Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Л. Г. Малышев

К. А. Шумихина

А. В. Мелких

А. А. Повзнер

Механика

Рекомендовано методическим советом УрФУ в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программе бакалавриата и специалитета всех инженерно-технических специальностей

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2013

УДК 535.13 (075.8)
ББК 22.343я73
М54

Авторы: Л. Г. Малышев, К. А. Шумихина А. В. Мелких, А. А. Повзнер
Рецензенты:
кафедра технологии Уральского государственного педагогического университета (проф., д-р физ.-мат. наук О. А. Чикова); канд. физ.-мат. наук К. М. Антропов (Институт промышленной экологии УрО РАН)

Научный редактор – проф., д-р физ.-мат. наук А. А. Повзнер
М54 Механика: учебное пособие / Л. Г. Малышев, К. А. Шумихина, А. В. Мелких, А. А. Повзнер. – Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2013. – 113 с.
ISBN 978-5-321-02316-7

Учебное пособие «Механика» предназначено для студентов УрФУ, обучающихся на физических и инженерно-физических направлениях подготовки, изучающих курс общей физики в соответствии с рабочей программой курса «Общая физика» и образовательными стандартами. Учебное пособие содержит краткое изложение теоретического материала, перечисление основных физических соотношений, необходимых для решения задач, и подробно разобранные примеры решения задач. Самостоятельное использование студентами данного учебного пособия позволит улучшить уровень их подготовки по данным разделам курса «Физика».

УДК 535.13 (075.8)
ББК 22.343я73
ISBN 978-5-321-02316-7

1. Основы кинематики

Кинематика – это раздел механики, в котором изучаются способы описания механических движений независимо от причин, обуславливающих эти движения.

Под механическим движением понимают изменение с течением времени взаимного положения тел в пространстве. Применяют две модели твердых тел – *материальная точка (м.т.)* – тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данного движения, и *абсолютно твердое тело (а.т.т.)* – это абсолютно недеформируемое тело или тело, расстояние между двумя любыми точками которого остается постоянным при его движении.

Линию, по которой движется м.т., называют *траекторией движения,* она может быть *прямолинейной* (м.т. движется по прямой линии) или *криволинейной* траекторией. Если траектория движения лежит в одной плоскости, то такое движение принято называть *плоским.*

Для а.т.т. вводят два понятия: *поступательное движение* – это такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается параллельно самой себе и *вращательное движение вокруг неподвижной оси* – это такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Система отсчета (С.О.) (см. рис. 1.1)– совокупность тела отсчета, связанных с ним системы координат и прибора (часы) для измерения времени.

Положение тела в пространстве можно задать либо с помощью радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из начала координат в рассматриваемую точку, (для точек *1* и *2* на рис. 1.1 – это векторы $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$) либо с помощью координат (*x*,*y*,*z)* – проекций вектора $\vec{r}$ на координатные оси

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \ \left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right|, \tag{1.1}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – это векторы, указывающие направления осей *Ox, Oy, Oz* и равные по модулю единице.

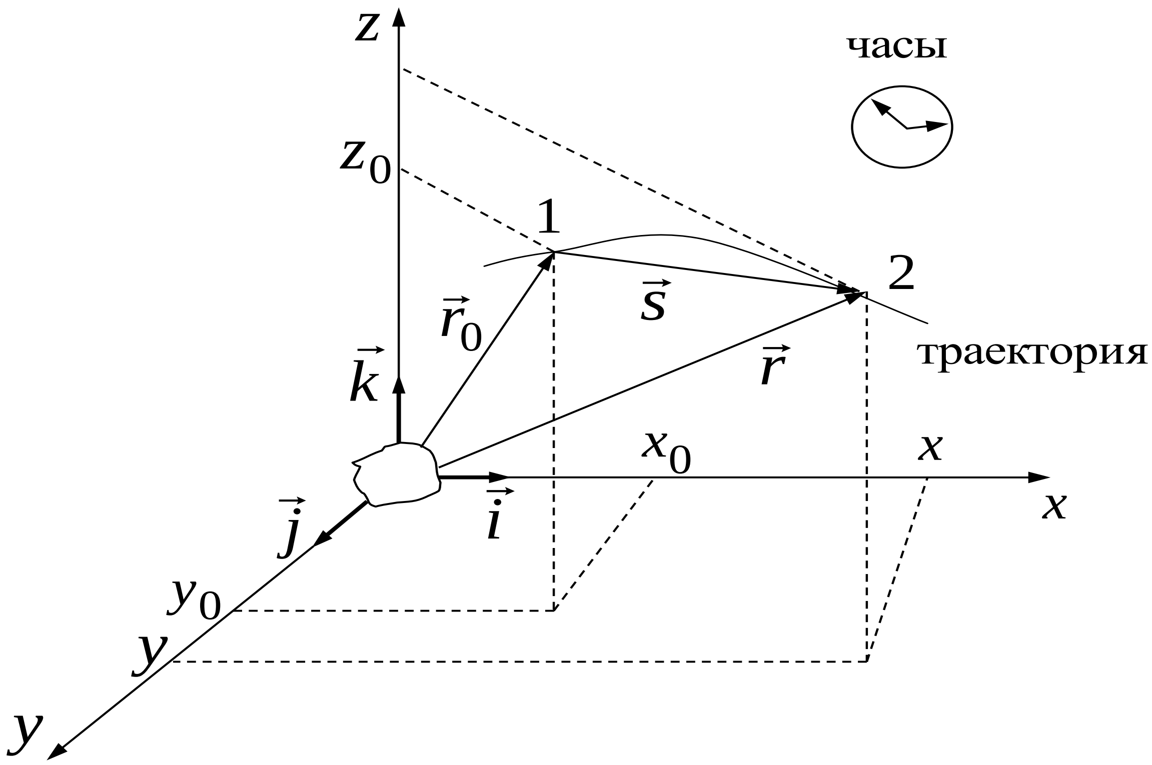

Рис. 1.1

Вектор $\vec{S}$, соединяющий начальное и конечное положение тела (точки *1* и *2* на рис. 1.1), называют *перемещением.* Он связан с радиус-векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ следующим равенством:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 . \tag{1.2}$$

Модуль перемещения меньше или равен *пути* l – расстоянию, пройденному телом по траектории; они совпадают в случае прямолинейного движения в одну сторону ($l = |\vec{S}|$).

Мгновенная скорость $\vec{\upsilon}$ – скорость тела в данной точке траектории, равная первой производной от радиус-вектора $\vec{r}$ (или перемещения $\vec{S}$) по времени t

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{S}}{dt} . \tag{1.3}$$

Вектор $\vec{\upsilon}$ в каждой точке траектории направлен по касательной к ней.

Средняя путевая скорость $\upsilon_{ср}$ – скалярная физическая величина, равная отношению пути, пройденного телом за время t, к этому времени t

$$\upsilon_{ср} = l/t. \tag{1.4}$$

Быстроту изменения скорости оценивают через понятие *мгновенного ускорения* $\vec{a}$ – ускорения в данной точке траектории, равного первой производной от скорости $\vec{\upsilon}$ по времени t или второй производной от радиус–вектора $\vec{r}$ (или перемещения $\vec{S}$) по времени t

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2}. \tag{1.5}$$

Проекцию вектора ускорения $\vec{a}$ на направление касательной к траектории называют *касательным (тангенциальным) ускорением* $\vec{a}_\tau$, а на направление, перпендикулярное к касательной, – *нормальным (центростремительным) ускорением* $\vec{a}_n$ (рис. 1.2, *а*)

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}; \qquad a_n = \frac{\upsilon^2}{R}; \tag{1.6}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n; \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \tag{1.7}$$

где υ – численное значение скорости; R – *радиус кривизны траектории* в данной ее точке, он равен радиусу окружности R, вписанной в малый участок траектории вблизи этой точки (рис. 1.2, *б*).

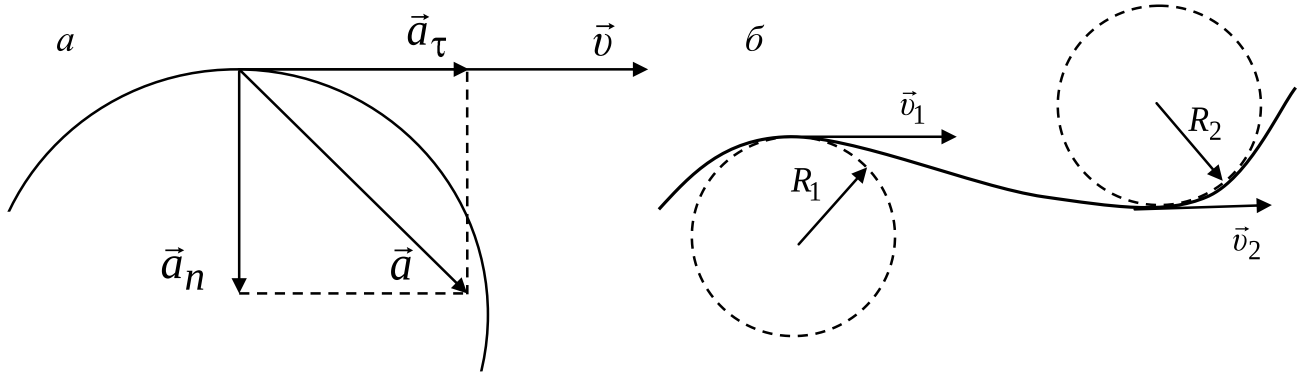

Рис. 1.2

Касательное ускорение характеризует изменение скорости тела по ее численной величине (по модулю скорости), а нормальное ускорение – по направлению.

Основной задачей кинематики является определение состояния м.т. (ее радиус-вектора $\vec{r}$ и скорости $\vec{\upsilon}$) в произвольный момент времени *t*. Для этого необходимо задать, во-первых, начальные условия – радиус-вектор $\vec{r}_0$ и скорость $\vec{\upsilon}_0$ в начальный момент времени $t = t_0$ и, во-вторых, зависимость ускорения $\vec{a}$ от времени *t*. Тогда, используя понятие интеграла для радиус-вектора $\vec{r}$ и вектора скорости $\vec{\upsilon}$, можно записать следующие выражения:

$$d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt\,, \quad \int\limits_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon} = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{a}dt\,;$$

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{a}dt\,, \tag{1.8}$$

$$d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt\,, \quad \int\limits_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}} d\vec{r} = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}dt\,;$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}dt = \vec{r}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left[\vec{\upsilon}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \right] dt\,. \tag{1.9}$$

Кинематические характеристики вращательного движения м.т. и а.т.т.

Пусть м.т. движется со скоростью $\vec{\upsilon}$ по окружности радиуса *r* вокруг неподвижной оси вращения (рис. 1.3, *а*). Материальную точку с осью вращения соединяет перпендикулярный к ней вектор $\vec{r}$, а вектор его элементарного приращения, вектор $d\vec{r}$, направлен по касательной к окружности.

Введем понятие *вектора элементарного углового перемещения* $d\vec{\varphi}$: он равен по модулю углу элементарного поворота $d\varphi$, причем $d\varphi > 0$. Направлен вектор $d\vec{\varphi}$ по оси вращения и связан с направлением вращения правилом правого буравчика (правого винта), а именно: направление вращения буравчика должно совпадать с направлением вращения м.т., тогда поступательное движение буравчика определяет направление вектора $d\vec{\varphi}$ (рис. 1.3,*а*).

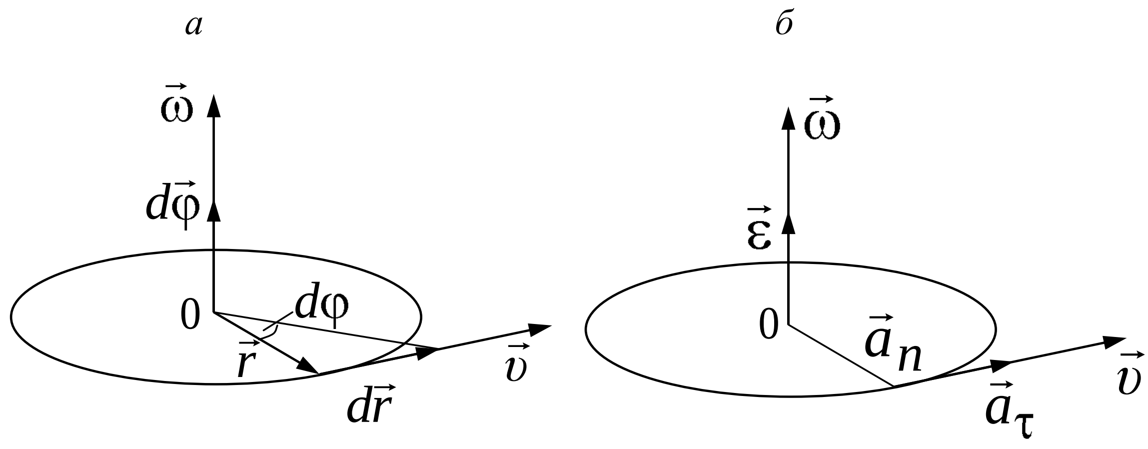

Рис. 1.3

Быстроту вращения м.т. характеризует *угловая скорость* $\vec{\omega}$, равная первой производной от вектора углового перемещения $\vec{\varphi}$ по времени *t*

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{1.10}$$

Направления вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ и вектора элементарного углового перемещения $d\vec{\varphi}$ совпадают.

Быстроту изменения угловой скорости характеризует *вектор углового ускорения* $\vec{\varepsilon}$, равный первой производной от угловой скорости $\vec{\omega}$ по времени *t*,

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2 d\vec{\varphi}}{dt^2}. \tag{1.11}$$

В случае ускоренного вращения направления $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ совпадают (рис. 1.3, *б*), для замедленного вращения векторы $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ направлены в противоположные стороны ($\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$).

Для описания вращательного движения м.т. используют частоту обращения *n*, определяемую как число оборотов, совершаемых телом за единицу времени, и период обращения T как время одного полного оборота. Справедливы следующие формулы взаимосвязи ω, n и T:

$$\omega = 2\pi n = 2\pi / T. \tag{1.12}$$

Если задать начальные условия (t = t_0: $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0$, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0$) и зависимость углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ от времени t, то для векторов углового перемещения $\vec{\varphi}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$ можно записать

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{\omega}\,dt, \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{\varepsilon}(t)\,dt. \tag{1.13}$$

Запишем формулы взаимосвязи линейных и угловых характеристик при вращательном движении, для этого воспользуемся определением векторного произведения двух векторов

$$d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi} \times \vec{r} \right]. \tag{1.14}$$

Выражение (1.14) позволяет получить следующие формулы взаимосвязи линейных и угловых характеристик:

1) для скоростей $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\omega}$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\left[d\vec{\varphi} \times \vec{r} \right]}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} \right] = \left[\vec{\omega} \times \vec{r} \right],$$

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega} \times \vec{r} \right], \quad \upsilon = \omega r. \tag{1.15}$$

2) для ускорений $\vec{a}$, $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \times \vec{\upsilon} \right] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \left[\vec{\varepsilon} \times \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega} \times \vec{\upsilon} \right] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon} \times \vec{r} \right], \quad a_\tau = \varepsilon r, \tag{1.16}$$

$$\vec{a}_n = \left[\vec{\omega} \times \vec{\upsilon} \right], \qquad a_n = \omega\upsilon = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R. \tag{1.17}$$

Направления векторов $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ показаны на рис. 1.3, *б* (ускоренное вращение м.т. $- \vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}$, $\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$).

Задача 1.1. Радиус-вектор частицы меняется со временем t по закону $\vec{r} = \vec{b}t(1 - \alpha t)$, где $\vec{b}$ – постоянный вектор; α – положительная постоянная. Найти: а) скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{a}$ частицы в зависимости от времени; б) промежуток времени Δt, по истечении которого частица вернется в исходную точку, а также путь, который она пройдет при этом.

Для определения скорости частицы воспользуемся формулой (1.3). Дифференцируя радиус-вектор частицы $\vec{r}$ по времени, получаем скорость частицы v в виде

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{b}(1 - 2\alpha t). \qquad (1.18)$$

Для определения ускорения частицы воспользуемся формулой (1.5) и, дифференцируя затем полученное выражение (1.18) для скорости частицы v еще раз по времени, приходим к выражению для ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -2a\vec{b}. \qquad (1.19)$$

Из выражений (1.18) и (1.19) видно, что вектор ускорения частицы $\vec{a}$ постоянен и направлен навстречу ее скорости $\vec{\upsilon}$ и, следовательно, частица движется равнозамедленно. В некоторый момент времени t_0 частица достигнет точки поворота, в которой ее скорость $\vec{\upsilon}$ обратится в ноль. Условие $\vec{\upsilon} = 0$ определяет время движения частицы до точки поворота

$$t_0 = \frac{1}{2\alpha}. \qquad (1.20)$$

Радиус-вектор точки поворота $\vec{r}_0$ найдем подстановкой времени t_0 (1.20) в исходное выражение, определяющее зависимость радиуса-вектора частицы от времени, и тогда получим

$$\vec{r}_0 = \vec{b}t_0(1 - \alpha t_0) = \frac{\vec{b}}{4\alpha}. \qquad (1.21)$$

Поскольку частица движется по прямой линии (вектор $\vec{b} = \mathrm{const}$), постольку ее путь до поворота и обратно равен удвоенной длине радиус-вектора $\vec{r}_0$ (1.21) точки поворота. Следовательно, искомый путь

$$s = 2\left|\vec{r}_0\right| = \frac{\left|\vec{b}\right|}{2\alpha}.$$

Промежуток времени Δt, по истечении которого частица вернется в исходную точку, определяется из уравнения

$$\vec{r} = \vec{b}t(1 - \alpha t) = 0,$$

которое имеет два корня $t_1 = 0$ и $t_2 = 1/\alpha$. Первый корень соответствует моменту старта точки, а второй корень – моменту ее возврата в точку старта. Поэтому искомый промежуток времени Δt составляет

$$\Delta t = 1/\alpha.$$

Задача 1.2. Точка движется, замедляясь, по прямой с ускорением, модуль которого зависит от ее скорости υ по закону $a = \alpha\sqrt{\upsilon}$, где α – положительная постоянная. В начальный момент скорость точки равна υ_0. Какой путь она пройдет до остановки? За какое время этот путь будет пройден?

Поскольку точка движется, замедляясь, то дифференциальное уравнение, определяющее зависимость скорости точки от времени, имеет вид

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -\alpha\sqrt{\upsilon}. \tag{1.22}$$

Решая уравнения (1.22) с учетом начального условия $\upsilon = \upsilon_0$ при $t = 0$, получим

$$\upsilon = \left(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{\alpha t}{2}\right)^2. \tag{1.23}$$

Время t_0 до остановки точки определяется из условия $\upsilon = 0$, для этого приравняем выражение (1.23) к нулю и выразим t_0:

$$t_0 = \frac{2\sqrt{\upsilon_0}}{2\alpha}. \tag{1.24}$$

Найдем уравнение движения точки. Для этого направим ось x вдоль прямой, по которой движется точка, и составим дифференциальное уравнение ее движения. Для этого приравняем выражение (1.23) и (1.3)

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \left(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{\alpha t}{2}\right)^2. \tag{1.25}$$

Решение уравнения (1.25) имеет вид

$$x = \int_0^t \left(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{\alpha t}{2}\right)^2 dt = \frac{2}{3\alpha}\left[\sqrt{\upsilon_0^3} - \left(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{\alpha t}{2}\right)^3\right], \tag{1.26}$$

а координата точки остановки определится подстановкой в выражение (1.26) времени движения точки до остановки t_0 (1.24) вместо текущего времени t. Путь s пройденный телом до остановки, равен этой координате, т.к. точка вплоть до остановки все время двигалась в одну и ту же сторону. В результате получим

$$s = \frac{2}{3\alpha}\sqrt{\upsilon_0^3}.$$

Задача 1.3. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности Земли. Скорость его подъема постоянна и равна υ_0. Благодаря ветру, шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $\upsilon_x = \alpha y$, где α – постоянная; y – высота подъема. Найти зависимость от высоты подъема: а) величины сноса шара $x(y)$; б) полного, тангенциального и нормального ускорений шара.

Найдем уравнения движения шара. Так как по оси y шар движется равномерно со скоростью υ_0, то координата шара y зависит от времени подъема t по закону $y = \upsilon_0 t$. Зависимость координаты шара x от времени t можно определить из дифференциального уравнения

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \alpha y = \alpha\upsilon_0 t. \tag{1.27}$$

Из (1.27) выразим $dx = \alpha\upsilon_0 t dt$. Далее, решая полученное уравнение с учетом начального условия $x = 0$ при $t = 0$, получим

$$x = \frac{\alpha\upsilon_0 t^2}{2}. \qquad (1.28)$$

Учитывая, что $t = y/\upsilon_0$, определим искомую величину сноса шара x в зависимости от высоты подъема y:

$$x = \frac{\alpha y^2}{2\upsilon_0}.$$

Компонента ускорения $a_y = 0$, так как по оси y шар движется равномерно. Компоненту ускорения a_x найдем, дважды дифференцируя координату x по времени t, – выражение (1.28). В результате получим $a_x = \alpha\upsilon_0$ и, следовательно, полное ускорение шара $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \alpha\upsilon_0$. Для определения тангенциального ускорения шара воспользуемся формулой (1.6)

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt},$$

где υ – полная скорость шара, определяется выражением

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(\alpha\upsilon_0 t)^2 + \upsilon_0^2}, \qquad (1.29)$$

дифференцируя выражение (1.29) по времени, получаем

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\alpha^2\upsilon_0^2 t}{\sqrt{(\alpha\upsilon_0 t)^2 + \upsilon_0^2}}. \qquad (1.30)$$

Избавляясь в выражении (1.30) от времени с помощью соотношения $t = y/\upsilon_0$, получаем зависимость тангенциального ускорения шара от высоты его подъема

$$a_\tau = \frac{\alpha^2 y}{\sqrt{1 + (\alpha y/\upsilon_0)^2}}. \qquad (1.31)$$

Нормальное ускорение шара a_n найдем, учитывая выражение (1.7):

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{\alpha^2\upsilon_0}{\sqrt{1 + (\alpha y/\upsilon_0)^2}}.$$

Задача 1.4. Точка движется в плоскости xy по закону $x = \alpha t$, $y = \alpha t(1-\beta t)$, где α и β – положительные постоянные. Найти: а) уравнение траектории $y(x)$; изобразить ее график; б) скорость υ и ускорение a точки в зависимости от t; в) момент t_0, когда угол между скоростью и ускорением равен $\pi/4$.

Запишем зависимости координат от времени

$$\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \alpha t(1-\beta t) \end{cases}$$

и выразим t через x. Получим

$$t = \frac{x}{\alpha}. \tag{1.32}$$

Подставим выражение (1.32) в зависимость $y(t)$, найдем уравнение траектории точки $y(x)$:

$$y(x) = \alpha\frac{x}{\alpha}\left(1-\beta\frac{x}{\alpha}\right) = x - \frac{\beta}{\alpha}x^2.$$

Для определения модуля скорости точки воспользуемся выражением:

$$|\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}, \tag{1.33}$$

Проекции вектора скорости материальной точки определяются формулами

$$\begin{aligned} \upsilon_x &= \frac{dx}{dt} = \alpha, \\ \upsilon_y &= \frac{dy}{dt} = \alpha(1-2\beta t), \end{aligned} \tag{1.34}$$

Далее, подставляя полученные выражения (1.34) в (1.33), получаем выражение для модуля вектора скорости:

$$|\vec{\upsilon}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2(1-2\beta t)^2} = \alpha\sqrt{1+(1-2\beta t)^2}. \tag{1.35}$$

Аналогично (1.35) для определения модуля вектора ускорения материальной точки запишем:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{1.36}$$

Проекции вектора ускорения материальной точки определяются по формулам:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -2\beta. \qquad (1.37)$$

Далее, подставляя полученные выражения (1.37) в (1.36), получим выражение для модуля вектора ускорения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{0 + 4\alpha^2\beta^2} = 2\alpha\beta.$$

Найдем момент t_0, когда угол между вектором скорости и ускорения равен $\pi/4$. Из рис. 1.4 видно, что $\angle\varphi = \vec{\upsilon},\vec{a} = \vec{\upsilon}_y,\vec{\upsilon} = \pi/4$, следовательно, этот угол можно найти из условия

$$\upsilon_y = -\upsilon_x.$$

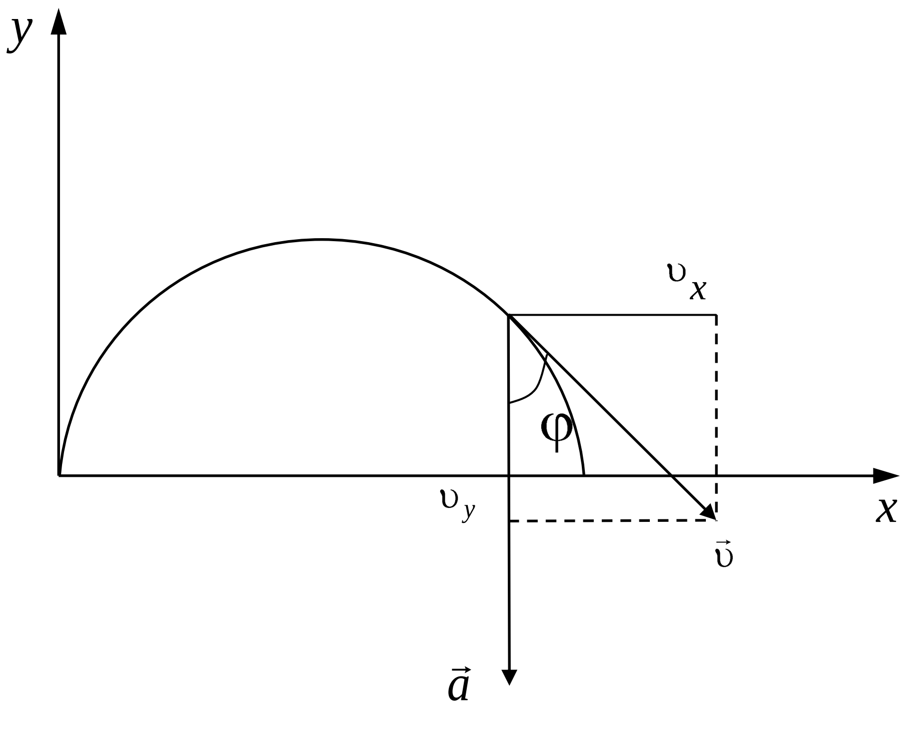

Рис. 1.4

Подставим в это выражение формулы для проекции вектора скорости (1.34), получим

$$\alpha(1-2\beta t)=-\alpha. \qquad (1.38)$$

Решая полученное уравнение (1.38), находим промежуток времени t_0 = 1/β.

Задача 1.5. Точка движется по окружности со скоростью $\upsilon=\alpha t$, где $\alpha=0{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Найти ее полное ускорение в момент, когда она пройдет n = 0,1 длины окружности после начала движения.

Тангенциальное ускорение частицы определяется по формуле (1.6) и остается постоянным

$$a_\tau=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\ \ \alpha t}{dt}=\alpha. \qquad (1.39)$$

Нормальное ускорение частицы зависит от времени по закону

$$a_n=\frac{\upsilon^2}{R}=\frac{\alpha^2 t^2}{R}. \qquad (1.40)$$

Найдем время t_0, за которое частица пройдет n-ю часть окружности. Зависимость пройденного частицей пути s от времени определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{ds}{dt}=\upsilon=\alpha t,\ \ ds=\alpha t dt,$$

решение которого имеет вид: $s = \alpha t^2/2$. Поэтому искомое время t_0 находится из условия

$$2\pi R n=\alpha t_0^2\ /\ 2,$$

откуда получаем соотношение

$$\alpha^2 t^2 = 4\pi R n\alpha. \qquad (1.41)$$

Подставляя формулу (1.41) в выражение для нормального ускорения (1.40), получаем $a_n=4\pi\alpha n.$ Полное ускорение в этот момент времени определяется по формуле (1.7) и равно

$$a=\sqrt{\alpha^2+\ \ 4\pi\alpha n\ \ ^2}=\alpha\sqrt{1+\ \ 4\pi n\ \ ^2}.$$

Подставляя численные значения задачи, получим a = 0,8 м/с^2.

Задача 1.6. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ его поворота зависит от времени как $\varphi = \beta t^2$, где β = 0,20 рад/с^2. Найти полное ускорение a точки A на ободе колеса в момент t = 2,5 с, если скорость точки A в этот момент $\upsilon = 0{,}65\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Угловая скорость вращения колеса ω в момент времени t определяется выражением (1.20) и равна

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2\beta t. \tag{1.42}$$

Так как линейная скорость υ точки A в этот момент времени связана с угловой скоростью ω соотношением (1.15), то радиус колеса R равен

$$R = \frac{\upsilon}{2\beta t}, \tag{1.43}$$

а нормальное ускорение этой точки определяется выражением (1.6) и равно

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = 2\beta\upsilon t. \tag{1.44}$$

Тангенциальное ускорение точки A в момент времени t определяется как первая производная скорости по времени $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$. Далее, используя связь линейной и угловой скорости (1.15), а также выражения для радиуса колеса (1.43) и угловой скорости (1.42), получим

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = \frac{\upsilon}{2\beta t}2\beta = \frac{\upsilon}{t}, \tag{1.45}$$

и, следовательно, полное ускорение в этот момент времени определяется по формуле (1.7), в которое подставим формулы (1.44) и (1.45)

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\upsilon/t)^2 + (2\beta\upsilon t)^2} = (\upsilon/t)\sqrt{1 + (2\beta t^2)^2}.$$

Используя численные условия задачи, получаем a = 0,7 м/с^2.

Задача 1.7. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = \alpha t$, где $\alpha = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi = 60°$ с ее вектором скорости?

Вектор скорости υ некоторой точки тела, вращающейся по окружности радиуса R, направлен по касательной к этой окружности и, следовательно, коллинеарен вектору тангенциального ускорения a_τ этой точки (рис. 1.5).

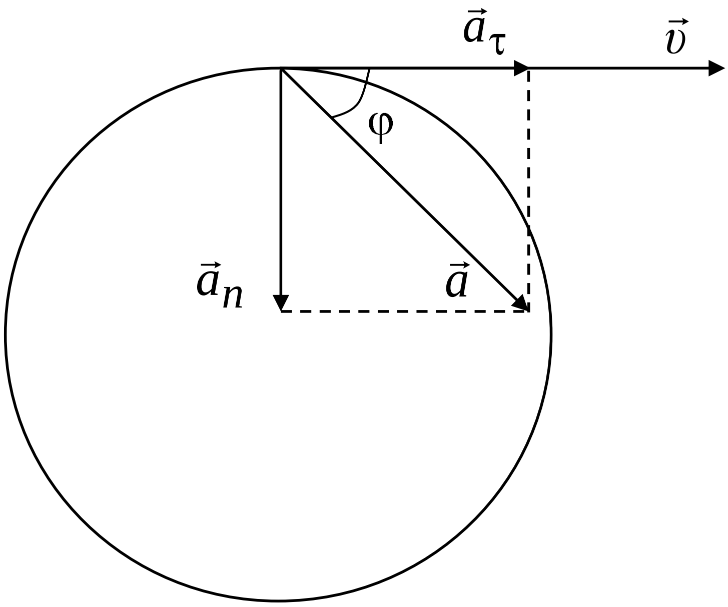

Рис. 1.5

Поэтому тангенс угла φ между вектором скорости υ и полным ускорением a вращающейся точки составляет

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_n}{a_\tau}. \qquad (1.42)$$

Тангенциальное ускорение a_τ связано с угловым ускорением ε известным соотношением (1.16)

$$a_\tau = \varepsilon r = \alpha t R. \qquad (1.43)$$

Из определения тангенциального ускорения (1.6) следует

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \qquad (1.44)$$

поэтому для определения зависимости скорости υ от времени t получаем дифференциальное уравнение, приравнивая формулы (1.43) и (1.44),

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \alpha t R, \tag{1.45}$$

решение которого имеет вид

$$\upsilon = \frac{\alpha R t^2}{2}. \tag{1.46}$$

Определим нормальное ускорение a_n вращающейся точки, подставляя выражение (1.46) в формулу (1.6)

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\alpha^2 R t^4}{4}. \tag{1.47}$$

Искомое выражение для тангенса угла φ между вектором скорости υ и полным ускорением a вращающейся точки можно получить, подставив формулы (1.47) и (1.43) в выражение (1.42). Получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\alpha t^3}{4},$$

откуда выразим t

$$t = \sqrt[3]{\frac{4\operatorname{tg}\varphi}{\alpha}}.$$

Используя численные условия задачи, получаем $t = 7$ с.

Задача 1.8. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - a\varphi$, где ω_0 и a – положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найти зависимость от времени: а) угла поворота; б) угловой скорости.

По определению угловой скорости вращения (1.10)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

поэтому, зависимость угла поворота тела φ определится из дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - a\varphi,$$

которое с целью разделить переменные интегрирования перепишем в виде

$$\frac{d\varphi}{\omega_0 - a\varphi} = dt. \tag{1.48}$$

Взяв неопределенный интеграл от левой и правой частей уравнения (1.48), получаем

$$-\frac{\ln(\omega_0 - a\varphi)}{a} = t + C$$

или

$$\varphi = \frac{\omega_0 - e^{-a(t+C)}}{a},$$

где C – константа интегрирования. Так как при $t = 0$ угол $\varphi = 0$, то

$$e^{-aC} = \omega_0$$

и, следовательно, искомая зависимость угла поворота тела φ от времени t имеет вид

$$\varphi = \frac{\omega_0}{a}(1 - e^{-at}), \tag{1.49}$$

а зависимость угловой скорости ω от времени t определяется путем дифференцирования выражения (1.49)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 e^{-at}.$$

2. Основное уравнение динамики

Решение кинематических уравнений механического движения тела помимо начальных условий требует информации об ускорении тела. Ее можно получить, рассматривая механическое взаимодействие данного тела с другими телами, приводящее к изменению состояния тела, изменению его скорости, т. е.

к возникновению ускорения. Вопросы, связанные с такими взаимодействиями, рассматриваются в динамике.

Механическое взаимодействие тела с другими телами описывают понятием *силы* $\vec{F}$, которая определяется как векторная физическая величина, характеризующая механическое взаимодействие данного тела с другим телом (телами), приводящее к их деформации или к возникновению ускорения.

Все тела изменяют свою скорость не мгновенно, а постепенно при их взаимодействии с другими телами, т. е. они обладают *инертностью. Количественной характеристикой* инертности тела является его масса *m*. *Масса тела* – скалярная физическая величина, являющаяся мерой инертности тела;

В основе классической механики движения м.т. лежат три закона Ньютона (они не доказываются) и являются обобщением опытных фактов.

– *Первый закон Ньютона*: тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела или их действие скомпенсировано.

– *Второй закон Ньютона*: первая производная от импульса $\vec{p}$ тела по времени *t* равна векторной сумме всех сил, действующих на тело:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\,,\quad m\vec{a}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\,. \tag{2.1}$$

Ньютон для формулировки второго закона ввел понятие *импульса* $\vec{p}$ *тела* как векторную физическую величину, характеризующую его прямолинейное движение и равную произведению массы тела на его скорость,

$$\vec{p}=m\vec{\upsilon}\,. \tag{2.2}$$

– *Третий закон Ньютона*: силы, действующие между двумя телами, равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}\,. \qquad (2.3.)$$

Приведем определения наиболее часто встречающихся в задачах сил.

Примеры сил:

– *Сила реакции опоры* (N) – сила, с которой опора противодействует силе давления на нее. Сила реакции опоры приложена к телу, давящему на опору, направлена перпендикулярно поверхности опоры и по III закону Ньютона равна

$$N = F_{\text{давл}}^{(\perp)}, \tag{2.4}$$

где $F_{\text{давл}}^{(\perp)}$ – модуль силы нормального давления тела на опору.

– *Сила трения* ($F_{\text{тр}}$) – сила, препятствующая движению тел относительно друг друга при условии их соприкосновения. Сила трения направлена в противоположную сторону от направления вектора скорости движения тела и равна произведению коэффициента трения μ на модуль силы нормального давления тела на поверхность, по которой оно движется,

$$F_{\text{тр}} = \mu F_{\text{давл}}^{(\perp)} . \tag{2.5}$$

С учетом равенства (2.4) можно переписать выражение (2.5) через выражение силы реакции опоры

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \tag{2.5а}$$

Выражения (2.5) и (2.5а) эквивалентны (в силу III закона Ньютона), однако при решении одних задач удобно использовать выражение (2.5), а других – (2.5а).

– *Сила гравитационного притяжения* ($F_{\text{гр}}$) *двух тел* направлена от одного тела к другому вдоль прямой, соединяющей центры масс этих тел,

$$F_{\text{гр}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2}, \tag{2.6}$$

где γ – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел; $r_{1,2}$ – расстояние между телами.

В случае гравитационного притяжения Земли выражение (2.6) может быть записано в виде

$$F_{\text{гр}} = \gamma \frac{mM}{R + h^{\;2}}, \tag{2.6а}$$

где M – масса Земли; R – радиус Земли; h – высота положения тела, отсчитываемая от поверхности Земли (как вверх $h > 0$, так и вниз $h < 0$).

– *Сила тяжести* ($F_{\text{тяж}}$) – сила гравитационного притяжения тела к Земле у поверхности Земли ($h << R$). В этом случае высотой положения тела (над поверхностью Земли) можно пренебречь, тогда (см. формулу (2.6а))

$$F_{\text{тяж}} = mg, \tag{2.7}$$

где g – ускорение свободного падения, $g = \gamma \dfrac{M}{R^2} \approx 9{,}81$ м/с^2.

– *Сила упругости* – сила, возникающая при упругой деформации тела, направленная в противоположную деформации сторону и численно равная

$$F_{\text{упр}} = k\Delta x, \tag{2.8}$$

где k – коэффициент упругости (табличная величина); Δx – величина деформации.

– *Сила вязкого трения* (или *сила сопротивления*) возникает при движении тела в жидкости или газе. Эта сила направлена в противоположную движению тела сторону и, согласно закону Стокса, составляет

$$F_{\text{сопр}} = \beta\upsilon, \tag{2.9}$$

где β – коэффициент вязкого трения (табличная величина); υ – скорость движения тела.

Под *центром масс системы* понимают точку пространства, положение которой относительно какой-либо инерциальной системой отчета (ИСО) определяется радиус-вектором $\vec{r}_c$,

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i, \quad m = \sum_i m_i, \tag{2.10}$$

где m – сумма масс тел (материальных точек) системы; $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-го тела (м.т.) системы. Если поместить в центр масс тело в виде материальной точки массы m, то оно будет двигаться со скоростью $\vec{\upsilon}_c$,

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{\upsilon}_i}{m} = \frac{\vec{p}_c}{m}. \qquad (2.11)$$

Далее запишем выражение

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = m\vec{a}_c = \sum_i \vec{F}_i, \qquad (2.12)$$

откуда следует, что *центр масс системы* – это точка пространства, к которой приложены все силы, вызывающие по отдельности поступательное движение системы. Поэтому поступательное движение системы можно моделировать движением тела в виде м.т. массой m, помещенного в центр масс системы.

Задача 2.1. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α = 15° с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в η = 2,0 раза меньше времени спуска.

Силы, действующие на тело при его движении вверх, показаны на рис. 2.1.

Уравнение второго закона Ньютона (2.1) в проекциях на ось x имеет вид

$$-ma_1 = -mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha,$$

т.е. вверх тело движется равнозамедленно с ускорением

$$a_1 = (\sin\alpha + k\cos\alpha)g. \qquad (2.13)$$

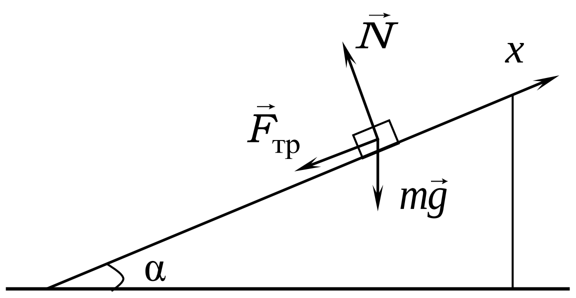

Рис. 2.1

Уравнение движения тела имеет вид

$$x = \upsilon_0 t - \frac{a_1 t^2}{2}, \tag{2.14}$$

где υ_0 – начальная скорость тела.

Время движения тела вверх t_1 определится из условия

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \upsilon_0 - a_1 t = 0, \tag{2.15}$$

откуда из выражения (2.15) следует

$$t = t_1 = \upsilon_0 / a_1, \tag{2.16}$$

а координата точки поворота составляет $x_1 = x(t_1) = \dfrac{\upsilon_0^2}{2a_1}$.

При движении тела вниз меняется направление силы трения, следовательно, вниз тело движется равноускоренно с ускорением

$$a_2 = (\sin\alpha - k\cos\alpha)g, \tag{2.17}$$

а уравнение его движения имеет следующий вид:

$$x = x_1 - \frac{a_2 t^2}{2} = \frac{\upsilon_0^2}{2a_1} - \frac{a_2 t^2}{2}.$$

Время движения тела вниз t_2 определится из условия

$$x = \frac{\upsilon_0^2}{2a_1} - \frac{a_2 t^2}{2} = 0, \tag{2.18}$$

откуда из формулы (2.17) следует, что

$$t = t_2 = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{a_1 a_2}}, \tag{2.19}$$

а отношение времени спуска и подъема тела по условию равно η. Поэтому разделим выражение (2.16) на (2.19) и подставим в это отношение значения ускорений a_1 и a_2 из формул (2.13) и (2.17) соответственно:

$$\frac{t_2}{t_1} = \eta = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = \sqrt{\frac{\sin\alpha + k\cos\alpha}{\sin\alpha - k\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + k}{\mathrm{tg}\,\alpha - k}},$$

следовательно, коэффициент трения k составляет

$$k = \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1}\operatorname{tg}\alpha.$$

Используя численные условия задачи, получаем k = 0,16.

Задача 2.2. На тело массой m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 2.2), в момент t = 0 начала действовать сила, зависящая от времени как $F = kt$, где k – постоянная. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом. Найти: а) скорость тела в момент отрыва от плоскости; б) путь, пройденный телом к этому моменту.

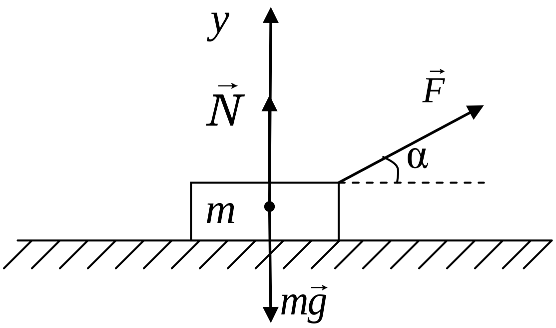

Рис. 2.2

Уравнение второго закона Ньютона (2.1) в проекции на горизонтальную ось x имеет вид

$$ma = F\cos\alpha. \qquad (2.20)$$

На ось y –

$$0 = N - mg + F\sin\alpha. \qquad (2.21)$$

Зная из условия задачи, что сила, действующая на тело, зависит от времени как $F = kt$, получим из формулы (2.20) выражение для ускорения тела

$$ma = kt\cos\alpha \Rightarrow a = \frac{kt\cos\alpha}{m}. \qquad (2.22)$$

Ускорение определяется по формуле (1.5): $a = \frac{d\upsilon}{dt}$. Приравнивая выражение (2.22) к формуле (1.5) выразим

$$d\upsilon = \frac{k}{m}\cos\alpha t dt.$$

Получили дифференциальное уравнение, решением которого является зависимость скорости от времени

$$\upsilon = \frac{k}{m}\cos\alpha \frac{t^2}{2}. \qquad (2.23)$$

Найдем время отрыва тела от плоскости. Так как в момент отрыва тела от поверхности сила нормальной реакции опоры $N = 0$, то из формулы (2.21) получим

$$0 = -\,mg + F\sin\alpha,$$

$$mg = kt\sin\alpha,$$

отсюда

$$t_{\text{отр}} = \frac{mg}{k\sin\alpha}. \qquad (2.24)$$

Подставим в формулу (2.23) выражение (2.24) для момента времени, соответствующего отрыву тела от плоскости,

$$\upsilon = \frac{k\cos\alpha}{2m}\frac{m^2g^2}{k^2\sin^2\alpha} = \frac{mg^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}.$$

Для определения пути, пройденного телом к этому моменту, воспользуемся формулой (1.9), получим

$$S = \int\limits_0^{t_{\text{отр}}} \upsilon dt = \int\limits_0^{t_{\text{отр}}} \frac{k\cos\alpha}{m}\frac{t^2}{2}dt = \frac{k\cos\alpha}{2m}\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{t_{\text{отр}}} = \frac{k\cos\alpha}{m}\frac{t_{\text{отр}}^3}{6}.$$

Подставляя в полученное выражение формулу для времени отрыва (2.24), получим

$$S = \frac{k}{m}\frac{\cos\alpha}{6}\frac{m^3g^3}{k^3\sin^3\alpha} = \frac{m^2g^3\cos\alpha}{6k^2\sin^3\alpha}.$$

Задача 2.3. На покоившуюся частицу массы m в момент $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени по закону $\vec{F} = \vec{b}t(\tau - t)$, где $\vec{b}$ –

постоянный вектор; τ – время, в течение которого действует данная сила. Найти: а) импульс частицы после окончания действия силы; б) путь, пройденный частицей за время действия силы.

Из второго закона Ньютона в импульсном виде выражение (2.1) имеет вид

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{b}t(\tau - t), \tag{2.25}$$

Определим импульс частицы после окончания действия силы:

$$\int_0^\tau d\vec{P} = \vec{P} - 0 = \vec{b}\int_0^\tau (t\tau - t^2)dt = \vec{b}\left[\tau\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]\Bigg|_0^\tau = \vec{b}\frac{\tau^3}{6}.$$

Найдем зависимость скорости частицы от времени, для этого воспользуемся определением импульса (формула (2.2)) и запишем

$$m\vec{\upsilon}(t) = \vec{b}\left[\frac{t^2\tau}{2} - \frac{t^3}{3}\right],$$

тогда

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{\vec{b}}{m}\left[\frac{t^2\tau}{2} - \frac{t^3}{3}\right]. \tag{2.26}$$

Найдем время остановки из условия равенства нулю скорости частицы, т.е. выражение (2.26) принимает вид

$$\frac{\vec{b}}{m}\left[\frac{t^2\tau}{2} - \frac{t^3}{3}\right] = 0.$$

В таком случае время остановки $t_0 = \frac{3}{2}\tau.$ Так как $t_0 > \tau,$ то, значит, от 0 до τ тело движется без остановки.

Определим путь, пройденный частицей за время действия силы, для этого проинтегрируем выражение (2.26):

$$\vec{S} = \int_0^\tau \vec{\upsilon}dt = \frac{\vec{b}}{m}\int_0^\tau\left[\frac{t^2\tau}{2} - \frac{t^3}{3}\right]dt = \frac{\vec{b}}{m}\left[\frac{t^3\tau}{6} - \frac{t^4}{12}\right]\Bigg|_0^\tau = \frac{\vec{b}}{m}\left[\frac{\tau^4}{6} - \frac{\tau^4}{12}\right] = \frac{\vec{b}}{m}\frac{\tau^4}{12}.$$

Задача 2.4. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от υ_0 до υ. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось OX:

$$\frac{md\upsilon_x}{dt} = F_{\text{сопр}x}.$$

Так как по условию задачи сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости $F_{\text{сопр}x} = -r\upsilon_x^2,$ где r – коэффициент сопротивления, то

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = -r\upsilon_x^2. \tag{2.27}$$

Решение уравнения (2.27) с разделяющимися переменными дает

$$\frac{\upsilon_0 - \upsilon}{\upsilon_0\upsilon} = \frac{r}{m}t. \tag{2.28}$$

Найдем отношение r/m. Для этого в выражении (2.27) заменим $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = -r\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,\ md\upsilon_x = -r\left(\frac{dx}{dt}\right)dx,$$

$$\frac{d\upsilon_x}{\upsilon_x} = -\frac{rdx}{m}.$$

Решая полученное уравнение, получим

$$\ln\frac{\upsilon_0}{\upsilon} = \frac{r}{m}h,$$

Выразим отношение r/m:

$$\frac{r}{m} = \frac{1}{h}\ln\frac{\upsilon_0}{\upsilon}, \tag{2.29}$$

Подставим выражение (2.29) в (2.28) и выразим t

$$t = \frac{h(\upsilon_0 - \upsilon)}{\upsilon_0\upsilon\ln\upsilon_0/\upsilon}.$$

Задача 2.5. На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения k лежит тело массой m. В момент $t = 0$ к нему приложили горизонтальную силу, зависящую от времени как $\vec{F} = \vec{b}t$, где $\vec{b}$ – постоянный вектор. Найти путь, пройденный телом за первые t секунд действия этой силы.

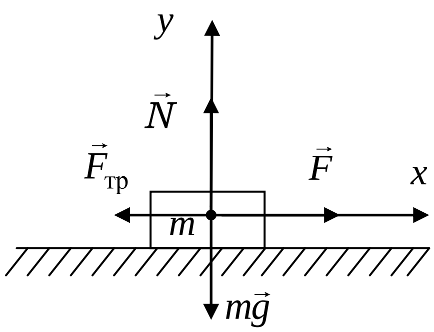

Рис. 2.3

Тело под действием силы F придет в движение спустя время t_0, при условии, что $F \geq F_{\text{тр}}$. Найдем время t_0 из равенства силы F и силы трения $F_{\text{тр}}$

$$bt_0 = kmg,$$

откуда

$$t_0 = \frac{kmg}{b}. \tag{2.30}$$

Из второго закона Ньютона (2.1) следует

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + m\vec{g}.$$

В проекции на ось ox получим

$$ma_x = bt - kmg,$$

в проекции на ось oy –

$$0 = N - mg.$$

При $F_{\text{тр}} = kN$ ускорение, преобретаемое телом под действием сил определяется по формуле

$$a = \frac{b}{m}t - kg. \tag{2.31}$$

Зная зависимость ускорения от времени, всегда можно определить скорость тела

$$\upsilon = \int_{t_0}^{t} a(t)dt. \tag{2.32}$$

Интегрируя выражение (2.32) от момента t_0, которое определяется из формулы (2.30), до времени t, получим

$$\upsilon = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{b}{m}t - kg\right)dt = \frac{b}{2m}\left(t^2 - t_0^2\right) - kg\left(t - t_0\right). \tag{2.33}$$

Найдем путь, пройденный телом за первые t секунд действия этой силы,

$$l = \int_{t_0}^{t} \upsilon(t)dt. \tag{2.34}$$

Для этого в формулу (2.34) подставим выражение для скорости тела (2.33):

$$l = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{b}{2m}\left(t^2 - t_0^2\right) - kg\left(t - t_0\right)\right)dt = \frac{b}{6m}\left(t^3 - t_0^3\right) -$$

$$-\frac{b}{2m}t_0^2\left(t - t_0\right) - \frac{kg}{2}\left(t^2 - t_0^2\right) + kgt_0\left(t - t_0\right) =$$

$$= \frac{b}{6m}\left(t^3 - t_0^3 - 3t_0^2\left(t - t_0\right) - \frac{6m}{b}\frac{kg}{2}\left(t^2 - t_0^2\right) + \frac{6m}{b}kgt_0\left(t - t_0\right)\right).$$

Преобразуем выражение в скобках:

$$t^3 - t_0^3 - 3tt_0^2 + 3t_0^3 - 3t_0\left(t^2 - t_0^2\right) + 6t_0^2\left(t - t_0\right) =$$

$$= t^3 - t_0^3 - 3tt_0^2 + 3t_0^3 - 3t^2t_0 + 3t_0^3 + 6tt_0^2 - 6t_0^3 =$$

$$= t^3 - 3t^2t_0 + 3tt_0^2 - t_0^3 = \left(t - t_0\right)^3.$$

Путь, пройденный телом за первые t секунд действия силы, будет

$$l = \frac{b}{6m}\left(t - t_0\right)^3.$$

Задача 2.6. Катер массой m движется по озеру со скоростью υ_0. В момент времени $t = 0$ выключили его двигатель. Считая силу сопротивления пропорциональной скорости катера, $\vec{F} = -r\vec{\upsilon}$, найти: а) время движения катера с выключенным двигателем; б) скорость катера в зависимости от пути, пройденного с выключенным двигателем, а также полный путь до остановки.

Запишем основное уравнение динамики (второй закон Ньютона (2.1)) в прекции на ось *ox*

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = F_x .$$

По условию задачи сила сопротивления пропорциональна скорости $F_x = -r\upsilon_x$, где r – коэффициент сопротивления, тогда

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = -r\upsilon_x.$$

Решение уравнения с разделяющимися переменными дает зависимость скорости от времени

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 e^{-\frac{r}{m}t}. \qquad (2.35)$$

Из выражения (2.35) следует, что время движения катера с выключенным двигателем $t \to \infty$.

Определим зависимость пути, пройденного телом, от времени

$$S = \int_0^t \upsilon(t)dt = \upsilon_0 \int_0^t e^{-\frac{r}{m}t} dt = \upsilon_0 e^{-\frac{r}{m}t}\left(-\frac{m}{r}\right)\Bigg|_0^t = \frac{\upsilon_0 m}{r} - \frac{m}{r}\upsilon.$$

Тогда скорость катера в зависимости от пути, пройденного с выключенным двигателем, определяется

$$\upsilon = \upsilon_0 - \frac{Sr}{m}, \qquad (2.36)$$

Полный путь до остановки получим из $\upsilon = 0$, если $t \to \infty \Rightarrow S = \dfrac{\upsilon_0 m}{r}$.

3. Механическая энергия и работа

Работа и мощность силы

Под элементарной работой dA, совершаемой силой $\vec{F}$ на элементарном перемещении $d\vec{s}$, называют величину, равную скалярному произведению $\vec{F}$ на $d\vec{s}$

$$dA = \vec{F}d\vec{s} = F\left|d\vec{s}\right|\cos\alpha = F_S dl, \tag{3.1}$$

где $\left|d\vec{s}\right|$ – модуль вектора элементарного перемещения, или элементарный путь dl, пройденный точкой приложения силы; α – угол между вектором силы $\vec{F}$ и перемещением $d\vec{s}$ (рис. 3.1).

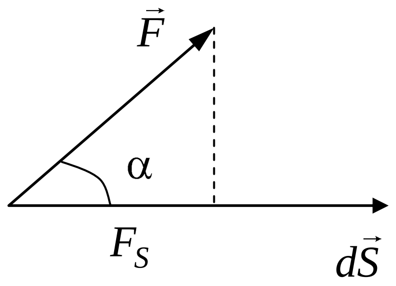

Рис. 3.1

Работа силы на конечном перемещении равна сумме элементарных работ:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F}d\vec{s}. \tag{3.2}$$

Если сила постоянна ($\vec{F}$ = const), то ее работа на прямолинейном участке длины l будет выглядеть следующим образом:

$$A_{12} = Fl\cos\alpha. \tag{3.3}$$

Свойства механической работы таковы:

– аддитивность: работа суммы сил равна сумме работ каждой силы:

$$A\left(\sum \vec{F}\right) = \sum A\left(\vec{F}\right);$$

– знак работы определяется взаимным направлением векторов силы и перемещения. Если угол между этими векторами острый, то работа положительна, если тупой – отрицательна. Работа силы, перпендикулярной вектору перемещения, равна нулю.

Быстроту совершения работы характеризует мощность силы.

Мгновенная мощность определяется по формуле

$$N = \frac{dA}{dt}. \tag{3.4}$$

Средняя мощность –

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t}, \tag{3.5}$$

где A – работа, совершаемая за время *t*.

Мощность зависит от скорости движения тела следующим образом:

$$N = \vec{F}\vec{\upsilon} = F\upsilon\cos\alpha, \tag{3.6}$$

т. е. равна скалярному произведению силы на скорость перемещения тела.

Кинетическая энергия тела. Теорема о кинетической энергии

Работу силы $\vec{F}$, переводящей тело из состояния 1 (скорость тела $\vec{\upsilon}_1$) в состояние 2 (скорость тела $\vec{\upsilon}_2$), (рис. 3.2) можно записать:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon\, d\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = W_{k_2} - W_{k_1} = \Delta W_k.$$

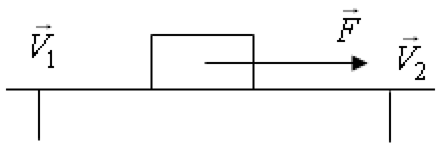

Рис. 3.2

Из полученной формулы следует, что работа силы равна разности двух величин, определяющих начальное (скорость $\vec{\upsilon}_1$) и конечное (скорость $\vec{\upsilon}_2$) состояния тела. При этом условия перехода из состояния 1 в состояние 2 не оказывают влияние на записанное выражение. Поэтому можно ввести функцию состояния тела, его *кинетическую энергию* $W_к$ как скалярную физическую величину (СФВ), характеризующую способность тела совершать работу за счет изменения скорости его движения,

$$W_{\text{к}} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \text{const.}$$

В этом выражении постоянную величину выбирают, предположив, что при нулевой скорости движения тела его кинетическая энергия равна нулю, поэтому

$$W_{\text{к}} = \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (3.7)$$

Кинетическая энергия тел не зависит от того, как была достигнута данная скорость υ, она является функцией состояния тела, положительной величиной, зависящей от выбора системы отсчета. Введение $W_{\text{к}}$ позволяет сформулировать *теорему о кинетической энергии*, согласно которой алгебраическая сумма работ всех сил, действующих на тело, равна приращению кинетической энергии тела:

$$A_1 + A_2 + \ldots.. = \Delta W_{\text{к}}, \qquad \sum_i dA_i = dW_{\text{к}}. \qquad (3.8)$$

Свойства кинетической энергии:

- только положительна;
- кинетическая энергия суммы тел равна сумме кинетических энергий каждого тела.

Потенциальная энергия взаимодействующих тел
Теорема о потенциальной энергии

Под потенциальной энергией W_p взаимодействующих тел или частей одного тела понимают СФВ, характеризующую их способность совершать работу за счет изменения взаимного расположения тел или частей одного тела. Потенциальная энергия в одинаковой степени характеризует все взаимодействующие тела или их части. При этом между ними действуют консервативные силы, работа этих сил не зависит от траектории движения тел, но определяется их начальными и конечными положениями.

Работа консервативной силы по замкнутой траектории равна нулю:

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = 0 .$$

Примерами консервативных сил в механике являются силы тяготения и упругости, а неконсервативных сил – силы трения, сопротивления, тяги, силы химических реакций, возникающих при разрыве снаряда, при выстреле и т. д. Название сил «консервативные» связано с тем, что полная механическая энергия W_M системы тел, взаимодействующих между собой посредством только консервативных сил, сохраняется.

Приведем примеры формул для расчета потенциальной энергии некоторых консервативных сил:

– потенциальная энергия силы тяжести – $W_p = mgh$;
– потенциальная энергия силы упругости – $W_p = kx^2/2$, где k – коэффициент упругости; x – величина деформации;
– потенциальная энергия гравитационной силы – $W_p = -\gamma\, m_1 m_2/r$, где γ – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел; r – модуль радиус-вектора, соединяющего центры масс этих тел.

Сформулируем *теорему о потенциальной энергии*: работа консервативных сил, действующих между телами или частями одного тела, равна убыли их взаимной потенциальной энергии.

Для тела, движение которого слабо влияет на движение другого тела, создающего силовое поле, теорему о потенциальной энергии можно сформулировать так: работа консервативных сил, действующих на тело, равна убыли потенциальной энергии тела в поле этих сил,

$$\sum_i dA_{\text{конс}} = -\Delta W_P, \quad dA_{\text{конс}} = -dW_P . \qquad (3.9)$$

Свойства потенциальной энергии:

- не аддитивна, т. е. потенциальная энергия тел не равна сумме потенциальных энергий каждого тела;
- величина потенциальной энергии определена с точностью до константы (т. е. начало отсчета потенциальной энергии может быть выбрано произвольно);
- потенциальная энергия сил притяжения отрицательна, а сил отталкивания положительна.

Формула связи потенциальной энергии W_P и консервативной силы $\vec{F}_K$

Распишем выражение для элементарной работы консервативной силы вдоль произвольного направления $\vec{r}$ ($|d\vec{s}| = |d\vec{r}| = dr > 0$) и подставим его в формулу потенциальной энергии (3.9), тогда

$$dA_{\text{конс}} = F_{\text{к}r} dr = -dW_p, \ F_{\text{к}r} = -\frac{dW_P}{dr}.$$

Выбирая направление $\vec{r}$, совпадающим с направлениями координатных осей, можно оценить проекции силы $\vec{F}$ на эти оси и тем самым записать формулу взаимосвязи вектора силы $\vec{F}_{\text{к}}$ и потенциальной энергии W_P:

$$F_X = -\frac{\partial W_P}{\partial x}, \ F_Y = -\frac{\partial W_P}{dy}, \ F_Z = -\frac{\partial W_P}{\partial z}, \ \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k},$$

$$\vec{F}_{\text{к}} = -\operatorname{grad} W_p, \ \left|\operatorname{grad} W_p\right| = \frac{dW_p}{dl}. \qquad (3.10)$$

Направление градиента потенциальной энергии в данной точке пространства в формуле (3.10) обозначено как $\vec{l}$. Итак, согласно выражению (3.10) консервативная сила, действующая между телами, в каждой точке пространства равна по модулю и противоположна по направлению градиенту потенциальной энергии взаимодействия этих тел.

Задача 3.1. Локомотив массой m начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону $\upsilon = \alpha\sqrt{s}$, где α – постоянная; s – пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив, за первые t секунд после начала движения.

По определению механическая работа определяется с помощью выражения (3.2). Используя основное уравнение динамики (2.1), представим равнодействующую всех сил как $F = m\dfrac{d\upsilon}{dt}$ и получим

$$A = \int_0^S F dS = \int_0^S m\frac{d\upsilon}{dt} dS, \qquad (3.11)$$

Найдем зависимость пройденного пути локомотива от времени, для этого воспользуемся определением скорости (выражение (1.3), и условием задачи $\upsilon = \alpha\sqrt{S}$)

$$\frac{dS}{dt} = V = \alpha\sqrt{S},\ dS = \alpha\sqrt{S}dt.$$

Решение этого уравнения с разделяющимися переменными дает

$$S = \frac{\alpha^2 t^2}{4}. \qquad (3.12)$$

Определим зависимость скорости локомотива от времени, для этого вновь воспользуемся выражением (1.3)

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = \frac{\alpha^2 t}{2}. \qquad (3.13)$$

Продифференцируем по времени выражение (3.13) $\dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{\alpha^2}{2}$ и подставим его в формулу (3.11), получим

$$A = \int_0^S m\frac{1}{2}\alpha^2 dS = \frac{m}{2}\alpha^2 S. \qquad (3.14)$$

Подставим в формулу (3.14) выражение (3.12) – зависимость пройденного пути локомотива от времени и запишем

$$A = \frac{m}{2}\alpha^2 \frac{\alpha^2 t^2}{4} = \frac{m}{8}\alpha^4 t^2.$$

Задача 3.2. Цепочка массой m = 0,80 кг, длиной l = 1,5 м лежит на шероховатом столе так, что один ее конец свешивается у его края. Цепочка начинает сама соскальзывать, когда ее свешивающаяся часть составляет η=1/3 длины цепочки. Какую работу совершат силы трения, действующие на цепочку, при ее полном соскальзывании со стола?

Рассмотрим небольшой элемент цепочки длиной dx (см. рис. 3.3.). Масса этого элемента равна

$$dm = \frac{mdx}{l}.$$

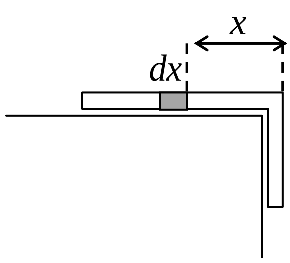

Рис. 3.3

Запишем силу трения, действующую элемент цепочки длиной dx:

$$dF_{\text{тр}} = \mu dmg = \mu \frac{mdx}{l} g. \tag{3.15}$$

Элементарная работа силы трения с учетом выражения (3.15) определяется по формуле:

$$dA_{\text{тр}} = dF_{\text{тр}} x \cos 180^\circ = -\frac{\mu mg}{l} xdx.$$

Тогда работу, которую совершают силы трения, действующие на цепочку, при ее полном соскальзывании со стола, определим как

$$A_{\text{тр}} = \int dA_{\text{тр}} = -\int_0^{2l/3} \frac{\mu mg}{l} xdx. \tag{3.16}$$

По условию задачи цепочка начинает сама соскальзывать, когда ее свешивающаяся часть составляет η = 1/3 длины цепочки, т. е.

$$\eta mg = \mu(1-\eta)mg. \tag{3.17}$$

Подставив η = 1/3 в формулу (3.17), получим $\frac{1}{3}mg = \mu\frac{2}{3}mg$, следовательно, коэффициент трения $\mu = \frac{1}{2}$. Подставим в выражениие (3.16) значение коэффициента трения и проинтегрируем его:

$$A_{\text{тр}} = \int dA_{\text{тр}} = -\int\limits_0^{2l/3} \frac{\mu mg}{l} x dx = -\frac{\mu mg}{l}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{2l/3} = -\frac{1}{2}\frac{mg}{l}\frac{4l^2}{2\cdot 9} = -\frac{mgl}{9} = -1{,}3 \text{ Дж}.$$

Задача 3.3. Брусок массой m = 1,00 кг находится на горизонтальной плоскости с коэффициентом трения k = 0,27. В некоторый момент ему сообщили начальную скорость $\upsilon = 1{,}5$ м/с. Найти среднюю мощность силы трения за все время движения бруска.

Средняя мощность определяется по формуле (3.5)

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t}. \qquad (3.18)$$

Воспользуемся теоремой о кинетической энергии (выражение (3.8)):

$$A_{\text{тр}} = \Delta W_k = 0 - \frac{m\upsilon_0^2}{2}. \qquad (3.19)$$

Так как брусок под действием сил движется равнозамедленно до остановки, то все время движения бруска можно определить из выражения:

$$\upsilon = \upsilon_0 - at,$$

$$t = \frac{\upsilon_0}{a}. \qquad (3.20)$$

Из основного уравнения динамики определим ускорение

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + m\vec{g}.$$

В проекции на ось *ох* получается

$$ma_x = F_{\text{тр}},$$

в проекции на ось *оу* –

$$0 = N - mg.$$

При условии $F_{\text{тр}} = kN$ ускорение, преобретаемое телом под действием сил, определяется по формуле

$$a = kg. \tag{3.21}$$

Подставим полученные выражения (3.19)–(3.21) в формулу для средней мощности (3.18) и получим

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t} = -\frac{m\upsilon_0^2}{2}\frac{kg}{\upsilon_0} = -\frac{kmg\upsilon_0}{2}.$$

Задача 3.4. Потенциальная энергия частицы в некотором поле имеет вид $W_p = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$, где a и b – положительные постоянные; r – расстояние от центра поля. Найти: а) значение r_0, соответствующее равновесному положению частицы; выяснить, устойчиво ли это положение; б) максимальное значение силы притяжения; изобразить примерные графики зависимостей $W_p(r)$ и $F_r(r)$ – проекции силы на радиус-вектор r.

Для ответа на первый вопрос задачи необходимо воспользоваться формулой (3.10) связи консервативной силы и потенциальной энергии

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} W_p.$$

Получим выражение для проекции силы на радиус-вектор r

$$F_r = -\frac{dW_p}{dr} = -\left(\frac{2a}{r^3} + \frac{b}{r^2}\right). \tag{3.22}$$

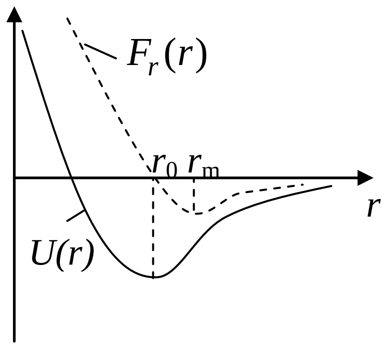

Рис. 3.4

Значение r_0, соответствующее равновесному положению частицы, определяется из условия

$$F_r = -\left(\frac{2a}{r^3} + \frac{b}{r^2}\right) = 0.$$

Значит, $r_0 = \frac{2a}{b}.$

Данное равновесное положение частицы является устойчивым, т. к. значение r_0 соответствует минимуму потенциальной энергии частицы (рис. 3.4).

Для определения максимального значения силы притяжения надо найти значение r_m, при котором $F_{r\,\max}$. Продифференцируем выражение (3.22) по r и приравняем полученное выражение к нулю

$$\frac{dF_r}{dr} = 0,$$

$$-3\frac{2a}{r^4} + (-2)\frac{b}{r^3} = 0,$$

$$r_m = \frac{3a}{b}. \qquad (3.23)$$

Подставим выражение (3.23) в (3.22) и определим максимальное значение силы притяжения

$$F_{\max}(r_{\max}) = -\frac{2ab^3}{27a^3} + \frac{bb^2}{9a^2} = \frac{-2b^3 + 3b^3}{27a^2} = \frac{b^3}{27a^2}.$$

Задача 3.5. Кинетическая энергия частицы, движущейся по окружности радиусом R, зависит от пройденного пути S по закону $W_k = \alpha S^2$, где α – постоянная величина. Найти модуль силы, действующей на частицу, в зависимости от S.

Воспользуемся основным уравнением динамики (выражение (2.1)),

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (3.24)$$

Поскольку траектория движения частицы – окружность, постольку ускорение определяется по формуле (1.7):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,\ a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \qquad (3.25)$$

где a_τ – тангенциальное ускорение; a_n – нормальное ускорение.

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} \qquad (3.25а)$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (3.25б)$$

По определению кинетическая энергия

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

а по условию задачи зависит от пройденного пути S по закону $W_k = \alpha S^2$. Приравняем их и получим зависимость скорости от пройденного пути

$$\upsilon = S\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}. \qquad (3.26)$$

Подставим формулу (3.26) в выражение (3.25б) для нормального ускорения, получим

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{2\alpha S^2}{mR}. \qquad (3.27)$$

Для вычисления тангенциального ускорения найдем зависимость от времени скорости движения частицы

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = S\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными, решая которое получим

$$\int_0^S \frac{dS}{S} = \int_0^\upsilon \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \cdot dt,$$

$$S(t) = e^{t\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}}. \qquad (3.28)$$

Подставим формулу (3.28) в выражение (3.25а) для тангенциального ускорения, получим

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{2\alpha}{m} e^{t\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}} = \frac{2\alpha}{m} S. \qquad (3.29)$$

Подставим выражения (3.27) и (3.29) в формулу (3.25), получим

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{2\alpha}{m} S\right)^2 + \left(\frac{2\alpha S^2}{mR}\right)^2} = \frac{2\alpha S}{m}\sqrt{1 + \left(\frac{S}{R}\right)^2}. \qquad (3.30)$$

Далее подставим выражение (3.30) в формулу (3.24), получим

$$\left|\vec{F}\right| = 2\alpha S\sqrt{1+\left(\frac{S}{R}\right)^2}.$$

Задача 3.6. Камень массой m бросили с поверхности Земли под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти мощность силы тяжести через t секунд после начала движения, а также работу этой силы за первые t секунд движения.

Скорость камня через t секунд после начала движения определяется по формуле

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t.$$

Мощность, развиваемая силой тяжести в этот момент времени, может быть определена с учетом выражение (3.6):

$$N = m\vec{g}\vec{\upsilon} = m(\vec{g}\vec{\upsilon}_0 + g^2 t). \tag{3.31}$$

В выражении (3.31) первое слагаемое можно представить в виде

$$\vec{g}\vec{\upsilon}_0 = g\upsilon_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -g\upsilon_0 \sin\alpha,$$

тогда

$$N = mg(gt - \upsilon_0 \sin\alpha).$$

Проанализируем полученное выражение. При $t < t_0$ мощность $N < 0$, а при $t > t_0$ мощность $N > 0$, где $t_0 = \dfrac{\upsilon_0}{g}\sin\alpha.$

Определим работу этой силы за первые t секунд движения, используя выражения (3.4) и (3.31):

$$A' = \int_0^t N dt = \int_0^t mg(gt - \upsilon_0 \sin\alpha) = mgt\left(\frac{gt}{2} - \upsilon_0 \sin\alpha\right).$$

Задача 3.7. Сила, действующая на частицу в некотором поле консервативных сил, имеет вид $\vec{F} = a(y\vec{i} + x\vec{j})$, где a – постоянная; $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей *X* и *Y*. Найти потенциальную энергию $W_p(x, y)$ частицы в этом поле.

Мы знаем, что при перемещении частицы из одной точки стационарного поля консервативных сил в другую точку работа, которую производят силы поля, может быть представлена как убыль потенциальной энергии частицы в данном поле по выражению (3.9).

Вычислим элементарную работу силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ и представим ее согласно (3.9) в виде убыли потенциальной энергии частицы $W_p(x, y)$ в данном поле

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = a(ydx + xdy) = -d(-axy).$$

По теореме о потенциальной энергии:

$$dA = -dW_p,$$

следовательно,

$$W_p(x, y) = -axy + \text{const}.$$

4. Закон сохранения импульса и механической энергии

Закон сохранения импульса

Векторная сумма импульсов тел замкнутой системы тел остается постоянной:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \;\Rightarrow\; \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_N = \text{const}, \qquad (4.1)$$

– или импульс центра масс $\vec{p}_C$ замкнутой системы остается постоянным:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \;\Rightarrow\; \vec{p}_c = \text{const}.$$

В данном случае под замкнутой системой тел подразумевается система тел, на которые не действуют внешние силы ($\vec{F}_i = 0$) или сумма внешних сил равна нулю ($\sum \vec{F}_i = 0$).

Механическая энергия системы тел. Закон сохранения и изменения механической энергии

Полной механической энергией $W_{\text{М}}$ *системы тел* называют сумму кинетической энергии тел и потенциальной энергии их взаимодействия:

$$W_{\text{М}} = W_k + W_p. \qquad (4.2)$$

Для замкнутой системы на основе факта неуничтожимости движения материи справедлив закон сохранения всех видов энергий (механическая, тепловая, электромагнитная, ядерная и т. д.),

$$W_{\text{М}} + W_{\text{тепл}} + W_{\text{эл}} + W_{\text{яд}} + \ldots = \text{const}. \qquad (4.3)$$

В такой системе механическая энергия может изменяться за счет работы неконсервативных сил: они переводят ее в другие виды энергии (механическая энергия уменьшается, происходит ее диссипация, рассеяние), и, наоборот, другие виды энергии переходят в механическую энергию (она возрастает).

Закон сохранения и превращения полной механической энергии

Работа неконсервативных сил равна изменению полной механической энергии тела (системы):

$$\Delta W = A_{\text{неконс}}. \qquad (4.4)$$

Неконсервативная сила – сила, работа которой зависит от формы траектории (и не определяется только конечной и начальной точками траектории) или работа которой по замкнутой траектории не равна нулю – $\oint \vec{F} d\vec{s} \neq 0$. Среди неконсервативных сил выделяют *диссипативные силы* – это силы, которые приводят к уменьшению механической энергии системы. К ним относят, например, силы трения и сопротивления.

Если же в замкнутой системе действуют только консервативные силы (такая система называется замкнутой консервативной системой – з.к.с.), то в ней выполняется *закон сохранения механической энергии*, который гласит: механическая энергия замкнутой консервативной системы остается постоянной,

$$W_{\text{М}} = \text{const} \qquad \Delta W_{\text{М}} = 0. \tag{4.5}$$

Рассмотрим применение законов сохранения импульса и механической энергии к анализу абсолютно упругого и неупругого столкновений.

Абсолютно неупругий удар – это удар, в результате которого тела после соударения движутся вместе как единое целое.

Пусть движущееся со скоростью $\vec{\upsilon}_1$ тело массой m_1 сталкивается с движущимся со скоростью $\vec{\upsilon}_2$ телом массой m_2, в результате чего их скорость оказывается равной $\vec{u}$ (рис. 4.1). Если тела образуют замкнутую систему, то для нее можно записать закон сохранения импульса

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

из которого следует, что скорость $\vec{u}$ тел после удара будет

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}, \quad u = \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{(m_1\upsilon_1)^2 + (m_2\upsilon_2)^2 + 2m_1m_2\upsilon_1\upsilon_2\cos\alpha}. \tag{4.6}$$

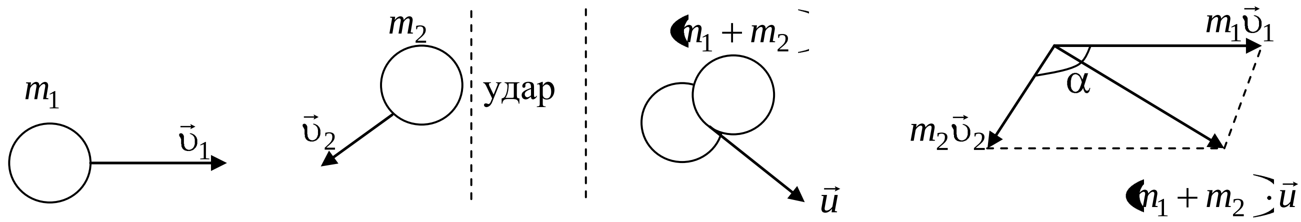

Рис. 4.1

При таком ударе возникают неконсервативные силы (силы сопротивления), которые переводят часть механической энергии соударяющихся тел в тепловую энергию.

$$A_{\text{сопр}} = \Delta W_M = \Delta W_K = \frac{(m_1+m_2)u^2}{2} - \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} - \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \\ = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\upsilon_1\upsilon_2\cos\alpha), \tag{4.7}$$

где α – угол между векторами $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$.

Абсолютно упругий центральный удар – это удар, при котором, помимо закона сохранения импульса, выполняется также и закон сохранения механической энергии. При таком ударе деформация тел, возникающая в момент соударения, после столкновения полностью исчезает. При центральном ударе тела до и после соударения движутся по одной прямой.

Пусть движущееся вдоль оси *Ox* со скоростью $\vec{\upsilon}_1$ тело массой m_1 сталкивается с движущимся вдоль ($\upsilon_1 > \upsilon_2$) или против оси *Ox* со скоростью $\vec{\upsilon}_2$ телом массой m_2, в результате чего их скорости оказываются равными $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ (рис. 4.2). Используя для замкнутой системы, состоящей из двух тел, законы сохранения импульса и механической энергии, найдем проекции скоростей $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ тел на ось *Ox* после их соударения:

$$\frac{m_1\upsilon^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} \Rightarrow m_1(\upsilon_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - \upsilon_2^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad m_1(\upsilon_1 - u_{1x})(\upsilon_1 + u_{1x}) = m_2(u_{2x} - \upsilon_{2x})(u_{2x} + \upsilon_{2x}); \tag{4.8}$$

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \Rightarrow m_1(\upsilon_1 - u_{1x}) = m_2(u_{2x} - \upsilon_{2x}). \tag{4.9}$$

Учитывая выражение (4.8), можно упростить формулу (4.7):

$$\upsilon_1 + u_{1X} = u_{2X} + \upsilon_{2X} \Rightarrow u_{2X} = u_{1X} + \upsilon_1 - \upsilon_{2X}.$$

Подставляя u_{2x} в формулу (4.8), получим

$$m_1(\upsilon_1 - u_{1x}) = m_2(u_{1x} + \upsilon_1 - \upsilon_{2x} - \upsilon_{2x}),$$

$$u_{1x} = \frac{2m_2\upsilon_{2x} + (m_1 - m_2)\upsilon_1}{m_1+m_2}, \qquad u_{2x} = \frac{2m_1\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\upsilon_{2x}}{m_1+m_2}. \tag{4.10}$$

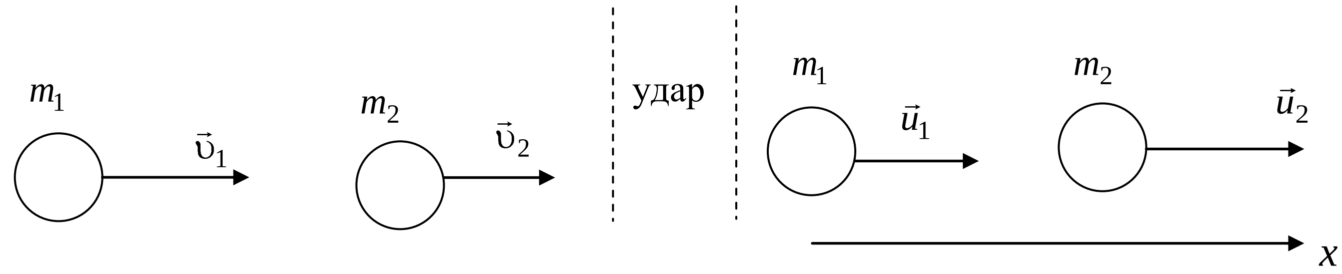

Рис. 4.2

Задача 4.1. Небольшая шайба A соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высотой H, имеющей горизонтальный трамплин (см. рис. 4.3). При какой высоте h трамплина шайба пролетит наибольшее расстояние S? Чему оно равно?

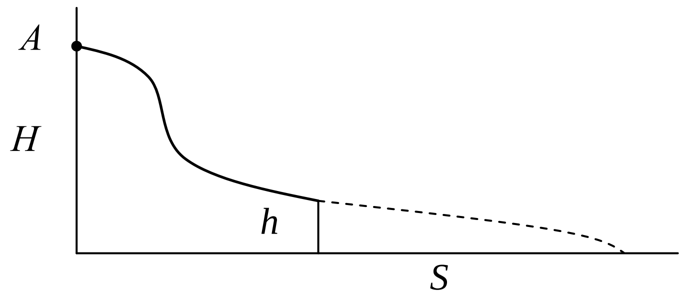

Рис. 4.3

Из закона сохранения энергии, записанного для шайбы в точке A и в точке на трамплине, следует

$$0 + mgH = mgh + \frac{m\upsilon^2}{2}, \tag{4.11}$$

$$g(H-h) = \frac{\upsilon^2}{2},$$

$$\upsilon = \sqrt{2g(H-h)}. \tag{4.12}$$

$$h = \upsilon_0 t + g\frac{t^2}{2} = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{4.13}$$

$$S = \upsilon t = \sqrt{2g(H-h)}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\sqrt{h(H-h)} = 2\sqrt{h(H-h)}.$$

Найдем h, соответствующее S_{max},

$$\frac{dS}{dh} = 0 = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{H - 2h}{2\sqrt{h(H-h)}} = \frac{H - 2h}{2\sqrt{h(H-h)}}, \tag{4.14}$$

$$H = 2h \Rightarrow h = \frac{H}{2}.$$

$$S_{\max} = 2\sqrt{\frac{H}{2}(H - \frac{H}{2})} = \frac{2}{2} H = H,$$

$$S_{\max} = H.$$

Задача 4.2. На гладкой горизонтальной плоскости находятся два бруска массами m_1 и m_2, соединенные между собой пружиной жесткостью k (рис. 4.4). Брусок 2 переместили влево на небольшое расстояние x и отпустили. Найти скорость υ_C центра масс системы после отрыва бруска 1 от стенки.

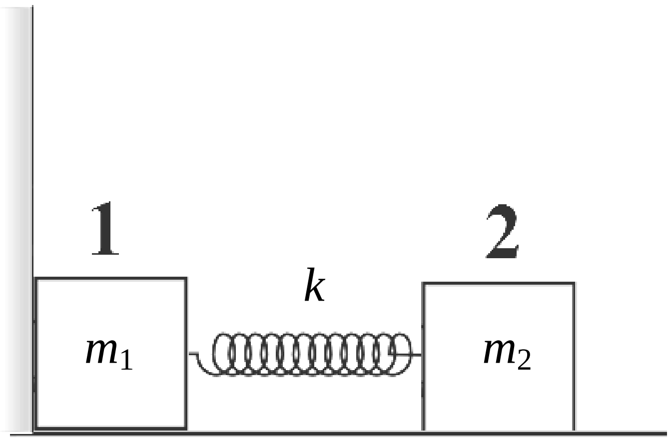

Рис. 4.4

При распрямлении пружинки на систему будет действовать некоторая горизонтальная сила F со стороны стенки. Импульс этой силы приводит к возникновению импульса системы. После отрыва бруска 1 от стенки импульс системы меняться не будет:

$$m_2 \upsilon_{20} = (m_1 + m_2)\upsilon_C. \tag{4.15}$$

В выражении (4.15) учтено, что в момент отрыва бруска 1 его скорость $\upsilon_{10} = 0$. Поскольку точка приложения силы F неподвижна (в процессе ее действия), эта сила работы не совершает. Значит, механическая энергия системы в процессе движения будет оставаться неизменной и равной свому первоначальному значению. В момент отрыва бруска 1 потенциальная энергия первоначально сжатой пружины целиком переходит в кинетическую энергию бруска 2:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{m_2\upsilon_{20}^2}{2}. \qquad (4.16)$$

Исключив υ_{20} из равенств (4.15) и (4.16), получим

$$\upsilon_C = x\frac{\sqrt{km_2}}{m_1 + m_2}.$$

Задача 4.3. Замкнутая система состоит из двух частиц массами m_1 и m_2, которые движутся под прямым углом друг к другу со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$. Найти в системе их центра масс: а) импульс каждой частицы; б) суммарную кинетическую энергию обеих частиц.

Скорость центра масс частиц равна

$$\upsilon_0 = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \qquad (4.17)$$

Поэтому импульс первой частицы в системе центра масс $\vec{p}_{10}$ определяется выражением

$$\vec{p}_{10} = m_1\vec{\upsilon}_1 - m_2\vec{\upsilon}_0 = m_1(\upsilon_1 - \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}) = \mu(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2), \qquad (4.18)$$

где μ – приведенная масса системы рассматриваемых частиц, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Импульс второй частицы в системе центра масс $\vec{p}_{20}$ определяется выражением

$$\vec{p}_{20} = m_2\vec{\upsilon}_2 - m_1\vec{\upsilon}_0 = m_2(\vec{\upsilon}_2 - \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}) = \mu(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1). \qquad (4.19)$$

Из рис. 4.5 видно, что $\vec{p}_{10} = -\vec{p}_{20}$, а длины этих векторов одинаковы и определяются согласно формулам (4.18) и (4.19) выражением

$$|\vec{p}_{10}| = |\vec{p}_{20}| = \mu\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}.$$

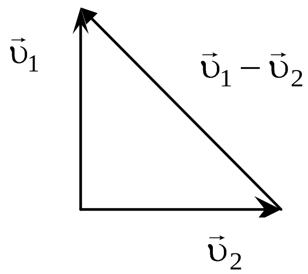

Рис. 4.5

Суммарная кинетическая энергия частиц в системе центра масс составляет

$$W_k = \frac{p_{10}^2}{2m_1} + \frac{p_{20}^2}{2m_1} = \frac{\mu\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}}{2}.$$

Задача 4.4. Система состоит из двух одинаковых цилиндров, каждый массой m, между которыми находится сжатая невесомая пружина жесткостью k (см. рис. 4.6). Цилиндры связаны нитью, которую в некоторый момент пережигают. При каких значениях начального сжатия пружины Δl нижний цилиндр подскочит после пережигания нити?

После пережигания нити сжатая пружина начнет распрямляться, пройдет точку, соответствующую собственной длине несжатой пружины, и далее будет удлиняться, пока скорость верхнего тела не станет равной нулю. Пусть удлинение пружины при этом равно Δx, тогда закон сохранения полной механической энергии может быть записан в виде

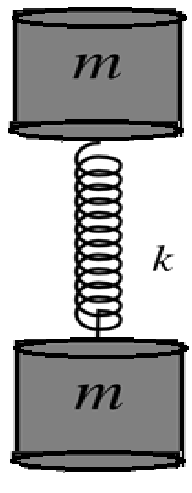

Рис. 4.6

$$\frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{k\Delta x^2}{2} + mg(\Delta l + \Delta x). \qquad (4.20)$$

Минимально начальное сжатие Δl пружины, при котором нижний цилиндр оторвется от плоскости, может быть найдено из уравнения (4.20), если учесть, что наименьшее растяжение пружины Δx, приводящее к отрыву цилиндра, определяется условием

$$k\Delta x = mg. \tag{4.21}$$

Подставив выражение (4.21) в формулу (4.20), получим квадратное уравнение вида

$$\frac{k\Delta l^2}{2} - mg\Delta l - \frac{3k \;\; mg \;\;^{2}}{2} = 0. \tag{4.22}$$

Уравнение (4.22) имеет решение

$$\Delta l = \frac{3mg}{k}. \tag{4.23}$$

Выражение (4.23) определяет минимально необходимое начальное сжатие пружины.

Задача 4.5. Пушка массой M свободно скользит вниз по гладкой плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Когда пушка прошла путь l, произвели выстрел, в результате которого снаряд вылетел с импульсом $\vec{p}$ в горизонтальном направлении, а пушка остановилась. Пренебрегая массой снаряда, найти продолжительность выстрела.

Скорость пушки непосредственно перед выстрелом легко найти из закона сохранения полной механической энергии по формуле (4.4) при скольжении пушки по наклонной плоскости (рис. 4.7). Она будет

$$\upsilon = \sqrt{2gl\sin\alpha} \tag{4.24}$$

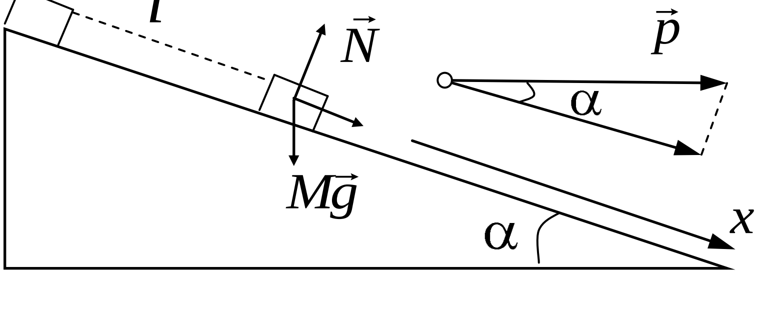

Рис. 4.7

Система «пушка–снаряд» не является замкнутой, т. к. на нее действуют внешние силы: сила реакции опоры N и сила тяжести mg. Чтобы исключить из рассмотрения силу реакции опоры N, которая изменяется во время выстрела скачкообразно, запишем изменение импульса системы в проекциях на ось OX. Пренебрегая массой вылетевшего снаряда, получим

$$p\cos\alpha - M\upsilon = \tau Mg\sin\alpha. \tag{4.25}$$

Подставим в формулу (4.25) выражение (4.24) и выразим продолжительность выстрела τ, получим

$$\tau = \frac{p\cos\alpha - M\sqrt{2gl\sin\alpha}}{Mg\sin\alpha}.$$

Задача 4.6. Частица массой m_1 с импульсом p_1 испытала упругое столкновение с покоившейся частицей массой m_2. Найти импульс p'_1 первой частицы после столкновения, в результате которого она рассеялась под углом θ к первоначальному направлению движения.

Из закона сохранения импульса по формуле (4.1) находим p'_2 (рис. 4.8)

$$p_2'^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1'\cos\theta, \tag{4.26}$$

где p'_2 – импульс покоившейся частицы после столкновения.

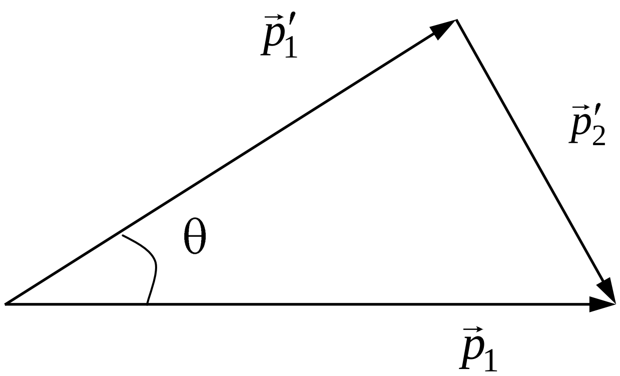

Рис. 4.8

Из закона сохранения энергии из формулы (4.2) следует, что

$$W_{k1} = W'_{k1} + W'_{k2}, \tag{4.27}$$

где W'_{k1} и W'_{k2} – кинетические энергии первой и второй частицы после столкновения. Преобразуем выражение (4.27) с помощью соотношения

$$W_k = \frac{p^2}{2m}$$

и приведем его к виду

$$p_2'^2 = \left(p_1^2 - p_1'^2\right)\frac{m_2}{m_1}. \tag{4.28}$$

Далее, исключив $p_2'^2$ из формул (4.26) и (4.28), получим

$$p_1' = p_1 \frac{\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta + \left(m_2^2 / m_1^2 - 1\right)}}{1 + m_2/m_1}. \tag{4.29}$$

Если $m_1 < m_2$, то физический смысл имеет только знак плюс перед корнем в выражении (4.29), т.к. при этом условии корень будет больше, чем $\cos\theta$, а поскольку p_1' – это модуль вектора, то он не может быть отрицательным.

Если $m_1 > m_2$, то физический смысл имеют оба знака перед корнем в выражении (4.29), ответ в этом случае неоднозначен – под углом θ импульс рассеянной частицы может иметь одно из двух значений (это зависит от относительного расположения частиц в момент соударения).

Задача 4.7. Цепочка массой $m = 1$ кг и длиной $l = 1{,}4$ м висит на нити, касаясь поверхности стола своим нижним концом. После пережигания нити цепочка упала на стол. Найти полный импульс, который она передала столу.

Рассмотрим небольшой элемент цепочки длиной dx, расположенный на высоте x над столом. Масса этого элемента

$$dm = \frac{m}{l}dx, \tag{4.30}$$

а его скорость непосредственно перед ударом о поверхность стола определяется выражением для скорости свободно падающего с высоты x тела:

$$\upsilon = \sqrt{2gx}\,. \tag{4.31}$$

После удара о стол рассматриваемый элемент цепочки покоится, следовательно, импульс, передаваемый столу,

$$dp = \upsilon dm\,. \tag{4.32}$$

Подставим выражения (4.30) и (4.31) в формулу (4.32), получим

$$dp = \frac{m}{l}\sqrt{2gx}dx\,. \tag{4.33}$$

Интегрируя выражение (4.33) по всей длине цепочки, находим полный импульс, который передала цепочка столу при падении:

$$p = \int_0^l \frac{m}{l}\sqrt{2gx}dx = \frac{m}{l}\sqrt{2g}\int_0^l \sqrt{x}dx = \frac{2m}{l}\sqrt{2gl} = 3{,}5\ \text{кг·м}/\text{с}\,. \tag{4.34}$$

5. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Моментом импульса $\vec{L}$ частицы массой m относительно данной системы отсчета называется векторная физии,ческая величина:

$$\vec{L} = \ \vec{r},\vec{p}\ = m\ \vec{r},\vec{\upsilon}\ , \tag{5.1}$$

где $\vec{r}$ и $\vec{\upsilon}$ – радиус-вектор и скорость частицы в этой системе отсчета; $\vec{p}$ – ее импульс. Модуль момента импульса определяется при помощи выражения

$$L = m\upsilon r \sin\alpha\,, \tag{5.2}$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{\upsilon}$. Размерность момента импульса – [Дж·с], совпадает с размерностью постоянной Планка.

Поскольку момент импульса частицы определяется относительно системы отсчета, то обычно вектор $\vec{L}$ изображают выходящим из начала координат этой системы.

Уравнение, описывающее изменение момента импульса со временем, называется *уравнением движения момента импульса* и имеет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \tag{5.3}$$

где $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$ – момент силы $\vec{F}$, действующей на частицу, модуль которого

$$M = rF\sin\beta, \tag{5.4}$$

где β – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{\upsilon}$. Если речь идет о вращательном движении вокруг некоторой точки *O*, то говорят, что модуль момента силы равен произведению модуля силы на ее плечо – кратчайшее расстояние от линии действия силы до этой точки.

Из уравнения (5.3) следует, что $\vec{L}$ = const, если $\vec{M} = 0$. А момент сил равен нулю в двух случаях (не считая тривиального $\vec{r}$ = 0): если $\vec{F} = 0$ (свободная частица) и если β = 0 (или π) (частица находится в поле центральных сил). Сформулировать *закон сохранения момента импульса*: момент импульса частицы есть величина постоянная, если частица свободна или находится в поле центральных сил.

Аналогично вышесказанному этот закон можно сформулировать для системы частиц или тел.

Задача 5.1. Момент импульса частицы относительно некоторой точки O меняется со временем по закону $\vec{L} = \vec{a} + \vec{b}t^2$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные векторы, $\vec{a}$ перпендикулярно $\vec{b}$. Найти относительно точки *O* момент $\vec{M}$ силы, действующей на частицу, когда угол между векторами $\vec{M}$ и $\vec{L}$ окажется равным 45°.

Воспользуемся уравнением (5.3):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 2\vec{b}t. \tag{5.5}$$

Для того чтобы найти нужный момент времени, рассмотрим рис. 5.1. Пусть вектор $\vec{a}$ будет направлен вдоль оси *OX*, а вектор $\vec{b}$ – вдоль оси *OY*.

Вектор $\vec{M}$ направлен вдоль оси OY, а это значит, что вектор $\vec{L}$ должен составлять угол 45° с этой осью. Но в таком случае должно выполняться равенство $L_x = L_y$. Поскольку из условия следует, что $L_x = a$, $L_y = bt^2$, постольку

$$t = \sqrt{a/b}.$$

Получаем ответ

$$\vec{M} = 2\vec{b}\sqrt{a/b}. \qquad (5.6)$$

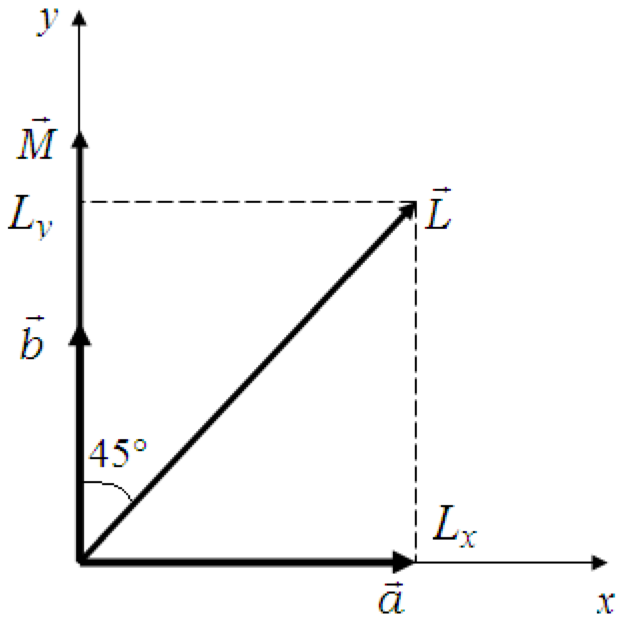

Рис. 5.1

Модуль момента силы будет равен $M = 2\sqrt{ab}$.

Задача 5.2. Небольшой шарик массой m, привязанный на нити длиной l к потолку в точке O, движется по горизонтальной окружности так, что нить вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Относительно каких точек момент импульса $\vec{L}$ шарика остается постоянным? Каков модуль приращения момента импульса шарика относительно точки O за половину оборота?

Примем за начало системы координат точку O. В момент времени, соответствующий изображенному на рис. 5.2, вектор скорости $\vec{\upsilon}$ шарика направлен от нас, поэтому вектор его момента импульса $\vec{L}$ лежит в плоскости чертежа и перпендикулярен радиус-вектору $\vec{r}$ шарика (его модуль – это длина нити l). В процессе вращения шарика вектор $\vec{L}$ будет поворачиваться вокруг вертикальной оси, образуя боковую поверхность конуса (это называется *прецессией* вектора $\vec{L}$), и через половину оборота изображение (рис. 5.2) перевернется на 180°.

Таким образом, приращение момента импульса шарика будет определяться вектором $\Delta\vec{L}$. Модуль этого вектора

$$\Delta L = 2L\sin\alpha.$$

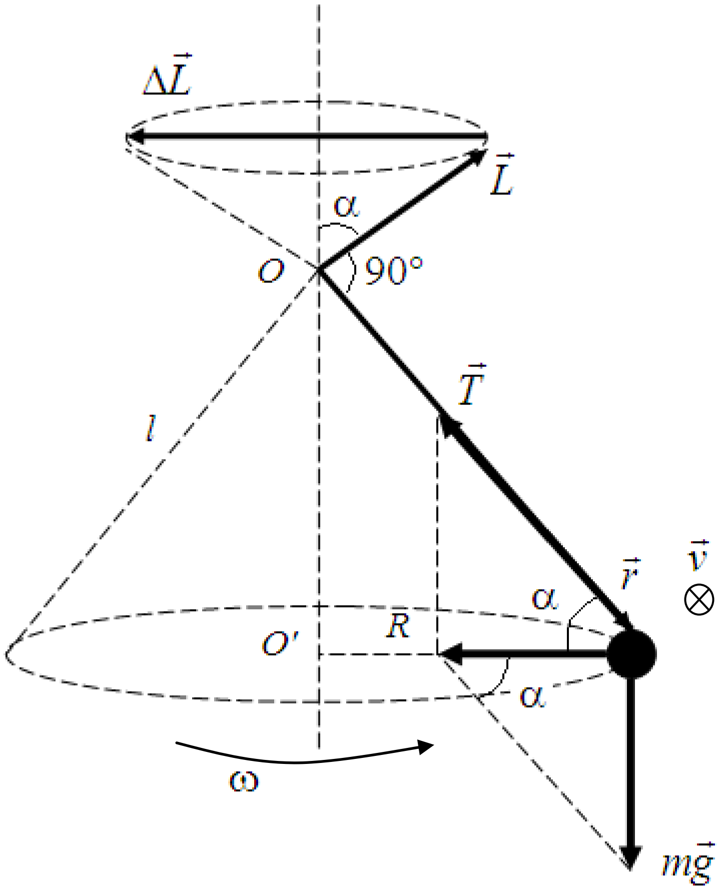

Рис. 5.2

Воспользуемся формулой (5.2):

$$L = m\upsilon r\sin 90° = m\upsilon l = m\omega Rl = m\omega l^2\cos\alpha$$

– и получим

$$\Delta L = 2L\sin\alpha = 2m\omega l^2\sin\alpha\cos\alpha = m\omega l^2\sin 2\alpha. \qquad (5.7)$$

Если $\vec{L}$ = const, то $\Delta\vec{L}$ = 0, а это возможно, если α = 0. Таким образом, момент импульса шарика не меняется относительно единственной точки – точки O'.

Для ответа на второй вопрос учтем, что шарик движется по окружности, т.е. движется с центростремительным ускорением, которое сообщают ему действующие на него физические силы. Таких сил две: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Их равнодействующая направлена к центру окружности, по которой движется шарик, – к точке O' (см. рис. 5.2), а по величине она составляет $mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Тогда по второму закону Ньютона

$$m\omega^2 R = mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha,$$

$$\omega^2 l\cos\alpha = g\,\mathrm{ctg}\,\alpha,$$

$$\sin\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}, \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(g/\omega^2 l\right)^2}.$$

Получаем ответ

$$\Delta L = 2m\omega l^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{2mgl}{\omega}\sqrt{1 - \left(g/\omega^2 l\right)^2}. \qquad (5.8)$$

Задача 5.3. По гладкой горизонтальной поверхности движется небольшое тело массы m, привязанное к нерастяжимой нити, другой конец которой втягивают в отверстие O (рис. 5.3) с постоянной скоростью. Найти силу натяжения нити в зависимости от расстояния r тела до отверстия, если при $r = r_0$ угловая скорость нити была равна ω_0.

Сила $\vec{F}$, действующая на тело, является центральной, поэтому при решении задачи используем закон сохранения момента импульса, который запишем в виде

$$L = L_0, \qquad (5.9)$$

где L – момент импульса тела на расстоянии r от точки O; L_0 – момент импульса тела на расстоянии r_0 от точки O.

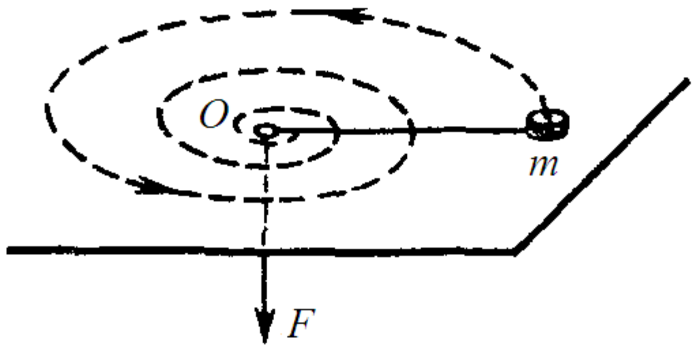

Рис. 5.3

С учетом формулы (5.2)

запишем

$$L = m\upsilon r \sin 90° = m\omega r^2, \quad L_0 = m\omega_0 r_0{}^2.$$

После подстановки этих выражений в формулу (5.9) получим

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2.$$

Сила натяжения нити играет роль центростремительной силы, поэтому

$$F = m\omega^2 r = m\omega_0^2 \frac{r_0^4}{r^3}. \qquad (5.10)$$

Задача 5.4. Частица движется по замкнутой траектории в центральном силовом поле, где ее потенциальная энергия $W_p = kr^2$, где k – положительная константа; r – расстояние от частицы до центра поля. Найти массу частицы, если наименьшее расстояние ее до центра – r_1, а скорость на наибольшем расстоянии υ_2.

Центральное поле – поле потенциальное, вследствие чего, наряду с законом сохранения момента импульса, выполняется и закон сохранения механической энергии:

$$m\upsilon_1 r_1 = m\upsilon_2 r_2, \qquad (5.11)$$

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} + kr_1^2 = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + kr_2^2. \qquad (5.12)$$

Из уравнения (5.11) выразим υ_1 и подставим в формулу (5.12):

$$m\upsilon_2^2 \frac{r_2^2}{r_1^2} + 2kr_1^2 = m\upsilon_2^2 + 2kr_2^2,$$

$$m\upsilon_2^2 \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} - 1 \right) = 2k\;\; r_2^2 - r_1^2\;\;,$$

$$m = \frac{2kr_1^2}{\upsilon_2^2}. \qquad (5.13)$$

6. Динамика твердого тела

Уравнение динамики твердого тела, вращающегося вокруг закрепленной оси, направление которой совпадает с осью z, имеет вид

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \tag{6.1}$$

где L_z – проекция момента импульса тела на эту ось; M_z – проекция на ось момента силы, действующей на это тело.

Если тело имеет конечные размеры, то проекцию его момента импульса на ось z можно записать в виде

$$L_z = I_z\omega, \tag{6.2}$$

где ω – угловая скорость вращения тела, а I_z – момент инерции тела относительно оси вращения.

Он является мерой инертности тела при вращательном движении и зависит не только от массы тела, но и от его формы и размеров. Кроме того, он также зависит от распределения массы по объему тела и определяется формулой

$$I_z = \int\limits_V R^2 dm. \tag{6.3}$$

Физический смысл этой формулы заключается в следующем. Тело объемом V мысленно разбиваем на множество элементарных объемов dV, каждый из них имеет массу dm. R – это расстояние от данного объема до оси вращения. Поэтому интеграл в формуле (6.3) зависит от распределения массы по объему тела и от его размера и формы.

Подставляя выражение (6.2) в формулу (6.1) получаем уравнение динамики вращательного движения твердого тела в виде

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z. \tag{6.4}$$

Кинетическая энергия тела, совершающего вращательное движение вокруг закрепленной оси, определяется по формуле

$$W_k = \frac{I_z \omega^2}{2}. \qquad (6.5)$$

Вычисление момента инерции тела по формуле (6.3) не всегда представляет собой легкую задачу, особенно в том случае, если положение оси вращения выбрано произвольно. Эта задача значительно упрощается, если ось вращения совпадает с осью симметрии тела. Эти моменты инерции (их обозначают I_z^0) давно посчитаны и даже приведены в таблицах справочных материалов. Для вычисления момента инерции тела относительно произвольно выбранной оси вращения применяется теорема Штейнера:

$$I_z = I_z^0 + ma^2, \qquad (6.6)$$

где m – масса тела; a – расстояние между осью симметрии и параллельной ей осью вращения.

Задача 6.1. Однородный диск радиусом R имеет круглый вырез (рис. 6.1). Масса оставшейся (незаштрихованной) части диска равна m. Найти момент инерции такого диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через точку O.

Для начала вычислим момент инерции *сплошного* диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через точку O. Его массу M можно легко найти:

$$M = m + m',$$

$$m = M - m' = \rho\pi R^2 - \rho\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\rho\pi R^2 = \frac{3}{4}M,$$

$$M = \frac{4}{3}m, \qquad (6.7)$$

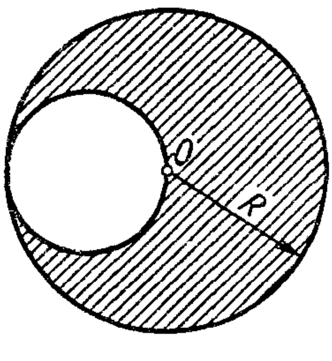

Рис. 6.1

где m' – масса вырезанной части; ρ – масса единицы площади диска.

Этот диск можно представить в виде множества бесконечно тонких колец, одно из них изображено на рис. 6.2. Оно имеет радиус r и толщину dr. Его массу можно записать в виде

$$dm = \rho 2\pi r dr\,.$$

Используя формулу (6.3), получим

$$I_z^0 = \int r^2 dm = \int_0^R \rho 2\pi r^3 dr =$$

$$= \frac{1}{2}\rho\pi R^4 = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{2}{3}mR^2. \qquad (6.8)$$

Индекс «0» момента инерции указывает на то, что момент инерции относительно оси проходит через центр масс

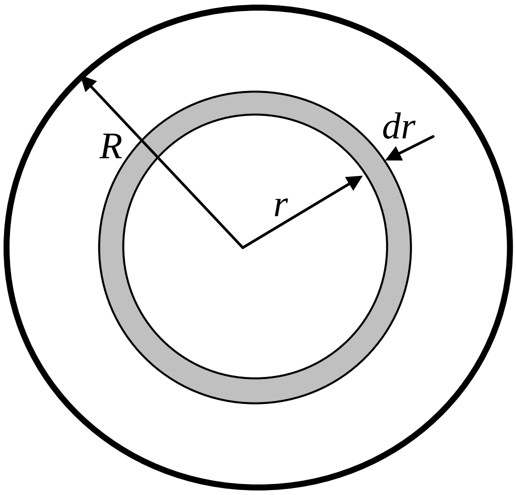

Рис. 6.2

сплошного диска. Этот момент инерции можно представить в виде суммы I_z^0 = I_z + $I_z{}'$, где I_z – момент инерции заштрихованной части диска (рис. 6.1); $I_z{}'$ – момент инерции его вырезанной части относительно точки O. Для того чтобы найти $I_z{}'$, применим теорему Штейнера (6.6):

$$I_z{}' = \left(I_z^0\right)' + m'\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m'\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m'\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}m'R^2\,,$$

где $\left(I_z^0\right)'$ – момент инерции вырезанной части относительно ее центра.

Массу m' найдем из соотношений (6.7):

$$m' = M - m = \frac{4}{3}m - m = \frac{1}{3}m\,.$$

Таким образом,

$$I_z{}' = \frac{1}{8}mR^2.$$

Получаем

$$I_z = I_z^0 - I_z{}' = \frac{2}{3}mR^2 - \frac{1}{8}mR^2 = \frac{13}{24}mR^2\,. \qquad (6.9)$$

Задача 6.2. На ступенчатый блок (рис. 6.3) намотаны в противоположных направлениях две нити. На конец одной действуют постоянной силой $\vec{F}$, а к концу другой нити прикреплен груз массой m. Известны радиусы блока R_1 и R_2 и его момент инерции I относительно оси вращения. Найти угловое ускорение блока. Трения нет.

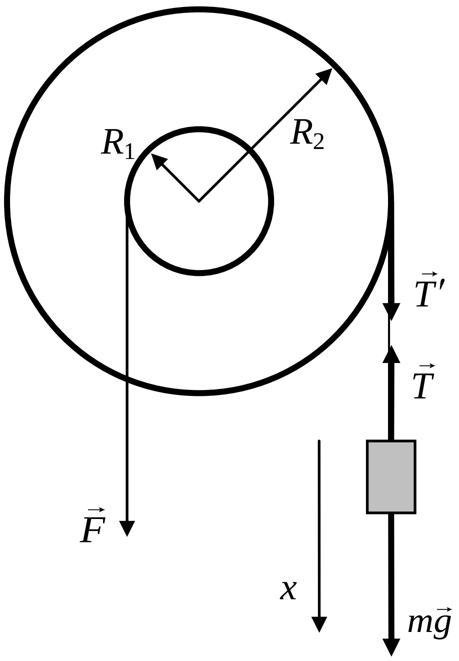

Рис. 6.3

На блок действует две силы. Первая сила $\vec{F}$. За вторую силу часто принимают силу тяжести $m\vec{g}$ – а это не так. Рассмотрим силы, действующие та груз. Таких сил две: сила тяжести и сила натяжения нити $\vec{T}$. И они не равны, ведь их равнодействующая сообщает телу ускорение. Силы будут равны только в том случае, когда тело покоится или равномерно движется. Сила натяжения действует и на тело и на блок $\vec{T}'$, и по третьему закону Ньютона $\vec{T}' = -\vec{T}$.

Будем считать, что груз опускается, т. е. блок вращается по часовой стрелке. Это значит, что вектор угловой скорости ω направлен вдоль оси вращения от нас. Направим туда же и ось z, тогда в проекции на эту ось уравнение (6.4) можно записать в виде

$$I\frac{d\omega}{dt} = M_{\Sigma z}\ , \qquad (6.10)$$

где $M_{\Sigma z}$ – алгебраическая сумма проекций моментов сил $\vec{F}$ и $\vec{T}'$ на ось z, $M_{\Sigma z} = M_{Fz} + M_{Tz}$. Поскольку сила $\vec{F}$ стремится повернуть блок против часовой стрелки, следовательно, проекция ее момента M_{Fz} на ось z будет отрицательной. Проекция момента M_{Tz} будет положительной, т. к. эта сила стремится повернуть блок по часовой стрелке. Таким образом, уравнение (6.10) принимает вид

$$I\frac{d\omega}{dt} = -FR_1 + TR_2.$$

Учитывая, что угловое ускорение $\beta = \frac{d\omega}{dt}$, получим

$$I\beta = -FR_1 + TR_2. \qquad (6.11)$$

Для описания поступательного движения груза используем второй закон Ньютона. В проекции на ось x он принимает вид:

$$ma = mg - T. \qquad (6.12)$$

Между ускорением a и угловым ускорением β существует простая связь, которую легко получить, продифференцировав по времени равенство $v = \omega R_2$:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R_2, \text{ т. е. } a = \beta R_2.$$

Таким образом,

$$T = mg - m\beta R_2.$$

Подставляя это выражение в формулу (6.11), получаем окончательный результат

$$\beta = \frac{mgR_2 - FR_1}{I + mR_2^2}. \qquad (6.13)$$

Задача 6.3. Однородный диск массой m и радиусом R раскрутили до угловой скорости ω_0 и осторожно положили на горизонтальную поверхность. Сколько времени диск будет вращаться на поверхности, если коэффициент трения μ? Какую работу совершила при этом сила трения?

Представим диск в виде множества бесконечно тонких колец подобно тому, как мы сделали это в задаче 6.1 (см. рис. 6.2), и рассмотрим одно из них, имеющее радиус r и толщину dr. Его массу можно записать в виде

$$dm = \rho dS = \rho 2\pi r dr,$$

где ρ – масса, приходящаяся на единицу поверхности диска, $\rho = {m}/{\pi R^2}$; dS – площадь кольца (она заштрихована на рис. 6.2).

Тогда сила трения $dF_{\text{тр}}$, действующая на это кольцо, будет

$$dF_{\text{тр}} = \mu dmg = \mu g \rho 2\pi r dr\,,$$

а ее момент относительно оси вращения определится по формуле

$$dM_{\text{тр}} = dF_{\text{тр}} r = \mu g \rho 2\pi r^2 dr\,.$$

Интегрируя это выражение, находим модуль результирующего момента сил трения, действующих на этот диск,

$$M_{\text{тр}} = \int_0^R \mu g \rho 2\pi r^2 dr = \frac{2}{3}\mu g \rho \pi R^3 = \frac{2}{3}\mu m g R\,. \qquad (6.14)$$

Воспользуемся уравнением (6.4) динамики вращательного движения

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z\,,$$

перепишем его в виде

$$d\omega = \frac{M_z}{I_z} dt$$

и проинтегрируем:

$$\int_{\omega_0}^{0} d\omega = \int_0^t \frac{M_z}{I_z} dt\,,$$

$$-\omega_0 = \frac{M_z}{I_z} t\,.$$

Момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр, $I_z = {1}/{2}\, mR^2$ (формулу получили, решив задачу 6.1). Проекция момента сил трения на ось z отрицательна (силы трения тормозят вращение диска), т. е. $M_z = -M_{\text{тр}}$.

В итоге

$$t = \frac{I_z \omega_0}{M_{\text{тр}}} = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}. \qquad (6.14)$$

Ответ на второй вопрос этой задачи получить очень легко, если вспомнить теорему о кинетической энергии: изменение кинетической энергии тела равно работе сил, действующих на это тело,

$$A_{\text{тр}} = \Delta W_k = 0 - W_{k0} = -\frac{I_z \omega_0^2}{2} = -\frac{1}{4} m R^2 \omega_0^2. \qquad (6.15)$$

Смысл знака минус в этом выражении понятен: работа сил трения отрицательна.

Задача 6.4. Гладкий однородный стержень *AB* массой *M* и длиной l свободно вращается с угловой скоростью ω_0 в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его конец *A*. Из точки начинает скользить по стержню небольшая муфта массой m. Найти скорость υ' муфты относительно стержня в тот момент, когда она достигнет его конца *B*.

Стержень вращается свободно, значит, выполняется закон сохранения момента импульса. Запишем его в общем виде:

$$L_z = L_{0z}, \qquad (6.16)$$

где L_{0z} – проекция момента импульса стержня на ось вращения в начальный момент времени. Момент импульса муфты при этом равен нулю, т. к. она находится на оси вращения. Воспользуемся формулой (6.2): $L_{0z} = I_z \omega_0$. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр, определяется по формуле: $I_z^0 = {}^1\!/_{12} M l^2$. Для того чтобы найти момент инерции относительно оси, проходящей через конец стержня, применим теорему Штейнера (см. формулу (6.6)):

$$I_z = I_z^0 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M l^2, \qquad (6.17)$$

поэтому

$$L_{0z} = \frac{1}{3} M l^2 \omega_0. \tag{6.18}$$

где L_z – проекция момента импульса системы «стержень плюс муфта» тогда, когда муфта достигла конца стержня B. Ее можно представить в виде двух слагаемых $L_z = L_{zc} + L_{zм}$, где L_{zc} – проекция момента импульса стержня, $L_{zc} = {}^1\!/_3 M l^2 \omega$. Здесь ω – конечная угловая скорость вращения стержня. $L_{zм}$– проекция на ось вращения момента импульса муфты. Для того чтобы вычислить ее, обратим внимание на то, что скорость муфты имеет две составляющие: вместе со стержнем муфта вращается вокруг оси, и, кроме того, она движется вдоль стержня, удаляясь от точки A. Вклад этой радиальной составляющей скорости в момент импульса (см. формулу (5.2)) будет равен нулю, т. к. ее направление совпадает с радиус-вектором муфты относительно оси вращения. Поэтому в конечном положении $L_{zм} = m\upsilon l = m\omega l^2$. Итак, получаем

$$L_z = L_{zc} + L_{zм} = \frac{1}{3} M l^2 \omega + m l^2 \omega = \left(\frac{1}{3} M + m\right) l^2 \omega. \tag{6.19}$$

Подставим формулы (6.18) и (6.19) в равенство (6.16) и найдем конечную угловую скорость вращения стержня (муфта дошла до конца B):

$$\omega = \frac{{}^1\!/_3\ M}{{}^1\!/_3\ M + m} \omega_0 = \frac{\omega_0}{1 + {}^{3m}\!/_M}. \tag{6.20}$$

В системе отсутствуют силы трения – это значит, что мы можем применить закон сохранения механической энергии, записав его в виде:

$$W_{k0} = W_k + W_{km}. \tag{6.21}$$

Физический смысл этого равенства заключается в следующем: кинетическая энергия стержня в начальный момент времени равна сумме кинетических энергий стержня и муфты в конечный момент.

Следовательно,

$$W_{k0} = \frac{I_z \omega_0^2}{2}, \quad W_k = \frac{I_z \omega^2}{2}, \quad W_{km} = \frac{m \ \ \omega^2 l^2 + \upsilon^2}{2}.$$

Подставим эти формулы в равенство (6.21), учтем формулы (6.17) и (6.20) и преобразуем:

$$I_z \omega_0^2 = I_z \omega^2 + m \ \ \omega^2 l^2 + \upsilon^2 \ \ ,$$

$$m\upsilon'^2 = I_z \omega_0^2 - \ \ I_z + ml^2 \ \ \omega^2,$$

$$m\upsilon'^2 = \frac{1}{3} Ml^2 \omega_0^2 - \left(\frac{1}{3} Ml^2 + ml^2 \right) \frac{\omega_0^2}{1 + {}^{3m}\!/\!{}_{M}},$$

$$m\upsilon'^2 = \frac{1}{3} Ml^2 \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{1 + {}^{3m}\!/\!{}_{M}} \right),$$

$$\upsilon' = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{1 + {}^{3m}\!/\!{}_{M}}}. \tag{6.22}$$

Задача 6.5. Двум дискам одинаковыми радиусами сообщили одну и ту же угловую скорость ω_0 (рис. 6.4), а затем привели в соприкосновение, и система через некоторое время пришла в новое установившееся состояние движения. Оси дисков неподвижны, трения в осях нет. Моменты инерции дисков относительно их осей вращения равны I_1 и I_2. Найти:

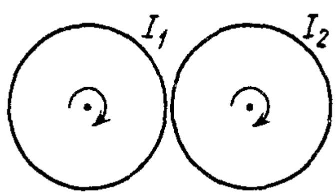

Рис. 6.4

а) приращение момента импульса системы;

б) убыль ее механической энергии.

Анализируя условия этой задачи, можно сделать несколько предварительных выводов. Если моменты инерции одинаковы, то в установившемся состоянии диски просто остановятся. Если моменты инерции отличаются (допустим, $I_1 > I_2$), то в установившемся состоянии первый диск будет вращаться в ту же сторону, но с меньшей угловой скоростью (обозначим ее ω). Таким образом, изменение угловой скорости диска будет по модулю $\left|\Delta\omega_1\right| = \omega_0 - \omega$. Второй диск изменит направление своего вращения. Это значит, что направление вектора $\vec{\omega}$ изменится на противоположное, а его проекция на ось сменит знак. Поэтому изменение угловой скорости диска будет по модулю $\left|\Delta\omega_2\right| = \omega_0 + \omega$.

По третьему закону Ньютона модули сил трения, действующих на эти диски при их соприкосновении, равны, а значит, равны и моменты этих сил: $\left|M_{\text{тр}1}\right| = \left|M_{\text{тр}2}\right|$. Воспользуемся уравнением (6.4) и перепишем его в виде:

$$\left|I_1 \frac{\Delta\omega_1}{\Delta t}\right| = \left|I_2 \frac{\Delta\omega_2}{\Delta t}\right|,$$

$$I_1 \left(\omega_0 - \omega\right) = I_2 \left(\omega_0 + \omega\right),$$

$$\omega = \omega_0 \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}. \qquad (6.23)$$

Теперь мы можем ответить на первый вопрос задачи: приращение момента импульса системы найдем по формуле

$$\Delta L = L_\Sigma - L_{\Sigma 0}, \qquad (6.24)$$

где L_Σ – суммарный момент импульса системы после соприкосновения, то есть в установившемся состоянии

$$L_\Sigma = L_1 + L_2 = I_1\omega - I_2\omega = \left(I_1 - I_2\right)\omega. \qquad (6.25)$$

$L_{\Sigma 0}$ – суммарный момент импульса системы до соприкосновения,

$$L_{\Sigma 0} = L_{01} + L_{02} = I_1\omega_0 + I_2\omega_0 = \left(I_1 + I_2\right)\omega_0. \qquad (6.26)$$

Знак минус в формуле (6.25) появился потому, что вектор ω у второго диска изменил свое направление, и его проекция на ось изменила знак.
Подставляя формулы (6.25), (6.26) и (6.23) в выражение (6.24), получаем

$$\Delta L = L_\Sigma - L_{\Sigma 0} = -\omega_0 \frac{4 I_1 I_2}{I_1 + I_2}. \qquad (6.27)$$

Убыль механической энергии дисков найти очень легко:

$$\left|\Delta W_k\right| = W_{k0} - W_k = \frac{I_1 + I_2 \ \ \omega_0^2}{2} - \frac{I_1 + I_2 \ \ \omega^2}{2} = \frac{2I_1 I_2 \omega_0^2}{I_1 + I_2}. \qquad (6.28)$$

Задача 6.6. Вертикально расположенный однородный стержень массой M и длиной l может вращаться вокруг своего верхнего конца (рис. 6.5). В нижний конец стержня попала, застряв, горизонтально летевшая пуля массой m, в результате чего стержень отклонился на угол α. Считая $m << M$, найти:

а) скорость летевшей пули;

б) приращение импульса системы «пуля–стержень» за время удара; указать причину изменения этого импульса;

в) на какое расстояние x от верхнего конца стержня должна попасть пуля, чтобы импульс системы «пуля–стержень» не изменился в процессе удара.

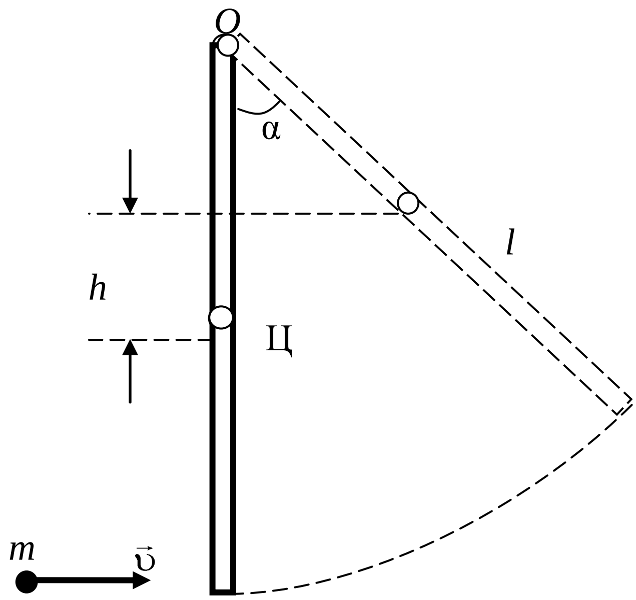

Рис. 6.5

Эта задача напоминает типичные задачи, решаемые с использованием законов сохранения импульса и механической энергии: пуля попадает в шар, висящий на длинной нити, шар отклоняется, и т. д. Отличие данной задачи в том, что стержень при попадании в него пули совершает поворот относительно оси вращения. В таком случае мы должны применять законы вращательного движения. Система «пуля–стержень» не является замкнутой: помимо сил, уравновешивающих друг друга, в процессе движения пули в стержне возникает горизонтальная составляющая силы реакции в точке O. По этой причине мы не можем применить закон сохранения импульса при описании данного процесса. Однако закон сохранения момента импульса использовать можем: момент силы реакции относительно точки O равен нулю. Итак,

$$L_n = L_c,$$

$$L_n = m\upsilon l, \quad L_c = I\omega = \frac{1}{3}Ml^2\omega,$$

$$\omega = \frac{3m\upsilon}{Ml}, \tag{6.29}$$

где L_n – момент импульса пули перед ее попаданием в стержень (мы определили его по формуле (5.2)); L_c – момент импульса стержня после попадания пули (мы определили его по формуле (6.17)). В выражение (6.29) не входит момент инерции пули в стержне относительно оси вращения, поскольку по условию задачи $m << M$.

По закону сохранения механической энергии

$$\frac{I\omega^2}{2} = Mgh, \tag{6.30}$$

где слева стоит выражение для кинетической энергии стержня после попадания в него пули, а справа – потенциальная энергия стержня в момент его максимального отклонения от положения равновесия; h – высота, на которую поднялся центр масс стержня. Ее можно определить следующим образом (см. рис. (6.5)).:

$$h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha = l\sin^2\frac{\alpha}{2}. \tag{6.31}$$

Подставляя формулы (6.29) и (6.31) в выражение (6.30), мы получаем ответ на первый вопрос задачи:

$$\upsilon = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{2}{3}gl}\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{6.32}$$

Поскольку система «пуля–стержень» не является замкнутой: в процессе движения пули в стержне возникает горизонтальная составляющая силы реакции в точке O, постольку и импульс этой системы буде меняться в ходе процесса. Будем искать изменение импульса по формуле

$$\Delta p = p_c - p_n, \tag{6.33}$$

где p_c – импульс стержня после попадания пули; p_n – импульс пули до столкновения, $p_n = m\upsilon$. Импульс стержня можно легко найти, если представить стержень в виде множества материальных точек, каждая из которых движется со своей скоростью. Известно, что суммарный импульс такой системы равен импульсу материальной точки, масса которой равна сумме масс всех частиц системы (а нашем случае это M), и которая движется со скоростью центра масс V_c этой системы частиц. Центр масс стержня находится на расстоянии $l/2$ от оси вращения, поэтому $V_c = \omega l/2$. С учетом формулы (6.29) запишем

$$p_c = MV_c = \frac{1}{2}M\omega l = \frac{3}{2}m\upsilon. \tag{6.34}$$

Таким образом,

$$\Delta p = p_c - p_n = \frac{3}{2}m\upsilon - m\upsilon = \frac{1}{2}m\upsilon = M\sqrt{\frac{1}{6}gl}\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{6.35}$$

Мы ответили на второй вопрос задачи, но полученный результат требует уточнения. В результате удара пули импульс системы «пуля–стержень» увеличился. Почему это произошло и не противоречит ли это известному утверждению о том, что при неупругом столкновении кинетическая энергия системы уменьшается, т. к. часть ее переходит во внутреннюю энергию? Прежде всего проверим справедливость этого утверждения в нашем случае. До столкновения кинетическая энергия системы «пуля–стержень» определялась кинетической энергией пули:

$$W_{kn} = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

После столкновения кинетическая энергия системы «пуля–стержень» определяется кинетической энергией стержня:

$$W_{kc} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{3m^2\upsilon^2}{2M}.$$

При выводе этой формулы мы воспользовались выражением (6.29). Найдем изменение кинетической энергии системы при столкновении:

$$\Delta W_k = W_{kc} - W_{kn} = \frac{m\upsilon^2}{2}\left(\frac{3m}{M} - 1\right).$$

Учитывая, что $m << M$, мы приходим к выводу, что $\Delta W_k < 0$, как того и следовало ожидать. Строгий расчет (без упрощающего предположения $m << M$) приводит к аналогичному результату: $\Delta W_k = -\dfrac{m\upsilon^2/2}{1 + 3m/M} < 0$.

Осталось ответить на последнее задание задачи: на какое расстояние x от верхнего конца стержня должна попасть пуля, чтобы импульс системы «пуля–стержень» не изменился в процессе удара. Для этого учтем, что если импульс системы «пуля–стержень» не изменился в процессе удара, то $\Delta p = p_c - p_n = 0$, т. е. $p_c = p_n$. Импульс пули остался тем же самым, а вот импульс стержня изменился, ведь теперь пуля попала в другую его точку. Для того чтобы найти его, запишем:

$$L_n = L_c,$$

$$m\upsilon x = \frac{1}{3}Ml^2\omega,$$

$$\omega = \frac{3m\upsilon x}{Ml^2},$$

$$p_c = MV_c = \frac{1}{2}M\omega l = \frac{3m\upsilon x}{2l},$$

$$p_c = p_n,$$

$$\frac{3m\upsilon x}{2l} = m\upsilon,$$

$$x = \frac{2}{3}l. \tag{6.36}$$

Отметим кое-что интересное в связи с полученным результатом. Если импульс системы «пуля–стержень» не изменился, то горизонтальная составляющая силы реакции в точке O в процессе удара равна нулю. Это означает, что при таком попадании пули ось вращения не почувствует отдачу.

7. Неинерциальные системы отсчета

Неинерциальными (НСО) называются системы отсчета (СО), которые двигаются с ускорением относительно инерциальных (ИСО). *Ускорение*, с которым тело движется, относительно ИСО, определяется только реальными физическими силами и поэтому оно одинаково во всех ИСО. Оно называется *абсолютным* и обозначается $\vec{a}_0$. Ускорение, с которым НСО движется относительно ИСО, называется *переносным* и обозначается $\vec{a}$. Ускорение, с которым тело движется относительно НСО, называется *относительным*. Оно обозначается $\vec{a}'$ и определяется формулой $\vec{a}' = a_0 - a$.

В НСО тела ведут себя так, как если бы на них действовали не только реальные физические силы, но и *силы инерции*. Эти силы обладают рядом особенностей:

- силы инерции существуют только в НСО. Их нельзя использовать в ИСО, поскольку там они просто отсутствуют;
- силы инерции нельзя ставить в один ряд с такими реальными физическими силами, как силы упругости, тяготения и т. д. Силы инерции обусловлены свойствами соответствующей НСО, и в этом смысле их можно назвать фиктивными.

Введение сил инерции не является принципиально необходимым, т. к. любое движение можно рассмотреть относительно ИСО. Однако использование сил инерции позволяет в ряде случаев проще решить задачу.

Чаще всего в задачах встречаются НСО, связанные с вращающимися телами – дисками, стержнями и т. д. Их называют вращающимися СО. В этих

СО действуют силы инерции двух видов: центробежная сила и сила Кориолиса. *Центробежная сила* действует на все тела во вращающейся СО. Она всегда направлена от оси вращения и равна по величине

$$F_{цб} = m\omega^2 r\,, \tag{7.1}$$

где m – масса тела; ω – угловая скорость вращения СО; r – расстояние от тела до оси вращения.

Сила Кориолиса действует только на те тела, которые двигаются относительно вращающейся СО. В векторном виде ее можно записать так:

$$\vec{F}_k = 2m\ \vec{\upsilon}',\vec{\omega}\ \ , \tag{7.2}$$

где $\vec{\upsilon}'$ – скорость тела относительно вращающейся СО.

В скалярном виде эта формула принимает вид

$$F_k = 2m\upsilon'\omega\sin\alpha\,, \tag{7.3}$$

где α – угол между векторами $\vec{\upsilon}'$ и $\vec{\omega}$.

Задача 7.1. Муфточка *A* может свободно скользить вдоль гладкого стержня, изогнутого в форме полукольца радиуса *R* (рис. 7.1). Систему привели во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OO'. Найти угол θ, соответствующий устойчивому положению муфточки.

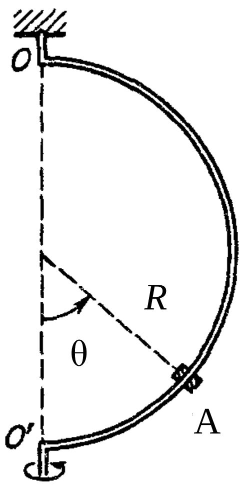

Рис. 7.1

Решим задачу в системе отсчета, связанной с вращающимся стержнем. В этой системе отсчета муфта покоится, следовательно, равнодействующая всех сил, действующих на нее, равна нулю. Во вращающейся СО на муфту действуют три силы (рис. 7.2): сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и центробежная сила $\vec{F}_{цб}$. Из рис. 7.2 следует, что в состоянии равновесия

$$\frac{F_{цб}}{mg} = \operatorname{tg}\theta . \tag{7.4}$$

$$F_{цб} = m\omega^2 r = m\omega^2 R \sin\theta .$$

Поэтому

$$\frac{\omega^2 R \sin\theta}{g} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} . \tag{7.5}$$

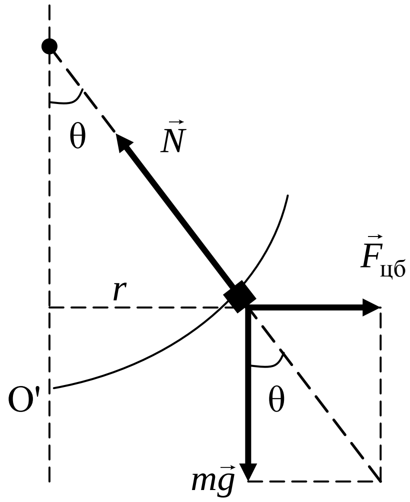

Рис. 7.2

Первое решение находим сразу: θ = 0, поскольку если муфта находится на оси вращения в точке O', то центробежная сила равна нулю, а силы тяжести и реакции опоры компенсируют друг друга. Но возможно и второе решение. Если $\theta \neq 0$, то равенство (7.5) можно записать в виде

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R} . \tag{7.6}$$

Это решение возможно, если $\omega^2 R \geq g$ (косинус не может быть больше единицы). Итак, подведем итоги. Если угловая скорость вращения невелика ($\omega < \sqrt{g/R}$), то муфта находится на оси вращения в точке O', и это положение устойчивого положения муфты.

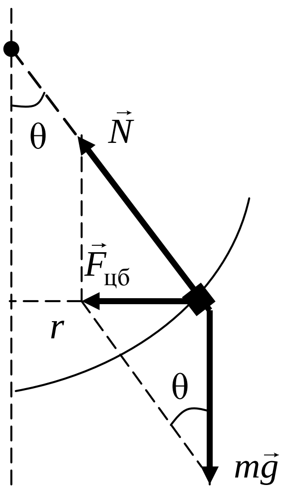

Рис. 7.3

При увеличении угловой скорости $\omega \geq \sqrt{g/R}$ возможно два положения равновесия: неустойчивое при $\theta = 0$ и устойчивое при

$$\theta = \arccos\frac{g}{\omega^2 R} . \tag{7.7}$$

Задачу можно было бы решить, не переходя в НСО. Действительно, в инерциальной СО на муфту действует две реальные физические силы: сила тяжести и сила реакции опоры. Их равнодействующая направлена к оси вращения и играет роль центростремительной силы (рис. 7.3). Поэтому

$$F_{\text{цс}} = mg\,\mathrm{tg}\,\theta,$$

$$F_{\text{цс}} = m\omega^2 r = m\omega^2 R \sin\theta .$$

Далее решение находим по формуле (7.5).

Эта задача иллюстрирует то, о чем мы говорили в начале этого раздела: введение сил инерции не является принципиально необходимым, т. к. любое движение можно рассмотреть относительно ИСО.

Задача 7.2. Горизонтально расположенный гладкий стержень *AB* вращают с угловой скоростью ω = 2,00 рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец *A* (рис. 7.4). По стержню свободно скользит муфточка массой *m* = 0,50 кг, движущаяся из точки *A* с начальной скоростью $\upsilon'_0 = 100$ м/с. Найти действующую на муфточку силу Кориолиса (в системе отсчета, связанной с вращающимся стержнем) в момент, когда муфточка оказалась на расстоянии *r* = 50 см от оси вращения.

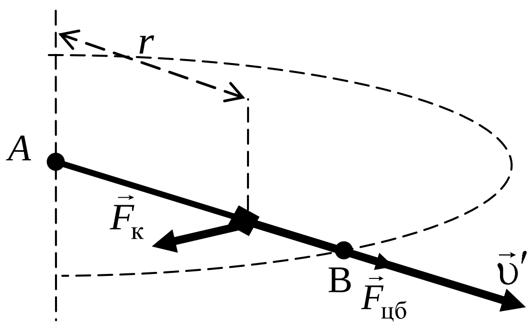

Рис. 7.4

На муфту в НСО, связанной со стержнем, действует две силы инерции: центробежная и сила Кориолиса (см. рис. 7.4). Скорость муфты υ' увеличивается под действием центробежной силы, и мы можем найти ее значение на расстоянии *r* от оси вращения, используя теорему о кинетической энергии:

$$W_k - W_{k0} = A_{\text{цб}},$$

$$\frac{m\upsilon'^2}{2} - \frac{m\upsilon_0'^2}{2} = A_{\text{цб}},$$

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon_0'^2 + \frac{2}{m} A_{\text{цб}}},$$

где $A_{цб}$ – работа центробежной силы, которую можно рассчитать обычным способом:

$$A_{цб}=\int_0^r F_{цб}dr=\int_0^r m\omega^2 r dr=\frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

Таким образом,

$$\upsilon'=\sqrt{\upsilon_0'^2+\omega^2 r^2}.$$

Воспользовавшись формулой (7.3), мы получим ответ

$$F_k=2m\omega\sqrt{\upsilon_0'^2+\omega^2 r^2}. \qquad (7.8)$$

Задача 7.3. На экваторе с высоты h = 500 м на поверхность Земли падает тело (без начальной скорости относительно Земли). Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти, на какое расстояние и в какую сторону отклонится от вертикали тело при падении.

При падении тела на него начинает действовать сила Кориолиса, направленная на восток (рис. 7.5), и под ее действием тело отклонится от вертикали в ту же сторону.

Учитывая, что высота тела над поверхностью Земли невелика, можно считать поле тяготения однородным и принять ускорение свободного падения равным $\vec{g}$. Тогда $\upsilon'=gt$, и силу Кориолиса можно записать в виде

$$F_k=2m\omega\upsilon'=2m\omega gt.$$

Эта сила сообщает телу горизонтальное ускорение

$$a=\frac{F_k}{m}=2\omega gt.$$

Найдем горизонтальную составляющую скорости тела:

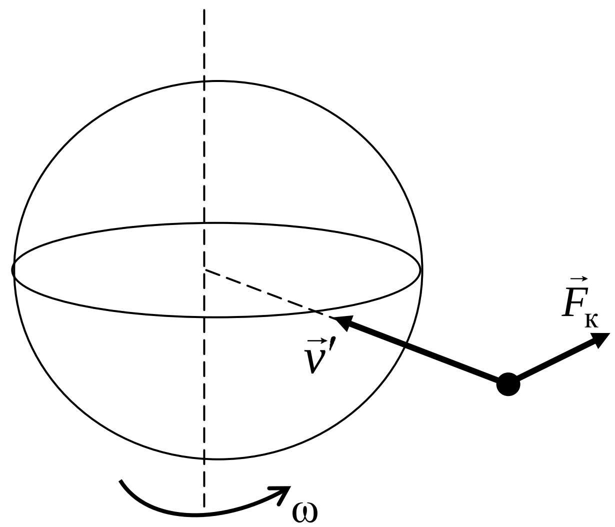

Рис. 7.5

$$\upsilon'_{\text{гор}} = \int_0^t a dt = \omega g t^2 .$$

Нам осталось найти, на какое расстояние отклонится от вертикали тело при падении с высоты h (время падения определится по формуле $t_n = \sqrt{2h/g}$):

$$S = \int_0^{t_n} \upsilon'_{\text{гор}} dt = \int_0^{t_n} \omega g t^2 dt = \frac{1}{3}\omega g t_n^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} = \frac{2}{3}\omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} = 24 \text{ см} . \quad (7.9)$$

Задача 7.4. На гладкой горизонтальной поверхности лежит однородный стержень массой m = 5,0 кг и длиной l = 90 см. По одному из концов стержня в горизонтальном направлении, перпендикулярном к стержню, произвели удар, импульс силы которого J = 3,0 Н·с. Найти силу, с которой одна половина стержня будет действовать на другую в процессе движения.

По концу стержня произвели удар (рис. 7.6), и он пришел в движение. Центр масс стержня (точка О) будет двигаться равномерно и прямолинейно, а сам стержень будет вращаться относительно центра масс. С этим вращением связано появление момента импульса L стержня относительно точки О. Его можно вычислить, используя уравнение движения для момента импульса (5.3), которое в данном случае можно записать так:

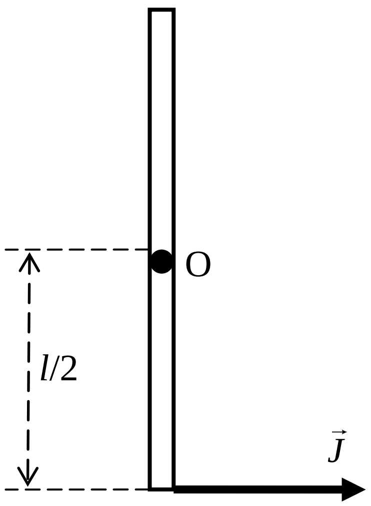

Рис. 7.6

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = M ,$$

$$\Delta L = M \cdot \Delta t ,$$

$$L = J\frac{l}{2} . \quad (7.10)$$

При выводе этой формулы мы учли, что $\Delta L = L - L_0 = L - 0 = L$, момент M силы, подействовавшей на стержень при ударе, равен произведению силы F на ее плечо (оно равно $l/2$) и, наконец, произведение силы F на время ее действия Δt и есть импульс силы J: $M = F\frac{l}{2}\Delta t = J\frac{l}{2}$.

Вспомним, что $L = I\omega$ (см. формулу (6.2)), где I – момент инерции тела относительно оси вращения – в данном случае это точка O; ω – угловая скорость вращения тела. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр, $I = \frac{1}{12}ml^2$. Подставляя эти выражения в формулу (7.10), найдем угловую скорость вращения стержня:

$$\omega = \frac{6J}{ml}. \qquad (7.11)$$

Свяжем со стержнем систему отсчета, вращающуюся с угловой скоростью, и центр ее совместим с точкой О. В данной НСО на каждую половинку стержня будет действовать центробежная сила, являющаяся силой, с которой одна половина стержня будет действовать на другую в процессе движения. Чтобы найти ее, разобьем стержень на множество бесконечно малых частей (рис. 7.7), и рассмотрим одну из них, имеющую длину dr и находящуюся на расстоянии r от точки О. Ее масса составляет

$$dm = \frac{m}{l}dr,$$

и на нее действует центробежная сила

$$dF_{\text{цб}} = dm\omega^2 r = \frac{m}{l}\omega^2 r dr.$$

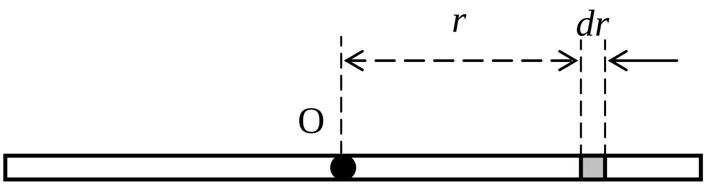

Рис. 7.7

Проинтегрируем это выражение и получим ответ:

$$F = \int_0^{l/2} \frac{m}{l}\omega^2 r dr = \frac{m}{l}\omega^2 \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{9J^2}{2ml}. \qquad (7.12)$$

Задача 7.5. Горизонтальный гладкий диск вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр – точку О. Из этой точки в момент t = 0 пустили шайбу массой m со скоростью υ_0. Найти момент импульса шайбы $L(t)$ относительно точки О в системе отсчета, связанной с диском. Убедиться, что момент импульса обусловлен действием силы Кориолиса.

Диск гладкий, т. е. трение отсутствует. Это значит, что для наблюдателя, находящегося рядом с диском, шайба будет двигаться от центра диска по радиусу равномерно и прямолинейно со скоростью υ_0. Совершенно по-другому будет выглядеть движение шайбы для наблюдателя, находящегося на диске (и вращающегося вместе с ним): шайба будет удаляться от центра диска, двигаясь по спирали. Ее скорость υ' относительно диска будет иметь две составляющие (рис. 7.8):

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}_\perp, \tag{7.13}$$

где $\vec{\upsilon}_\perp$ – поперечная составляющая скорости шайбы относительно диска. Она равна скорости, с которой вращаются точки диска, находящиеся на расстоянии r от точки О. Ее величина $\upsilon_\perp = \omega r$, а в векторном виде ее можно записать так:

$$\vec{\upsilon}_\perp = -\ \vec{\omega},\vec{r}\ . \tag{7.14}$$

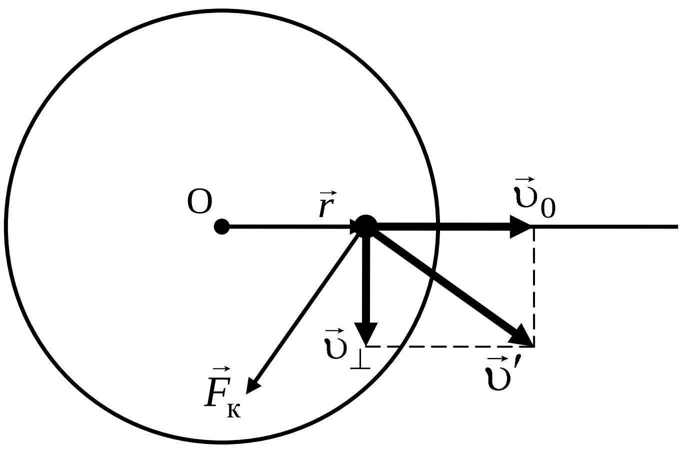

Рис. 7.8

Знак минус в формуле (7.14) появился потому, что относительно точек диска шайба движется по часовой стрелке (вектор ее угловой скорости противоположен вектору ω).

Убедиться в том, что момент импульса обусловлен действием силы Кориолиса, можно очень просто. Достаточно записать уравнение движения для момента импульса (5.3):

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\left[\vec{r},\vec{F}_{\Sigma}\right],$$

где $\vec{F}_{\Sigma}=\vec{F}_{\text{цб}}\ +\vec{F}_{k}$.

Тогда

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\left[\vec{r},\ \vec{F}_{\text{цб}}+\vec{F}_{k}\ \right]=\left[\vec{r},\vec{F}_{\text{цб}}\right]+\left[\vec{r},\vec{F}_{k}\right]=\left[\vec{r},\vec{F}_{k}\right]. \qquad (7.15)$$

Первый член суммы в правой части обращается в нуль, т. к. векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}_{\text{цб}}$ сонаправлены, а окончательное выражение и есть момент силы Кориолиса $M_{к}$, действующей на частицу, относительно оси вращения.

Займемся вычислением момента импульса шайбы относительно точки O в системе отсчета, связанной с диском:

$$\vec{L}=m\ \vec{r},\vec{\upsilon}'\ =m\left[\vec{r},\ \vec{\upsilon}_{0}+\vec{\upsilon}_{\perp}\ \right]=m\ \vec{r},\vec{\upsilon}_{0}\ +m\ \vec{r},\vec{\upsilon}_{\perp}\ =m\ \vec{r},\vec{\upsilon}_{\perp}\ =$$

$$=-m\left[\vec{r},\ \vec{\omega},\vec{r}\ \right]=-m\left[\vec{\omega}r^{2}-\vec{r}\ \ \vec{r}\vec{\omega}\ \right]=-mr^{2}\vec{\omega}.$$

В преобразованиях мы учли, что $\vec{r},\vec{\upsilon}_{0}\ =0$, т. к. эти векторы сонаправлены, и $\vec{r}\vec{\omega}\ =0$, т. к. эти векторы взаимно перпендикулярны.

Расстояние r шайбы от точки О изменяется со временем по закону $r=\upsilon_{0}t$, поэтому получаем

$$\vec{L}=-m\upsilon_{0}^{2}t^{2}\vec{\omega}. \qquad (7.16)$$

Чтобы еще раз убедиться в том, что момент импульса обусловлен действием силы Кориолиса, посчитаем правую и левую части равенства (7.15):

$$M_{k}=\left[\vec{r},\vec{F}_{k}\right]=2m\left[\vec{r},\ \vec{\upsilon}',\vec{\omega}\ \right]=2m\ \ \vec{\upsilon}'\ \ \vec{r}\vec{\omega}\ -\vec{\omega}\ \ \vec{r}\vec{\upsilon}'\ \ =$$

$$=-2m\vec{\omega}\left[\vec{r}\ \ \vec{\upsilon}_{0}+\vec{\upsilon}_{\perp}\ \right]=-2m\vec{\omega}r\upsilon_{0}=-2m\upsilon_{0}^{2}t\vec{\omega}.$$

Проводя расчеты, мы учитываем, что $\vec{r}\vec{\upsilon}_{\perp}\ =0$, т. к. векторы взаимно перпендикулярны, и $\vec{r}\vec{\upsilon}_{0}\ =r\upsilon_{0}$, поскольку векторы сонаправлены.

И, наконец, взяв производную по времени от момента импульса по формуле (7.16), получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -2m\upsilon_0^2 t\vec{\omega} = \vec{M}_k .$$

8. Релятивистская механика

Кинематические эффекты

В рамках релятивистской механики изучаются процессы, протекающие со скоростями, сопоставимыми со скоростью света. Таким образом, необходимо учитывать положения специальной теории относительности (СТО) и ее результатов. Отметим некоторые из них. Рассмотрим *кинематические эффекты СТО*.

Переход из одной инерциальной системы отсчета (ИСО) к другой осуществляется при помощи преобразований Лоренца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \qquad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$y' = y, \qquad y = y',$$

$$z' = z, \qquad z = z',$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{8.1}$$

Здесь величины со штрихами принадлежат системе отсчета *K′*, которая движется в направлении оси *x* со скоростью *V*. Переменные без штрихов относятся к покоящейся, *лабораторной* системе отсчета *K*. Формулы в левой части представляют собой прямые преобразования, а в правой – обратные. Из данных преобразований следуют формулы релятивистского закона сложения скоростей

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \frac{V\upsilon_x}{c^2}}, \qquad \upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + V}{1 + \frac{V\upsilon'_x}{c^2}},$$

$$\upsilon'_y = \frac{\upsilon_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V\upsilon_x}{c^2}}, \qquad \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V\upsilon'_x}{c^2}}, \tag{8.2}$$

$$\upsilon'_z = \frac{\upsilon_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V\upsilon_x}{c^2}}, \qquad \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V\upsilon'_x}{c^2}}.$$

Задача 8.1. Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета под прямым углом друг к другу со скоростями υ_1 и υ_2. Найти их относительную скорость.

Относительной называется *скорость*, с которой одна частица движется относительно другой. Пусть первая частица движется в системе отсчета *К* вдоль оси *x*: $\upsilon_{1x} = \upsilon_1, \upsilon_{1y} = 0$. В таком случае для второй частицы $\upsilon_{2x} = 0$, $\upsilon_{2y} = \upsilon_2$. Свяжем с первой частицей систему *К′* (ее скорость относительно системы *К* $V = \upsilon_1$). В системе отсчета *К′* первая частица покоится, следовательно, скорость второй частицы в системе *К′* будет равна относительной скорости. Применяя соотношения (8.2), получаем

$$\upsilon'_{2x} = -\upsilon_1, \ \ \upsilon'_{2y} = \upsilon_2 \sqrt{1 - \frac{\upsilon_1^2}{c^2}},$$

$$\upsilon'_2 = \sqrt{\upsilon'^2_{2x} + \upsilon'^2_{2y}} = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 \left(1 - \frac{\upsilon_1^2}{c^2}\right)}. \tag{8.3}$$

Рассмотрим в качестве примера случай, когда $\upsilon_1 = \upsilon_2 = c$: $\upsilon'_2 = c$.

В этой задаче также можно задать вопрос: какова скорость сближения этих частиц? Ответ будет таков: $\upsilon_{\text{сбл}} = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}$. Если $\upsilon_1 = \upsilon_2 = c$, то $\upsilon_{\text{сбл}} = c\sqrt{2}$, и в этом нет никакого противоречия с положениями теории относительности, т.к. скорость света – это предельная скорость движения материальных объектов, а скорость сближения – это просто скорость сближения.

Задача 8.2. Два стержня одинаковой собственной длиной l_0 движутся в продольном направлении навстречу друг другу параллельно общей оси с одной и той же скоростью υ относительно лабораторной системы отсчета. Чему равна длина одного стержня в системе отсчета, связанной с другим?

Прежде всего определимся с некоторыми понятиями. *Собственной* называется *длина* l_0 стержня в системе отсчета, относительно которой стержень покоится. Его длина l в системе отсчета, относительно которой он движется, будет меньше, и будет определяться по формуле

$$l = l_0\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\,. \qquad (8.4)$$

Этот эффект называется *лоренцевым сокращением длины*.

Для того чтобы найти длину одного стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем, необходимо знать относительную скорость этого стержня. Таким образом, задача свелась к предыдущей. Свяжем систему *K′* со стержнем, движущимся вдоль оси x. Скорость системы $V = \upsilon$. Скорость второго стержня в лабораторной системе отчета $\upsilon_{2x} = -\upsilon$, поэтому его скорость υ_2' в системе *K′* будет равна (см. формулу (8.2))

$$\upsilon_2' = \frac{\upsilon_{2x} - V}{1 - V\upsilon_{2x}/c^2} = -\frac{2\upsilon}{1+\upsilon^2/c^2}\,.$$

Подставим это выражение в формулу (8.4) и получим ответ:

$$l = l_0\sqrt{1-\upsilon_2^2/c^2} = l_0\sqrt{1-\frac{4\upsilon^2}{\left(1+\upsilon^2/c^2\right)^2 c^2}} = l_0\frac{c^2-\upsilon^2}{c^2+\upsilon^2} = l_0\frac{1-\upsilon^2/c^2}{1+\upsilon^2/c^2}. \qquad (8.5)$$

Задача 8.3. Две нестабильные частицы движутся в *К*-системе отсчета по некоторой прямой в одном направлении со скоростью υ = 0,990 с. Расстояние между ними в этой системе отсчета l = 120 м. В некоторый момент обе частицы распались одновременно в системе отсчета, связанной с ними. Какой промежуток времени между моментами распада обеих частиц наблюдали в *К*-системе? Какая частица распалась позже в *К*-системе?

Из формулировки вопросов задачи следует, что понятие одновременности событий в релятивистской механике не является абсолютным: события, происходящие одновременно в одной системе отсчета, оказываются неодновременными в другой. Этот эффект носит название *относительности одновременности событий.*

Найдем промежуток времени между моментами распада обеих частиц в *К*-системе, используя обратные преобразования Лоренца по формуле (8.1):

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{V}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}. \qquad (8.6)$$

Учитывая, что $V = \upsilon$, $t_2' = t_1'$ и $x_2' - x_1' = l_0 = \dfrac{l}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$,

получаем ответ:

$$\Delta t = \frac{\upsilon l/c^2}{1-\upsilon^2/c^2} = 20 \text{ мкс.} \qquad (8.7)$$

Так как $\Delta t > 0$, то вторая частица распалась позже в *К*-системе.

Задача 8.4. Стержень *AB* ориентирован параллельно оси x' системы отсчета K' и движется в этой системе со скоростью υ' вдоль ее оси y'. K'-система в свою очередь движется со скоростью V относительно *К*-системы, как показано на рис. 8.1. Найти угол θ между стержнем и осью x в *К*-системе.

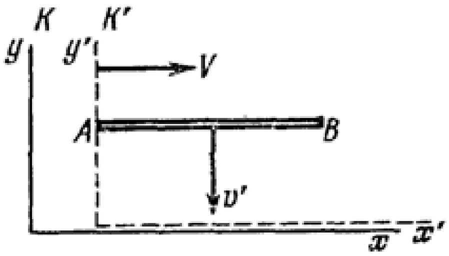

Рис. 8.1

Пусть в некоторый момент концы стержня совпадут с осью x' в K'-системе. Эти два события, являющиеся одновременными в K'-системе, будут неодновременными в K-системе отсчета, и в соответствии с формулами (8.6) и (8.7)

$$\Delta t = \frac{Vl/c^2}{1 - V^2/c^2}, \qquad (8.8)$$

где l – длина стержня в системе K. В системе K' компоненты скорости стержня определяются как $\upsilon'_x = 0$, $\upsilon'_y = -\upsilon'$ и согласно закону преобразования скоростей (8.2) получаем

$$\upsilon_y = \frac{\upsilon'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V\upsilon'_x/c^2} = -\upsilon' \sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Таким образом, за время Δt правый край стержня окажется ниже левого на $\Delta y = \upsilon_y \Delta t$ и стержень будет повернут по часовой стрелке на угол θ, который можно легко определить из соотношения

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\Delta y}{l} = -\frac{\upsilon' V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (8.9)$$

Импульс и энергия релятивистской частицы

Движение релятивистской частицы подчиняется второму закону Ньютона, который в этом случае называется релятивистским уравнением динамики частицы и записывается в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \qquad (8.10)$$

где импульс релятивистской частицы определяется по формуле

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \; . \tag{8.11}$$

Полная энергия W релятивистской частицы представляет собой сумму двух слагаемых – энергии покоя W_0 и кинетической энергии W_k:

$$W = W_0 + W_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} , \tag{8.12}$$

$$W_0 = mc^2 , \tag{8.13}$$

$$W_k = W - W_0 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1 \right) . \tag{8.14}$$

Задача 8.5. Исходя из релятивистского уравнения динамики частицы найти:

а) в каких случаях ускорение частицы совпадает по направлению с действующей на нее силой;

б) коэффициенты пропорциональности между силой F и ускорением a, когда $\vec{F} \,\|\, \vec{\upsilon}$ и $\vec{F} \perp \vec{\upsilon}$.

Запишем второй закон Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \right) m\vec{\upsilon} + \frac{m\vec{a}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} . \tag{8.15}$$

Воспользуемся формулой (8.14), возьмем производную по времени

$$\frac{dW_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1 \right) = mc^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \right),$$

и преобразуем ее:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \right) = \frac{1}{mc^2}\frac{dW_k}{dt} = \frac{1}{mc^2}\frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{F}\vec{\upsilon}}{mc^2} . \tag{8.16}$$

Здесь мы учли, что согласно теореме о кинетической энергии $dW_k = dA = \vec{F} d\vec{r}$.

Подставим формулу (8.16) в выражение (8.15):

$$\vec{F} = \frac{1}{c^2}\left(\vec{F}\vec{\upsilon}\right)\vec{\upsilon} + \frac{m\vec{a}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}},$$

выразим отсюда ускорение частицы:

$$\vec{a} = \left(\frac{\vec{F}}{m} - \frac{\vec{F}\vec{\upsilon}}{mc^2}\vec{\upsilon}\right)\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}. \qquad (8.17)$$

В общем виде задача решена, и мы получили важный результат: вектор $\vec{a}$ равен разности двух векторов, один из которых сонаправлен с вектором силы $\vec{F}$, а второй – с вектором скорости частицы $\vec{\upsilon}$. Таким образом, в общем случае направление вектора ускорения не совпадает с направлением действия силы! Этот результат свидетельствует, что известную формулу

$$\vec{a} = \vec{F}/m \qquad (8.18)$$

можно использовать лишь в нерелятивистской области $\upsilon << c$, когда формула (8.17) превращается в выражение (8.18).

Рассмотрим два важных частных случая, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{F}$ совпадают по направлению.

1. Вектор силы сонаправлен с вектором скорости (*продольная сила*). В таком случае $\left(\vec{F}\vec{\upsilon}\right)\vec{\upsilon} = \vec{F}\upsilon^2$ и выражение (8.17) принимает вид

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}\left(1-\upsilon^2/c^2\right)\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = \frac{\vec{F}}{m}\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{3/2}. \qquad (8.19)$$

Это ускорение сонаправлено с вектором скорости и является *тангенциальным ускорением* $\vec{a}_\tau$. Оно характеризует изменение скорости по величине.

2. Вектор силы перпендикулярен вектору скорости (*поперечная сила*). При этом $\left(\vec{F}\vec{\upsilon}\right) = 0$ и формула (8.17) принимает вид

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}\left(1 - \upsilon^2/c^2\right)^{1/2}. \qquad (8.20)$$

Это ускорение направлено перпендикулярно вектору скорости и является *нормальным* $\vec{a}_n$. Оно характеризует изменение скорости по направлению.

Мы видим, что

$$\frac{a_\tau}{a_n} = 1 - \upsilon^2/c^2 < 1,$$

т. е. $a_\tau < a_n$. Это значит, что поперечная сила сообщает частице большее ускорение, чем продольная, равная ей по величине. Данное условие, кстати, приходится учитывать при расчетах циклических и линейных ускорителей.

Задача 8.6. Найти зависимость импульса частицы массой m от ее кинетической энергии. Вычислить импульс протона с кинетической энергией 500 МэВ.

Решим вспомогательную задачу – выразим скорость частицы через ее импульс:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}},$$

$$p^2 - p^2\frac{\upsilon^2}{c^2} = m^2c^2,$$

$$\upsilon = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}.$$

Подставим полученное выражение в формулу (8.12) для полной энергии частицы, получим

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - p^2/\left(p^2 + m^2c^2\right)}} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \qquad (8.21)$$

Проведем следующие преобразования:

$$W^2 = c^2 p^2 + \left(mc^2\right)^2,$$

$$\left(mc^2 + W_k\right)^2 = c^2 p^2 + \left(mc^2\right)^2,$$

$$c^2 p^2 = W_k\left(W_k + 2mc^2\right).$$

Получим ответ:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_k\left(W_k + 2mc^2\right)} = 1{,}08 \text{ ГэВ/с}. \qquad (8.22)$$

Задача 8.7. Пучок релятивистских частиц с кинетической энергией W_k падает на поглощающую мишень. Сила тока в пучке равна I, заряд и масса – e и m. Найти силу давления пучка на мишень и выделяющуюся в ней мощность P.

Применим второй закон Ньютона и формулу (8.22):

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p\Delta N}{\Delta t} = \frac{p\Delta N}{\Delta t}\frac{e}{e} = \frac{pI}{e} = \frac{I}{ec}\sqrt{W_k\left(W_k + 2mc^2\right)}, \qquad (8.23)$$

Поясним, что ΔN – это число частиц, падающих на мишень за время Δt, следовательно, $\Delta N \cdot e$ – заряд, попадающий на мишень за это время, значит, $\Delta N \cdot e / \Delta t$ – сила тока в пучке.

В мишени выделяется энергия, и мощность в данном случае – это энергия, выделяемая в ней в единицу времени. Поэтому

$$P = \frac{\Delta W_k}{\Delta t} = \frac{W_k \Delta N}{\Delta t} = \frac{W_k \Delta N}{\Delta t}\frac{e}{e} = \frac{W_k I}{e}. \qquad (8.24)$$

Задача 8.8. Частица массой m движется вдоль оси x по закону $x = \sqrt{d^2 + c^2 t^2}$, где d – постоянная; c – скорость света; t – время. Найти силу, действующую на частицу.

Найдем скорость частицы

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = c^2 t\left(d^2 + c^2 t^2\right)^{-1/2}$$

и ее импульс

$$p = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} = \frac{mc^2 t}{d}.$$

Нам осталось найти силу

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{mc^2}{d}. \qquad (8.25)$$

Сила постоянная.

Задача 8.9. Показать, что для частицы величина $W^2 - p^2c^2$ есть инвариант, т. е. имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета. Каково значение этого инварианта?

Результат задачи нам очень пригодится при решении следующих задач.

Воспользуемся формулой (8.21):

$$W = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}.$$

Возведя ее в квадрат, получим

$$W^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = W_0^{\,2}. \qquad (8.26)$$

Правая часть этого выражения – квадрат энергии покоя частицы – не зависит от скорости частицы и, следовательно, от выбора системы отсчета. То же самое можно сказать и о левой части выражения (8.26). Поэтому величина $W^2 - p^2c^2$ имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета и представляет собой инвариант теории относительности:

$$W^2 - p^2c^2 = \mathrm{inv}. \qquad (8.27)$$

Задача 8.10. Нейтрон с кинетической энергией $W_k = 2mc^2$, где m – его масса, налетает на другой покоящийся нейтрон. Найти в системе их центра масс:

а) суммарную кинетическую энергию W_k' нейтронов;

б) импульс p' каждого нейтрона.

Для решения задачи воспользуемся только что полученным выражением (8.27), которое запишем в виде

$$W^2 - p^2c^2 = W'^2 - p'^2c^2, \tag{8.28}$$

где слева стоят энергия и импульс двух нейтронов в лабораторной системе отсчета, а справа – энергия и импульс этих нейтронов в системе отсчета, связанной с их центром масс. Запишем их в явном виде:

$$W = 2W_0 + W_k = 2mc^2 + 2mc^2 = 4mc^2. \tag{8.29}$$

В выражении (8.29) мы учли, что в лабораторной системе отсчета один из нейтронов покоится, а второй движется и обладает кинетической энергией W_k. Импульс этого нейтрона (и, значит, всей системы) равен (см. формулу (8.22))

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_k\left(W_k + 2mc^2\right)} = 2\sqrt{2}mc. \tag{8.30}$$

В системе центра масс нейтронов их суммарный импульс равен нулю, $p' = 0$, а энергию можно записать в виде

$$W' = 2W_0' + W_k' = 2mc^2 + W_k'. \tag{8.31}$$

Подставим формулы (8.29)–(8.31) в выражение (8.28) и получим ответ:

$$16m^2c^4 - 8m^2c^4 = \left(2mc^2 + W_k'\right)^2,$$

$$W_k' = 2mc^2\left(\sqrt{2} - 1\right). \tag{8.32}$$

Далее, учтем, что в системе центра масс импульсы нейтронов равны по величине, а значит, равны и их кинетические энергии. Следовательно, можно найти кинетическую энергию одного нейтрона:

$$W_{k1}' = mc^2\left(\sqrt{2} - 1\right) \text{ –}$$

и по формуле (8.22) найти его импульс:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_k\left(W_k + 2mc^2\right)} = \frac{1}{c}\sqrt{m^2c^4\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)} = mc. \tag{8.33}$$

Задача 8.11. Релятивистская частица массой m и кинетической энергией W_k налетает на покоящуюся частицу той же массой. Найти массу и скорость составной частицы, образовавшейся в результате соударения.

Метод, который мы использовали в предыдущей задаче, универсален. Действительно, свяжем систему K' с центром масс этих частиц и воспользуемся равенством (8.28):

$$W^2 - p^2c^2 = W'^2 - p'^2c^2.$$

Члены, стоящие в левой части, уже записывали (см. формулы (8.29) и (8.30)):

$$W = 2W_0 + W_k = 2mc^2 + W_k,$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_k\left(W_k + 2mc^2\right)}.$$

В системе центра масс составная частица покоится, т. е. $p' = 0$, $W_k' = 0$, $W' = W_0' = Mc^2$ – в системе центра масс ее энергия – это энергия покоя (M – масса составной частицы). В итоге получаем

$$\left(2mc^2 + W_k\right)^2 - W_k\left(W_k + 2mc^2\right) = M^2c^4,$$

$$\left(W_k + 2mc^2\right)2mc^2 = M^2c^4,$$

$$4m^2c^4\left(1 + \frac{W_k}{2mc^2}\right) = M^2c^4,$$

$$M = 2m\sqrt{1 + \frac{W_k}{2mc^2}}. \qquad (8.34)$$

Масса составной частицы оказалась больше суммы масс первоначальных частиц. Впрочем, по теории относительности в результате неупругого столкновения кинетическая энергия системы уменьшилась, соответственно увеличилась энергия покоя составной частицы, т. е. ее масса. $M = 2m$ только в пределе $W_k << 2mc^2$.

Осталось найти скорость V составной частицы. Для этого проще всего воспользоваться законом сохранения импульса: импульс системы до взаимодействия (т. е. импульс налетающей частицы) равен импульсу системы после взаимодействия (т. е. импульсу составной частицы) –

$$\frac{1}{c}\sqrt{W_k\left(W_k+2mc^2\right)}=\frac{MV}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Возведем это выражение в квадрат и воспользуемся формулой (8.34):

$$\frac{2mc^2}{c^2}W_k\left(1+\frac{W_k}{2mc^2}\right)=4m^2\left(1+\frac{W_k}{2mc^2}\right)\frac{V^2}{1-V^2/c^2},$$

$$W_k=\frac{2mV^2}{1-V^2/c^2},$$

$$V=\sqrt{\frac{W_k}{2m\left(1+W_k/2mc^2\right)}}=c\sqrt{\frac{W_k}{2mc^2+W_k}}. \qquad (8.35)$$

9. Колебания

Свободные незатухающие колебания

Свободные незатухающие колебания – это периодический процесс, происходящий при отсутствии сил трения. Если действующая на тело сила

$$F_x=-kx,$$

то колебания являются гармоническими, т. е. происходят по закону синуса или косинуса. Сила такого вида называется квазиупругой.

Второй закон Ньютона для пружинного маятника имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx.$$

Решением этого уравнения является функция

$$x=x_0\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right), \qquad (9.1)$$

где x – смещение от положения равновесия; ω_0 – частота собственных колебаний, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; φ_0 – начальная фаза.

В общем виде уравнение незатухающих колебаний будет выглядеть так:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{9.2}$$

Если известна зависимость потенциальной энергии системы от координат, то можно сформулировать общий алгоритм нахождения периода и частоты незатухающих колебания.

Алгоритм нахождения периода незатухающих колебаний следующий.

1.1. Определить положение равновесия, приравнивая производную от потенциальной энергии по координате к нулю.

1.2. Найти коэффициент жесткости в положении равновесия по формуле

$$k = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_p}. \tag{9.3}$$

1.3. По формуле $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ определить циклическую частоту и период.

Задача 9.1. Найти период свободных колебаний атома массой m для потенциальной энергии следующего вида:

$$u\left(r\right) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right], \tag{9.4}$$

где u – потенциальная энергия атома; r – расстояние между центрами атомов; σ, ε – параметры.

Находим минимум потенциала, беря производную выражения (9.4) от u по r и приравнивая ее к нулю. Минимум потенциала соответствует расстоянию

$$\frac{r_0}{\sigma} = 2^{1/6}. \tag{9.5}$$

Находим вторую производную выражения (9.4):

$$\frac{d}{dr}u\ \ r\ \ =4\varepsilon\left[11\cdot 12\left(\frac{\sigma^{12}}{r^{10}}\right)-6\cdot 5\left(\frac{\sigma^{6}}{r^{4}}\right)\right].$$

Подставляем в полученное выражение полученную координату минимума энергии (9.5):

$$\frac{du}{dr}_{r=r_0}=\frac{144}{2^{2/3}}\varepsilon\sigma^2=k\ .$$

В результате находим частоту и период:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{144}{2^{2/3}m}\varepsilon\sigma^2}\ ,\ \ T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{2^{2/3}m}{144\varepsilon\sigma^2}}.$$

Задача 9.2. Представим себе шахту, пронизывающую земной шар по одному из его диаметров. Найти закон движения тела, упавшего в эту шахту, учитывая изменение ускорения свободного падения внутри Земли. Трение и сопротивление воздуха не учитывать.

Ускорение свободного падения внутри Земли можно представить в виде:

$$g=g_0\frac{r}{R}.$$

Тогда можно записать уравнение движения для тела, падающего в шахте:

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-mg_0\frac{r}{R}. \qquad (9.6)$$

Преобразуя уравнение (9.6), получим

$$\ddot{r}+\frac{g_o}{R}r=0.$$

Таким образом, имеем

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g_0}{R}}\ ,\ T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}=1{,}41\text{ ч.}$$

Физический маятник

Для колебаний физического маятника можно получить уравнение, аналогично уравнению для пружинного маятника:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga\sin\varphi,$$

где I – момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку подвеса; φ – угол поворота при колебаниях; a – расстояние от точки подвеса до центра масс.

Для малых углов $\sin\varphi \approx \varphi$. В результате вычислений получим

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mga}{I}}$.

Затухающие колебания

Затухающие колебания – колебания, энергия которых уменьшается в течение времени. Бесконечно длящийся процесс вида $x = x_0\cos\ \omega_0 t + \varphi_0$ в природе невозможен. Свободные колебания любого осциллятора рано или поздно затухают и прекращаются. Поэтому на практике обычно имеют дело с затухающими колебаниями. Они характеризуются тем, что амплитуда колебаний A является убывающей функцией. Обычно затухание происходит под действием сил сопротивления среды, наиболее часто выражаемых линейной зависимостью от скорости колебаний $F_c = -r\upsilon$ или ее квадрата.

Рассмотрим затухающие колебания пружинного маятника (рис. 9.1).

Пусть имеется система, состоящая из пружины (подчиняющейся закону Гука), один конец которой жестко закреплен, а на другом находится тело массой m. Колебания совершаются в среде, в которой сила сопротивления пропорциональна скорости с коэффициентом r. Начальное отклонение от равновесия происходит за счет некоторой внешней силы, но при дальнейших колебаниях эта сила отсутствует. Тогда второй закон Ньютона для рассматриваемой системы запишем так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{dt} - kx, \qquad (9.7)$$

где F_c – сила сопротивления, $F_c = -r\dfrac{dx}{dt}$; $F_{\text{упр}}$ – сила упругости, $F_{\text{упр}} = -kx$.

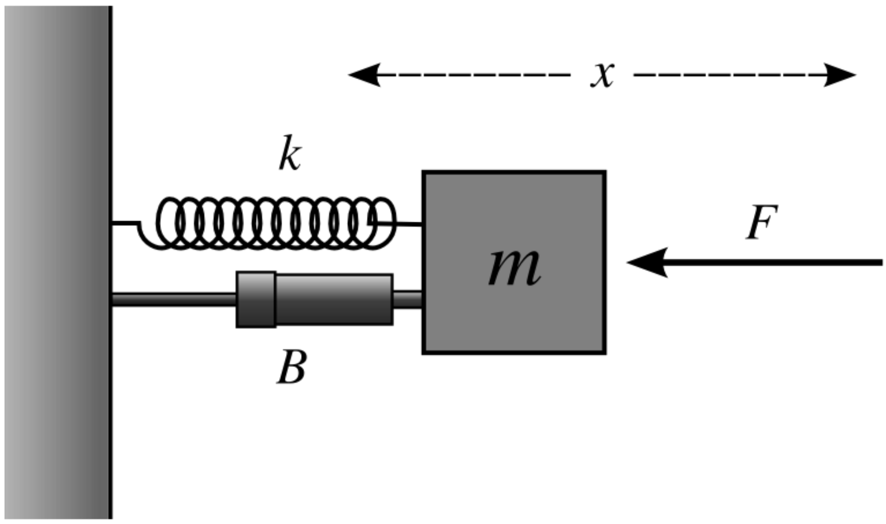

Рис. 9.1. Модель пружинного маятника:
B – механизм, обеспечивающий затухание; *F* – внешняя сила (в примере не присутствует)

Деля выражение (9.7) на массу и вводя обозначение $\dfrac{r}{m} = 2\beta$, получим

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (9.8)$$

Решением уравнения (9.8) является функция

$$x = A\exp(-\beta t)\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где ω – частота затухающих колебаний, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Затухающие колебания можно также характеризовать с помощью логарифмического декремента затухания Λ или добротности Q:

$$\Lambda = \beta T, \ Q = \frac{\pi}{\Lambda}.$$

Задача 9.3. Осциллятор со временем релаксации $\tau = 20$ с в момент времени $t = 0$ имеет начальное смещение $x_0 = 10$ см. При каком значении начальной скорости υ_0 это смещение окажется равным своей амплитуде?

Запишем решение уравнения затухающих колебаний

$$x = A\exp\left(-\beta t\right)\cos\left(\omega t + \varphi_0\right). \qquad (9.9)$$

Подставляя $t = 0$, получим

$$x_0 = A\cos\left(\varphi_0\right).$$

Дифференцируя смещение по времени (выражение (9.9)), получим зависимость скорости от времени:

$$\upsilon\left(t\right) = \dot{x} = -\frac{A}{\tau}\exp\left(-\beta t\right)\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) + A\omega\exp\left(-\beta t\right)\sin\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

Скорость в начальный момент времени будет следующей:

$$\upsilon_0 = -\frac{A}{\tau}\cos\left(\varphi_0\right) + A\omega\sin\left(\varphi_0\right).$$

Поскольку начальное смещение равно амплитуде, то получим $\cos\left(\varphi_0\right) = 1$, откуда следует, что

$$\sin\left(\varphi_0\right) = 0.$$

В результате получим для скорости

$$\upsilon_0 = -\frac{A}{\tau} = -0{,}5 \text{ см/с}.$$

Задача 9.4. Найти добротность осциллятора, у которого:

а) амплитуда смещения уменьшается в $\eta = 2$ раза через каждые $n = 110$ периодов колебаний;

б) собственная частота $\omega_0 = 100$ с$^{-1}$ и время релаксации $\tau = 60$ с.

Используем формулу для добротности:

$$Q = \frac{\pi}{\Lambda} = \frac{\pi}{\beta T}.$$

Для амплитуды имеем

$$A = A_0\exp\left(-\beta t\right),$$

или

$$\eta = \exp\left(\beta n T\right),$$

$$\frac{1}{n}\ln\eta = \beta T.$$

Тогда получим для добротности

$$Q = \frac{\pi n}{\ln\eta} = 500.$$

Для второго случая имеем

$$Q = \frac{\pi}{\Lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}.$$

Используя связь коэффициента затухания и времени релаксации, получим

$$Q = \frac{\tau\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2\tau^2 - 1} = 3000.$$

Вынужденные колебания

Вынужденные колебания происходят под действием внешней периодической силы. Уравнение вынужденных колебаний выглядит следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t,$$

где f_0 – внешняя сила, приходящаяся на единицу массы; Ω – частота вынужденных колебаний.

Решение этого уравнения следующее:

$$x = a\cos(\Omega t - \varphi), \tag{9.10}$$

где a – амплитуда вынужденных колебаний,

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}; \tag{9.11}$$

φ – фаза вынужденных колебаний, определяемая по формуле

$$tg\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{9.12}$$

Максимум амплитуды (резонанс) достигается при

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ .$$

Задача 9.5. Осциллятор массой m движется по закону $x = a\sin\ \Omega t$ под действием вынуждающей силы $F_x = F_0\cos\Omega t$. Найти коэффициент затухания β осциллятора.

Из общего вида решения уравнения вынужденных колебаний (9.10) следует, что

$$\varphi = \frac{3}{2}\pi\ .$$

Получим из формулы (9.12)

$$\omega_0^2 = \Omega^2\ .$$

Используем уравнение для амплитуды вынужденных колебаний (9.11) для этого случая:

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{F_0}{2m\beta\Omega}\ .$$

Откуда вычислим коэффициент затухания

$$\beta = \frac{F_0}{2ma\Omega}.$$

10. Волны

Механическими волнами называется процесс распространения колебаний в упругой среде. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси, z имеет вид:

$$\psi\left(z,t\right) = a\cos\left(\omega t - kz\right), \qquad (10.1)$$

где ψ – смещение точки среды, имеющей координату z, в момент времени t относительно положения равновесия; a – амплитуда колебаний этой точки; ω – циклическая частота этих колебаний; k – волновое число,

$$k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (10.2)$$

Здесь υ – скорость распространения волны.

Задача 10.1. Уравнение колебаний частиц среды в плоскости $z = 0$ имеет вид: $\psi(0,t) = 10\sin\frac{\pi}{2}t$ см. Записать уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси z, если скорость волны $\upsilon = 300$ м/с. Получить уравнение и изобразить графически колебания для точки, находящейся на расстоянии $l = 600$ м от источника колебаний. Получить уравнение и изобразить графически колебания точек среды в момент времени $t = 4$ с после начала колебаний.

Для выполнения первого задания достаточно сравнить уравнение (10.1) с уравнением, данным в условии задачи. Получим

$$a = 10 \text{ см}, \ \omega = \pi/2, \ k = \omega/\upsilon = \pi/600 \text{ м}^{-1}.$$

Подставим данные значения в формулу (10.1), получим уравнение колебаний для точки, находящейся на расстоянии $l = 600$ м от источника колебаний

$$\psi(z,t) = 10\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{600}z\right) \text{ см.} \qquad (10.3)$$

Прежде чем мы начнем выполнять второе задание, обратим внимание на то, что точка находится на расстоянии $l = 600$ м от источника. Следовательно, волна дойдет до этой точки за время $t = 2$ с, и ее колебания начнутся не сразу, а через 2 с после начала колебаний источника. Уравнение этих колебаний имеет вид:

$$\psi(l,t) = 10\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \pi\right), \text{ см.} \qquad (10.4)$$

График колебаний изображен на рис. 10.1.

В третьем задании речь идет о мгновенной «фотографии» волны, сделанной в момент времени $t = 4$ с. Уравнение (10.3) при этом принимает вид

$$\psi(z,t) = -10\sin\left(\frac{\pi}{600}z\right). \qquad (10.5)$$

Единственное, что следует учесть – это то, что за время 4 с волна распространится на расстояние l = 1200 м и, значит, при $z > 1200$ м колебания частиц среды будет отсутствовать (рис. 10.2).

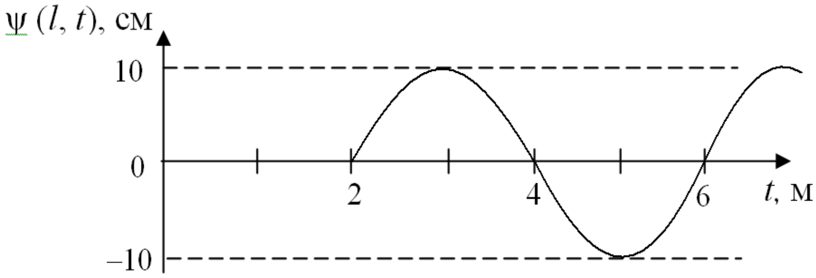

Рис. 10.1

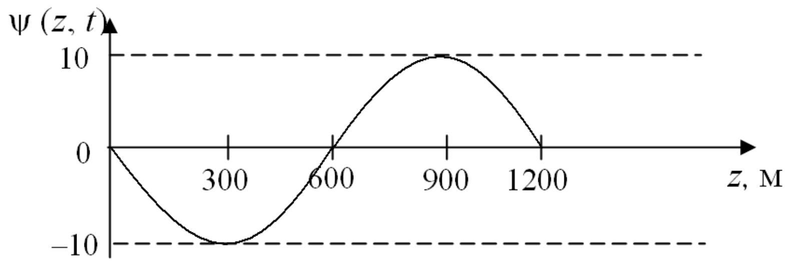

Рис. 10.2

Задача 10.2. Уравнение плоской звуковой волны, мкм, имеет вид $\psi = 60\cos\ 1800t - 5{,}3z$ (время t измеряется в секундах, расстояние z – в метрах). Найти:

а) отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны;

б) амплитуду колебаний скорости частиц среды и ее отношение к скорости распространения волны.

Для начала сравним уравнение, данное в условии, с уравнением (10.1). Получим a = 60 мкм, ω = 1800 с$^{-1}$, k = 5,3 м$^{-1}$, затем применим формулу (10.2), $\lambda = 2\pi/k$ = 1,18 м. Ответ на первое задание:

$$a/\lambda = 50{,}8 \cdot 10^{-6}.$$

Скорость распространения волны найдем по формуле (10.2): $\upsilon = \omega/k = 340$ м/с. Для того чтобы найти скорость колебаний частиц среды, возьмем производную

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -a\omega \sin(\omega t - kx).$$

Из этого выражения видно, что $\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{\max} = a\omega = 0{,}108$ м/с, и мы получаем ответ на второе задание:

$$\frac{(\partial\psi / \partial t)_{\max}}{\upsilon} = 3{,}18 \cdot 10^{-4}.$$

Задача 10.3. Точечный изотропный источник звука находится на перпендикуляре к плоскости кольца, проходящем через его центр О. Расстояние между точкой О и источником $l = 1{,}00$ м, радиус кольца $R = 0{,}50$ м. Найти средний поток энергии через площадь, ограниченную кольцом, если в точке O интенсивность звука $I_0 = 30$ мкВт/м^2.

Волна переносит энергию. Для описания этого процесса используют вектор Умова $\vec{j}$, который указывает направление переноса, а его значение равно плотности потока энергии, т. е. энергии, переносимой через единичную поперечную площадку в единицу времени. Он пропорционален квадрату амплитуды волны. Разобьем площадь, ограниченную кольцом, на тонкие кольца и рассмотрим одно из них, имеющее радиус r и толщину dr (рис. 10.3). Вектор $\vec{j}$ образует угол α с нормалью к плоскости кольца, и поток энергии $d\Phi$ через площадь этого кольцевого слоя (он выделен на рис. 10.3), будет

$$d\Phi = j dS \cos\alpha = j 2\pi r dr \cos\alpha.$$

Нас интересует среднее значение потока энергии $d\Phi = j 2\pi r dr \cos\alpha,$ а в это выражение входит среднее значение модуля вектора Умова, которое называется интенсивностью I волны. Интенсивность также пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

Точечный изотропный источник излучает сферическую волну. Ее амплитуда a убывает обратно пропорционально расстоянию от источника, поэтому интенсивность волны в точках выделенного кольцевого слоя можно выразить через интенсивность I_0 в точке O по формуле $I = I_0 l^2/x^2$.

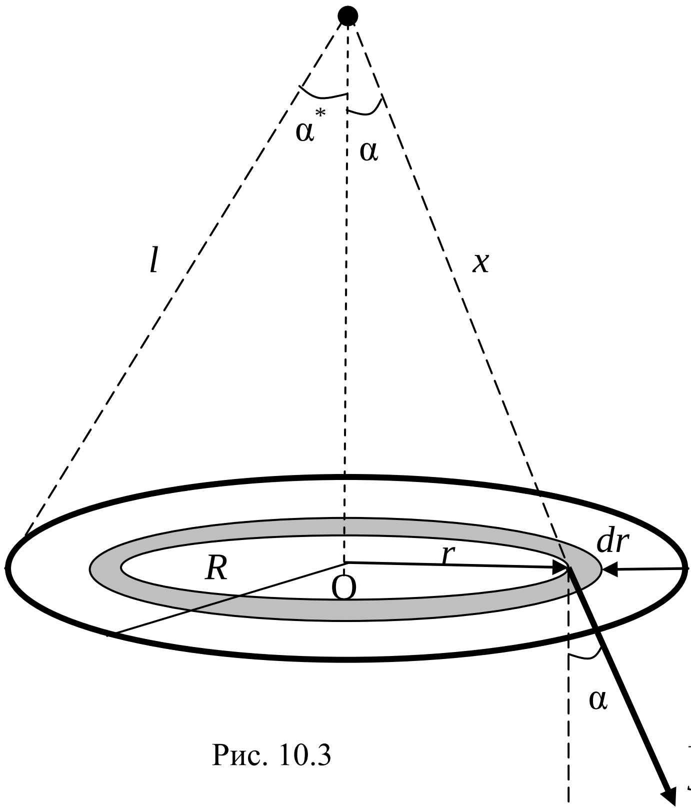

Рис. 10.3

Итак,

$$d\Phi = \frac{I_0 l^2}{x^2} 2\pi r d. \qquad (10.6)$$

Проведем преобразования величин, входящих в это выражение:

$$x = l/\cos\alpha, \quad r = l\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$dr = l d\alpha / \cos\alpha^2 -$$

и получим

$$d\Phi = 2\pi l^2 I_0 \sin\alpha d\alpha.$$

Проинтегрируем данное выражение:

$$\Phi = 2\pi l^2 I_0 \int_0^{\alpha^*} \sin\alpha d\alpha = 2\pi l^2 I_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/l)^2}}\right). \qquad (10.7)$$

Из выражения (10.7) выразим косинус угла α* (см. рис. (10.3)):

$$\cos\alpha^* = \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (R/l)^2}}.$$

Задача 10.4. Найти коэффициент затухания γ звуковой волны, если на расстояниях $r_1 = 10$ м и $r_2 = 20$ м от точечного изотропного источника значения интенсивности звуковой волны отличаются друг от друга в $\eta = 4{,}5$ раза.

Поскольку интенсивность волны I пропорциональна квадрату ее амплитуды (см. задачу 10.3), постольку для сферической волны, создаваемой точечным изотропным источником, справедливо

$$I = \frac{I_0}{r^2},$$

где I_0 – интенсивность на расстоянии $r = 1$ м от источника. Из этой формулы следует, что если бы затухания не было, то η было бы равно четырем.

В задаче идет речь о реальной среде, в которой происходит диссипация энергии. При этом интенсивность волны (обозначим ее I*) убывает с расстоянием пропорционально exp(–2γr). Таким образом,

$$I^* = I\exp(-2\gamma r) = \frac{I_0}{r^2}\exp(-2\gamma r).$$

Из условия задачи, следует, что

$$\frac{I_1^*}{I_2^*} = \eta,$$

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \exp(2\gamma(r_2 - r_1)) = \eta,$$

$$\exp(2\gamma(r_2 - r_1)) = \eta\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2,$$

$$\gamma = \frac{\ln(\eta(r_1/r_2)^2)}{2(r_2 - r_1)} = 6\cdot 10^{-3}\ \text{м}^{-1}.$$

Задача 10.5. На оси z находятся приемник и источник звуковых колебаний с частотой $\nu_0 = 2000$ Гц. Источник совершает гармонические колебания вдоль этой оси с циклической частотой $\omega = 34$ с$^{-1}$ и амплитудой $a = 50$ см. Найти ширину частотного интервала, воспринимаемого неподвижным приемником, если скорость звука $\upsilon = 340$ м/с.

В задаче описывается эффект, который получил название *эффект Доплера*. Его суть можно сформулировать просто: если приемник и источник звуковых колебаний приближаются друг к другу, то частота, которую регистрирует приемник, будет выше той, что излучает источник, и наоборот. Разница частот определяется их относительной скоростью.

Если приемник покоится, а источник движется, то частота ν, регистрируемая приемником, определяется по формуле

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - V/\upsilon},$$

где V – скорость движения источника звуковых колебаний.

Скорость источника меняется по гармоническому закону, принимая максимальное значение $V_m = a\omega$. Когда источник приближается, максимальная частота, регистрируемая приемником, определяется как

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{1 - a\omega/\upsilon},$$

а когда удаляется, минимальная частота определяется формулой

$$\nu_2 = \frac{\nu_0}{1 + a\omega/\upsilon}.$$

Таким образом, ширина частотного интервала, воспринимаемого неподвижным приемником, будет равна

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = 2\nu_0 \frac{a\omega/\upsilon}{1 - \left(a\omega/\upsilon\right)^2}.$$

Учитывая, что $a\omega << \upsilon$, эту формулу можно упрощать:

$$\Delta\nu = \frac{2a\nu_0\omega}{\upsilon} = 200\ \text{Гц}.$$

Задача 10.6. Стальная струна длиной l = 100 см, диаметром d = 0,50 мм дает основной тон частоты ν = 256 Гц. Найти силу ее натяжения.

Колебания струны представляют собой стоячую волну. Амплитуда колебаний различных точек этой струны будет разной. На концах струна закреплена – это узлы стоячей волны, в центре амплитуда будет максимальной (струна колеблется на частоте основного тона) – это пучность стоячей волны.

Кстати, струна может колебаться и с более высокими частотами, их называют обертонами, или высшими гармониками. В таком случае на струне появятся дополнительные узлы и пучности. Условие возникновения колебаний в струне одно: на длине струны должно укладываться целое число полуволн, т. к. расстояние между соседними узлами (да и пучностями тоже) равно половине длины волны. Это очень любопытный результат: частота колебаний струны может принимать только дискретный ряд значений – редкий случай в классической физике.

На длине струны укладывается половина длины волны, $\lambda/2 = l$. Длина волны $\lambda = u/\nu$, где u – скорость распространения волны; ν – ее частота. Тогда $u/2\nu = l$. Скорость распространения поперечной волны (а колебания струны – поперечные) определяется формулой $u = \sqrt{T/\rho_1}$, где T – сила натяжения струны; ρ_1 – ее линейная плотность, то есть масса единицы ее длины: $\rho_1 = \rho\pi d^2/4$, где ρ – плотность материала струны (то есть стали); d – ее диаметр. Тогда

$$T = 4\rho_1 l^2\nu^2 = \pi\rho d^2 l^2 \nu^2 = 400\ H.$$

Задача 10.7. Медный стержень длиной l = 50 см закреплен в середине. Найти число продольных собственных колебаний его в диапазоне от 20 до 50 кГц. Каковы их частоты?

Эта задача отличается от предыдущей двумя моментами. Во-первых, колебания продольные, а во-вторых, стержень закреплен в середине и концы у него свободные, поэтому в центре стержня мы имеем узел, а на его торцах – пучности (рис. 10.4). Это значит, что на половинке стержня должно укладываться целое число полуволн и еще четверть длины волны:

$$n\frac{\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n}{4} = \frac{l}{2},$$

$$\lambda_n = \frac{2l}{2n+1},$$

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{u}{2l}\;\; 2n+1\;\; .$$

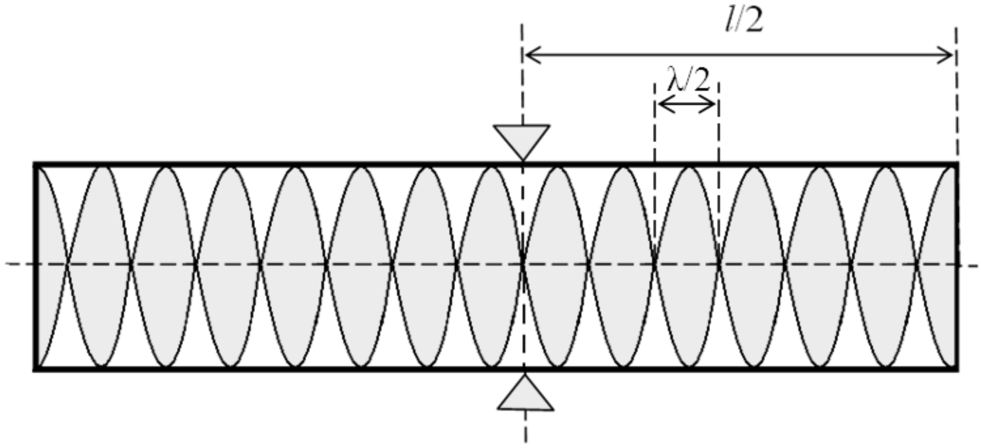

Рис. 10.4

Скорость распространения продольной волны и в упругой среде определяется формулой $u = \sqrt{E/\rho}$, где ρ – плотность среды (для меди ρ = 8900 кг/м^3); E – модуль Юнга, характеризующий упругие свойства среды, является установленной табличной величиной, для меди E = 130 ГПа.

Итак,

$$\nu_n = \frac{u}{2l}\;\; 2n+1\;\; = 3{,}8\cdot 10^3\;\; 2n+1\;\; .$$

По условию $\qquad 20\cdot 10^3 < \nu_n < 50\cdot 10^3,$

т. е. $\qquad 5{,}3 < 2n+1 < 12{,}2,$

$$2{,}2 < n < 6{,}1.$$

Таким образом, мы получаем четыре возможных значения n, удовлетворяющих условиям задачи: n = 3; 4; 5; 6. Им соответствуют частоты 26,6; 34,2; 41,8 и 49,4 кГц.

Оглавление

1. Основы кинематики 3
2. Основное уравнение динамики 19
3. Механическая энергия и работа 32
4. Закон сохранения импульса и механической энергии 44
5. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса 55
6. Динамика твердого тела 61
7. Неинерциальные системы отсчета 75
8. Релятивистская механика 84
9. Колебания 96
10. Волны 103

Учебное издание

Малышев Леонид Григорьевич

Шумихина Кямаля Арифовна

Мелких Алексей Вениаминович

Повзнер Александр Александрович

МЕХАНИКА

Редактор *И. В. Меркурьева*

Компьютерная верстка *Н. Н. Суслиной*

Подписано в печать 30.09.2013 г. Формат 60×90 1/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 5,4.
Уч.-изд. л. 5,8. Тираж 100 экз. Заказ_____.

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: rio@mail.ustu.ru

Отпечатано в типографии Издательско-полиграфического центра УрФУ
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
E-mail.: press.info@usu.ru