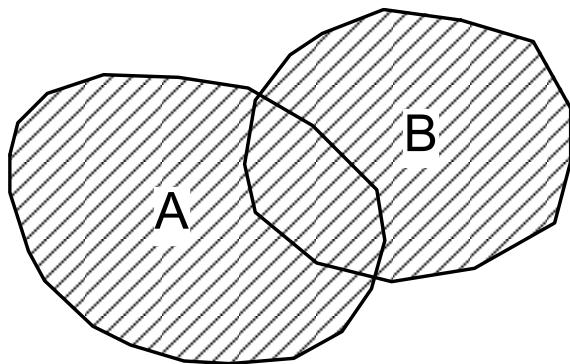


Рис. 66. Объединение множеств: заштриховано множество $A \cup B$

- 7) $G = A/B$ – G есть дополнение B до A , т.е. состоит из элементов в A , не принадлежащих B ;
- 8) $G = A \cap B$ – G есть пересечение (произведение) A и B , т.е. состоит из элементов, одновременно принадлежащих A и B (рис. 67).

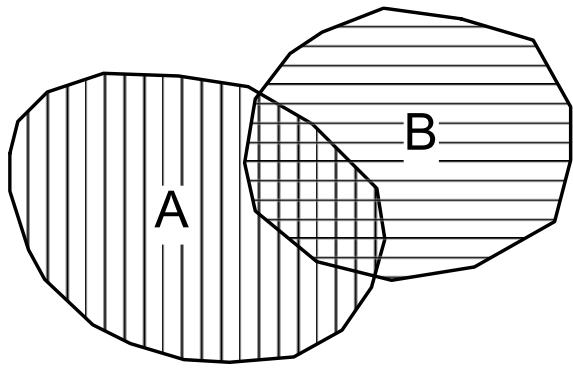


Рис. 67. Пересечение множеств: двойная штриховка – множество $A \cap B$

Далее используются *кванторы всеобщности и существования* \forall и \exists .

\forall – *квантор всеобщности*. Например, предложение $P(a)$, $\forall a \in A$ читается так: справедливо утверждение $P(a)$ для любого элемента a из множества A . Или $M = \{m \in N : P(a, m), \forall a \in A\}$, M есть множество элементов из N , для которых справедливо предложение $P(a, m)$ при любом a из A .

\exists – *квантор существования*. Предложение $\exists a \in A$ читается так: существует элемент a из множества A .

Выражением $B = \{m \in M : P(m)\}$ определяется множество B : B есть совокупность элементов m из M таких, что выполнено предложение $P(m)$.

Приведенные символические записи используются для сокращенной формулировки тех либо иных предложений.

Совокупность всех подмножеств множества A обозначается P^A . Это новое множество. Его элементами служат, например, все A и каждый из элементов $a \in A$ в отдельности. Между двумя множествами можно построить отображение.

Будем говорить, что задано *отображение* f из A в B (записывается в виде $f: A \rightarrow B$), если некоторым элементам из P^A поставлены в соответствие некоторые элементы из P^B .

Система линейных алгебраических уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (или линейная система, также употребляется аббревиатура СЛАУ) в линейной алгебре:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Здесь m – количество уравнений, а n – количество неизвестных. x_1, x_2, \dots, x_n – неизвестные, которые надо определить. $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ – коэффициенты системы и b_1, b_2, \dots, b_m – свободные члены – предполагаются известными. Индексы коэффициентов (a_{ij}) системы обозначают номера уравнения (i) и неизвестного (j), при котором стоит этот коэффициент. В матричной форме СЛАУ записывается так: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Система линейных уравнений от трёх переменных определяет набор плоскостей. Точка пересечения является решением (рис. 3).

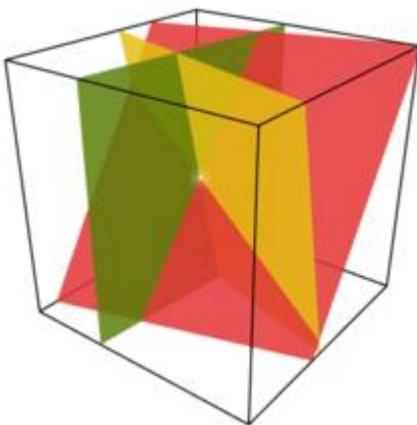


Рис. 68. Графическая иллюстрация решения системы трех уравнений

СЛАУ называется *однородной*, если все её свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$), иначе – *неоднородной*. *Решение СЛАУ* – совокупность n чисел c_1, c_2, \dots, c_n , таких, что подстановка каждого c_i вместо x_i в систему обращает все её уравнения в тождества. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если у неё нет ни одного решения. Совместная система может иметь одно или более решений. Если уравнений больше, чем неизвестных, то СЛАУ называется *переопределённой*. В противном случае СЛАУ называется *недоопределённой*.

Существуют *прямые* и *итерационные* методы решения линейных алгебраических уравнений. *Прямые* (или точные) методы позволяют найти решение за определённое количество шагов. *Итерационные* методы основаны на использовании повторяющегося процесса и позволяют получить решение в результате последовательных приближений. При решении обратных задач геофизики правая часть системы уравнений представляет собой результаты полевых наблюдений, обладающие некоторой погрешностью (помехой). Поэтому для их решения обычно используются итерационные методы. При решении линейных обратных задач гравиразведки решаются системы линейных уравнений, при решении нелинейных задач – системы нелинейных уравнений.

При решении многих геофизических задач с использованием данных дискретных наблюдений приходится сталкиваться с плохо обусловленными системами линейных уравнений, причем именно это обстоятельство определяет основные трудности решения практической задачи. В частности, линейные обратные задачи предполагают решение систем уравнений вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon}$, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – помеха в наблюденном поле.

Возмущения в правой части системы уравнений будут порождать некие возмущения в значениях неизвестных, которые обозначим $\Delta\mathbf{x}$. Рассмотрим СЛАУ, связывающую между собой эти возмущения: $\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \boldsymbol{\varepsilon}$.

Можно утверждать (доказательство пропустим), что всегда будет выполняться неравенство $\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \mu \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|}$, которое характеризует как относительное возмущение в правой части СЛАУ, так и относительную ошибку в решении, вызванную этим возмущением. Число μ обусловленности матрицы коэффициентов СЛАУ играет роль множителя, определяющего максимально возможное увеличение ошибки получаемых результатов. Если μ близко к единице, то система хорошо обусловлена: для такой системы относительная ошибка в определении решения сравнима с относительной погрешностью, с которой задается правая часть. По мере увеличения μ , чувствительность решения к погрешности в правой части возрастает – система становится плохо обусловленной.

А. Н. Тихонов рассматривает в качестве примера, иллюстрирующего понятия устойчивости решения и обусловленности СЛАУ, следующую систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + 0 \times x_2 = 1 \\ x_1 + 0.01 \times x_2 = 1 \end{cases}.$$

Это невырожденная система ($\det A = 0.01 \neq 0$), решение которой имеет вид $x_1 = 1, x_2 = 0$. Изменим немного правую часть этой СЛАУ, заменив во втором уравнении 1 на 1.01. В результате получим новую систему:

$$\begin{cases} x_1 + 0 \times x_2 = 1 \\ x_1 + 0.01 \times x_2 = 1.01 \end{cases},$$

имеющую решение $x_1 = 1, x_2 = 1$. Мы видим, что небольшое возмущение правой части системы уравнений привело к существенному изменению решения. Это говорит о плохой обусловленности матрицы коэффициентов \mathbf{A} , в данном случае $\mu = 200$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что представляют собой аналитические и синтетические процедуры, использующиеся в процессе интерпретации геофизических данных?
2. Что такое интерпретационные модели с размерностью 2D, 2.5D, 3D и 4D?
3. Перечислите шесть основных принципов качественной интерпретации карт изолиний аномального гравитационного поля.
4. Чем отличаются качественная и количественная интерпретации данных гравиразведки?
5. Приведите формулировки прямой и обратной задач гравиразведки.
6. Какие классы обратных задач гравиразведки вы знаете?
7. Что такое аннигилятор М. С. Жданова?
8. Для каких аномалиеобразующих тел возможно однозначное решение обратной задачи гравиразведки согласно теореме П. С. Новикова?
9. Что такое теоретическая и практическая эквивалентность в обратных задачах гравиразведки?
10. Можно ли при количественной интерпретации данных высокоточной гравиметрической съемки получить единственное точное решение обратной задачи гравиразведки?
11. Какие три признака должна иметь корректно поставленная математическая задача по Ж.-С. Адамару?
12. Что такое неустойчивость решения обратной задачи гравиразведки?
13. Для чего используется регуляризация в процесс решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки?
14. Что представляет собой имитационное моделирование и для чего оно используется в области решения обратных задач?
15. Какие параметры источников однозначно определяются по гравитационным (магнитным) аномалиям?
16. Кратко охарактеризуйте метод построения эквивалентных семейств решений обратной задачи гравиразведки.
17. Что такое квазирешение обратной задачи гравиразведки?
18. Какие этапы включает в себя автоматизированный подбор источников гравитационных аномалий?
19. Что такое конфигурационное распределение масс в монтажном методе решения обратной задачи?
20. Что такое ядро, оболочка и граница 2D-конфигурации?
21. Перечислите основные условия для реализации решения обратной задачи методом регулируемой направленной кристаллизации (РНК).
22. Изменяются ли значения эффективной плотности моделируемых тел в процессе решения нелинейной обратной задачи гравиразведки методом РНК?

23. Можно ли успешно осуществить локализацию гравитирующего или магнитовозмущающего объекта при неполной информации о его физических свойствах?

24. Сформулируйте понятия потерянной, скрытой и ложной информации при решении обратной задачи для одиночного аномалиеобразующего объекта.

25. Что представляют собой геологически содержательные инварианты при решении линейной, рудной и структурной обратных задач гравиразведки?

26. В чем заключается основная идея аддитивных технологий количественной интерпретации гравитационных аномалий?

27. Какую информацию о геоплотностном разрезе содержит вертикальная карта изолиний функции локализации?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

Балк П. И., Долгаль А. С. Аддитивные технологии решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки. М.: Научный мир, 2020. 455 с.

Долгаль А. С. Гравиметрия и магнитометрия: трансформации геопотенциальных полей: учебное пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2022. 140 с.

Костицын В. И., Хмелевской В. К. Геофизика / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2018. 428 с.

Митрофанов Г. М. Обратные задачи геофизики (Основы курса): учебное пособие Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2015. 102 с. Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. URL: <https://www.iprbookshop.ru/93469.html> (дата обращения: 16.01.2024).

Муравина О. М., Глазнев В. Н. Введение в обратные задачи геофизики. Воронежский государственный университет. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021. 80 с.

Ягола А. Г., Ван Я., Степанова И. Э., Титаренко В. Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике: учебное пособие. 4-е изд. М.: Лаборатория знаний, 2021. 219 с. Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. URL: <https://e.lanbook.com/book/176412> (дата обращения: 03.03.2024)

Дополнительный

Балк П. И., Долгаль А. Б. Конечноэлементные технологии моделирования в гравиразведке. Монтажный метод и гарантированный подход при решении обратных задач. LAP LAMBERT Academic Publishing. Saarbrucken. 2013. 77 с.

Балк П. И., Долгаль А. С. История развития и современное состояние конечноэлементного подхода в теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Вестник Камчатской региональной ассоциации Учебно-научный центр. Серия: Науки о Земле. 2022. С. 5–27.

Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 2000. 622 с.

Блох Ю. И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. 2009. 232 с. URL: <http://sigma3d.com/index.php/publications/books> (дата обращения: 12.01.2024)

Булах Е. Г. Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Киев: Наукова думка, 2010. 464 с.

Булах Е. Г., Ржаницын В. А., Маркова М. Н. Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравиразведки. Киев: Наук. думка, 1976. 220 с.

Бычков С. Г., Долгаль А. С., Костицын В. И., Мичурин А. В., Симанов А. А. Построение объемных моделей геологических объектов по гравитационному полю на основе синтеза качественных и количественных методов интерпретации // Геофизика. 2015. № 5. С. 47–54.

Васин В. В. Основы теории некорректных задач. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020. 313 с.

Воронова Т. А., Муравина О. М., Глазнев В. Н., Березнева С. И. Трехмерная плотностная модель верхней коры в области сочленения Лосевского и Донского террейнов (Воронежский кристаллический массив) // Вестник КРАУНЦ. Серия: Науки о Земле. 2021. № 1 (49). С. 24–35. <https://doi.org/10.31431/1816-5524-2021-1-49-24-35>.

Вычислительные математика и техника в разведочной геофизике: справочник геофизика. М.: Недра, 1990. 498 с.

Гершанок Л. А. Магниторазведка: учебник / Перм. ун-т. Пермь, 2009. 421 с.

Глазnev В. Н., Лошаков Г. Г. Об одном методе моделирования рудных объектов с использованием адаптивной аппроксимации // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Геология. 2012. № 1. С. 243–246

Глазнев В. Н., Муравина О. М., Воронова Т. А., Холин В. М. Оценка мощности гравиактивного слоя земной коры Воронежского кристаллического массива // Вестник ВГУ. Сер. Геология. Воронеж, 2014. № 4. С. 78–84.

Гравиразведка: справочник геофизика / под ред. Е. А. Мудрецовой, К. Е. Веселова. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Недра, 1990. 607 с.

Долгаль А. С. Гравиметрия и магнитометрия: трансформации геопотенциальных полей: Допущено методическим советом Пермского государственного национального исследовательского университета в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки магистров «Геология» / Пермь: Издательский центр ПГНИУ, 2022. 140 с.

Долгаль А. С. Компьютерные технологии обработки и интерпретации данных гравиметрической и магнитной съемок в горной местности. Абакан: «ООО Фирма-МАРТ», 2002. 188 с.

Долгаль А. С. Реализация интегральных методов решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии с использованием сеточных моделей источников // Стратегия и процессы освоения георесурсов. Материалы научной сессии Горного института УрО РАН по результатам НИР в 2004 г. 18–22 апреля 2005 г. Пермь. С. 89–91

Долгаль А. С. Элементы искусственного интеллекта в монтажном методе интерпретации гравитационных аномалий // Стратегия и процессы освоения георесурсов: Сборник научных трудов. Вып. 16. Пермь, 2018. С. 146–149.

Долгаль А. С., Балк П. И., Деменев А. Г., Мичурин А. В., Новикова А. В., Рашидов А. В., Христенко А. В., Шархимуллин А. Ф. Использование метода конечных элементов при интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки. // Вестник КРАУНЦ. 2012. № 1, вып. 19. С. 108–127.

Долгаль А. С., Булах Е. Г., Рusanов Э. Б. Объемное моделирование геологического строения Талнахского рудного узла (Норильский район) по гравитационному полю // Геофизический журнал. 1995. № 5. С. 62–66.

Долгаль А. С., Булах Е. Г., Рusanов Э. Б. Объемное моделирование геологического строения Талнахского рудного узла (Норильский район) по гравитационному полю // Геофизический журнал. № 5. 1995. С. 62–66.

Долгаль А. С., Христенко Л. А. Результаты и перспективы геофизических исследований при поисках рудного золота на восточном склоне Кузнецкого Алатау // Вестник КРАУНЦ. 2008. № 2, вып. 12. С. 57–69.

Долгаль А. С., Шархимуллин А. Ф. «Гравитационная томография» – практика, опережающая теорию? // Геоинформатика. 2009. № 3. С. 59–67.

Жданов М. С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М.: Научный мир, 2007. 712 с.

Исаев В. И., Косыгин В. Ю., Лобова Г. А., Пятаков Ю. В. Интерпретация данных высокоточной гравиразведки. Вертикальный градиент плотности // Изв. Томского политехнического ун-та. 2011. Т. 319, № 1. С. 83–90.

Казакова Е. М. Краткий обзор методов оптимизации на основе роя частиц // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2022. Т. 39, № 2. С. 150–174.

Кобрунов А. И. Заметки к истории развития методов решения обратной задачи гравиразведки в XX веке. В кн.: Развитие гравиметрии и магнитометрии в XX веке. М.: Изд-во ОИФЗРАН, 1997. С. 188–200.

Кобрунов А. И. Математические основы теории интерпретации геофизических данных: учеб. пособие. М.: ЦентрЛитНефтеГаз, 2008. 288 с.

Кобрунов А. И., Куделин С. Г., Мотрюк Е. Н. Интегрированная среда физико-геологического моделирования на основе системной инверсии. Ухта: УГТУ, 2015. 90 с.

Колмогорова В. В., Федорова Н. В. Результаты исследования глубинного поднятия земной коры по Уральской части геотраверса Кварц // Геофизика. 2015. № 6. С. 61–67.

Магниторазведка: справочник геофизика. / под ред. Б. Е. Никитского, Ю. С. Глебовского. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Недра, 1990. 470 с.

Маловичко А. К., Костицин В. И., Тарунина О. Л. Детальная гравиразведка на нефть и газ. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Недра, 1989. 224 с.

Микиша А. М. Математика: Основные термины: Толковый словарь: более 3000 терминов. М.: ООО «Издательство АСТ», 2003. 448 с.

Серкеров С. А. Гравиразведка и магниторазведка в нефтегазовом деле. М.: Изд-во «Нефть и газ РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина», 2006. 512 с.

Серкера С. А. Гравиразведка и магниторазведка. Основные понятия, термины, определения: Учеб, пособие для вузов. М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2006. 479 с.

Сидоров М. Д., Нурмухамедов А. Г. Объемное изображение плотностной модели земной коры на примере южной Камчатки // Геология и геофизика. 2022. Т. 63, № 10. С. 1433–1452. DOI 10.15372/GiG2021155.

Смолин А. В. Введение в искусственный интеллект: конспект лекций. 2-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 264 с.

Старostenko В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова Думка, 1978. 227 с.

Страхов В. Н. Что делать? (о развитии гравиметрии и магнитометрии в России в начале 21 века). М.: ОИФЗ РАН, 1988. 24 с.

Страхов В. Н., Лапина М. И. Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 2. С. 344–347.

Тафеев Г. П., Соколов К. П. Геологическая интерпретация магнитных аномалий. Л.: Недра: Ленингр. отд-ние, 1981. 327 с.

Тихонов А. Н. Математическая геофизика. М.: Изд-во ОИФЗ РАН, 1999. 476 с.

Хмелевской В. К., Костицын В. И. Основы геофизических методов: учебник для вузов / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. Пермь, 2010. 400 с.

Яновская Т. Б., Порохова Л. Н. Обратные задачи геофизики: учеб. пособие. 2-е изд., доп. и перераб. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. 214 с.

Учебное издание

Долгаль Александр Сергеевич

**Гравиметрия и магнитометрия: решение обратных задач.
Монтажный метод и аддитивные технологии**

Учебное пособие

Редактор *A. C. Серебренников*

Корректор *C. A. Вороненко*

Компьютерная верстка: *A. C. Долгаль*

Объем данных 7,25 Мб

Подписано к использованию 26.04.2024

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Управление издательской деятельности
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15