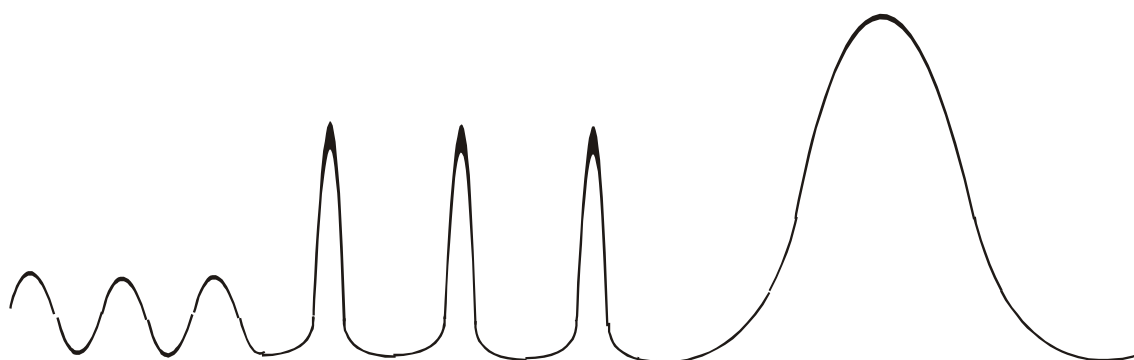


Р.А. Браже

*Восемь лекций
по физике атмосферы
и гидросферы*



Министерство образования Российской Федерации
Ульяновский государственный технический университет

Р.А. Браже

ВОСЕМЬ ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ АТМОСФЕРЫ И ГИДРОСФЕРЫ

Учебное пособие для студентов специальности
«Инженерная защита окружающей среды»

Ульяновск 2003

УДК 504.3+504.4(075)
ББК 26.233+26.221я7
Б87

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Рецензенты:

Кафедра прикладной физики Саратовского государственного
технического университета
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, профессор А. Н. Сальников).
Д-р физ.-мат. наук, профессор Э. Т. Шипатов – зав. кафедрой
экспериментальной физики Ульяновского государственного
университета

Браже Р. А.
Б87 Восемь лекций по физике атмосферы и гидросферы: Учебное
пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2003. – 72 с.
ISBN 5-89146-300-0

Пособие подготовлено на основе лекций по элективному спецкурсу «Физика атмосферы и гидросферы», прочитанному автором в 2002 г. студентам третьего курса специальности «Инженерная защита окружающей среды» энергетического факультета Ульяновского государственного технического университета. Может быть использовано также студентами и аспирантами других специальностей, преподавателями вузов и учителями школ.

УДК 504.3+504.4(075)
ББК 26.233+26.221я7

ISBN 5-89146-300-0

© Браже Р. А., 2003
© Оформление. УлГТУ, 2003

Оглавление

Предисловие	5
Введение	6
 Лекция 1. Состав и строение атмосферы	8
1.1. Атмосфера Земли и других тел Солнечной системы	8
1.2. Вертикальное строение атмосферы Земли	11
1.3. Преобразование энергии в атмосфере	13
 Лекция 2. Циркуляция воздушных масс в атмосфере	15
2.1. Ветры	15
2.2. Циркумполярные вихри	17
2.3. Ячейки Хэдли и Феррела. Пассаты и муссоны	19
 Лекция 3. Оптические, акустические и электрические явления в атмосфере	22
3.1. Рефракция, поглощение и рассеяние света в атмосфере	22
3.2. Распространение радиоволн в атмосфере	25
3.3. Грозовые процессы	28
 Лекция 4. Гидродинамика атмосферных возмущений	33
4.1. Математическая постановка задачи	33
4.2. Волны в атмосфере	37
 Лекция 5. Мировой океан	42
5.1. Гипсографическая кривая	42
5.2. Состав океанской воды	43
5.3. Стратификация плотности воды в океане	44
5.4. Солевые пальцы	45
 Лекция 6. Циркуляция воды в океане	47
6.1. Ветровые течения в океане	47
6.2. Спираль Экмана	48
6.3. Пассатные течения. Экваториальное противотечение	50
6.4. Приконтинентальные течения	51

Лекция 7. Гравитационные волны на поверхности водоема	53
7.1. Математическая постановка задачи	53
7.2. Линейное приближение	56
7.3. Волны на мелкой воде	58
7.4. Уравнения Буссинеска	60
7.5. Уравнение Кортевега де Вриза. Солитоны	60
 Лекция 8. Внутренние гравитационные волны в океане	 64
8.1. Математическая постановка задачи	64
8.1. Короткие волны	66
8.3. Длинные волны	67
8.4. Внутренние солитоны. Цунами	68
 Заключение	 70
Библиографический список	72

Введение

Наш общий дом – Земля – даже в эпоху космических полетов, когда, казалось бы, его не так уж большие размеры особенно заметны, нам, как и тысячи лет назад, все еще кажется огромным миром. Бездонное море, бездонное небо над головой, бескрайние степи, таежные дебри, высокие горы – все кажется вечным. Всюду кипит жизнь в ее многомиллионном многообразии видов животных и растений, не говоря уже о микроорганизмах. Но если вдуматься, этот единственный для нас мир не столь уж велик и не так уж прочен. Пройти 5 километров по городу или проселочной дороге можно практически без усталости за какой-нибудь час. Но подъем в гору на ту же высоту занимает несколько дней. Недостаток кислорода и холод делают жизнь в высокогорье невозможной. Так же и в океане: на глубине всего нескольких километров живые организмы встречаются уже крайне редко. Получается, что при среднем радиусе Земли 6370 км, для жизни пригоден лишь очень тонкий слой вблизи ее поверхности.

За три миллиарда лет существования жизни на Земле живые организмы удивительным образом приспособились к особенностям ее климата. Живущие в Антарктиде пингвины не смогут жить в африканской саванне, а тропические лианы не приспособлены к условиям сибирской тайги. Но, опять таки, если вдуматься, диапазон необходимых для жизни температурных условий, состава воздуха или воды не столь уж и велик. В еще большей мере это относится к величинам гравитационного, электрического и магнитного полей, уровню радиационного фона.

К началу XXI века человек достиг такого уровня своей энерговооруженности и технического прогресса, что оказался в состоянии разрушить эту сложную систему взаимообусловленных связей в неживой и живой природе, создать угрозу самой жизни на Земле. Состояние данного вопроса, меры защиты природы и способы рационального природопользования составляют предмет экологии. Целью же нашего курса является изучение состава и физических характеристик атмосферы и гидросферы, поскольку без воздуха и воды жизнь вообще невозможна.

Курс состоит из восьми лекций. В первых четырех лекциях рассматриваются атмосфера и происходящие в ней физические явления.

В последних четырех лекциях аналогичному рассмотрению подвергнута водная оболочка Земли – гидросфера. Недостаток времени, отводимого на данный курс в учебных планах специальности, не позволяет изложить здесь многие важные вопросы из физики Земли, без глубокого знания которых невозможно понять детали атмосферных и гидросферных процессов. Мы не имеем, к сожалению, возможности показать здесь роль температурных изменений в земном ядре, происходящих в нем конвективных процессов и магнитогидродинамических неустойчивостей в тектонике литосферных плит. Этот процесс определяет форму и расположение континентов на Земле, а от этого зависят характер океанических течений и ветров в атмосфере. Мы совершенно не касаемся здесь роли космических факторов, определяющих глобальные изменения климата Земли: прецессии земной оси, колебаний эксцентриситета земной орбиты и ее вращения вокруг Солнца. Мы не рассматриваем здесь циклы солнечной активности, влияющие на метеорологические условия, погоду и атмосферные явления. Мы не касаемся вопросов, связанных с влиянием Луны, например, приливных эффектов. Даже такой важный вопрос, как ионизирующие излучения космического происхождения мы вынуждены оставить за пределами нашего внимания.

То, без изучения чего мы не можем обойтись даже в этом кратком курсе, это строение и состав атмосферы, преобразование ней солнечной энергии, ветры и вихревые потоки. Мы рассмотрим также такие вопросы, как преломление, поглощение и рассеяние света в атмосфере, распространение в ней радиоволн, электрические, в частности, грозные явления. Будет дана математически строгая модель волновых процессов в атмосфере. Аналогично, при изучении гидросферы мы рассмотрим состав океанской воды, существующие течения в Мировом океане и различные волновые явления: от волн на поверхности океана до внутренних гравитационных волн и цунами.

Приведенный в пособии материал позволит читателю хотя бы в основных чертах представить себе атмосферу и гидросферу Земли как сложную открытую нелинейную динамическую систему, вторгаться в которую без знания и понимания действующих в ней связей чрезвычайно опрометчиво.

Лекция 1

Состав и строение атмосферы

1.1. Атмосфера Земли и других тел Солнечной системы

Атмосферой Земли (от греч. *atmós* – пар и *sphaira* – шар) называется газовая оболочка, окружающая Землю. Масса атмосферы составляет около $5 \cdot 10^{18}$ кг. Среднее давление атмосферы у поверхности Земли (на уровне моря) равно 1013 кПа или 760 мм рт. ст. С высотой давление убывает по закону, близкому к экспоненциальному, так что на высотах в несколько десятков километров плотность атмосферы уже очень мала.

Атмосфера Земли состоит примерно на 78% из азота, на 21% из кислорода и на 1% из аргона. Содержатся в атмосфере также малые примеси углекислого газа, водяные пары и незначительное количество неона, гелия, криптона и водорода. Состав атмосферы других тел Солнечной системы приведен в табл. 1.1.

Состав атмосферы определяется историей формирования ее недр. Первичное вещество планеты сжималось силами тяготения, принимая форму шара. При этом она разогревалась (во избежание недоразумений отметим, что в табл. 1.1 указана средняя температура на поверхности небесного тела, температура же в центре планеты может достигать нескольких тысяч градусов, а внутри Солнца – десятков миллионов градусов). Под действием высоких температур и давлений в первичном веществе планеты происходили химические реакции. При этом более тяжелые продукты образовали ядро, а более легкие – мантию и кору. Газообразные продукты реакции образовали первичную атмосферу. В земной атмосфере было очень много паров воды. Сконденсировавшись, они породили первичный океан.

Почему газы, входящие в состав атмосферы планет, не улетучиваются в космос? На первый взгляд, здесь все ясно: тепловые скорости молекул газа $v \sim \sqrt{RT / \mu}$ вблизи поверхности планеты обычно значительно меньше, чем ее вторая космическая скорость $v_2 \sim \sqrt{2gR_p}$. Здесь R – универсальная газовая постоянная, T – температура на поверхности планеты, μ – молярная масса молекулы, g – ус-

корение силы тяжести, R_p – радиус планеты. Например, для Земли $v_2 = 11,2$ км/с, а тепловые скорости молекул азота, кислорода и водорода соответственно равны 0,39 км/с, 0,36 км/с, 1,02 км/с. Однако в верхних слоях атмосферы температура, как мы вскоре узнаем, намного выше, чем у поверхности. Например, на высотах свыше 500 км над Землей температура достигает 1200 К. Таким образом, тепловые скорости молекул там гораздо выше. Кроме того, некоторая доля молекул имеет скорости, значительно превосходящие средние. Эти быстрые молекулы могут оторваться от планеты.

Таблица 1.1

Атмосфера тел Солнечной системы

Небесное тело	Радиус, м	Температура, К	Вид атмосферы	Состав атмосферы
Солнце	$7,0 \cdot 10^8$	5780	Солнце – газовый шар	H^+ , e^- , H_2 , He
Меркурий	$2,4 \cdot 10^6$	400	Очень разреженная	Ar, Ne, He
Венера	$6,1 \cdot 10^6$	290	Мощная над сушей	CO_2 , N_2
Земля	$6,4 \cdot 10^6$	250	Мощная над океаном и сушей	N_2 , O_2 , Ar и др.
Марс	$3,4 \cdot 10^6$	200	Слабая	CO_2 , N_2
Юпитер	$7,1 \cdot 10^7$	110	Непрерывно переходящая в жидкость	H_2 , He, CH_4
Сатурн	$6,0 \cdot 10^7$	80	То же	То же
Уран	$2,5 \cdot 10^7$	55	Мощная	H_2 , He
Нептун	$2,2 \cdot 10^7$	45	То же	То же
Плутон	$1,4 \cdot 10^6$	40	?	?
Спутник Земли – Луна	$1,7 \cdot 10^6$	—	—	—
Спутники Юпитера:				
Ио	$1,8 \cdot 10^6$	—	Разреженная	Na, H_2 , S_2^+ , O_2^+ , K
Каллисто	$2,5 \cdot 10^6$	—	То же	NH_3 , CH_4
Ганимед	$2,8 \cdot 10^6$	—	То же	NH_3 , CH_4 , O_2
Европа	$1,6 \cdot 10^6$	—	?	?
Спутник Сатурна – Титан	$2,5 \cdot 10^6$	—	Мощная	H_2 , CH_4 , HCN, C_2H_6 , C_2H_2 , C_2H_4

На рис.1.1 показана зависимость массы различных газов земной атмосферы и масса всей воды на Земле от их молярной массы. Из него видно, что наиболее распространенные в земном воздухе газы (N_2 , O_2 , Ar) по молярной массе ближе всего к воде. Гелия и водорода в земном воздухе мало, хотя это наиболее распространенные элементы во Вселенной, и атмосферы Солнца и планет-гигантов состоят в основном из них. Причина этого в том, что сила земного притяжения недостаточна для удержания этих газов.

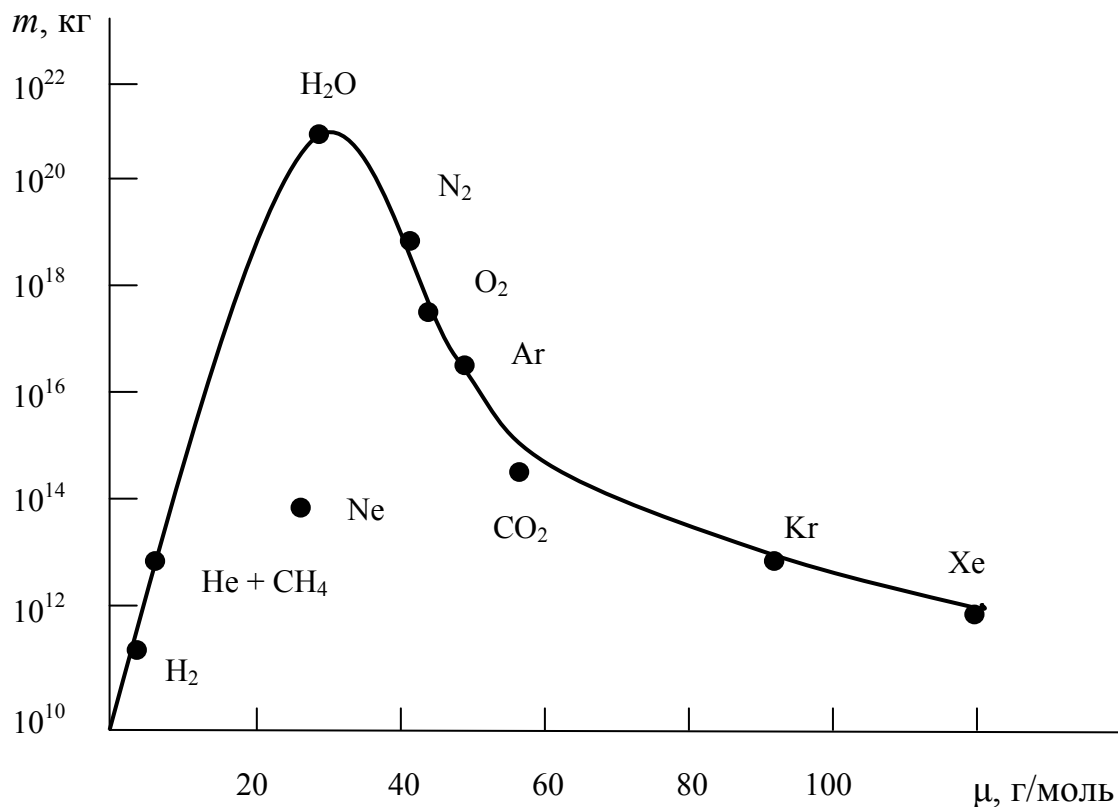


Рис.1.1. Распределение газов земной атмосферы и воды океана по молярной массе

Земная атмосфера достаточно однородна только ниже 90 км. Это так называемая *гомеосфера*. Выше лежит *гетеросфера* – часть атмосферы с переменным составом. Оказывается, что концентрация гелия и водорода в гетеросфере нарастает с высотой. Выше 700 км атмосфера Земли практически состоит только из этих газов, хотя их концентрация там невелика. Дело в том, что гелий образуется в земной коре и поднимается наверх при распаде тяжелых радиоактивных изотопов, а водород в гетеросфере возникает из молекул водяного пара, распадающихся под действием ультрафиолетовой части излучения

Солнца на водород и кислород. Но большая часть атмосферного кислорода обязана своим происхождением жизнедеятельности растений. Они производят около 10^{14} кг кислорода в год или $3 \cdot 10^6$ кг в секунду! Однако содержание кислорода в воздухе остается практически неизменным, так как он расходуется на дыхание животных, окисление вулканических газов, процессы горения и гниения органических соединений.

1.2. Вертикальное строение атмосферы Земли

Из уравнения Менделеева – Клапейрона следует, что давление воздуха ($\mu = 29$ г/моль) зависит от температуры следующим образом:

$$p = \frac{\rho RT}{\mu}, \quad (1.1)$$

где ρ – плотность газа. Из гидростатики также известна зависимость убыли давления с увеличением высоты:

$$dp = -\rho g dh. \quad (1.2)$$

Исключая из (1.1), (1.2) плотность, получаем уравнение, описывающее зависимость давления от высоты:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\mu}{RT} dh;$$

$$p = p_0 \exp\left(\frac{g\mu h}{RT}\right). \quad (1.3)$$

Реальная зависимость давления атмосферы от высоты гораздо сложнее, так как ее температура по высоте непостоянна (см. рис.1.2). При подъеме от поверхности Земли температура вначале убывает. На высоте 17 км над тропиками она равна -75°C . Эта часть атмосферы называется *тропосферой* (от греч. *tropos* – поворот). Следующий слой атмосферы, где температура нарастает, называется *стратосферой* (от греч. *stratum* – настил). Она простирается до высоты примерно 55 км, где температура достигает 0°C . За тропосферой, до высоты около 90 км, располагается *мезосфера* (от греч. *mesos* – средний, промежу-

точный). В мезосфере температура снова падает, до температуры примерно -85°C . Выше простирается *термосфера*. В ней температура снова растет и на высоте около 400 км достигает 1000 – 1200 К. Еще выше, в *экзосфере* (от греч. *exo* – вне, снаружи) средняя кинетическая энергия молекул остается постоянной, и температура больше не меняется. Впрочем, концентрация молекул там уже настолько мала, что они практически не соударяются между собой, так что пользоваться термином температура в этом случае не совсем корректно.

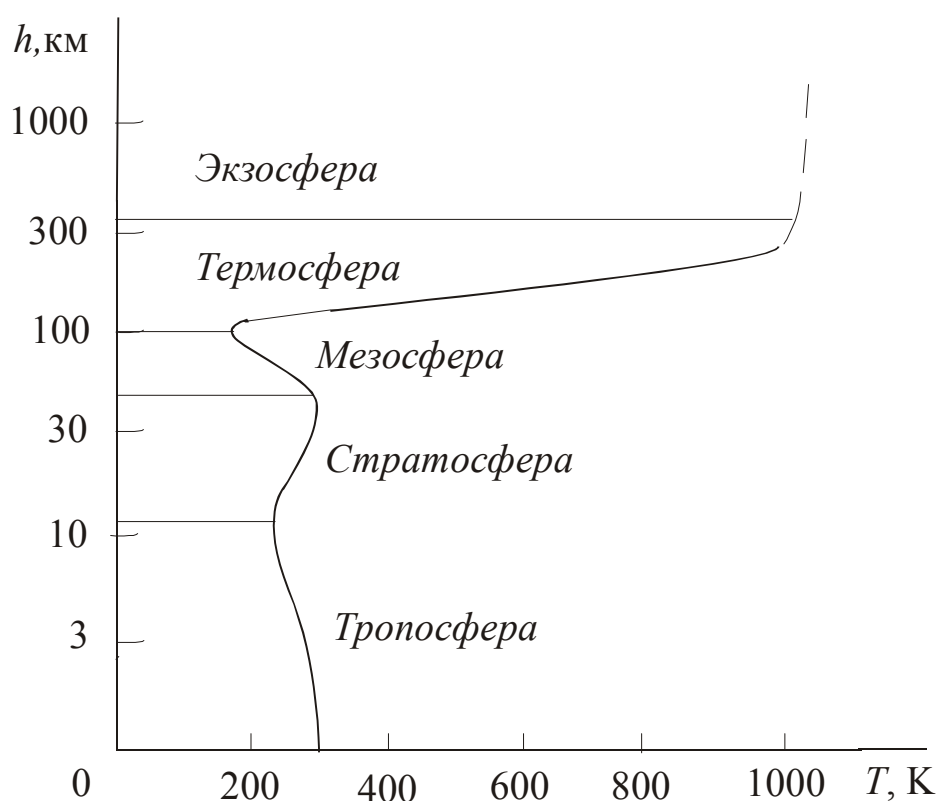


Рис. 1.2. Зависимость температуры от высоты в атмосфере Земли

Как же может быть, что на высоте в несколько сотен километров, где летают космические корабли, температура составляет около тысячи градусов, а они не раскаляются, и космонавты даже выходят в открытый космос? Дело в том, что нагретость тела в данном случае определяется равновесием тепловой энергии, получаемой от Солнца, плюс собственное тепловыделение, и уносимой инфракрасным излучением в окружающую среду. Из-за чрезвычайно низкой концентрации молекул в термосфере их общая кинетическая энергия поступательного движения все же мала, чтобы оказать заметное влияние на температуру внутри космического корабля или скафандра.

1.3. Преобразование энергии в атмосфере

Слоеное строение атмосферы Земли объясняется различным характером поглощения солнечного света разными газами.

Первым фильтром на пути к Земле для солнечных лучей является термосфера. Она поглощает самую коротковолновую часть спектра (дальний ультрафиолет). Именно поэтому и происходит разогрев термосферы. Следует отметить, что температура экзосферы зависит от солнечной активности: в годы спокойного Солнца она ниже (около 1000 К), а в максимумах солнечной активности выше (достигает 1300 К).

Стратосфера обязана своим существованием озону (O_3), который располагается на высотах от 20 до 60 км. Озон поглощает солнечное излучение в диапазоне $220 \text{ нм} < \lambda < 290 \text{ нм}$ уже в верхней части этого слоя. Поэтому там и температура выше, чем радиационная температура Земли, хотя она и в несколько раз ниже, чем в термосфере. Выше стратосферы озона нет. Коротковолновое ультрафиолетовое излучение Солнца расщепляет его на молекулярный кислород O_2 и атомарный кислород O .

Между теплыми слоями атмосферы располагаются холодные. Они обмениваются энергией между собой. Все сказанное, конечно, относится к освещенной стороне Земли. На ночной стороне происходит охлаждение. Однако половины суток не хватает для размывания «слоистого пирога» атмосферы. Только полярной ночью атмосфера устроена иначе.

В количественном отношении в экзосфере и термосфере поглощается лишь один процент солнечного излучения – дальний ультрафиолет. Три процента (ближний ультрафиолет) поглощается озоном стратосферы. Четыре процента (инфракрасный «хвост» спектра) поглощается водяными парами в верхних слоях тропосферы. Оставшиеся 92 % энергии солнечного света приходится на «окно прозрачности» атмосферы. Это излучение в диапазоне длин волн $290 \text{ нм} < \lambda < 2400 \text{ нм}$. Значительная его часть (45%), преимущественно в синей области спектра, рассеивается воздухом, отчего небо голубое. Прямые солнечные лучи (оставшиеся 47%) достигают поверхности Земли.

Земля отражает около 7% из этих 47%. Из них 3% тратится на диффузное рассеивание. Остальные 40% и еще 8% от атмосферы поглощаются Землей, нагревая сушу и океан. Рассеянное в атмосфере световое излучение частично поглощается ею, а остальное распределяется между поверхностью Земли и космосом, причем в космос уходит больше энергии, чем попадает на Землю. Виноваты в этом, главным образом, облака. Они непрозрачны и отражают падающий на них

сверху свет обратно. Таким образом, в тепло переходит 65% падающего на Землю потока солнечной энергии: 3% – поглощение в озоновом слое стратосферы, 4% – поглощение в водяных парах верхней тропосферы, 10% – поглощение в основной толще атмосферы и 48% – поглощение почвой и водами Мирового океана. Это тепло излучается в космос тепловой радиацией в виде инфракрасного излучения.

Л е к ц и я 2

Циркуляция воздушных масс в атмосфере

2.1. Ветры

Причиной переноса воздушных масс в атмосфере является *конвекция*: теплый воздух из экваториальных областей Земли поднимается и перемещается в полярные области, охлаждаясь и опускаясь вниз (см. рис. 2.1). Из-за поднятия воздуха вблизи экватора там верхняя граница тропосферы выше – около 17 км. Это почти вдвое больше, чем у полюсов.

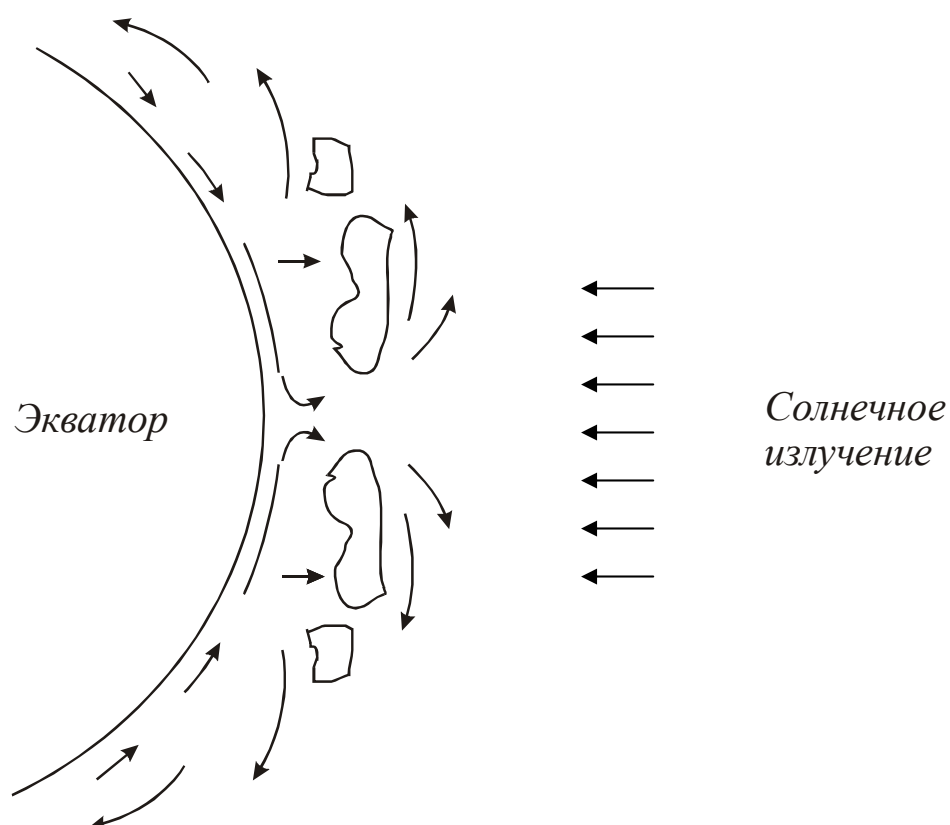


Рис. 2.1. Экваториальная конвекция воздуха в атмосфере Земли

Таким образом, система экватор – атмосфера – полюса представляет собой гигантскую тепловую машину. Ее коэффициент полезного действия η невелик: всего 1 – 2%. Механическая мощность, развиваемая этой машиной

$$P_{\text{мех}} = \eta P(1 - A) \sim 10^{15} \text{ Вт}, \quad (2.1)$$

где $P = 1,75 \cdot 10^{17}$ Вт – мощность теплового излучения Солнца, величина $A = 0,35$ – оцененная еще в прошлой лекции доля отраженной солнечной энергии (альбедо Земли).

Приравняем эту мощность к мощности ветров $m_A v_0^2 / \tau$, где $m_A = 5 \cdot 10^{18}$ кг – масса атмосферы, v_0 – средняя скорость ветра, $\tau \sim R_{\oplus} / v_0$ – определяемое радиусом Земли (см. табл. 1.1) характерное время перемещения воздушных масс. Отсюда

$$v_0 \sim \left[\frac{\eta P(1 - A) R_{\oplus}}{m_A} \right]^{1/3} \sim 10 \text{ м/с}; \quad (2.2)$$

$$\tau \sim \frac{R_{\oplus}}{v_0} \sim 6 \cdot 10^5 \text{ с} \sim 1 \text{ неделя}.$$

Разумеется, это средние значения. Над океаном ветер значительно сильнее, чем над сушей. Интересна вторая оценка: она определяет характерное время изменения погоды.

Формула (2.2) дает оценку скорости ветра вблизи земной поверхности. Скорость ветра наверху можно найти, приравняв потоки масс воздуха внизу и вверху:

$$\rho_0 v_0 = \rho_h v_h,$$

откуда

$$v_h \sim \rho_0 v_0 / \rho_h \sim 100 \text{ м/с}. \quad (2.3)$$

Действительно, на высотах около 10 км ветры дуют примерно с такими скоростями.

Из-за вращения Земли и в Северном, и в Южном полушариях верхний ветер отклоняется в восточном, а нижний – в западном направлении. На воздушные массы, движущиеся со скоростью v , действует сила Кориолиса

$$F_K = 2m\omega_{\oplus} \sin \varphi, \quad (2.4)$$

где ω_{\oplus} – угловая скорость вращения Земли, φ - широта местности. На рис. 2.2 показан характер отклонения высотных ветров под действием этой силы (λ – долгота местности).

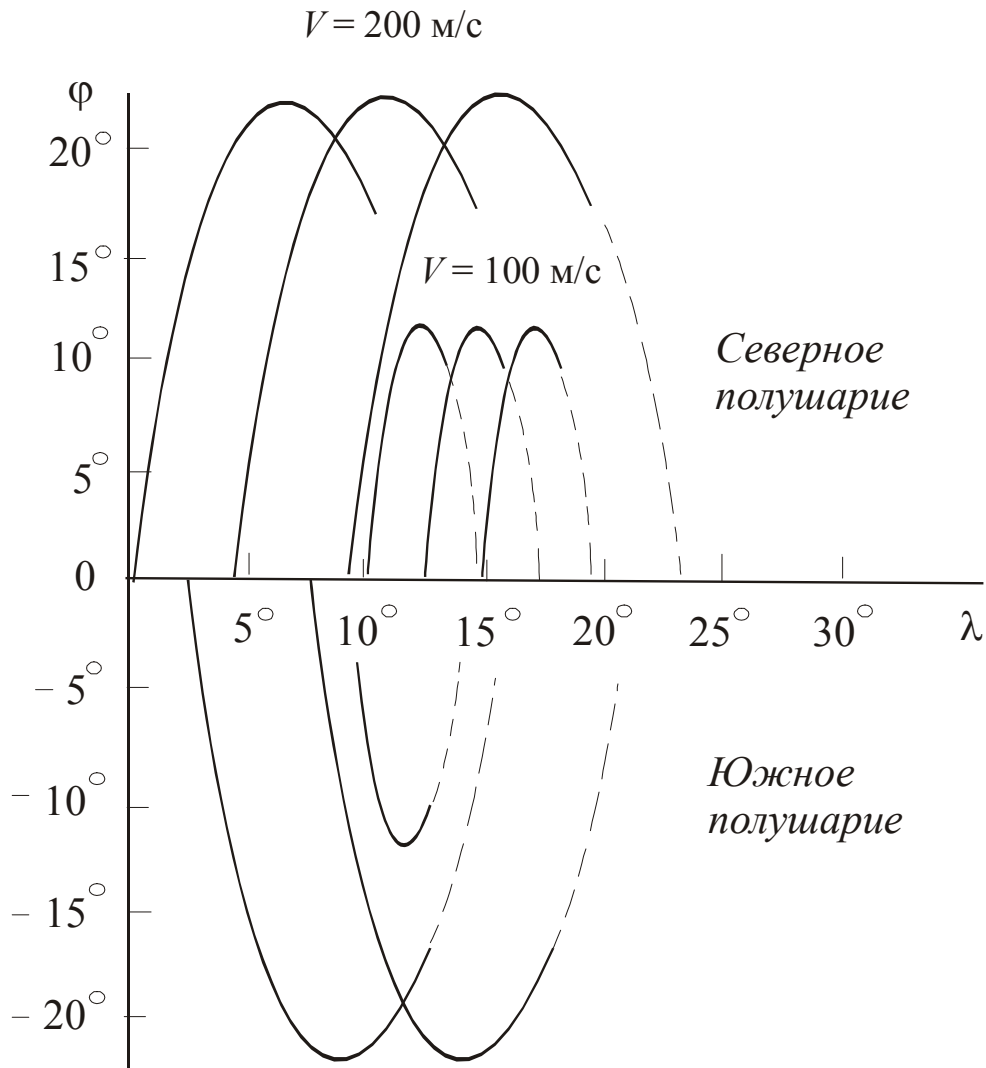


Рис. 2.2. Действие силы Кориолиса на высотные ветры Северного и Южного полушарий Земли

2.2. Циркумполярные вихри

Поворот высотных ветров Северного и Южного полушарий на 90° , когда они оба становятся западными ветрами, происходит примерно на широте 30° . Эти два высотных ветра называют *циркумполярными вихрями*, так как они окружают полюса Земли (см. рис. 2.3).

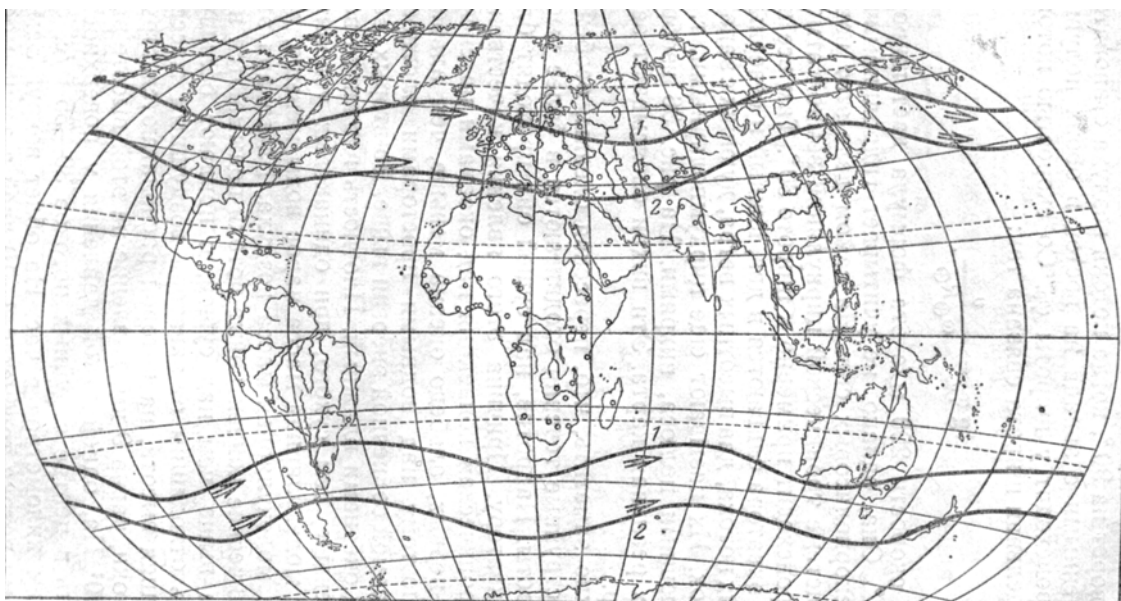


Рис. 2.3. Циркумполярные вихри летом (1) и зимой (2).
(Из кн. Бялко А.В. Наша планета – Земля. – М.: Наука, 1983)

Пересекая океаны, струйные течения перемещаются в более высокие широты, а над сушей они отодвигаются ближе к экватору. Причиной этого является более интенсивная экваториальная конвекция воздуха над океаном. Альбедо океана меньше, чем альбедо суши, поэтому воздух над океаном поглощает больше солнечной энергии. В-вторых, воздух над океаном влажный, его плотность меньше, чем плотность сухого воздуха. Поэтому конвективные потоки над океаном поднимаются выше, чем над сушей и скорость их больше.

Средняя высота, на которой располагаются циркумполярные вихри, равна 9 км. Давление воздуха на этой высоте около $2 \cdot 10^4$ Па, т.е. в пять раз меньше, чем у поверхности Земли. Скорость в центре струйных потоков 30 – 35 м/с. С такой скоростью они облетают вокруг Земли за 8 – 10 дней.

В летнее (для Северного полушария) время года циркумполярные вихри смещаются к северу, зимой – к югу. Это связано с усилением конвекции в условиях более высокой температуры. Возмущения струйных потоков вызывают изгибы – меандры, которые медленно дрейфуют вдоль вихря, приводя к изменению погоды.

2.3. Ячейки Хэдли и Феррела. Пассаты и муссоны

При конвективном подъеме воздуха у экватора происходит его охлаждение. На высоте, где температура падает ниже точки росы, водяные пары, содержащиеся в воздухе, конденсируются и образуются облака. Поэтому небо над экватором почти всегда в облаках. Эти облака располагаются на высотах 1 – 5 км. Поднявшийся выше, до 17 км, уже сухой воздух имеет огромную внутреннюю энергию. Путь от экватора до широт циркумполярных вихрей он проходит быстро, примерно за сутки, здесь он опускается вниз и растекается по поверхности. Это сухой и теплый воздух, так как энергия, затраченная на подъем, теперь выделяется обратно при опускании. Поэтому широтам под циркумполярными вихрями ($25 - 30^\circ$) соответствуют пустыни на суше и области штилей на море*.

«Конские широты» – это область повышенного давления (антициклон), а экваториальная зона – область пониженного давления – циклон. Почему же эта разность давлений не выравнивается? Все дело в том, что температура у поверхности Земли вблизи экватора и в «конских широтах» почти одинакова, но воздух у экватора более влажный и, следовательно, более легкий. Из уравнения (1.3) следует, что его давление с высотой падает быстрее, чем у сухого воздуха (см. рис. 2.4).

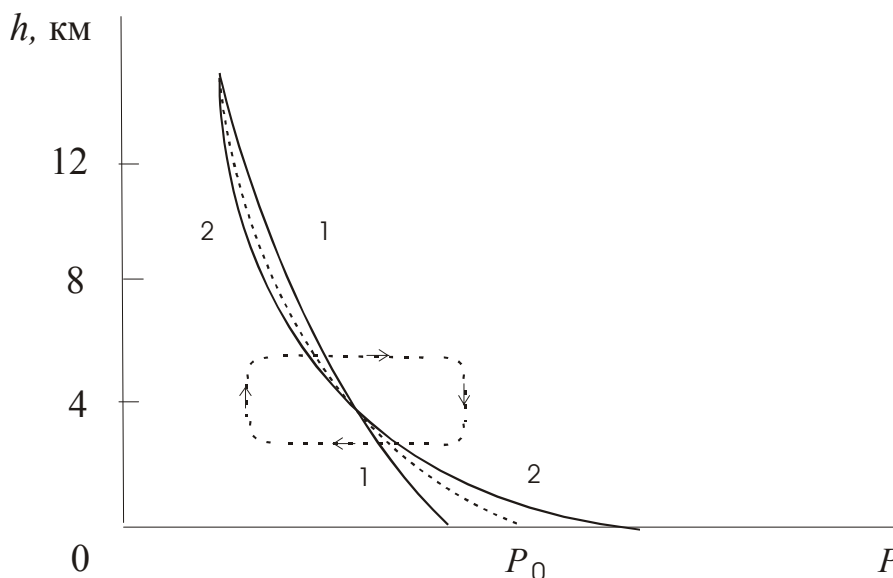


Рис. 2.4. Высотная зависимость давления в циклоне (1) и антициклоне (2)

* У моряков они получили название «конских широт», так как во времена парусного флота, когда корабли порой месяцами не могли выбраться из этих широт, от жажды погибало много перевозимых морем лошадей.

Из рис. 2.4 следует, что из-за противоположного по знаку перепада давлений у поверхности Земли и на высоте в приэкваториальной области возникает вертикальная циркуляция воздуха. Сила Кориолиса отклоняет поток воздуха наверху в восточном, а внизу в западном направлении (рис.2.5).

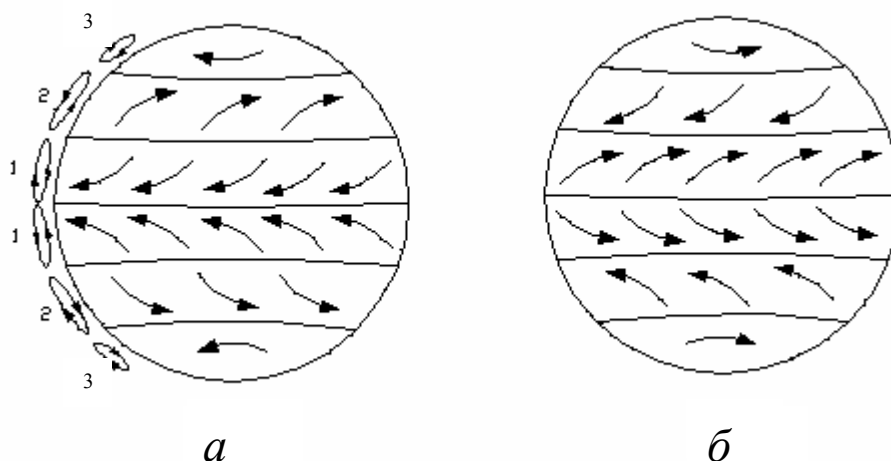


Рис. 2.5. Глобальная схема Земных ветров – ячейки Хэдли (1), Феррела (2) и приполярной циркуляции (3): *а* – у поверхности Земли, *б* – в верхней тропосфере

Впервые атмосферную циркуляцию в тропиках описал в 1735 г. английский ученый Хэдли. Поэтому такие ячейки называют *ячейками Хэдли*. Правда, Хэдли считал, что эти ячейки простираются от экватора до самых полюсов. Английский школьный учитель Феррел в 1856 г. уточнил схему Хэдли, показав, что в умеренных широтах возникают ячейки вертикальной атмосферной циркуляции противоположного направления. Их назвали *ячейками Феррела*.

Ячейки Феррела обязаны своим происхождением высокому давлению воздуха у поверхности Земли на широте $30 - 40^\circ$ под циркумполярными вихрями и низкому давлению у поверхности океана на широтах около 60° . Поскольку движение воздуха в ячейках Феррела обратное по сравнению с ячейками Хэдли, то сила Кориолиса отклоняет в них воздушные массы в другую сторону. Поэтому в умеренных широтах высотные ветры дуют преимущественно с северо-востока, а низовые ветры с юго-запада (см. рис. 2.5). В Южном полушарии, где препятствием является только узкая полоска Анд, этот западный ветер у поверхности океана разгоняется до ураганной силы*.

* У моряков эта область широт получила название «ревущих сороковых».

В приполярной области циркуляция воздуха происходит опять в прямом направлении (см. рис. 2.5). От областей низкого давления на широтах около 60° воздух поднимается и опускается вниз вблизи полюсов, где создаются антициклоны. Кориолоисовы силы закручивают воздушные массы вокруг полюсов к западу. Поэтому там преобладают восточные ветры.

Устойчивые на протяжении года низовые ветры в ячейках Хэдли, дующие в Северном полушарии преимущественно с северо-востока, а в Южном полушарии – с юго-запада, называются *пассатами*. Наряду с ними существуют ветры, направление которых меняется на противоположное два раза в год. Их называют *муссонами* (с франц. *mousson* от араб. *маусим* – сезон). Муссоны обусловлены различным нагревом материков и океана. Муссоны приносят дожди летом и приводят к сухой зиме. Муссонный климат ярко выражен в бассейне Индийского океана и на Дальнем Востоке.

Было бы ошибкой считать схему ветров, изображенную на рис. 2.5, исчерпывающей. На направление и силу ветра влияют колебания солнечной активности, лесные пожары, землетрясения и извержения вулканов, предшествующее состояние атмосферы и многие другие факторы. Неотъемлемым свойством атмосферы является ее неустойчивость. Оно и понятно: ведь это открытая система, в которой равновесие невозможно. Поэтому краткосрочный прогноз погоды – дело сложное и не свободное от ошибок.

Лекция 3

Оптические, акустические и электрические явления в атмосфере

3.1. Рефракция, поглощение и рассеяние света в атмосфере

Атмосфера Земли является оптически неоднородной средой. Изменение ее плотности с высотой приводит к соответствующему изменению показателя преломления света. На больших высотах значение показателя преломления меньше, чем у поверхности Земли. В результате луч света, идущий к Земле от какой-либо звезды, преломляясь в атмосфере, изгибается таким образом, что звезда кажется выше, чем ее истинное положение (рис. 3.1). Это явление носит название *астрономической рефракции*, а угол $\Delta\varphi$ – угла рефракции.

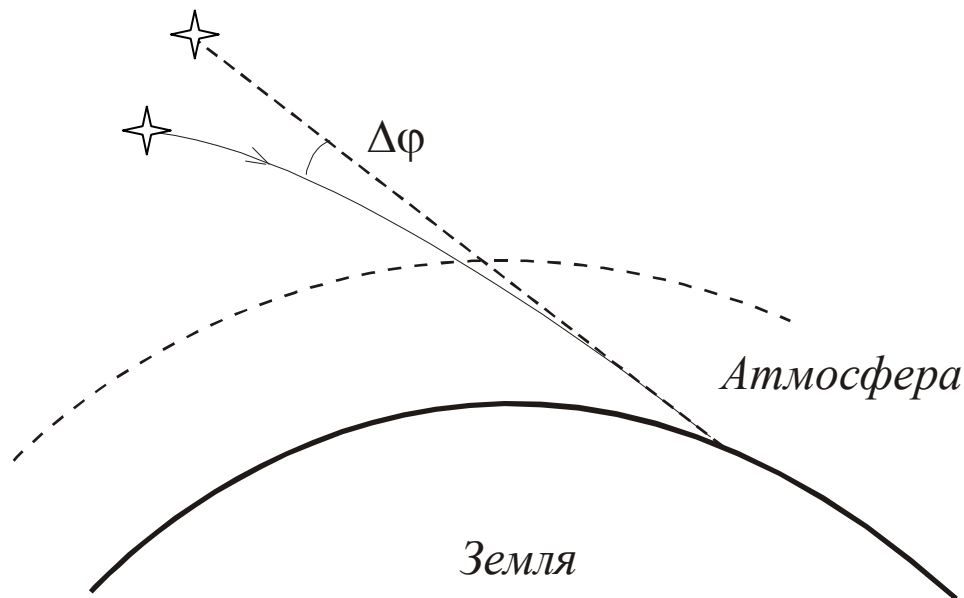


Рис. 3.1. Изгибание луча света в атмосфере

Благодаря атмосферной рефракции, Солнце у горизонта кажется слегка приплюснутым, а его видимое положение приподнято над истинным. Это ведет к некоторому увеличению продолжительности дня. Неоднородности температуры воздуха по высоте над поверхностью разогретой земли и над морем в летнее время являются причиной *миражей*. Они возникают в пустынях и над морем, т.е. над ровной хорошо прогретой поверхностью, где градиент показателя преломления особенно велик.

Проходя через атмосферу, световые лучи поглощаются и рассеиваются на неоднородностях среды (взвешенных частицах пыли и сажи, капельках воды и пр.). Рассеяние света имеет место даже в чистом воздухе из-за флуктуаций плотности, обусловленных молекулярно-кинетической природой строения вещества. Такое *молекулярное рассеяние света* было открыто Л. И. Мандельштамом и М. Смолуховским в начале XX в.

Электрическое поле световой волны вызывает периодическую поляризацию рассеивающих частиц. Из электромагнитной теории известно, что амплитуда волны, излучаемой диполем, пропорциональна квадрату частоты его колебаний. Соответственно интенсивность рассеянного света пропорциональна частоте в четвертой степени или обратно пропорциональна длине волны в четвертой степени:

$$I \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}. \quad (3.1)$$

Выражение (3.1) называется *законом Рэля*.

Таким образом, свет идущий к наблюдателю через атмосферу, ослаблен по двум причинам: из-за поглощения и бокового рассеяния. Его интенсивность можно вычислить по формуле:

$$I_t = I_0 e^{-(\alpha + \kappa)l}, \quad (3.2)$$

где I_t , I_0 – соответственно интенсивности проходящего и первоначально падающего на слой среды толщиной l света, α – *коэффициент поглощения*, а κ – *коэффициент экстинкции* (от лат. *extinctio* – гашение).

Молекулярным рассеянием света объясняется голубой цвет неба и красный цвет зари. По закону Рэля голубые и синие лучи рассеиваются сильнее, поэтому в проходящем свете преобладают оранжевые и красные цвета. Интенсивность рассеянного света зависит от угла рассеяния:

$$I \sim (1 + \cos^2 \varphi) \quad (3.3)$$

и графически выражается кривой, изображенной на рис. 3.2.

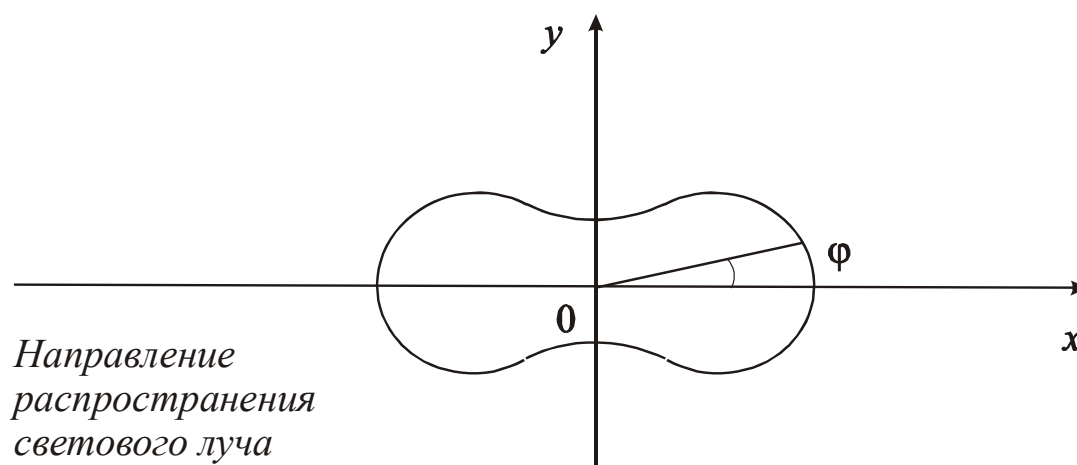
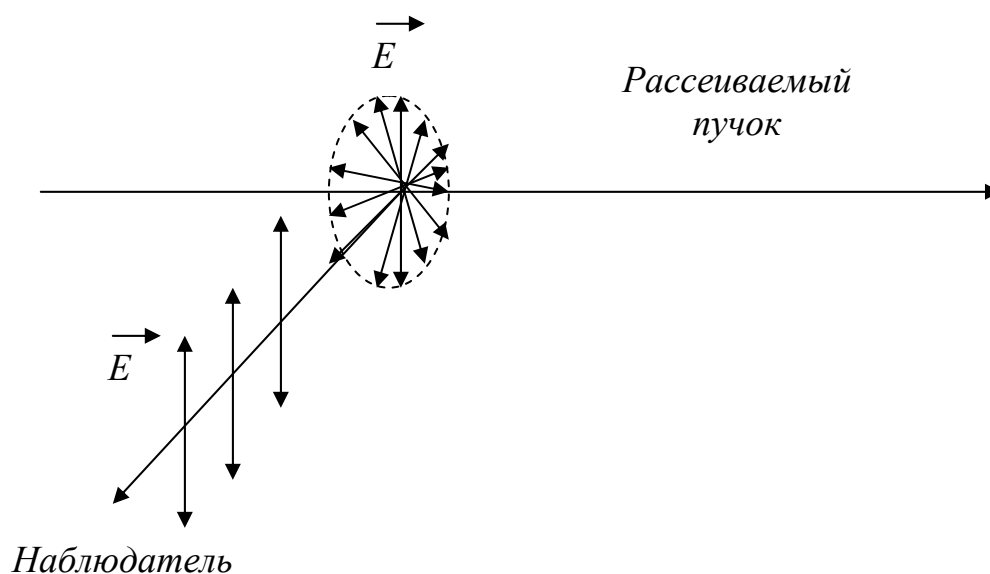


Рис. 3.2. Зависимость интенсивности рассеянного света от угла рассеяния

Из (3.3) и рис. 3.2 ясно, почему небо над полюсом не столь голубое, как в южных широтах.

Из-за поперечного характера электромагнитных волн рассеянный свет поляризован (рис. 3.3): полностью при угле рассеяния $\varphi = 90^\circ$ и частично при $\varphi < 90^\circ$.



По этой причине в полярных широтах с помощью поляризатора можно оценить местонахождение Солнца даже тогда, когда оно находится ниже уровня горизонта (полярной ночью).

Большое влияние на оптические свойства атмосферного воздуха оказывают капельки воды и кристаллики льда. Когда Солнце освещает завесу дождя, на противоположной от него стороне неба в отраженных лучах наблюдается дифракция света на капельках воды. Хотя они расположены в целом хаотически, все же расстояния между ними не сильно различаются между собой. Поэтому возникает нечто похожее на пространственную дифракционную решетку, и мы можем наблюдать радугу – часть дифракционного круга ограниченного Землей. Внешний край радуги окрашен в красный цвет, а внутренний в фиолетовый, что соответствует меньшим углом дифракции для более коротких волн. Похожая ситуация имеет место, когда в морозном воздухе скапливается много мелких кристалликов льда. Тогда вокруг Солнца возникает *гало* (от греч. *hálōs* – круг) – круги, кольца, столбы или пятна. Гало не столь красочно, как радуга, и наблюдается реже.

3.2. Распространение радиоволн в атмосфере

Радиоволны, будучи, как и свет, электромагнитными волнами, только более низкочастотными, также преломляются в атмосфере (см. рис. 3.1). Более того, кривизна лучей может быть такой большой, что они, как после отражения, направляются вниз (рис. 3.4).

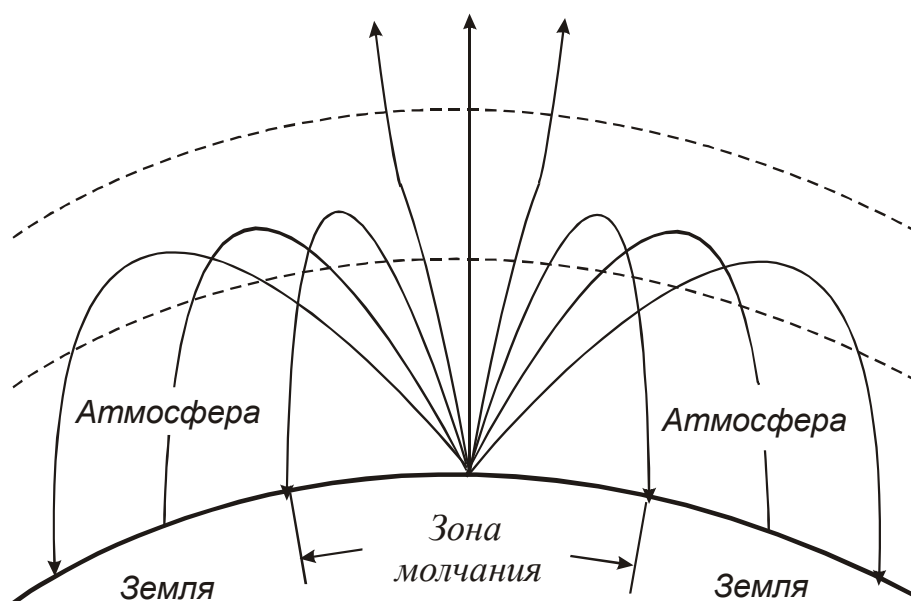


Рис. 3.4. Распространение радиоволн в атмосфере

Важную роль в отражении радиоволн обратно к Земле играет *ионосфера* – верхняя часть атмосферы (на высотах 50 – 100 км), содержащая изолированные атомы и свободные электроны. На рис 3.5 показано распределение концентрации N электронов по высоте в ионосфере в летний день.

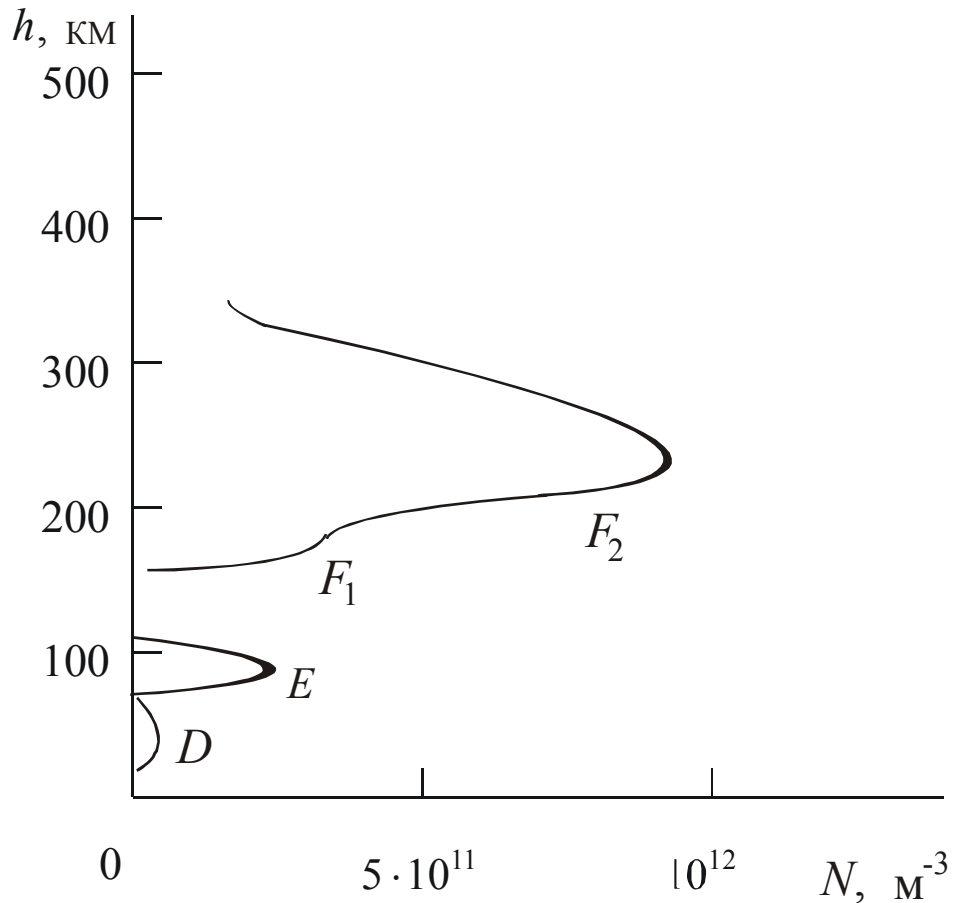


Рис. 3.5. Слои ионосферы с различной концентрацией электронов (летний день):
 D – на высотах от 70 до 90 км, E – от 90 до 150 км, F – от 190 до 500 км

Из теории дисперсии вытекает следующая зависимость показателя преломления n от частоты ω :

$$n^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{-\omega^2 + i2\beta\omega}, \quad (3.4)$$

где e и m – соответственно заряд и масса электрона, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, β – коэффициент затухания. Средняя скорость дрейфа электронов в поле электромагнитной волны

$$\langle u \rangle = \frac{eE_0}{\sqrt{2}m} \tau,$$

где $E_0 / \sqrt{2}$ – действующее значение напряженности электрического поля, τ – среднее время свободного пробега электрона. Средняя сила торможения, действующая на колеблющийся электрон,

$$2\beta m \langle u \rangle = \frac{eE_0}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$\beta = \frac{1}{2\tau}. \quad (3.5)$$

Плотность тока дрейфа

$$j = eN \langle u \rangle = \frac{\sigma E_0}{\sqrt{2}},$$

откуда $\sigma = e^2 N \tau / m$, а

$$\tau = \frac{m\sigma}{e^2 N}. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5), (3.6) в (3.4), получаем

$$n = 1 + \frac{\sigma / \varepsilon_0}{i\omega(1 + i\omega\tau)}. \quad (3.7)$$

Число столкновений электронов с молекулами воздуха в секунду порядка 10^6 – в слое D , 10^4 – в слое E , 200 – в слое F_2 . Таким образом, даже для сравнительно низких частот в ионосфере реализуется бесстолкновительный режим распространения радиоволн, когда $\omega \gg 1/\sigma$. В этом случае выражение (3.7) становится действительным:

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega^2 \tau} = 1 - \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega}. \quad (3.8)$$

Вводя так называемую *плазменную частоту колебаний*

$$\omega_p = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}, \quad (3.9)$$

с которой происходят собственные колебания (ленгмюровские колебания) электронов в плазме, (3.8) можно записать в виде

$$n = \sqrt{1 - (\omega_p / \omega)^2}. \quad (3.10)$$

Из (3.10) видно, что при $\omega \leq \omega_p$ фазовая скорость волны

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_p / \omega)^2}} > c,$$

и атмосфера становится непрозрачной для радиоволн.

Отражение радиоволн от ионосферы обуславливает возможность приема радиопередач на достаточно длинных волнах вне пределов прямой видимости. Одновременно имеет место и *зона молчания* – область, где не удастся поймать сигнал передатчика. С ростом частоты показатель преломления ионосферы увеличивается, и при $\lambda \sim 10$ м (30 МГц) $n \sim 1$. Такие радиоволны (УКВ) свободно проходят через ионосферу.

Слой *D* существует только в дневное время и ионизован слабо. Поэтому короткие волны от него не отражаются, но хорошо отражаются длинные волны. Слой *E* существует в средних широтах только в летнее время, а вблизи экватора – круглогодично. Это слой отражает в основном короткие волны. Слой *F* существует днем и ночью, причем наименьшая ионизация имеет место незадолго перед восходом Солнца, а наибольшая вскоре после полудня. Именно этот слой, в первую очередь, определяет условия распространения радиоволн на Земле.

Следует отметить, что связанные со вспышками на Солнце магнитные бури вызывают изменение концентрации электронов в ионосфере и нарушение радиосвязи.

3.3. Грозовые процессы

В результате тепловой конвекции в тропосфере образуются *конвективные ячейки* (рис.3.6). Нагретые нижние слои воздуха поднимаются вверх по осям ячеек, адиабатически охлаждаясь. При этом со-

держась в воздухе пары воды конденсируются с образованием *кучевых облаков*. Охлажденный воздух опускается вниз по границам ячеек.

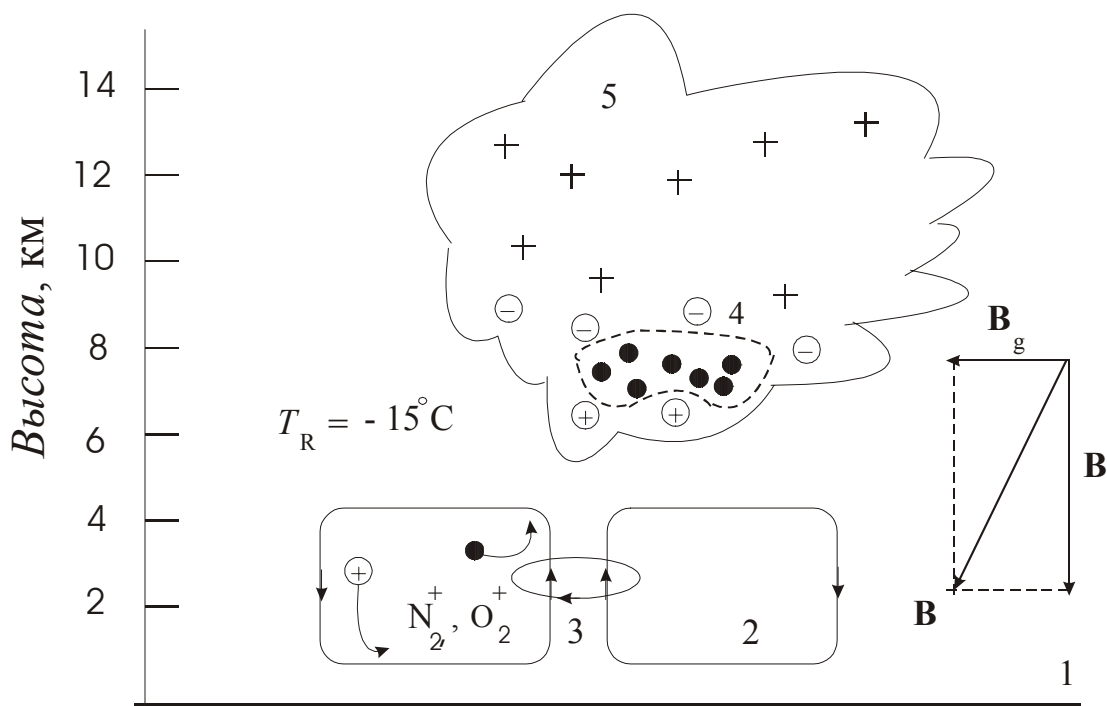


Рис. 3.6. Схема образования грозового облака: 1 – поверхность Земли, 2 – конвективная ячейка, 3 – ионный вихрь, 4 – электронное облако, 5 – кучевое (грозовое) облако

Достаточно мощное кучевое облако может превратиться в *грозовую тучу* за счет электризации содержащихся в нем частиц снежной крупы и мелких кристалликов льда. Тяжелые частицы снежной крупы, падая сквозь взвесь более мелких кристалликов льда и переохлажденных капель воды, заряжаются отрицательно при температуре ниже $T_R = -15^\circ\text{C}$, называемой *температурой реверса*, и положительно при более высокой температуре. Сами же льдинки приобретают дополнительный заряд. Температура реверса соответствует высоте около 6 км. Здесь в основном и сконцентрирован отрицательный заряд грозового облака. Верхняя, заряженная положительно за счет льдинок, часть грозового облака может достигать высоты 12 – 15 км. В нижней части облака находится относительно небольшой положительный заряд, обусловленный положительно заряженными крупинками снега или

образовавшимися из них при таянии каплями воды, выпадающими на землю в виде осадков.

В воздухе всегда имеется некоторое количество ионов. В нижней части атмосферы основными ионизаторами являются космические лучи, скорость ионообразования которыми на высоте нескольких километров составляет $q_i \sim 10^7 \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$. Коэффициент объемной рекомбинации ионов воздуха на тех же высотах $\alpha_i \sim 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$. Следовательно, в условиях квазистационарной ионизации концентрация ионов в тропосфере $n_i = \sqrt{q_i / \alpha_i} \sim 10^9 \text{ м}^{-3}$. Это, главным образом, молекулярные ионы N_2^+ и O_2^+ , гидратированные несколькими молекулами воды, и свободные электроны.

Наряду с конвекцией в электронно-ионно-молекулярной смеси воздуха идет процесс *термодиффузии*: более мелкие электроны устремляются в «горячую» осевую часть конвективных ячеек, а тяжелые молекулы и ионы диффундируют к «холодной» периферии (см. рис. 3.6). В нижней части ячеек, где скорость конвективного потока может достигать 25 м/с, вертикальная составляющая геомагнитного поля с индукцией $B_v \sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ (для умеренных широт) отклоняет ионы N_2^+ и O_2^+ от радиального направления движения, вовлекая во вращение с циклотронным радиусом $\sim 1 \text{ м}$. Это приводит к появлению *мелкомасштабных ионных вихрей*, закрученных левоспирально в Северном полушарии и правоспирально в Южном полушарии. Так как давление воздуха внутри вихревых воронок ниже атмосферного, они засасывают в себя пыль, снег, мелкий мусор, которые под действием центробежных сил выносятся на периферию воронок и делают их видимыми.

Термодиффузионные электроны, поднимаемые конвективными потоками вдоль осей ячеек, частично компенсируют положительный заряд в нижней части грозового облака и частично увеличивают отрицательный заряд снежной крупы, образуя своего рода *электронное облако*. Напряженность электромагнитного поля между нижней частью грозовой тучи и землей $\sim 10^5 \text{ В/м}$, что примерно на порядок меньше его пробойного значения в воздухе. Наличие электронного облака обеспечивает, тем не менее, в этих условиях возможность электрических разрядов и существование *молний*. Во-первых, между ним и положительно заряженной верхней частью тучи происходят искровые разряды (внутриоблачные молнии). Во-вторых, в месте наибольшей напряженности электрического поля возникает сток электронов на землю и появляется *ступенчатый лидер*, с которого начинается процесс молниевых разрядов на землю (рис. 3.7).

Отрицательный потенциал нижней части тучи намного более электроотрицателен, чем поверхность Земли. Поэтому электроны начинают двигаться с ускорением вниз. Скоростная съемка установила, что вначале из тучи появляется небольшой светящийся комок – ступенчатый лидер. Он движется к земле со скоростью около 0,1 скорости света, но проходит около 50 – 70 м и замирает. Следует пауза около 50 мкс, и лидер делает следующий шаг. Так, скачками он приближается к земле, по дороге ионизируя воздух и прокладывая проводящий канал, по которому устремляется основной заряд из тучи (около 20 – 30 Кл). Сила тока в молнии может достигать 10000 А.

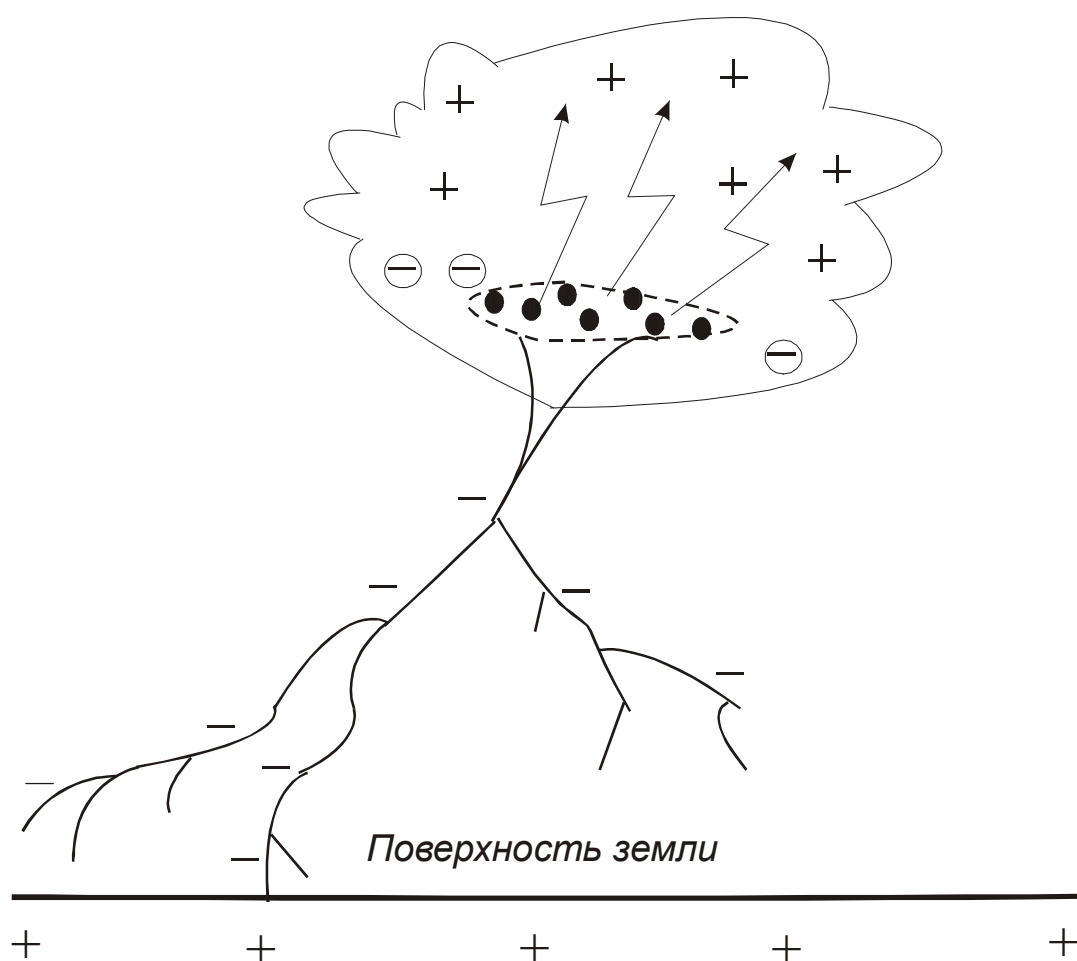


Рис. 3.7. Схема возникновения молнии

При этом практически мгновенно выделяется большое количество тепла. Плазма в канале молнии раскаляется до температуры, достигающей 10000 К. Ее расширение при такой температуре происходит со скоростью, превышающей скорость звука в воздухе. Поэтому мол-

ния сопровождается ударной звуковой волной, которую мы воспринимаем на слух как *гром*. При отражении от различных преград возникает эхо, и мы слышим раскаты грома.

Процессы электризации в туче происходят быстро. Достаточно всего 5 с, чтобы туча восстановила свой заряд. Рекомбинационные процессы идут гораздо медленнее, поэтому в проводящем канале, проложенном ступенчатым лидером первой молнии, может ударить и вторая молния, затем третья и т.д. Иногда их бывает больше десяти. Часто ступенчатый лидер дробится, и молния получается ветвистой. Тогда может случиться, что первый разряд пойдет по первой ветви, а второй – по другой ветви. Вариантов здесь много.

Нарисованная нами картина на самом деле несколько упрощена. Когда ступенчатый лидер оказывается примерно в 100 м от земли, оттуда ему на встречу ударяет разряд. Причем разряд начинается с заостренных и выступающих предметов, так как именно вблизи них напряженность электрического поля выше. Это свойство молнии используется в молниеотводах (громоотводах). Поэтому же во время грозы не рекомендуется находиться под высокими уединенными деревьями.

Специфическими видами молнии являются шаровая и четочная молнии. Мы, однако, здесь эти молнии рассматривать не будем ввиду отсутствия в настоящее время общепринятой теории, объясняющей их возникновение. С различными гипотезами на этот счет можно ознакомиться по источникам, приведенным в списке литературы.

Л е к ц и я 4

Гидродинамика атмосферных возмущений

4.1. Математическая постановка задачи

Полная система уравнений, описывающих движение газа в атмосфере без учета диссипативных эффектов, включает в себя уравнение движения (в форме Эйлера)

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \vec{v}) \vec{v} \right] = -\nabla p + \rho \vec{g} - 2\rho [\vec{\Omega} \vec{v}] = 0, \quad (4.1)$$

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.2)$$

и уравнение состояния среды (Пуассона, так как мы пренебрегаем здесь теплообменом, рассматривая быстропротекающие процессы)

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (4.3)$$

Здесь ρ – плотность среды (она рассматривается как сплошная, т.е. используется гидродинамическое представление); $\vec{v}(u, v, w)$ – скорость частиц среды – гидродинамическая скорость; p – давление; \vec{g} – ускорение силы тяжести; $\vec{\Omega}(0, 0, \Omega_z)$ – угловая скорость вращения Земли (ради простоты мы не учитываем ее широтную зависимость); ρ_0 и p_0 – равновесные значения плотности и давления; γ – показатель адиабаты; ∇ – оператор Лапласа.

Первое уравнение, согласно второму закону Ньютона, приравнивает произведение массы единичного объема среды на его ускорение сумме всех сил, действующих на эту массу: силы давления, силы тяжести и силы Кориолиса. Выражение в квадратных скобках пред-

ставляет собой полную производную от скорости по времени (ускорение):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v}.$$

Уравнение (4.2) выражает закон сохранения массы жидкости. В случае несжимаемой жидкости, когда плотность постоянна ($\rho = \text{const}$), оно принимает вид

$$\nabla \vec{v} = 0. \quad (4.4)$$

Рассмотрим малые возмущения параметров среды:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad \rho_1 \ll \rho_0,$$

$$p = p_0 + p_1, \quad p_1 \ll p_0,$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1, \quad v_1 \ll v_0.$$

Подставляя эти выражения в (4.1) – (4.3), линеаризуем задачу:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v}_0 \nabla u \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - 2\rho_0 \Omega_z v = 0, \quad (4.5)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v}_0 \nabla v \right) + \frac{\partial p}{\partial y} + 2\rho_0 \Omega_z u = 0, \quad (4.6)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{v}_0 \nabla w \right) + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}_0 \nabla \rho + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \rho_0 \nabla \vec{v} = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}_0 \nabla p + w \frac{\partial p_0}{\partial z} = c_s^2 \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}_0 \nabla \rho + w \frac{\partial p_0}{\partial z} \right). \quad (4.9)$$

Здесь u , v , w , p и ρ – возмущения соответствующих величин (индекс «1» для простоты опущен); $c_s = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ – скорость звука.

Из (4.8), (4.9) и уравнения гидростатики

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g$$

находим

$$\frac{Dp}{Dt} - \rho_0 g w = -c_s^2 \rho_0 \nabla \vec{v}, \quad (4.10)$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \nabla -$$

оператор Стокса.

Далее выполним операцию D/Dt над (4.7):

$$\frac{D^2 w}{Dt^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{g}{\rho_0} \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Здесь учтено, что $D\rho_0/Dt = 0$ и опущен член, содержащий произведение двух малых величин: ρ и w . Подставляя в последнее уравнение $D\rho/Dt$ из (4.9), получаем

$$\left(\frac{D^2}{Dt^2} + N^2 \right) w + \frac{1}{\rho_0} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{g}{c_s^2} \right) p = 0; \quad (4.11)$$

$$N^2 = \alpha g - \frac{g^2}{c_s^2}, \quad \alpha = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}.$$

Величина N , определяющая частоту свободных вертикальных колебаний в стратифицированной среде (атмосфере или океане), называется *частотой Брента-Вяйсяля*, α – *параметр стратификации*.

Перейдем в уравнениях (4.5) – (4.7), (4.10), (4.11) к новым переменным, обозначив

$$U = \left(\frac{\rho_0}{\rho_s} \right)^{1/2} u, \quad V = \left(\frac{\rho_0}{\rho_s} \right)^{1/2} v, \quad W = \left(\frac{\rho_0}{\rho_s} \right)^{1/2} w, \quad P = \left(\frac{\rho_0}{\rho_s} \right)^{-1/2} p,$$

(ρ_s – плотность атмосферы у поверхности Земли):

$$\frac{DU}{Dt} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P}{\partial x} - 2\Omega_z V = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{DV}{Dt} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P}{\partial y} + 2\Omega_z U = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{\rho_s c_s^2} \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \left(\frac{\partial}{\partial z} - \Gamma \right) W = 0, \quad (4.14)$$

$$\left(\frac{D^2}{Dt^2} + N^2 \right) W + \frac{1}{\rho_s} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \Gamma \right) P = 0, \quad (4.15)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{g}{c_s^2} = \frac{g}{c_s^2} - \frac{\alpha}{2},$$

где Γ – коэффициент Эккарта.

Малые возмущения скорости и давления будут распространяться по среде в виде плоских волн вида

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_U \\ A_V \\ A_W \end{pmatrix} \exp[i(kx + ly - \sigma t)]. \quad (4.16)$$

Тогда применение использованных в (4.12) – (4.15) дифференциальных операторов эквивалентно из замене на следующие множители:

$$\frac{D}{Dt} \rightarrow -i\sigma + iu_0 k + iv_0 l = -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow il.$$

В результате применения данной процедуры получаем

$$\rho_s \omega U - kP - i2\rho_s \Omega_z V = 0, \quad (4.17)$$

$$\rho_s \omega V - lP - i2\rho_s \Omega_z U = 0, \quad (4.18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \Gamma\right)W + i\left(kU + lV - \frac{\omega}{\rho_s c_s^2}P\right) = 0, \quad (4.19)$$

$$(N^2 - \omega^2)W - i\frac{\omega}{\rho_s}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Gamma\right)P = 0. \quad (4.20)$$

Система уравнений (4.17) – (4.20) описывает волны малых возмущений скорости и давления в атмосфере. Даже при сделанных упрощающих предположениях это достаточно сложная задача. Поэтому мы будем решать ее для характерных частных случаев.

4.2. Волны в атмосфере

Волны Лэмба. Рассмотрим эволюцию чисто вертикальных возмущений в атмосфере. Это означает, что $\omega = N$, и из (4.20) получаем

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \Gamma P = 0; \quad P = P_s e^{-\Gamma z},$$

т.е. мы имеем дело с преимущественно поверхностными волнами, экспоненциально затухающими по высоте. Такие волны называют *волнами Лэмба*. Из (4.17), (4.18) находим

$$U = \frac{\omega k + i2\Omega_z l}{\rho_s(\omega^2 - 4\Omega_z^2)}P, \quad (4.21)$$

$$V = \frac{\omega l + i2\Omega_z k}{\rho_s(\omega^2 - 4\Omega_z^2)}P. \quad (4.22)$$

Подставляя (4.21), (4.22) в (4.19), находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \Gamma\right)W + i\frac{1}{\rho_s}\left(\frac{\omega k + i2\Omega_z l}{\omega^2 - 4\Omega_z^2}k + \frac{\omega k - i2\Omega_z k}{\omega^2 - 4\Omega_z^2}l - \frac{\omega}{c_s^2}\right) = 0. \quad (4.23)$$

Если всюду в направлении распространения волны $W = 0$, то из (4.23) следует:

$$(k^2 + l^2) - \frac{(\omega^2 - 4\Omega_z^2)}{c_s^2} = 0;$$

$$\frac{(\omega^2 - 4\Omega_z^2)}{m^2} = c_s^2, \quad (4.24)$$

где $m = (k^2 + l^2)^{1/2}$ - продольное волновое число. Выражение (4.24) является дисперсионным уравнением для волн Лэмба.

Акустические волны. Если $\Omega_z = 0$, то (4.24) принимает вид

$$c_s = \sqrt{\frac{\omega}{m}}. \quad (4.25)$$

Это известная из курса общей физики дисперсионная характеристика для *акустических волн*.

Волны Рассби. Если положить возмущения вертикальной скорости всюду по всей высоте равными нулю, то вместо (4.17), (4.18) следует взять (4.12), (4.13), из которых, исключая P , получаем

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{DU}{Dt} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{DV}{Dt} \right) - 2\Omega_z \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - 2i \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} = 0. \quad (4.26)$$

Если горизонтальной дивергенции нет, то, обозначив градиент силы Кориолиса в меридиональном направлении через β , из (4.26) находим

$$i\omega V_\zeta - \beta V = 0, \quad (4.27)$$

где

$$V_\zeta = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} -$$

завихренность. Вводя функцию тока ψ , такую, что

$$U = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

получаем

$$V_\zeta = \nabla^2 \varphi. \quad (4.28)$$

Из (4.27) и (4.28) следует

$$\nabla^2 \psi + i \frac{\beta}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (4.29)$$

Предполагая для ψ волновую зависимость вида

$$\psi = \psi_0 \cos ly \exp[i(kx - \sigma t)],$$

получим следующее дисперсионное уравнение:

$$k^2 + l^2 = m^2 = -\beta \left(\frac{k}{\omega} \right)$$

или

$$\frac{k}{\omega} = C - u_0 = -\frac{\beta}{m^2}. \quad (4.30)$$

Такие волны распространяются в западном направлении, но если скорость ветра $u_0 \geq C$, то они могут изменить направление своего распространения на восточное. Их средняя скорость $C - u_0$ зависит от частоты, поэтому они обладают дисперсией. Это *волны Россби*.

Внутренние гравитационные волны. Из (4.13) – (4.15) при экспоненциальной зависимости возмущений компонент скорости (4.16) и $\rho_s, c_s, N, \Gamma = \text{const}$ получается следующая система уравнений:

$$\rho_s \omega U - kP - i2\rho_s \Omega_z V = 0,$$

$$\rho_s \omega V - lP + i2\rho_s \Omega_z U = 0,$$

$$-\frac{\omega}{\rho_s c_s^2} P + kU + lV + (n + i\Gamma)W = 0,$$

$$\rho_s (N^2 - \omega^2) W + \omega(n - i\Gamma)P = 0.$$

Приравнявая определитель из коэффициентов этой системы нулю, находим условие ее неправильного решения:

$$n^2 = \frac{(N^2 - \omega^2)m^2}{(\omega^2 - 4\Omega_z^2)} + \frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{N^2 + c_s^2 \Gamma^2}{c_s^2}. \quad (4.31)$$

Уравнение (4.31) является дисперсионным уравнением для внутренних гравитационных волн. Внутренние гравитационные волны возникают лишь при наличии стратификации среды и внешнего (гравитационного) поперечного поля. Здесь n – вертикальное волновое число.

На рис. 4.1 показаны дисперсионные характеристики рассмотренных волн. Волны Россби в чистом виде здесь отсутствуют. Поправки, связанные с вращением Земли, присутствуют во всех других волновых процессах. Через N_A на этом рисунке обозначено следующее:

$$N_A = (N^2 + c_s^2 \Gamma^2)^{1/2}. \quad (4.32)$$

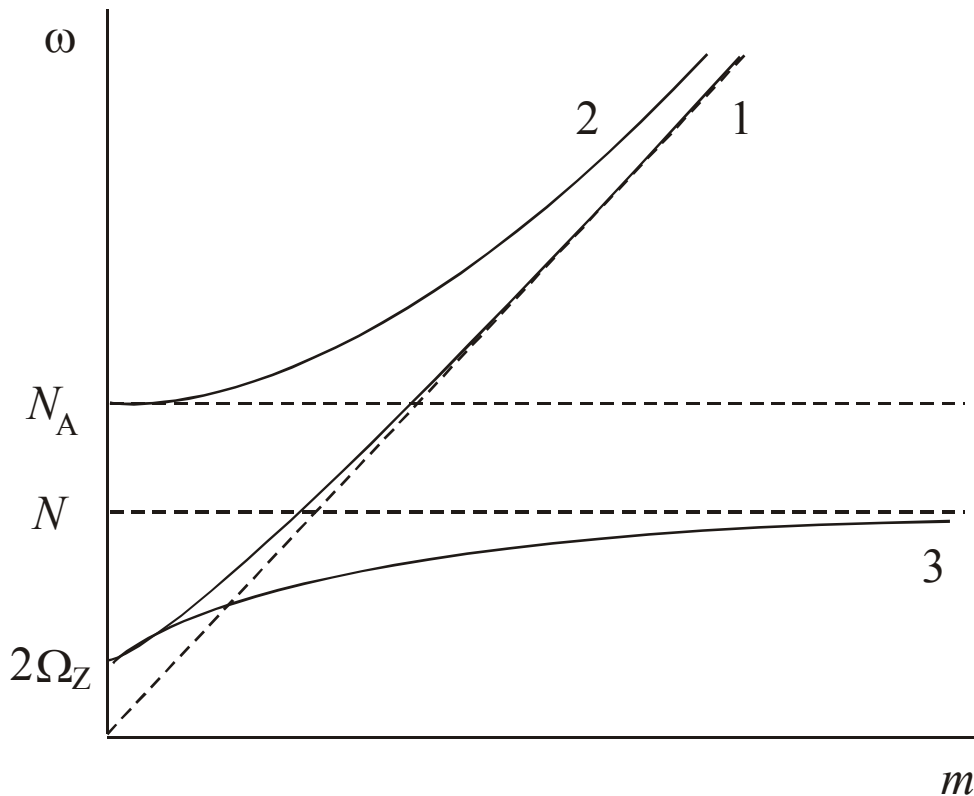


Рис. 4.1. Дисперсионные характеристики различных типов волн в атмосфере: 1 – волны Лэмба, 2 – акустические волны, 3 – внутренние гравитационные волны

Следует отметить, что в реальных условиях математическое описание волновых явлений в атмосфере еще сложнее. Наличие в ней ионизованных частиц требует использования наряду с уравнениями гидродинамики уравнений Максвелла. Это приводит к очень сложным дисперсионным уравнениям даже для слабых возмущений, аналитически решить которые не удастся. Различные упрощения позволяют выделить из общего процесса кроме уже описанных нами волн, также *альвеновские волны*, обусловленные наличием магнитного поля Земли.

Лекция 5

Мировой океан

5.1. Гипсографическая кривая

Около 70% земной поверхности покрыто водой. Ее масса составляет около $1,37 \cdot 10^{27}$ кг. Если бы Земля имела правильную шарообразную форму, то она бы оказалась покрыта слоем воды толщиной $m / 4\pi R_{\oplus}^2 \rho_0 = 2750$ м. Но земная поверхность отклоняется от такой усредненной сферы как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения радиуса. На рис. 5.1 показано распределение высот и глубин земной коры – так называемая *гипсографическая кривая*.

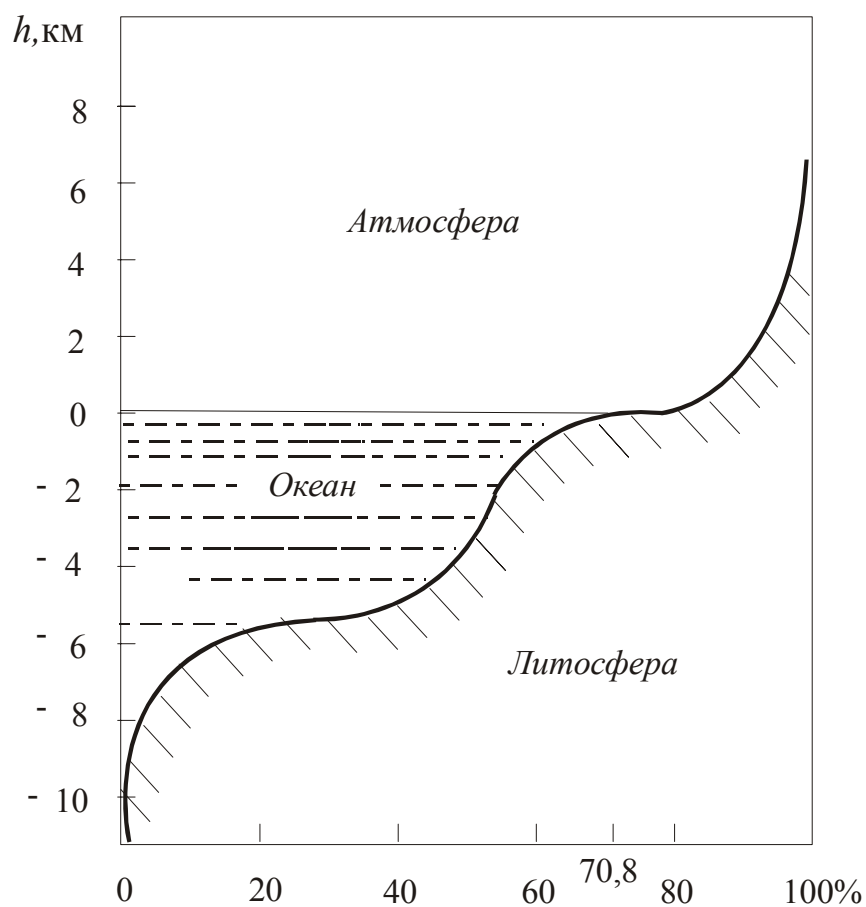


Рис. 5.1. Гипсографическая кривая

Из нее видно, что высокие горы и глубокие впадины океанического дна занимают около 1% земной поверхности. Основная площадь Земли занята равниной суши и океаническим дном. Эта кривая дает усредненный профиль перепада суши – океаническое дно. На самом деле поверхность дна при удалении от берега выглядит так: сначала глубина растет медленно, с уклоном всего 1,5 – 2 м/км. Это так называемый *континентальный шельф*. Он простирается в среднем на 80 км от берега, затем происходит резкий обрыв, и через 30 – 35 км глубина достигает 3 км. Это *континентальный склон*. Основную площадь океанического дна занимают *абиссальные равнины* (от греч. *ábyssos* – бездонный) с глубинами от 3,7 до 6 км. Лишь изредка они пересекаются подводными хребтами и глубоководными впадинами, где достигаются рекордные глубины в 10 – 11 км*.

Уровень океана в геологической истории Земли не всегда был постоянным. В ледниковые периоды он был ниже современного на 100 – 150 м из-за того, что значительная часть воды замерзала и образовывала ледники. Тогда шельф становился сушей, а континентальный склон начинался сразу у берега. Однако площадь океана при этом уменьшалась ненамного, примерно на 5%.

5.2. Состав океанской воды

Океан находится в химическом равновесии с атмосферой и земной корой. Он представляет собой насыщенный раствор атмосферных газов. Однако их растворимость в воде невелика. При 15 °С доля азота по массе составляет $1,3 \cdot 10^{-5}$, кислорода – $7,9 \cdot 10^{-5}$, углекислого газа – $5,5 \cdot 10^{-4}$. Тем не менее, общая масса растворенной в океане углекислоты почти в 100 раз превышает массу всей атмосферной углекислоты.

В океане растворено большое количество различных солей. В воде соли диссоциируют на ионы. Состав соответствующих катионов и анионов представлен в табл. 5.1.

Океанская вода в целом электрически нейтральна. Масса анионов больше, чем масса катионов, в основном, из-за того, что масса атома хлора больше, чем масса атома натрия. Среднее содержание смеси солей в океане около 35,2 г на килограмм морской воды или 35,2‰ (35,2 промилле**). От места к месту соленость воды меняется. Испарение воды повышает соленость, речные стоки уменьшают. Про-

* Максимальная глубина океана имеет место в Марианской впадине – 11 022 м (Тихий океан).

** От лат. *pro mille* – на тысячу.

центный состав солей остается практически постоянным. Лишь концентрация ионов HCO_3^- возрастает с глубиной, так как с понижением температуры растворимость углекислоты в воде повышается.

Таблица 5.1

Состав солей в океане

Катионы	Доля массы, %	Анионы	Доля массы, %
Na^+	30,60	Cl^-	55,02
Mg^{++}	3,68	SO_4^{--}	7,71
Ca^{++}	1,17	Br^-	0,19
K^+	1,13	HCO_3^-	0,41
Sr^{++}	0,02	H_3BO_3^-	0,07
Сумма	36,6		63,4

Плотность соленой воды больше плотности пресной воды. При температуре 0 °С океанская вода средней солености имеет плотность около 1,028 г/см³. Из-за слабой сжимаемости воды ее плотность на глубине почти такая же, как и на поверхности. Например, на глубине 5 км при 0 °С она равна 1,051 г/см³.

5.3. Стратификация плотности воды в океане

Интенсивное испарение воды с поверхности океана при безоблачном небе, когда дуют горячие сухие ветры, вызывает осолонение поверхностных слоев воды и повышение ее плотности. Это является причиной особых, термохалинных течений (от греческого *hals* – соль). Примером такого течения является циркуляция вод в Средиземном море. В его восточной части, у побережья Турции, соленость поверхностных вод достигает 40‰, в то время как на западе, в районе Гибралтара, она равна 36‰. Тяжелая соленая вода опускается на дно, согревая придонные воды, и устремляется в Атлантический океан. А на освободившееся место через Гибралтар по поверхности моря вливается вода из океана.

Казалось бы, термохалинные течения должны возникать и в меридиональном направлении: по дну от экватора к полюсам и по поверхности в противоположном направлении. Этого, однако, не происходит, так как опресненная вода вокруг Антарктиды перемешивается ветрами «ревущих сороковых» (см. лекцию 2). Там уже почти сравнявшаяся по солености с нижележащей водой, но все еще холодная антарктическая вода опускается и проникает в виде языков до экватора в Индийском океане и даже до Северного тропика в Атлантическом и Тихом океанах (см. рис. 5.2.).

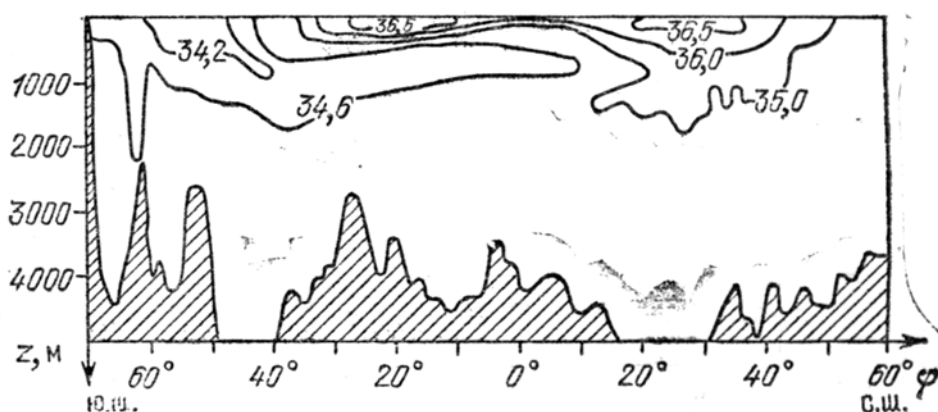


Рис. 5.2. «Языки» распресненных вод в Атлантическом океане.
(Из кн. Бялко А.В. Наша планета – Земля. – М.: Наука, 1983)

Из-за вертикального градиента солености океанская вода стратифицирована по плотности. Это обуславливает возможность существования в океане внутренних волн, о которых пойдет речь ниже (см. лекцию 7).

5.4. Солевые пальцы

В тропиках теплая соленая вода перемешивается с холодной распресненной водой арктического языка. Но, оказывается, температура жидкости выравнивается намного быстрее, чем соленость. Поэтому, если над холодной пресной водой окажется слой соленой теплой воды, возникает неустойчивость. Соленая вода тяжелее, и граница раздела прогибается вниз. Здесь она остывает быстрее, чем на плоских участках, но не успевает перемешаться с окружающей пресной водой. Плотность воды в прогнувшемся участке еще больше возрастает, и

она проваливается вниз, увлекая за собой узкую струю соленой верхней воды. Так *возникают солевые пальцы* (рис. 5.3).

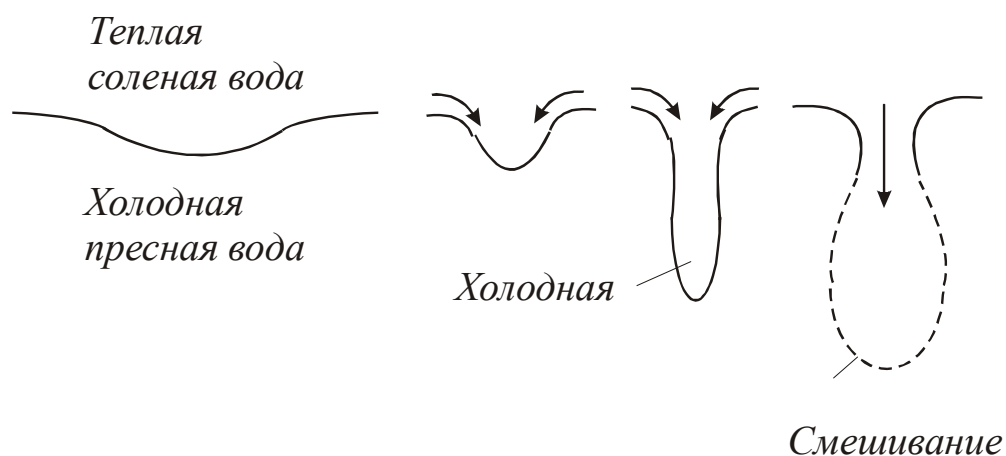


Рис. 5.3. Образование солевых пальцев в расслоенной воде

Солевые пальцы дробятся на более узкие и постепенно перемешиваются с окружающей водой на глубине. Солевые пальцы легко наблюдать в лабораторных условиях. Для большей наглядности подогретую соленую воду, наливаемую сверху на слой холодной пресной воды, лучше подкрасить.

Лекция 6

Циркуляция воды в океане

6.1 Ветровые течения в океане

Основной движущей силой поверхностных течений в океане является ветер. Пусть, например, его скорость над водой равна V . Заметим, что скорость ветра растет с высотой: на границе с водой она равна нулю, но чем выше, тем ветер сильнее (см. лекцию 2). Поэтому принято за скорость ветра принимать его среднюю скорость на высоте 15 м, что соответствует высоте мачт среднего судна.

Трение ветра о воду создает в ней сдвиговые напряжения $\sigma \sim \rho V^2$. Безразмерный коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально, оказывается равным $2,5 \cdot 10^{-3}$. Причиной такой его малости является то, что скорость ветра нами определяется по ее значению на высоте 15 м, в то время как напряжение на поверхности жидкости создается ветром, дующим на гораздо меньших высотах, где его скорость меньше на порядок. Поэтому запишем зависимость сдвигового напряжения в воде от скорости ветра в виде

$$\sigma = \rho(0,05V)^2. \quad (6.1)$$

При скольжении верхних слоев воды относительно нижних это напряжение уравнивается силами вязкости:

$$\sigma = -\eta \frac{dv}{dz}. \quad (6.2)$$

В мелком водоеме на его дне, на глубине D скорость течения обращается в нуль, а напряжение во всем слое практически постоянно. Тогда из (6.1), (6.2) получаем

$$V = V_0 \left(1 - \frac{z}{D} \right), \quad (6.3)$$

$$V_0 = \frac{\sigma D}{\eta} = \frac{D\rho}{\eta} (0,05V)^2. \quad (6.4)$$

Если, например, $D = 1$ м, а $V = 1$ м/с, то при $\rho = 1,2$ кг/м³ и $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с) получаем $v_0 = 2,9$ м/с, т.е. больше, чем V . Ошибка была в том, что мы считали течение ламинарным, а это в данном случае неверно. Течение является ламинарным лишь при малых числах Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{h_0 D \rho_0}{\eta_0},$$

меньших некоторого критического числа Рейнольдса $\text{Re}_{кр}$. $\text{Re}_{кр}$ зависит от геометрии течения, но обычно его значение лежит в диапазоне от 10 до 30.

При турбулентном течении надо рассматривать турбулентную вязкость

$$\eta \approx \eta_0 \frac{\text{Re}}{\text{Re}_{кр}}.$$

Тогда вместо (6.4) получаем

$$v_0 \approx \sqrt{\frac{\sigma \text{Re}_{кр}}{\rho_0}} \approx 0,05V \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \text{Re}_{кр}} \approx 0,013 V.$$

В рассматриваемом примере получается совсем другой результат: $v_0 \approx 1,3$ см/с. Соответствующее число Рейнольдса $\text{Re} \sim 10^4$.

6.2. Спираль Экмана

В глубоком океане кроме ветрового напряжения следует учитывать силу Кориолиса. Теория ветрового течения в глубоком открытом океане была разработана шведским ученым В. Экманом. Не вдаваясь в детали, приведем полученные им выражения для компонент скорости течения, если ветер дует вдоль оси y :

$$v_x = \pm v_0 e^{-kz} \cos\left(\frac{\pi}{4} \mp kz\right), \quad (6.5)$$

$$v_y = v_0 e^{-kz} \sin\left(\frac{\pi}{4} \mp kz\right). \quad (6.6)$$

Здесь верхний знак относится к Северному полушарию, а нижний знак к Южному.

Поверхностная скорость v_0 направлена под углом 45° к направлению ветра, направо в Северном полушарии и налево в Южном (рис. 6.1). При опускании вглубь океана вектор скорости поворачивается. На глубине $z = 3\pi/4k$ он направлен уже против ветра! Скорость течения там равна $v_0 \exp(-3\pi/4) = 0,095v_0$. На глубине π/k вода течет в противоположную сторону по сравнению с ее течением на поверхности, а ее скорость равна $v_0 \exp\{-\pi\} = 0,043v_0$. Параметр k определяет характерную глубину, на которой происходит поворот течения. Он вычисляется по формуле

$$k = \frac{\omega |\sin \varphi|}{v_0},$$

где φ – географическая широта местности.

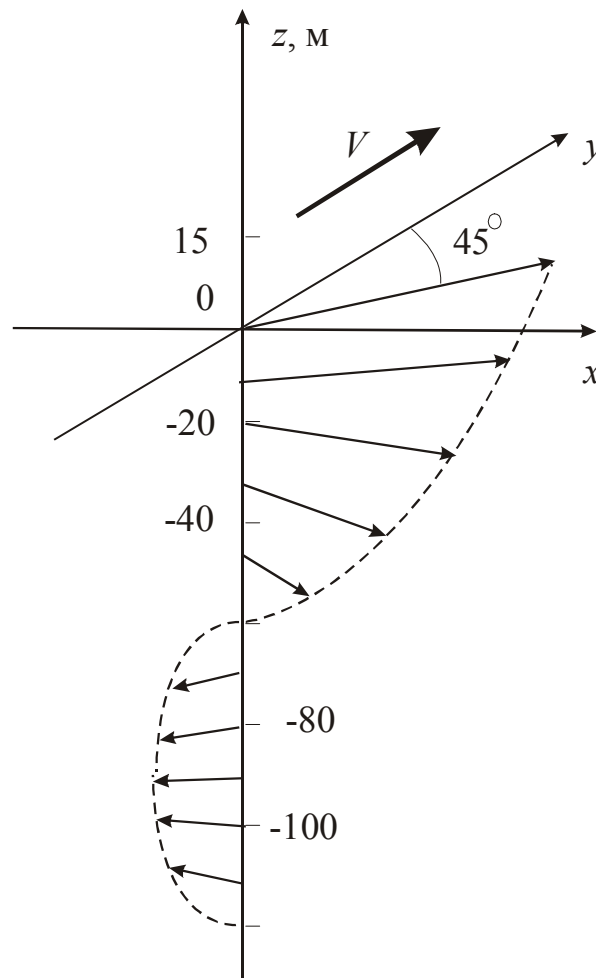


Рис. 6.1. Ветровое течение в глубоком океане (спираль Экмана)

При $V = 10$ м/с $v_0 \sim 0,1$ м/с, а глубина, на которой течение поворачивает вспять, около 100 м. При такой скорости число Рейнольдса $Re \sim 10^7$. Это турбулентный режим течения. Он хорошо перемешивает воду в океане до глубин порядка 100 м.

6.3. Пассатные течения. Экваториальное противотечение

Реальное течение мирового океана гораздо сложнее, чем дает теория Экмана. Нужно учитывать влияние континентов, зависимость температуры и солености воды от глубины, изменение направления ветров. Кроме того, реальные течения отличаются от идеализированных еще и тем, что им свойственно образование струй, похожих на реки в океане, только без берегов. Поэтому русло таких «рек» может меняться, делать изгибы, перемещающиеся в направлении течения. Эти изгибы называют меандрирующими (от др.-греч. названия реки в Малой Азии – Майандрос; теперь она находится на территории Турции и называется Большой Мендрес). От меандрирующих струй могут отрываться отдельные участки, образуя круговороты диаметром до нескольких сотен километров. Они медленно перемещаются по океану, постепенно, в течение нескольких месяцев, затухая.

Из стационарных течений, простирающихся на тысячи километров, важную роль играют *пассатные течения*, обусловленные пассатами (см. лекцию 2). Они возникают в тропиках, на широтах $\pm 15^\circ$, и направлены на запад. Если вспомнить, что пассаты дуют в Северном полушарии с северо-востока, а в Южном полушарии с юго-востока, то видно, что уклонение пассатных течений от ветра близко к 45° , как и предсказывает теория Экмана.

Между северным и южным пассатными течениями во всех океанах существует *экваториальное противотечение*, направленное на восток. Его ось смещена от экватора на 5° к северу, из-за отсутствия полной симметрии между Северным и Южным полушариями Земли. Причиной экваториального противотечения является выход на поверхность экмановских противотечений там, где ветер слаб, а силы Кориолиса малы, т.е. вблизи экватора.

Поскольку на глубине вода холоднее, то температура поднимающихся с экваториальным противотечением вод на несколько градусов ниже, чем температура соседних тропических вод. Удивительно, но факт: вблизи экватора вода в океане холоднее, чем вблизи северного и южного тропиков!

Подъем воды в течениях называется *апвеллингом*, а опускание *даунвеллингом* (от соответствующих английских слов upwelling и

downwelling). Кроме экваториальных апвеллингов и даунвеллингов, подъем или опускание вод имеет место у берегов морей при касательном к крутым берегам направлении ветра (рис. 6.2). Это тоже проявление кориолисовых сил, действующих перпендикулярно скорости потока жидкости.

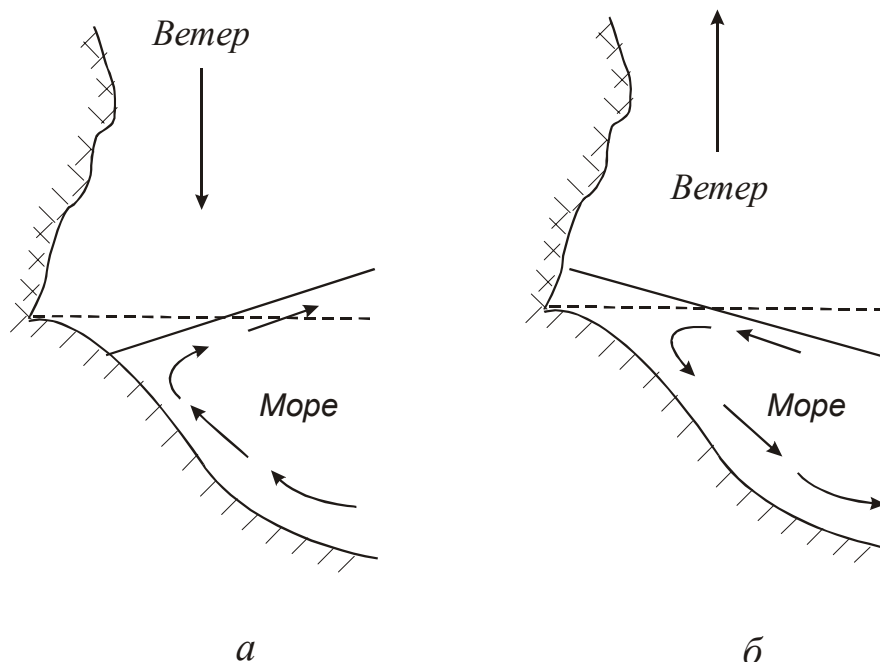


Рис. 6.2. Апвеллинг и даунвеллинг в прибрежной зоне (Северное полушарие):
а – ветер направлен к воде; б – ветер направлен от воды

6.4. Приконтинентальные течения

При подходе пассатных течений к континентам им приходится поворачивать в сторону от экватора. Так начинается *Гольфстрим*^{*}, *Бразильское течение*, *Курисио* и *Восточно-Австралийское течения* Тихого океана, *Мадагаскарское течение* Индийского океана. На рис. 6.3. показаны главные приконтинентальные течения в океане.

Из-за нагона воды пассатами уровень воды в Атлантике в Мексиканском заливе выше на 60 см, чем у берегов Африки, а в Тихом океане перепад уровней воды между западным и восточным берегами еще больше – 70 см. Он и обуславливает поверхностное течение. Таким образом, ветер (пассаты) здесь играет не главную роль. Поэтому и

^{*} Гольфстрим происходит от англ. *Gulf Stream* – течение (Мексиканского) залива. «Курошима» по японски означает черный поток. Цвет воды и в Гольфстриме, и в Курисио темно-синий, резко отличающийся от цвета окружающих вод.

противотечение имеет место не на глубине около 100 м, а на глубинах в несколько километров, и оно весьма слабое.

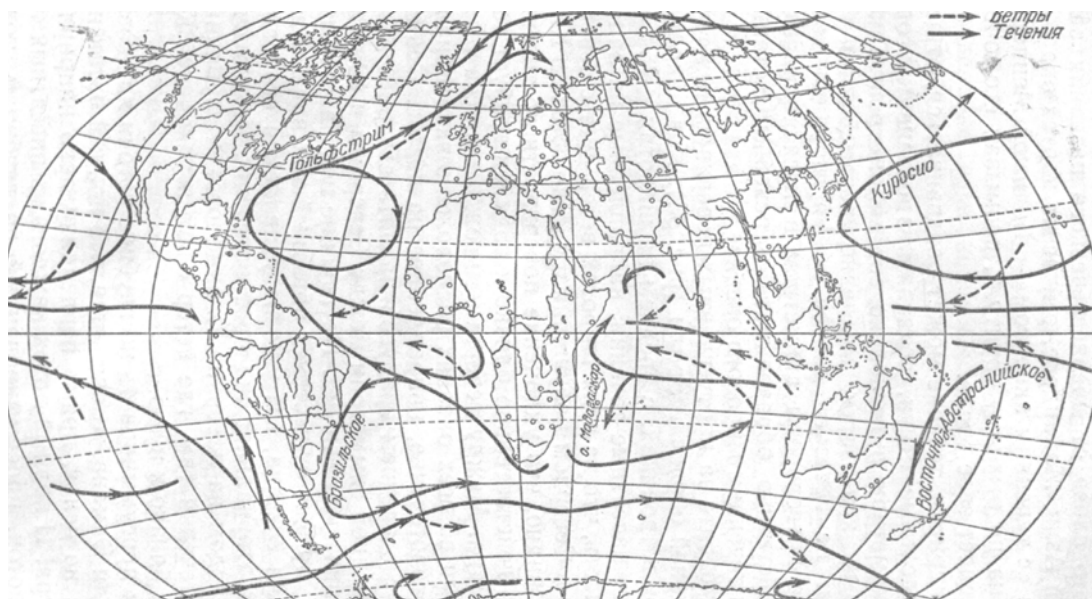


Рис. 6.3. Главные течения Мирового океана.
(Из кн. Бялко А.В. Наша планета – Земля. – М.: Наука, 1983)

«Ревущие сороковые» подгоняют эти течения. На тридцатиградусных широтах они расположением континентов и кориолисовыми силами отклоняются на северо-запад. Далее эти течения подгоняются юго-восточными ветрами Северного полушария и северо-восточными ветрами Южного полушария (см. рис. 2.5, а). Из приконтинентальных течений Южного полушария эти ветры формируют *Антарктическое циркумполярное течение*, не имеющее континентальных препятствий, и круговое *Западное Арктическое течение*. В Южном полушарии у него есть слабый аналог вблизи Антарктиды.

Лекция 7

Гравитационные волны на поверхности водоема

7.1. Математическая постановка задачи

Пусть слой D (рис. 7.1) идеальной несжимаемой и непроводящей жидкости находится в поле сил тяжести. Снизу он ограничен твердым дном $z = -h(x,y)$, а сверху – свободной поверхностью $z = \eta(x,y,t)$, подверженной внешним возмущениям. Гравитационное поле с ускорением свободного падения g направлено против оси Oz .

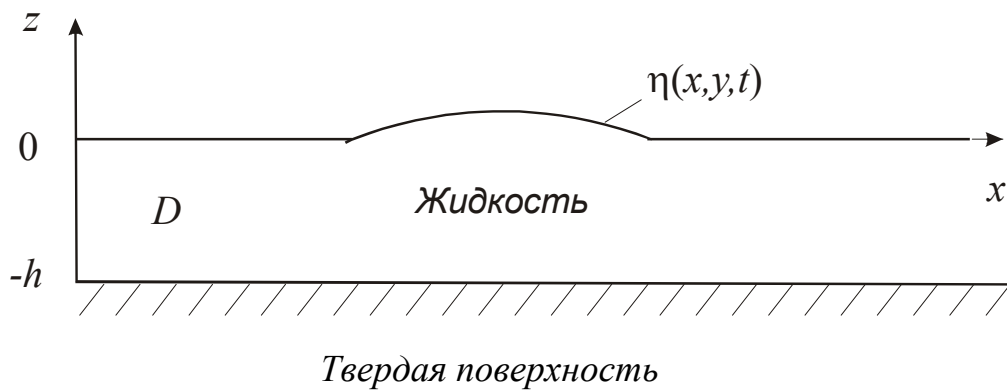


Рис. 7.1. Возмущения свободной поверхности плоского слоя жидкости

Задача об эволюции возмущения $\eta(x,y,t)$ свободной поверхности жидкости включает уравнение движения (см. лекцию 4)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}, \quad (7.1)$$

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0,$$

которое в случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) сводится к требованию

$$\nabla \vec{v} = 0, \quad (7.2)$$

и соответствующие граничные и начальные условия.

Класс плоских движений жидкости является безвихревым ($[\nabla \vec{v}] = 0$), что позволяет ввести скалярный потенциал поля скоростей Φ , определяемый выражением

$$\vec{v} = \nabla \Phi. \quad (7.3)$$

Подстановка (7.3) в (7.1), (7.2) сводит задачу к интегралу Бернулли – Коши

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gz + \frac{p}{\rho} = C(t) \quad (7.4)$$

и уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi = 0, \quad (x, y, z) \in D. \quad (7.5)$$

Граничные условия для потенциала Φ на твердом дне состоят из кинематического условия

$$v_n \Big|_{z=-h(x,y)} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{z=-h(x,y)} = 0, \quad (7.6)$$

выражающего обращение в нуль нормальной составляющей скорости, а на свободной границе – из кинематического и динамического условий. Кинематическое граничное условие выражает обращение в нуль полной скорости частиц жидкости на свободной поверхности $\zeta(\vec{r}, t) = 0$:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

и, с учетом $\zeta = \eta(x, y, z) - z$, $\partial x / \partial t = v_x = \partial \Phi / \partial x = \Phi_x$, $\partial y / \partial t = v_y = \partial \Phi / \partial y = \Phi_y$, $\partial z / \partial t = v_z = \partial \Phi / \partial z = \Phi_z$, запишется в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y - \phi_z \Big|_{z=h(x,y,t)} = 0. \quad (7.7)$$

Динамическое граничное условие выражает непрерывность давления при переходе через свободную поверхность и, с учетом интеграла Бернулли – Коши (7.4), может быть записано в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + g \eta(x, y, t) \Big|_{z=\eta(x,y,t)} = -\frac{1}{\rho} p_0(x, y, t) = 0, \quad (7.8)$$

где $p_0(x, y, t)$ – внешнее давление, действующее на свободной поверхности, например, атмосферное, а произвольная функция времени $C(t)$ путем выбора потенциала Φ положена равной нулю.

Начальные условия можно записать в виде

$$\Phi \Big|_{t=0} = \Phi_0(x, y, t), \quad \eta \Big|_{t=0} = \eta_0(x, y, t). \quad (7.9)$$

Итак, нелинейная краевая задача для уравнения Лапласа относительно потенциала поля скоростей для гравитационных волн на поверхности плоского слоя идеальной несжимаемой и непроводящей жидкости в общем виде формулируется следующим образом:

$$\Delta \Phi = 0, \quad (x, y, t) \in D, \quad (7.10 \text{ а})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{z=-h(x,y)} = 0, \quad (7.10 \text{ б})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y - \Phi_z \Big|_{z=\eta(x,y,t)} = 0, \quad (7.10 \text{ в})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial e} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + g \eta(x, y, t) \Big|_{z=\eta(x,y,t)} = -\frac{1}{\rho} p_0(x, y, t), \quad (7.10 \text{ г})$$

$$\Phi \Big|_{t=0} = \Phi_0, \quad \eta \Big|_{t=0} = \eta_0. \quad (7.10 \text{ д})$$

7.2. Линейное приближение

В случае малых возмущений на поверхности жидкости величины Φ и η малы, что позволяет переписать граничные условия (7.10 в), (7.10 з) в виде

$$\eta_t - \Phi_z \Big|_{z=\eta(x,y,t)} = 0, \quad \Phi_t + g\eta(x,y,t) \Big|_{z=\eta(x,y,t)} = -\frac{1}{\rho} p_0(x,y,t).$$

Исключая из записанных выражений η , для покоящейся свободной поверхности ($z = 0$) получаем

$$\Phi_{tt} + g\Phi_z \Big|_{z=0} = -\frac{p_{0t}}{\rho}.$$

Уравнение Лапласа (7.10 а) и граничное условие (7.10 б) на дне уже линейны и не зависят от η , поэтому линеаризованная задача содержит только одну функцию Φ :

$$\Delta\Phi = 0, \quad (x, y, z) \in D_1, \quad (7.11 \text{ а})$$

$$\Phi_{tt} + g\Phi_z \Big|_{z=0} = -\frac{p_{0t}}{\rho}, \quad (7.11 \text{ б})$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} \Big|_{z=-h(x,y)} = 0. \quad (7.11 \text{ в})$$

Здесь область D_1 ограничена свободной поверхностью $z = 0$ и твердым дном $z = -h(x,y)$.

Решив задачу (7.4) и найдя Φ , можно записать уравнение свободной поверхности для ее малых возмущений:

$$\eta(x,y,t) = -\frac{1}{g}\Phi_t(x,y,t) - \frac{1}{\rho g}p_0(x,y,t). \quad (7.12)$$

Ограничимся случаем жидкости постоянной глубины $h(x,y) = h_0 = \text{const}$ и будем искать решение однородной задачи (7.11) в виде плоских волн:

$$\eta = A \exp[i(\omega t - k_1 x - k_2 y)], \quad (7.13 \text{ а})$$

$$\Phi = \varphi(z) \exp[i(\omega t - k_1 x - k_2 y)]. \quad (7.13 \text{ б})$$

Подстановка (7.13 б) в уравнение Лапласа (7.11 а) приводит к уравнению

$$\varphi''(z) - k^2 \varphi(z) = 0, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2,$$

решение которого, удовлетворяющее граничному условию $\varphi'(-h_0) = 0$, имеет вид

$$\varphi(z) = B \operatorname{ch}[k(z + h_0)].$$

Согласно (7.12), для амплитуды функции η при $p_0 = 0$ получаем

$$A = -\frac{i\omega}{g} \varphi(0) = -\frac{i\omega}{g} B \operatorname{ch}(kh_0).$$

Тогда

$$\varphi(z) = \frac{ig}{\omega} A \frac{\operatorname{ch}[k(z + h_0)]}{\operatorname{ch}(kh_0)},$$

а искомый потенциал скорости

$$\Phi = \frac{ig}{\omega} A \frac{\operatorname{ch}[k(z + h_0)]}{\operatorname{ch}(kh_0)} \exp[i(\omega t - k_1 x - k_2 y)]. \quad (7.14)$$

Подстановка (7.14) в однородное граничное условие (7.11б) приводит к дисперсионному уравнению для поверхностных гравитационных волн в жидкости постоянной глубины:

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kh_0). \quad (7.15)$$

Рассмотрим два наиболее интересных предельных случая: длина волны велика по сравнению с глубиной, т.е. $kh_0 \ll 1$ (мелкая вода) и обратный предельный случай – $kh_0 \gg 1$ (глубокая вода). Из (7.15) для первого случая получаем

$$\omega = k \sqrt{gh_0} \left[1 - \frac{(kh_0)^2}{6} + \dots \right], \quad kh_0 \ll 1. \quad (7.16)$$

Для второго случая

$$\omega = \sqrt{gk}, \quad kh_0 \gg 1. \quad (7.17)$$

В пределе, когда $kh_0 \rightarrow 0$, фазовая скорость линейных волн на мягкой воде стремится к постоянному значению

$$c_0 = \sqrt{gh_0},$$

а дисперсионное уравнение (7.16) представимо в виде

$$\omega = c_0 k - \beta k^3, \quad \beta = 1/6c_0 h_0^2, \quad (7.18)$$

где β – параметр дисперсии.

7.3. Волны на мелкой воде

Рассмотрим теперь нелинейную задачу для волн на мелкой воде. Введем два безразмерных параметра: $\alpha = a/h_0$ – параметр нелинейности и $\beta = h_0^2/l^2$ – параметр дисперсии, где a – характерная амплитуда возмущения а l – ее характерные длина, и перейдем в задаче (7.11) к безразмерным переменным

$$x' = x/l, \quad z' = z/l, \quad t' = c_0 t/l, \quad \eta' = (\eta - h_0)/a, \quad \Phi' = c_0 \Phi/(gla), \quad (7.19)$$

опустив для простоты штрихи:

$$\beta \Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0, \quad 0 < z < 1 + \alpha\eta, \quad (7.20 \text{ а})$$

$$\Phi_z|_{z=0} = 0, \quad (7.20 \text{ б})$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + \alpha \Phi_x \eta_x - \frac{1}{\beta} \Phi_z &= 0 \\ \Phi_t + \eta + \frac{1}{2} \alpha \Phi_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} \Phi_z^2 &= 0 \end{aligned} \right\} z = 1 + \alpha\eta. \quad (7.20 \text{ в})$$

Представив решение уравнение Лапласа (7.20 а) в виде разложения в степенной ряд

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x, t) z^m \quad (7.21)$$

и подставляя его в (7.20 а), (7.20 б) с последующим сравнением коэффициентов при различных степенях z , можно переписать (7.21) в виде

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \beta^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} f(x, t), \quad (7.22)$$

где $f(x, t) = f_0(x, t)$.

Подставляя (7.22) в условия (7.20 в), получаем

$$\begin{aligned} \eta_t + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \alpha\eta) f_x] - \left\{ \frac{1}{6} (1 + \alpha\eta)^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f + \frac{1}{2} \alpha (1 + \alpha\eta)^2 \eta_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} f \right\} \beta + \\ + O(\beta^2) = 0, \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \eta + f_t + \frac{1}{2} \alpha f_x^2 - \frac{1}{2} (1 + \alpha\eta)^2 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} f + \alpha f_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} f - \alpha f_{xx} \right\} \beta + \\ + O(\beta^2) = 0. \end{aligned}$$

Предполагая, что $\beta \ll 1$ (слабая дисперсия) и пренебрегая в (7.23) членами, содержащими β , получим

$$\eta_t + [(1 + \alpha\eta) f_x]_x = 0, \quad (7.24)$$

$$\eta + f_t + \frac{1}{2} \alpha f_x^2 = 0.$$

Из (7.22) следует, что в рассматриваемом приближении $\Phi = f(x, y)$, а $f_x = \Phi_x = u$, где u – безразмерная горизонтальная компонента скорости частиц жидкости. Вертикальная компонента скорости в этом приближении равна нулю.

Дифференцируя второе уравнение в (7.24) по α и возвращаясь к размерным переменным, получаем

$$\begin{aligned} \eta_t + [(h_0 + \eta)]_x &= 0, \\ u_t + uu_x + g\eta_x &= 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Уравнения (7.24) и (7.25) называются *уравнениями мелкой воды*.
В линейном режиме ($\alpha \ll 1$) (7.24) принимают вид

$$\eta_t + u_x = 0, \quad u_t + \eta_x = 0,$$

или в размерных переменных,

$$\eta_{tt} = c_0^2 \eta_{xx}, \quad u_{tt} + c_0^2 u_{xx} = 0.$$

Таким образом, на мелкой воде линейные волны распространяются со скоростью $c_0 = \sqrt{gh_0}$.

7.4. Уравнения Буссинеска

Если в уравнении (7.23) предположить, что α и β – величины одного порядка малости и сохранить члены первого порядка по β , то они примут вид

$$\begin{aligned} \eta_t + [(1 + \alpha\eta)u]_x - \frac{1}{6}\beta u_{xxx} &= 0, \\ u_t + \alpha u u_x + \eta_x - \frac{1}{2}\beta u_{xt} &= 0. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Система уравнений (7.27) называется *уравнениями Буссинеска**. Она описывает нелинейные волны малой амплитуды на мелкой воде.

7.5. Уравнение Кортевега – де Вриза. Солитоны

Решения уравнений Буссинеска в виде волн, распространяющихся только в одну сторону (например, вправо), можно представить в виде

$$\begin{aligned} u &= A_0(\eta) + \alpha A_1(\eta) + \beta B_1(\eta) + O(\alpha^2 + \beta^2), \\ \eta_t + \eta_x &= \alpha C_1(\eta) + \beta C_2(\eta) + O(\alpha^2 + \beta^2), \end{aligned} \tag{7.28}$$

* Ж. В. Буссинеск (1842 – 1929) – французский ученый, специалист в области гидродинамики, оптики, термодинамики и теории упругости.

где $A_k(\eta)$, $B_1(\eta)$, $C_k(\eta)$ - некоторые функции η и ее производных. Подставляя (7.28) в (7.27), получаем

$$\begin{aligned} \eta_t + [A_0]_x + \alpha[(\eta A_0)_x + (A_1)_x] + \beta[(B_1)_x - \frac{1}{6}(A_0)_{xxx}] + \\ + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0, \\ [A_0]_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_t + A_0(A_0)_x] + \beta[(B_1)_t - \frac{1}{2}(A_0)_{xxt}] + \\ + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Рассматривая члены нулевого порядка по α и β в (7.29), видим, что $A_0(\eta) = \eta$ и

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_x + 2\eta\eta_x] + \beta[(B_1)_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}] = 0, \\ \eta_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_t + \eta\eta_x] + \beta[(B_1)_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt}] = 0. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Как следует из (7.28), $\eta_t = -\eta_x + O(\alpha + \beta)$. Следовательно, уравнения (7.30) совместимы, если $A_1 = -1/4\eta^2$, $B_1 = 1/3\eta_{xx}$ и каждое из уравнений (7.30) принимает вид

$$\eta_t + (1 + 3/2\alpha\eta)\eta_x + 1/6\beta\eta_{xxx} = 0, \quad (7.31)$$

а $C_1(\eta) = -3/2\eta\eta_x$, $C_2(\eta) = -1/6\eta_{xxx}$.

Уравнение (7.31) называется *уравнением Кортевега – де Вриза** (КдВ). В размерных переменных оно имеет вид

$$\eta_t + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0} \right) \eta_x + \frac{1}{6} c_0 h_0^2 \eta_{xxx} = 0. \quad (7.32)$$

В зависимости от амплитуды возмущения (уровня нелинейности) уравнение КдВ допускает различные решения: *квазигармоническое*, *кноидальное* и *солитонное* (рис. 7.2).

* В честь голландских ученых И. Д. Кортевега и Г. де Вриза.

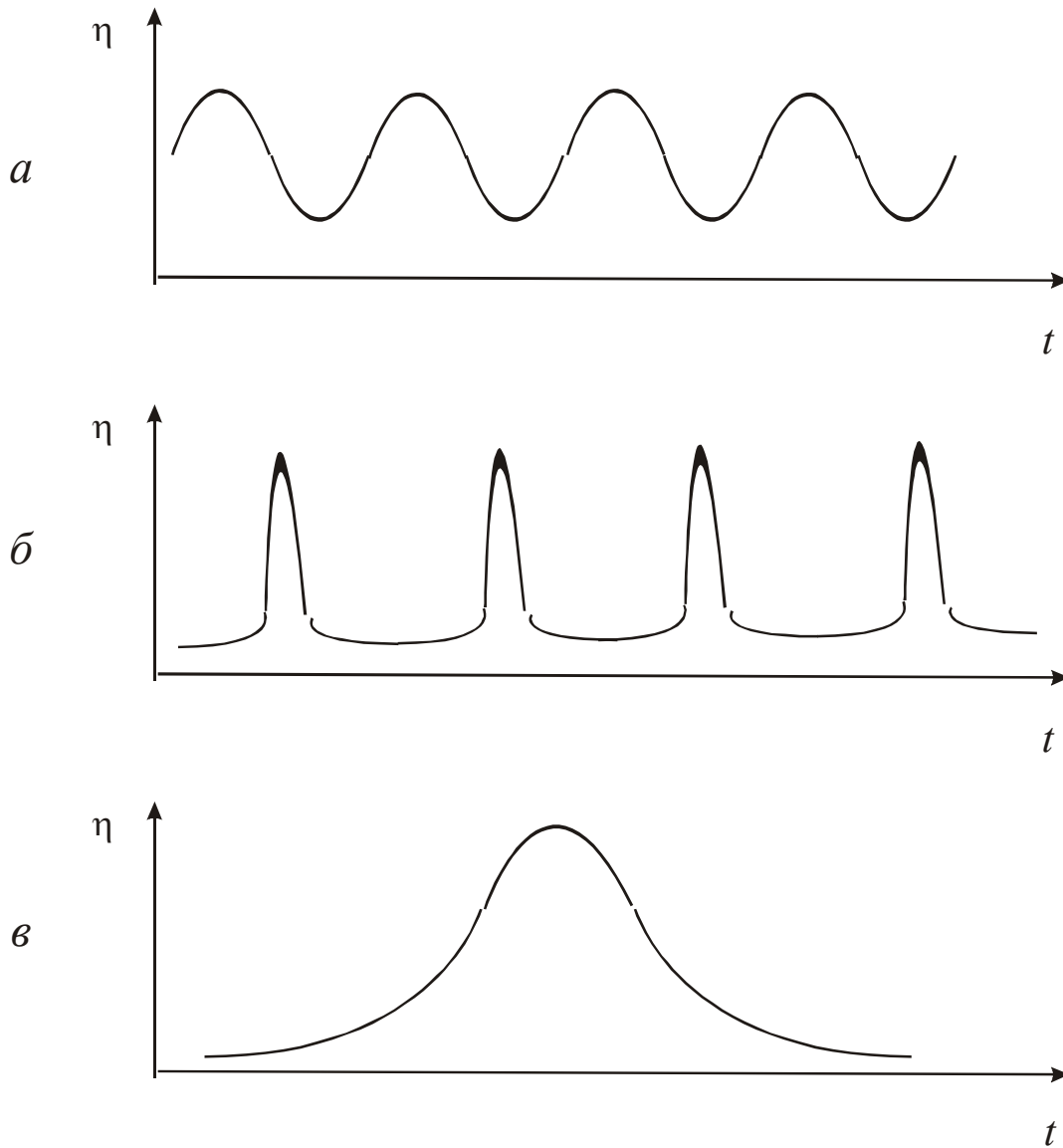


Рис. 7.2. Различные типы решения уравнения КдВ (по мере нарастания нелинейности): *a* – квазигармоническое, *б* – кноидальное, *в* – солитонное

Солитоны (от англ. *solitary waves* – уединенные волны) возникают при достаточно больших амплитудах возмущения и описываются уравнением вида

$$\eta = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \frac{x - Vt}{L}, \quad (7.33)$$

$$L = \left(\frac{4}{3} \frac{h_0^3}{\eta_0} \right)^{1/2}, \quad V = c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\eta_0}{h_0} \right), \quad c_0 = \sqrt{gh_0},$$

где L и V – соответственно ширина и скорость распространения солитона. Амплитуда солитона

$$\eta_0 = c \frac{h_0^3}{3l^2}$$

определяется глубиной жидкости и начальными условиями: длиной возмущения, его высотой и случайными факторами, заложенными в произвольную постоянную c .

Солитоны играют огромную роль в природе. Ими являются цунами, нервные импульсы, долгоживущие вихревые кольца (например, Большое Красное Пятно Юпитера). С солитонами приходится иметь дело и в технике: например, в полупроводниковых устройствах и волоконно-оптических линиях.

Л е к ц и я 8

Внутренние гравитационные волны в океане

8.1. Математическая постановка задачи

Как отмечалось в лекции 5 (п. 5.2), плотность океанской воды с глубиной слегка возрастает. Это объясняется тем, что в более холодной воде может раствориться больше солей, в частности гидрокарбонатов. Поэтому в океане, как и в атмосфере, имеет место вертикальная стратификация по плотности. Правда, в уравнении движения частиц жидкости можно не учитывать силы Кориолиса, так как из-за гораздо большей плотности чем воздух, вода отклоняется ими значительно слабее. Вспомните: пассатные течения существуют лишь в тропиках, и они никогда не создают крупномасштабных вихрей, как атмосферные циклоны и антициклоны.

С учетом сказанного, система уравнений, описывающих движения возмущений в стратифицированном океане без диссипации энергии может быть записана в виде (см. п. 4.1, уравнения (4.1) – (4.3)):

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \vec{v}) \vec{v} \right] = -\nabla p + \rho \vec{g}, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \quad (8.2)$$

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (8.3)$$

Считая воду в горизонтальной плоскости изотропной, можно ограничиться рассмотрением плоской задачи (в плоскости xOz , см. рис. 8.1).

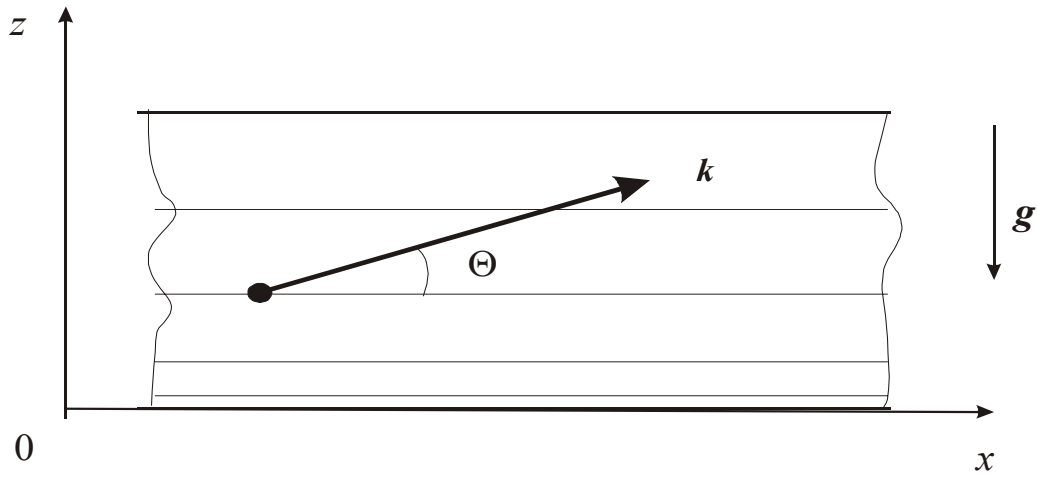


Рис. 8.1. Исследуемая модель возникновения внутренних гравитационных волн в океане

Линеаризуя систему (8.1) – (8.3) и применяя использованную в лекции 4 процедуру решения, можно получить дисперсионное уравнение

$$k_z^2 = \frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2} k_x^2 + \frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{N^2 + c_s^2 \Gamma^2}{c_s^2}; \quad (8.4)$$

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}, \quad N^2 = \alpha g - \frac{g^2}{c_s^2}, \quad \alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}, \quad \Gamma = \frac{g}{c_s^2} - \frac{\alpha}{2},$$

где c_s – скорость звука в среде, N – частота Брента-Вайсяля, α – параметр стратификации, Γ – коэффициент Эккарта. На рис. 8.2 показаны определяемые уравнением (8.4) дисперсионные характеристики.

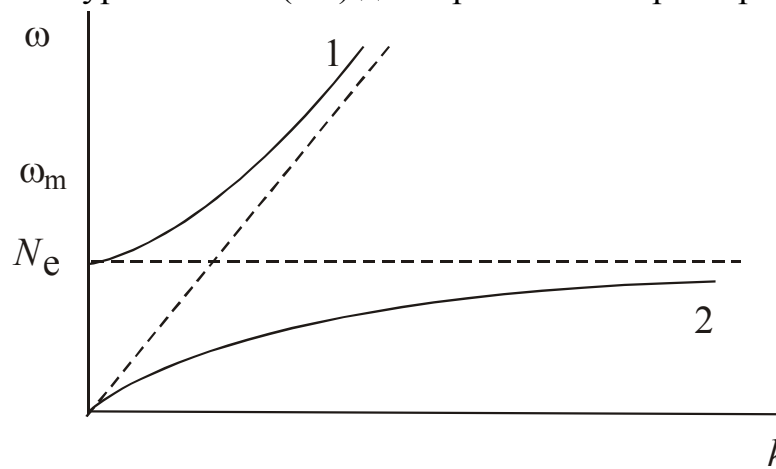


Рис.8.2. Дисперсионные характеристики внутренних волн в океане:
1 – акустические волны, 2 – внутренние гравитационные волны

Рассмотрим возникающие здесь частные случаи.

1. *Акустические волны* (ветвь 1). При $\omega \gg N$ уравнение (8.4) принимает вид

$$\omega = \omega_m \sqrt{1 + \frac{k^2 c_s^2}{\omega_m^2}}; \quad (8.5)$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}, \quad \omega_m = (N^2 + c_s^2 \Gamma^2)^{1/2}.$$

В отсутствие стратификации ($\alpha = 0$) $\omega_m = 0$ и из (8.5) следует $\omega = kc_s$.

2. *Внутренние гравитационные волны* (ветвь 2). При $\omega \leq N$ (8.4) приводится к виду

$$\omega = N \cos \Theta \left[1 + \frac{N^2 - \omega}{c_s^2 k^2} - \left(\frac{\Gamma}{k} \right)^2 \right]^{-1/2}; \quad (8.6)$$

$$\cos \Theta = k_x / k.$$

Выражение (8.6) представляет собой дисперсионное уравнение для внутренних гравитационных волн в стратифицированной жидкости, в общем случае с учетом сжимаемости.

8.2. Короткие волны

При $k \gg \Gamma$, $\omega \rightarrow N$ уравнение (8.6) упрощается:

$$\omega = N \cos \Theta. \quad (8.7)$$

Короткие внутренние гравитационные волны типичны для *сезонного термоклина** в океане, где относительное изменение плотности $\Delta \rho / \rho_0 \sim 10^{-3}$ и частота Брента–Вяйсяля $N \sim 10^{-2} \text{ с}^{-1}$. Условие $k \gg \Gamma$ практически означает, что длина волны много меньше так называемой *шкалы глубин* $H = 1/\alpha$: $\lambda \ll H$. Шкала глубин равна глубине, при

* Сезонным термоклином называется слой прогретой воды в океане глубиной около 50 м. Ниже этого слоя температура воды в течение года практически не изменяется.

опускании на которую плотность воды возрастает в e раз. В рассматриваемом случае $H \sim 10^5$ м.

Как следует из (8.7), фазовая скорость коротких гравитационных волн

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{N}{k} \cos \Theta, \quad (8.8)$$

а групповая скорость $C = d\omega / dk$ имеет компоненты

$$C_x = \frac{N}{k} \sin^2 \Theta, \quad C_z = \frac{N}{k} \sin \Theta \cos \Theta$$

и равна

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_z^2} = \frac{N}{k} \sin \Theta. \quad (8.9)$$

Таким образом, фазовая и групповая скорости коротких гравитационных волн взаимно перпендикулярны друг другу.

8.3. Длинные волны

В результате вулканической деятельности в отдельных частях Мирового океана выделяется значительное количество двуокиси углерода CO_2 и в меньшей мере других газов: паров H_2O , CO , H_2S , H_2 и др. Активное выделение CO_2 из земной коры вблизи действующих вулканов имеет место даже в периоды их покоя. Благодаря этому происходит насыщение придонных слоев воды углекислым газом. Во время извержения вулкана или при подводном землетрясении выделяется большое количество теплоты, что приводит к нагреванию воды и уменьшению растворимости CO_2 . Так, при повышении температуры воды на 10°C растворимость углекислого газа в ней изменяется в 1,4 раза, что сопровождается дегазацией избыточного количества CO_2 и уменьшением плотности жидкости у поверхности до $0,78 \text{ кг/м}^3$ ($\Delta\rho / \rho_0 \approx 0,3$). При более интенсивном насыщении воды углекислым газом вполне достижимы условия, при которых $\Delta\rho / \rho_0 \sim 1$, $N \sim 10^{-1} \text{ с}^{-1}$, $H \sim 10^3$ м, и в океане могут распространяться длинные внутренние гравитационные волны с $\lambda \gg H$.

В режиме длинных волн для несжимаемой жидкости ($c_s \rightarrow \infty$) дисперсионное уравнение (8.6) можно разложить по степеням малого параметра $2k/\alpha$ и, ограничившись первыми двумя членами разложения, представить в виде

$$\omega = c_0 k - gk^3; \quad (8.10)$$

$$c_0 = 2\sqrt{gH} \cos \Theta, \quad \beta = 2c_0 H^2.$$

Здесь c_0 – фазовая скорость линейных внутренних гравитационных волн, β – параметр дисперсии.

Компоненты групповой скорости по осям x, z

$$C_x = \frac{k_x}{k} (c_0 - 3\beta k^2), \quad C_z = \frac{k_z}{k} (c_0 - 3\beta k^2),$$

а сама она

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_z^2} = c_0 - 3\beta k^2,$$

причем $C < c < c_0$, $C \parallel c$.

Таким образом, в отличие от коротких внутренних гравитационных волн, «выбирающих» направление своего распространения в зависимости от соотношения между частотой колебаний источника ω и частотой Брента – Вайсяля N и имеющих ортогональные направления фазовой и групповой скоростей, длинные волны характеризуются постоянством скорости распространения вдоль «выбранного» направления распространения и коллинеарностью фазовой и групповой скоростей.

8.4. Внутренние солитоны. Цунами

Дисперсионному уравнению (8.10) соответствует уравнение КдВ следующего вида:

$$\Delta \rho_t + c_0 (1 + \Delta \rho / \rho) \Delta \rho_{x'} + \beta \Delta \rho_{x'x'x'} = 0, \quad (8.11)$$

где $\Delta \rho \ll \rho$ – малое возмущение плотности жидкости. Односолитонное решение (8.11) имеет вид

$$\Delta\rho = \Delta\rho_0 \operatorname{sech}^2 \frac{x' - Vt}{L};$$

$$L = \left(\frac{12\beta\rho_0}{c_0\Delta\rho_0} \right)^{1/2}, \quad V = c_0 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\Delta\rho_0}{\rho_0} \right).$$

Произведем теперь некоторые численные оценки, положив $H = 10^3$ м, $\Delta\rho / \rho = 0,1$ и $\cos \Theta = 1$. Тогда, согласно (8.10), (8.11), получим $c_0 \approx 200$ м/с, $\beta \approx 2 \cdot 10^8$ м³/с, $L \approx 10^4$ м, $V \approx 207$ м/с.

По мере увеличения наклона к горизонту скорость внутренних гравитационных волн, и в том числе солитонов, уменьшается до нуля при $\Theta = \pi / 2$. У наклонных солитонов длина увеличивается, а скорость уменьшается при движении внутрь жидкости (в связи с ростом плотности) и, наоборот, длина уменьшается, а скорость возрастает при движении к поверхности.

Именно возникновением внутренних гравитационных солитонов можно объяснить *цунами* – уединенные волны огромной разрушительной силы, возникающие при подводных и прибрежных землетрясениях. Скорость распространения цунами бывает от 50 до 1000 км/ч, высота в месте возникновения от нескольких десятков сантиметров до 5 м, а у побережья до 50 м и более. Приведенные выше оценки вполне соответствуют этим данным.

Заключение

Человек появился и сформировался как биологический вид на Земле. В бескрайнем космосе у нас нет другого места для жизни. Среди миллионов видов живых организмов, населяющих тонкий приповерхностный слой Земли, толщиной всего несколько километров, – биосферу – человек всего лишь одно из звеньев. Но, будучи наделен разумом, человек активно преобразует окружающую природу, строя города, железные дороги, плотины гидроэлектростанций, каналы и дамбы. Многочисленные заводы и фабрики, транспорт выбрасывают в атмосферу Земли ежегодно около 1% от всего углекислого газа, содержащегося в атмосфере. Это порождает так называемый парниковый эффект, приводящий к перегреву земной поверхности. При существующих темпах производства энергии через двести лет ее будет вырабатываться ежегодно около 5% от энергии, получаемой Землей от Солнца. Если коэффициент полезного действия в ее использовании будет низок, то выброшенная в атмосферу она вызовет повышение среднегодовой температуры на 3 – 5 градусов. Это вызовет усиленное таяние ледников и затопление многих низменных участков морского побережья. Человек разрушает озоновый слой планеты, используя различные аэрозоли и допуская их распыление в атмосфере. Это повышает частоту заболеваний раком кожи другими онкологическими заболеваниями, причем не только у самого человека. Наконец, человек освоил расщепление атомного ядра, построил многочисленные атомные электростанции, атомные ледоколы и подводные лодки, научно-исследовательские атомные реакторы. Возникла проблема захоронения радиоактивных отходов и реальная угроза технических аварий, приводящих к радиоактивному заражению местности. Таким образом, создавая среду для своего обитания, человек меняет ландшафт и климат планеты.

Но на нашей не такой уж большой планете все взаимосвязано. Изменения ландшафта и очертаний материков могут сильно изменить характер ветров и морских течений, а те, в свою очередь, еще сильнее повлиять на климат. Но даже если не касаться глобальных изменений в природе, а ограничиться влиянием промышленных, транспортных, добывающих, перерабатывающих и других производств на местные природные условия, то и здесь мы сталкиваемся с необходимостью

принимать грамотные технические решения. Эти решения, обусловленные необходимостью инженерной защиты окружающей среды и рационального природопользования, возможны только при наличии соответствующих знаний о строении и механизмах функционирования атмосферы и гидросферы Земли.

В нашем небольшом спецкурсе мы рассмотрели лишь весьма узкий круг вопросов, относящихся к затронутой проблеме. Но даже они дают информацию для вдумчивого читателя. Что касается инженера, сделавшего защиту окружающей среды своей профессией, то он, конечно, должен вникнуть в физику Земли более глубоко и целенаправленно. Автор надеется, что данная книга будет стимулировать этот интерес.

Библиографический список

1. Браже Р. А. Избранные лекции по физике. Ч. 4. Волновая оптика – / Р. А. Браже, В. М. Прокофьев. – Ульяновск: УлГТУ, 2001.
2. Браже Р. А. Вихревые и солитонные явления в атмосферном электричестве / Р. А. Браже. – Саратов: Изд-во СГУ, 1993.
3. Бялко А. В. Наша планета – Земля / А. В. Бялко. – М.: Наука, 1983.
4. Госсард Э. Волны в атмосфере / Э. Госсард, У. Хук. – М.: Мир, 1978.
5. Дымников В. П. Устойчивость крупномасштабных атмосферных процессов / В. П. Дымников, А. Н. Филатов. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1992.
6. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях / Дж. Лайтхилл. – М.: Мир, 1981.
7. Ле Блон П. Волны в океане / П. Ле Блон, Л. Майсек. – М.: Мир, 1977.
8. Марчук Т. И. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации / Т. И. Марчук, В. П. Дымников, В. Б. Залесный. – Л.: Гидрометеоиздат, 1987.
9. Миропольский Ю. В. Динамика внутренних гравитационных волн в океане / Ю. В. Миропольский. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
10. Мучник В. И. Физика грозы / В. И. Мучник. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
11. Саркисян А. С. Моделирование динамики океана / А. С. Саркисян. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1991.
12. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. – Т.5. Электричество и магнетизм. – Т. 7. Физика сплошных сред. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэнс. – М.: Мир, 1977.
13. Чалмерс Дж.-А. Атмосферное электричество / Дж.-А. Чалмерс. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974.

Учебное издание
БРАЖЕ Рудольф Александрович
Восемь лекций по физике атмосферы и гидросферы
Учебное пособие
Редактор Н.А. Евдокимова
Подписано в печать 30.06.2003. Формат 60×80/16.
Бумага офсетная. Печать Трафаретная. Усл. печ. л. 4,19.
Уч.-изд. л. 4.00. Тираж 150 экз. Заказ .
Ульяновский государственный технический университет,
432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32.
Типография УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32.