Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тихоокеанский государственный университет»

Е. Л. Маркова, Е.В. Солодовник

КИНЕМАТИКА

Утверждено
издательско-библиотечным советом университета
в качестве учебного пособия

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2016

УДК 531.22/24 (075.8)
ББК В234я7
М268

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра «Физика и теоретическая механика»
Дальневосточного государственного университета путей сообщения
(д-р физ.-мат. наук, проф. *В. И. Иванов*);
директор «КарьерПроект ДВ»
канд. техн. наук, доц. *А. И. Шишкин*

Научный редактор
канд. техн. наук, доц. *М. В. Лейбович*

Маркова, Е. Л.
М268 Кинематика : учеб. пособие / Е. Л. Маркова, Е. В. Солодовник; науч. ред. М. В. Лейбович. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2016. – 101 с.
ISBN 978-5-7389-1902-2

Учебное пособие написано на кафедре «Механика деформируемого твёрдого тела» в соответствии с рабочей программой читаемого в ТОГУ курса по дисциплине «Теоретическая механика». Охватывает все основные понятия, определения, принципы, теоремы кинематики. Включает в себя информационную часть, примеры решения задач, тестовый контроль по каждой теме раздела «Кинематика». В приложениях даны задания для контрольной работы по кинематике, изложены минимально необходимые сведения из тригонометрии и векторного исчисления, дифференциального исчисления.

Издание предназначено для студентов университета заочного факультета, обучающихся по программам технического и технологического направлений. Рекомендовано для самостоятельного изучения раздела «Кинематика» и последующего самоконтроля.

УДК 531.22/24 (075.8)
ББК В234я7

ISBN 978-5-7389-1902-2

Введение

Теоретическая механика – это наука, в которой изучаются общие законы механического движения и связанные с ним механические взаимодействия материальных тел.

Название эта наука получила от греческого слова «mechane», что значит «машина». Но в общем комплексе наук о машинах механика, которая теперь называется теоретической, занимает первое место. Она изучает общие свойства машин, которые характеризуют все действующие машины, независимо от их специального назначения. Общими свойствами машин являются движение и сила.

Теоретическая механика является основой большинства технических наук: сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости, гидравлики, теории механизмов и машин, теории колебаний и многих других. Различные научные исследования, связанные с изучением космического пространства, сложнейшие расчеты по проектированию, например, подводных лодок и небоскрёбов основаны на законах и методах теоретической механики.

Изучение теоретической механики в высшей школе имеет определяющее значение для формирования навыков и мышления будущего бакалавра соответствующего направления. Здесь студент узнаёт, как результаты исследования представлять в виде удобных формул и числовых расчётов и одновременно указывать границы их применимости.

Чтобы приступить к курсу изучения данной дисциплины, студент должен обладать суммой определённых знаний по математике, векторной алгебре, тригонометрии, физике и др. дисциплинам.

Курс теоретической механики разделён на три раздела: статику, кинематику и динамику. Статика представляет собой учение о равновесии материальных тел и о приведении системы сил к простейшему виду; кинематика изучает движение материальных тел с геометрической точки зрения, т. е. независимо от причин, вызвавших эти движения, и, наконец, динамика изучает движение материальных тел в связи с действующими на них силами.

В данном пособии рассматривается раздел «Кинематика». Моделями для изучения механического движения служат точка, тело, механическая система. При этом не учитывается масса и другие материальные свойства моделей.

ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Кинематика (от греч. *kinema* – движение) – раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства механического движения материальных объектов без учёта их массы и действующих на них сил. Название этому разделу дано в 1834 г. знаменитым физиком и математиком Ампером (1775-1883г).

Твёрдое тело – это физическое тело, характеризующееся стабильностью формы. В теоретической механике пренебрегают деформациями тел и вводят понятие абсолютно твёрдого тела.

Абсолютно твёрдым, или просто твёрдым , называют такое материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических взаимодействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остаётся постоянным.

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определённую массу.

Объектом называется тело, движение которого оценивается.

В кинематике независимым переменным, аргументом, в функции которого определяются все другие величины, является время t.

Механическим движением называют изменение с течением времени положения в пространстве точек тела и тел относительно какого-либо основного тела, с которым скреплена система отсчёта.

Системой отсчёта называется тело, относительно которого оценивается движение объекта. С системой отсчёта связывают ту или иную систему координат (декартовую, полярную цилиндрическую и т.п.).

Целью кинематики является изучение основных кинематических характеристик движения: траектории движения, закона движения, скорости и ускорения. как всего тела, так и отдельных его точек.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Траекторией точки называют непрерывную линию, которую описывает точка при движении. Если траектория – прямая линия, то движение называется прямолинейным; если траектория – кривая линия, то движение точки называется криволинейным. Прямолинейное движение является частным случаем криволинейного.

Определить движение точки – это значит задать положение её относительно выбранной системы отсчёта в любой момент времени. Существуют три способа задания движения точки:

- векторный;
- естественный;
- координатный.

Векторный способ задания движения точки

Положение точки M определяется заданием радиуса-вектора $\bar{r}$ этой точки в функции скалярного аргумента t:

$$\bar{r} = \bar{r}\,(t). \tag{1}$$

Уравнение (1) представляет собой векторный способ задания движения точки.

Радиус-вектор $\bar{r}$, имеющий начало в неподвижной точке O (полюсе) и конец в точке M, может меняться как по модулю, так и по направлению (рис.1). Конец радиуса-вектора описывает траекторию точки M.

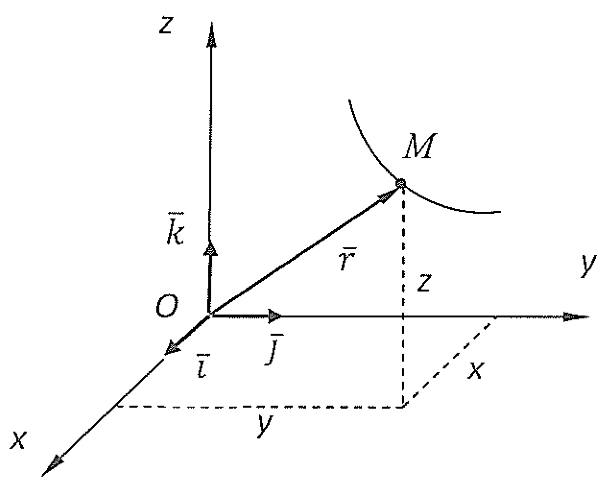


Рис. 1

Координатный способ задания движения точки

Выберем начало декартовых координат в начале радиус-вектора $\bar{r}$, в точке O. Координаты точки M (конец $\bar{r}$) соответственно равны проекциям $\bar{r}$ на оси координат $r_x = x,\ r_y = y,\ r_z = z$. Введём единичные векторы $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$ осей координат. Тогда радиус вектор $\bar{r}$, как и всякий другой вектор, можно записать в виде

$$\bar{r} = r_x\bar{\imath} + r_y\bar{\jmath} + r_z\bar{k}.$$

Положение точки определяется тремя уравнениями движения в координатном виде:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \qquad (2)$$

Уравнения (2) представляют собой координатный способ задания движения точки. Если точка движется в плоскости, то её движение описывается двумя уравнениями, если движение точки прямолинейное, то получаем одно уравнение движения.

Естественный способ задания движения точки

Если известна траектория точки, начало отсчёта, направление отсчёта и зависимость дуговой координаты от времени

$$\overset{\frown}{\mathrm{OM}} = s(t), \qquad (3)$$

то уравнение (3) представляет собой естественный способ задания движения точки. В этом случае с траекторией точки связывают естественный координатный базис: единичные векторы касательной - $\bar{\tau}$, главной нормали $\bar{\boldsymbol{n}}$ и бинормали $\bar{\boldsymbol{b}}$ к траектории (рис. 2).

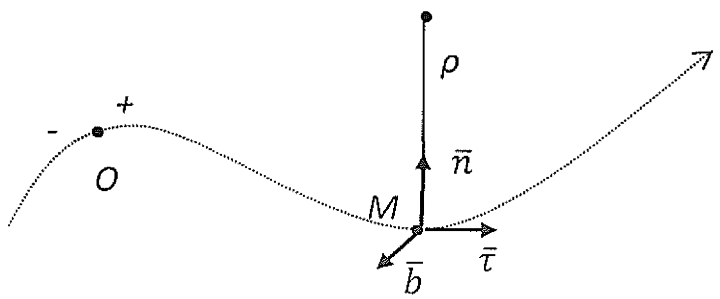


Рис. 2

Начало координат находится в точке M и движется вместе с точкой по траектории, ось τ направлена по касательной к траектории в сторону движения, ось n направлена перпендикулярно касательной внутрь кривой, ось b – перпендикулярна плоскости $\boldsymbol{\tau}\ \boldsymbol{n}$.

СКОРОСТЬ ТОЧКИ

Одной из основных кинематических характеристик движения материальной точки является скорость. ***Скорость*** – это векторная величина, отражающая быстроту изменения положения точки в пространстве. Рассмотрим определение скорости точки при различных способах задания движения.

Векторный способ задания движения точки

Как известно, скорость точки – это пространственно-временная мера движения, характеризующая изменение положения точки в данное мгновение в данной системе отсчета, выражающаяся пределом отношения элементарного перемещения к соответствующему промежутку времени, т. е. первой геометрической производной от радиус-вектора по скалярному аргументу – времени

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения точки (рис.3).

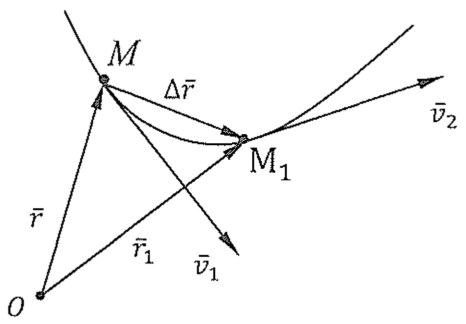


Рис. 3

Всякую кривую, являющуюся геометрическим местом концов переменного вектора, выходящего из одной точки и выраженного функцией времени, называют ***годографом вектора***. Понятие и термин «годограф» (hodograph) в науку введены Гамильтоном (1846 г).

Отметим несколько последовательных положений M_1, M_2, M_3, ... точки на её траектории и векторы скорости точки в этих положениях (рис. 4). Перенесём векторы скоростей, не изменяя их величин и направлений, в точку O. Если это сделать для всех положений точки на траектории, то концы векторов скоростей расположатся на некоторой непрерывной линии AB – годографе скорости (рис. 5). Годографом скорости называют геометрическое место концов векторов скорости, проведённых из одного полюса, для всех положений точки на траектории.

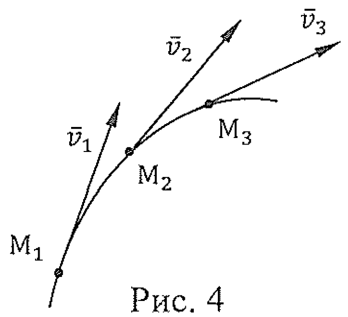


Рис. 4

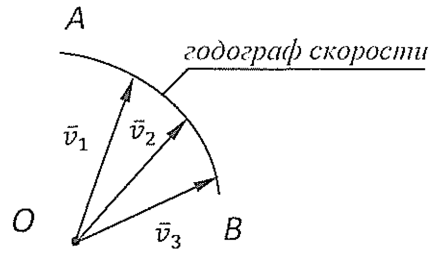


Рис. 5

Таким образом, годограф даёт наглядное геометрическое представление о том, как изменяется со временем физическая величина, изображаемая переменным вектором.

Координатный способ задания движения точки

Координатный способ задания движения точки эквивалентен заданию её движения векторным способом, тогда

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{\imath} + \frac{dy}{dt}\bar{\jmath} + \frac{dz}{dt}\bar{k}.$$

$$\bar{v} = v_x\bar{\imath} + v_y\bar{\jmath} + v_z\bar{k}.$$

Следовательно,

$$v_x = \frac{dx}{dt}\,; \qquad v_y = \frac{dy}{dt}\,; \qquad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{4}$$

Итак, проекции вектора скорости точки на неподвижные оси координат равны первым производным по времени от соответствующих координат точки – уравнения (4).

Модуль вектора скорости можно найти через его проекции по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Направление вектора скорости определяется направляющими косинусами:

$$cos(\widehat{\bar{v}x}) = \frac{v_x}{v}; \quad cos(\widehat{\bar{v}y}) = \frac{v_y}{v}\,; \quad cos(\widehat{\bar{v}z}) = \frac{v_z}{v}.$$

Естественный способ задания движения точки

По определению скорость точки направлена по касательной к траектории (рис. 6), а её алгебраическая величина определяется формулой

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{5}$$

Единица изменения скорости: [м/с].

Если точка движется в сторону увеличения криволинейной координаты s, то $ds > 0$, и, следовательно $v > 0$, а в противном случае $ds < 0$ и $v < 0$.

Движение точки называют равномерным, если величина скорости постоянна

$$v = \frac{ds}{dt} = const.$$

В противном случае движение называется неравномерным.

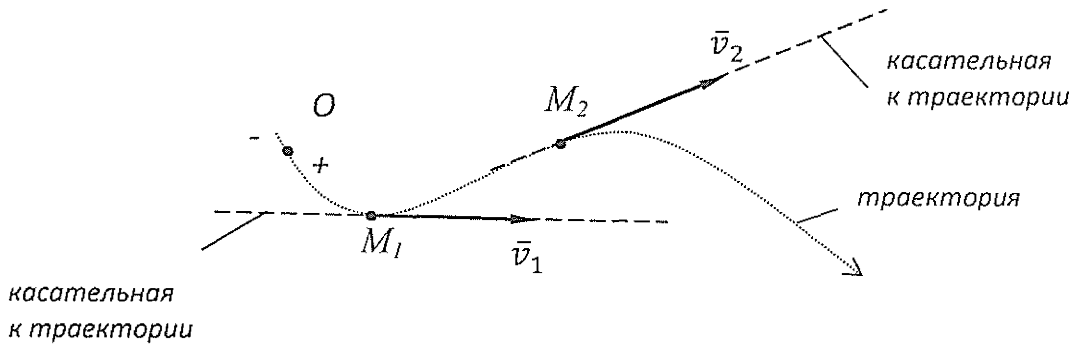


Рис. 6

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

При изучении движения необходимо знать, как быстро меняется скорость по величине и направлению. Векторная величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости с течением времени, называется ускорением. Ускорение точки, так же как её скорость, в зависимости от задания движения выражается следующими способами.

Векторный способ задания движения точки

Пусть за промежуток времени Δt скорость изменилась на величину $\Delta\bar{v}$, тогда

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt},$$

т.е. ускорением точки называют вектор $\bar{a}$, равный первой производной от вектора скорости точки по времени. Единица изменения ускорения: [м/с^2].

Вектор ускорения направлен по касательной к годографу скорости (рис. 7).

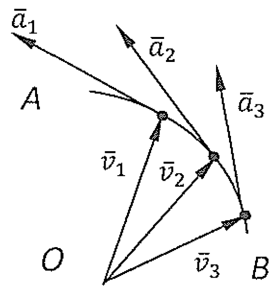


Рис. 7

Координатный способ задания движения точки

В этом случае заданы координаты как функции от времени (2)

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

Так как скорости можно разложить на составляющие вдоль координатных осей, то после дифференцирования по времени получим

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\bar{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\bar{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\bar{k}.$$

Отсюда

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}; \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Так как производная от производной есть вторая производная, то, учитывая (4), получим

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}; \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (6)$$

Проекции вектора ускорения точки на неподвижные оси координат равны вторым производным по времени от соответствующих координат точки (6). Модуль и направление вектора ускорения точки определяем по формулам

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$cos(\widehat{\bar{a}x}) = \frac{a_x}{a}; \quad cos(\widehat{\bar{a}y}) = \frac{a_y}{a}; \quad cos(\widehat{\bar{a}z}) = \frac{a_z}{a}.$$

Естественный способ задания движения точки

Пусть точка A (рис. 8, а) движется по какой-либо криволинейной траектории и за время Δt переходит из положения A_1 в положение A_2. Расстояние, пройденное точкой, представляет собой дугу Δs. В положении A_1 точка имела скорость $\bar{v}_1$, а в положении A_2 – скорость $\bar{v}_2$. Геометрическая разность скоростей изображена вектором $\Delta\bar{v}$. Скорость точки при перемещении её из положения A_1 в положение A_2 изменилась и по величине, и по направлению, тогда истинное ускорение точки

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Найденное ускорение характеризует изменение численного значения скорости и её направления. Для удобства ускорение раскладывают на взаимно перпендикулярные составляющие по касательной и нормали к траектории движения (рис. 8, б)

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau.$$

Вектор касательного (тангенциального) ускорения точки $\bar{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории, а его модуль равен абсолютному значению производной от величины скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \qquad (7)$$

Касательная составляющая ускорения характеризует изменение величины скорости. При ускоренном движении точки знаки скорости и касательного ускорения одинаковы и их векторы направлены в одну сторону (рис. 10, б). При замедленном движении – знаки разные, а векторы противоположны (рис. 10 в).

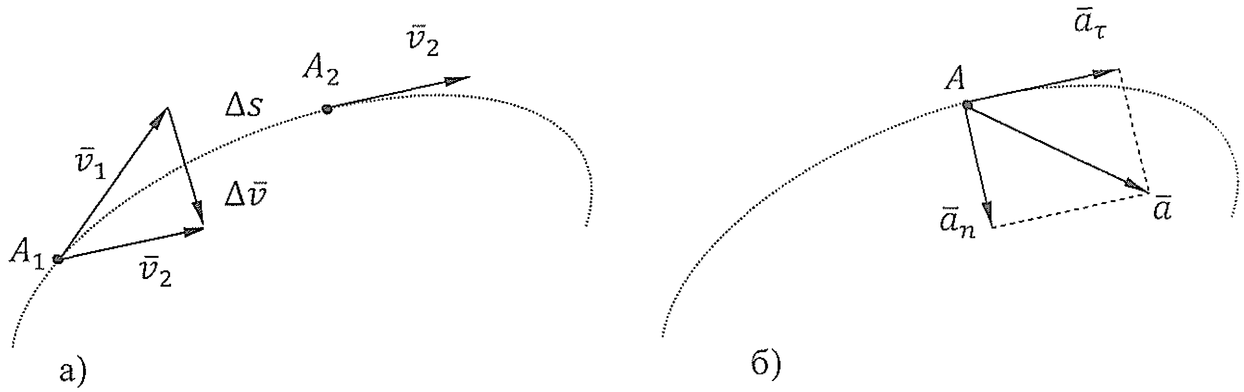


Рис. 8

Вектор нормального ускорения $\bar{a}_n$ направлен по нормали (перпендикуляру) к кривой в сторону вогнутости траектории. Модуль вектора нормального ускорения равен отношению квадрата величины скорости точки к радиусу кривизны траектории;

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (8)$$

Нормальная составляющая ускорения характеризует изменение направления вектора скорости. Напомним, что для прямой в любой её точке радиус кривизны равен бесконечности, поэтому нормальная составляющая ускорения $\bar{a}_n$ при прямолинейном движении равно нулю.

Составляющие $\bar{a}_\tau$ и $\bar{a}_n$ взаимно перпендикулярны, а величина полного ускорения точки определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Легко можно установить ***связь естественного способа задания движения с координатным***. Для этого модуль скорости точки, найденный координатным способом задания движения

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

подставим в формулу (7) и получим касательное ускорение,

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v};$$

а затем нормальное ускорение $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$ и радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}.$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Прямолинейное движение

1. *Равномерное прямолинейное движение* характеризуется тем, что скорость движения точки A постоянна (рис. 9, а), а радиус кривизны траектории у прямой равен бесконечности. В этом случае касательное и нормальное ускорения равны нулю.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0; \qquad a_n = \frac{v^2}{\infty} = 0.$$

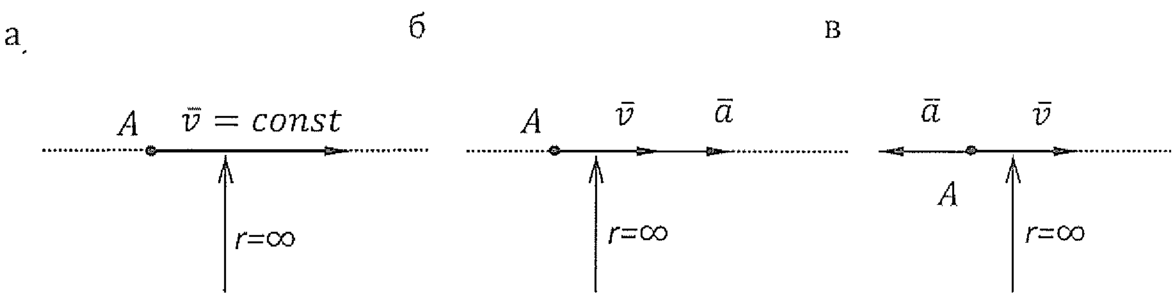


Рис. 9

2. *Неравномерное прямолинейное движение* характеризуется тем, что численное значение скорости движения точки изменяется, а радиус кривизны траектории движения равен бесконечности (рис. 9, б, в). Поэтому касательное ускорение здесь не равно нулю, а нормальное равно нулю.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \neq 0; \qquad a_n = \frac{v^2}{\infty} = 0.$$

При ***ускоренном движении*** точки (рис. 9, б) векторы скорости $\overline{v}$ и ускорения $\overline{a}$ совпадают по направлению, а при ***замедленном движении*** – противоположны (рис. 9, в).

Криволинейное движение

1. *Равномерное криволинейное движение* характеризуется тем, что численное значение скорости движения точки постоянно, а вектор скорости меняется лишь по направлению (рис. 10, а). В этом случае касательное ускорение равно нулю, так как $\Delta v = 0$, а нормальное ускорение не равно нулю, так как r – конечная величина.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0; \qquad\qquad a_n = \frac{v^2}{r} \neq 0.$$

2. Неравномерное криволинейное движение характеризуется тем, что численное значение скорости движения точки изменяется, а радиус кривизны траектории её движения – конечная величина (рис. 10, б, в). В этом случае

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \neq 0; \qquad\qquad a_n = \frac{v^2}{r} \neq 0.$$

Когда величина касательного ускорения постоянна, движение точки называется ***равнопеременным.***

Отметим также, что при ***ускоренном движении*** точки (рис. 10, б) векторы скорости $\bar{v}$ и касательного ускорения $\bar{a}_\tau$ совпадают по направлению, а при ***замедленном движении*** – противоположны (рис. 10, в).

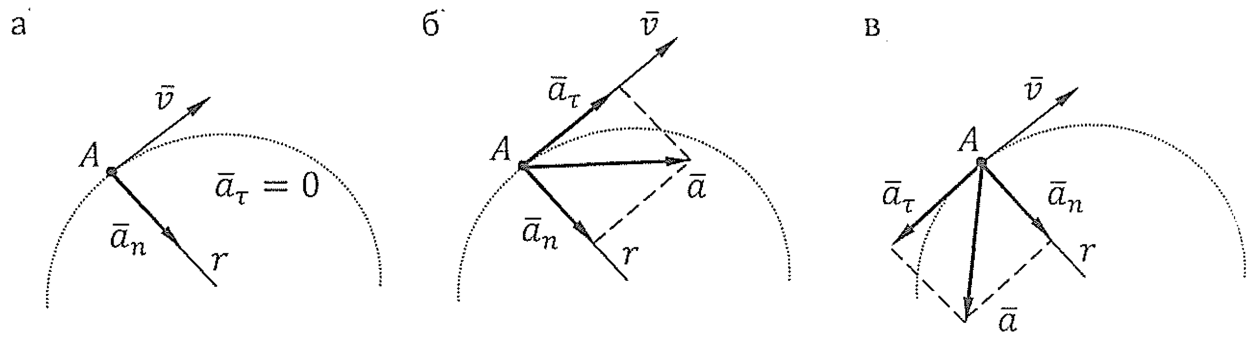


Рис. 10

Задача 1

Точка M движется по дуге окружности R = 48 см по закону AM=S = $4\pi t^2$ (S в метрах, t в секундах). Определить скорость и ускорение точки M в момент времени t=2 с.

<u>Решение.</u> Движение точки M задано естественным способом. Начало движения – точка A, задано положительное и отрицательное направление движения (рис. 11, а).

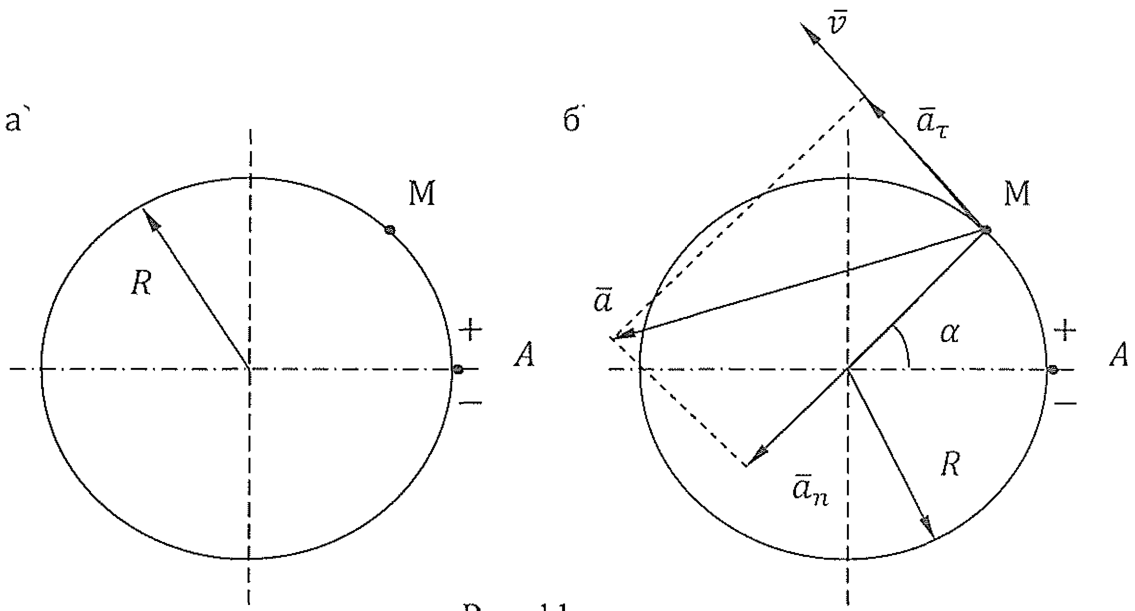


Рис. 11

Определим положение точки M через 2 секунды после начала движения с помощью угла α, который опирается на дугу $\overset{\frown}{AM}$.

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AM}}{R} = \frac{4\pi 4}{48} = \frac{\pi}{3} = 60^0.$$

Отложим от точки A угол $\alpha = 60^0$ в положительном направлении движения и отметим точку M (рис. 11, б).

Определим скорость точки по формуле (5)

$$v = \frac{ds}{dt} = 8\pi t.$$

При $t=2c$

$$v = 8 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 50{,}24 \text{ см/с}.$$

Отложим вектор скорости по касательной к траектории в сторону положительного направления движения.

Определим ускорение точки M

$$\bar a = \bar a_n + \bar a_\tau,$$

где ускорение нормальное определим по формуле (8)

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{50{,}24^2}{48} = 52{,}58 \quad \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Направим вектор нормального ускорения по радиусу кривизны внутрь окружности.

Касательное ускорение определим по формуле (7)

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 8\pi,$$

При t=2с $\qquad a_\tau = 8 \cdot 3{,}14 = 25{,}12$ см/с^2.

Вектор касательного ускорения отложим по касательной к траектории в сторону положительного направления движения, точка движется ускоренно.

Модуль полного ускорения определим по теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{52{,}58^2 + 25{,}12^2} = 58{,}27\text{см/с}^2.$$

Вектор полного ускорения точки M найдём как геометрическую сумму векторов нормального и касательного ускорений.

Ответ: $v = 50{,}24$ см$/c$, $a = 58{,}27$см/с^2.

Задача 2

Точка М движется по закону $x = 2\,sin\frac{\pi t}{3} - 4, \qquad y = 5 - 3\,cos\frac{\pi t}{3}$.
Определить и построить: траекторию движения точки, скорость, полное, касательное и нормальное ускорения точки, радиус кривизны траектории в момент времени = 1 с.

Решение: движение точки задано координатным способом.

Определим траекторию движения, для этого исключим из уравнений движения переменную – время t,

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2} = sin\dfrac{\pi t}{3} \\ \dfrac{y-5}{3} = -cos\dfrac{\pi t}{3} \end{cases}$$

Возведём в квадрат оба уравнения и сложим их:

$$\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-5}{2}\right)^2 = sin^2\frac{\pi t}{3} + cos^2\frac{\pi t}{3}.$$

Учтём, что $$sin^2\frac{\pi t}{3} + cos^2\frac{\pi t}{3} = 1,$$

тогда видно, что уравнением траектории является эллипс:

$$\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-5}{2}\right)^2 = 1.$$

Координаты центра эллипса (-4; 5) (рис. 12).

Определим начальное положение точки *M*, подставив время *t =0 с* в уравнения движения

$$x = 2sin\frac{\pi \cdot 0}{3} - 4 = -4м;$$

$$y = 5 - 3cos\frac{\pi \cdot 0}{3} = 2м.$$

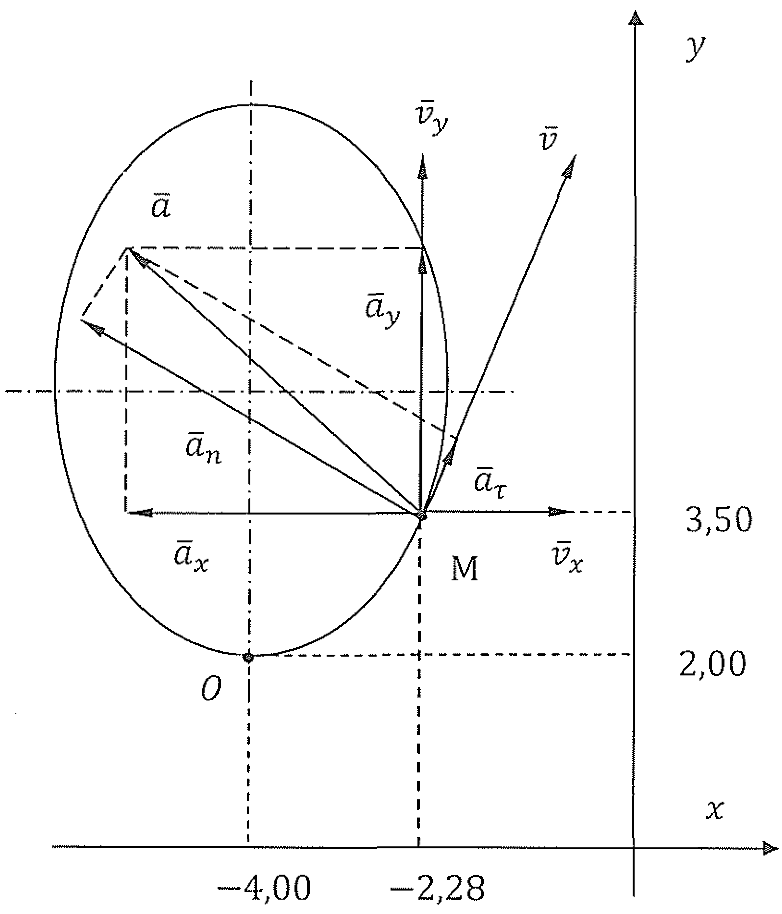


Рис. 12

Определим положение точки *М*, подставив время *t =1 с* в уравнения движения

$$x = 2sin\frac{\pi \cdot 1}{3} - 4 = -2{,}28 \text{ м};$$

$$y = 5 - 3cos\frac{\pi \cdot 1}{3} = 3{,}50 \text{ м}.$$

Определим скорость точки *М*. Зная уравнения координат, определим две составляющие скорости:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{3} cos\frac{\pi t}{3}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{3\pi}{3} sin\frac{\pi t}{3}.$$

При времени t=1

$$v_x = \frac{2\pi}{3} cos\frac{\pi \cdot 1}{3} = 1{,}05\frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{3\pi}{3} sin\frac{\pi t}{3} = 2{,}70\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Модуль скорости $\qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1{,}05^2 + 2{,}70^2} = 2{,}90 \text{ м/с}.$

Построим векторы скоростей, при этом составляющие скоростей параллельны соответствующим осям. Если знак положительный, то составляющая направлена так же, как ось, если отрицательный – в противоположную сторону.

Определим ускорения точки *М*. Зная уравнения скоростей, определим две составляющие ускорения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{2\pi^2}{9} sin\frac{\pi \cdot t}{3}; \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\pi^2}{3} cos\frac{\pi \cdot t}{3}.$$

При t=1с

$$a_x = -\frac{2\pi^2}{9} sin\frac{\pi \cdot 1}{3} = -1{,}88\frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \qquad a_y = \frac{\pi^2}{3} cos\frac{\pi \cdot 1}{3} = 1{,}64\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Модуль ускорения $\quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-1{,}88)^2 + 1{,}64} = 2{,}50 \text{ м/с}^2.$

Построим векторы ускорений, при этом составляющие ускорения параллельны соответствующим осям. Если знак положительный, то составляющая направлена так же, как ось, если отрицательный – в противоположную сторону.

Определим касательное и нормальное ускорения

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} = \frac{1{,}05 \cdot (-1{,}88) + 2{,}70 \cdot 1{,}64}{2{,}90} = 0{,}85\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_n = \sqrt{2{,}50^2 - 0{,}85^2} = 2{,}35\ \text{м/с}^2.$$

Построим найденные ускорения. Касательное ускорение направлено по скорости, так как движение ускоренное, а вектор нормального ускорения направлен перпендикулярно касательному ускорению внутрь эллипса.

Определим радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{2{,}90^2}{2{,}35} = 3{,}58\ \text{м}.$$

<u>Ответ</u>: уравнение траектории – эллипс

$$\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-5}{2}\right)^2 = 1;$$

скорость точки $v = 2{,}90$ м/с, полное ускорение $a = 2{,}50$ м/с^2;
тангенциальное ускорение $a_\tau = 0{,}85$ м/с^2;
нормальное ускорение $a_n = 2{,}35$ м/с^2;
радиус кривизны траектории $\rho = 3{,}58$ м.

Тесты для самоконтроля

1. Какое из названных положений является ложным?

а) Точка движется по криволинейной траектории с переменной по модулю и направлению скоростью;

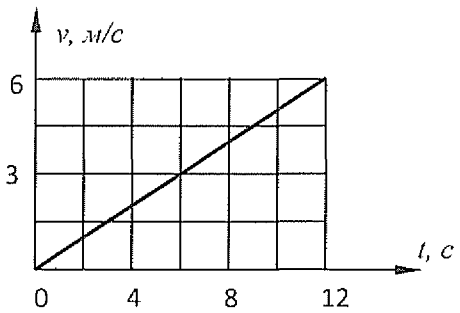
б) точка движется по дуге окружности с постоянной по модулю скоростью;

в) точка движется по дуге окружности с постоянной по направлению скоростью;

г) точка движется по прямой с постоянной по направлению скоростью.

2. Выбрать верный ответ

Дан график скорости прямолинейного движения точки $v=f(t)$. Определить ускорение точки в момент времени $t = 12$ *с*.



а) 6 *м/с*^{2};

б) 0 *м/с*^{2};

в) 2 *м/с*^{2};

г) $0{,}5$ *м/с*^{2}.

3. Выберите характер движения точки, при котором постоянны модуль скорости и модуль её ускорения:

а) точка движется равномерно по окружности;
б) точка движется равноускоренно по прямолинейной траектории;
в) точка движется равномерно по эллипсу;
г) точка движется равноускоренно по окружности.

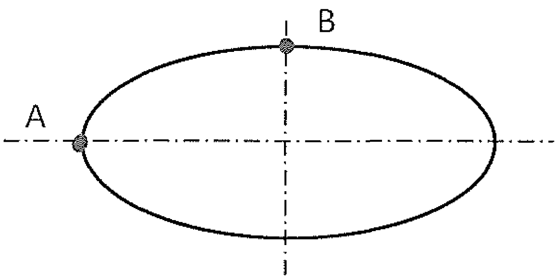
4. Выбрать верный ответ

Точка движется по окружности, радиус которой $R = 50$ *м*, со скоростью $V = 2 \cdot t$. Определить модуль полного ускорения точки в момент времени $t = 5$ *с*.

а) 3 *м/с*^{2}; *б)* $\sqrt{3}$ *м/с*^{2}; *в)* $2\sqrt{2}$ *м/с*^{2}; *г)* 5 *м/с*^{2}.

5. Выберите верное утверждение

Точка движется равномерно по эллипсу.



а) $a_A > a_B$; *б)* $a_A < a_B$;

в) $a_A = a_B$; *г)* $a_A = a_B = 0$.

6. Выбрать верный ответ

Точка движется так, что в любой момент времени нормальное ускорение a_n = 8 м/с^2. Какова траектория точки и чему равен модуль касательного ускорения?

а) траектория – прямая, $a_\tau = 0$ *м/с*^{2}*;*

б) траектория – окружность, $a_\tau = 0$ *м/с*^{2}*;*

в) траектория – окружность $a_\tau = \sqrt{8}$ *м/с*^{2}*;*

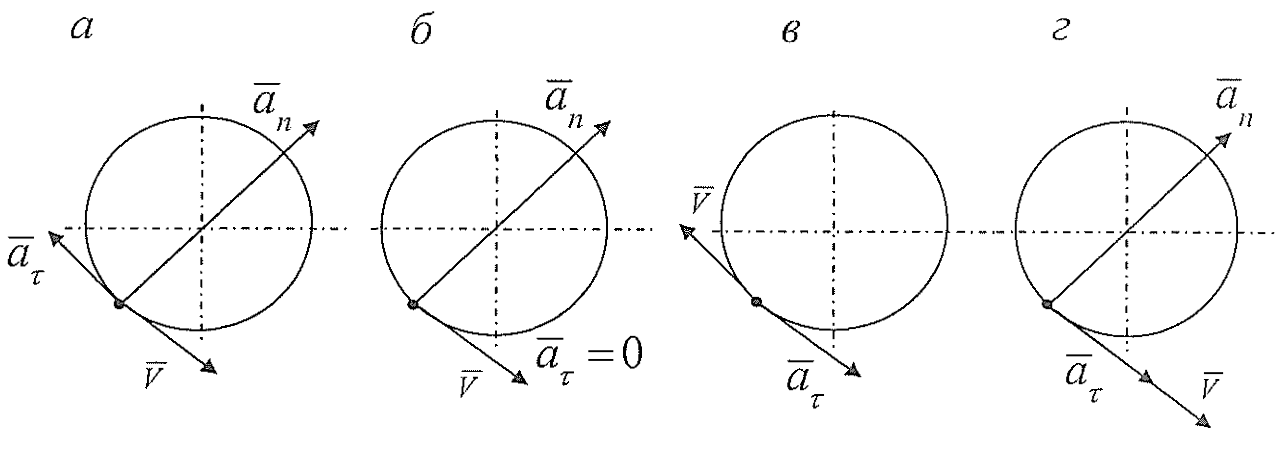
г) траектория – прямая, $a_\tau = 8$ *м/с*^{2}*.*

7. Выбрать верное соответствие

На рисунках *а-г* показаны векторы скорости, нормального и касательного ускорений точки для разных случаев её движения по окружности. Указать какому рисунку соответствует характер движения

1) ускоренного; *2) равномерного;* *3) замедленного;*

4) не соответствует условию задачи.



8. Выбрать верный ответ

По окружности радиусом $R = 16$ *м* движется точка со скоростью $v = 4t$. Определить угол в градусах между вектором её ускорения и вектором скорости в момент времени $t = 2$ *с*?

а) 45^0*;* *б)* 30^0*;* *в)* 60^0*;* *г)* 90^0*.*

9. Выбрать верный ответ

В каком случае движение задано естественным способом?

а) $\bar{r} = 3t\bar{i} + 2t^3\bar{j} - t^2\bar{k}$;

б) $x = 5\,sin(3t)$, $y = 3 - cos\,(4t)$;

в) $x = t^2 + t - 2$, $y = 0{,}5t^2 + 3t + 1$;

г) $S = 3t^2 - 7t + 11$?

10. Выбрать верный ответ

Как должна двигаться точка, чтобы её полное ускорение равнялось касательному?

а) равномерно по криволинейной траектории;

б) ускоренно по прямолинейной траектории;

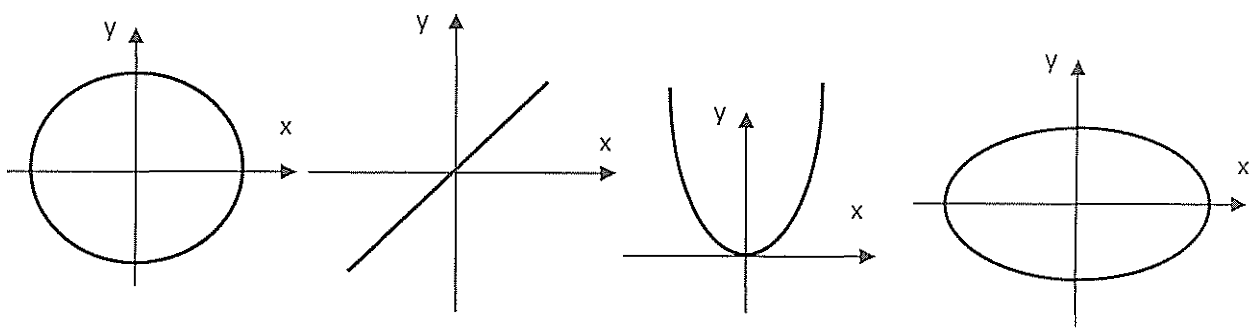
в) ускоренно по окружности;

г) замедленно по криволинейной траектории.

11. Выбрать верный ответ

Какой график соответствует уравнению траектории движения точки, если заданы её уравнения движения:

$$x = 5\,sin(\pi t/3)\,,\quad y = 5cos\,(\pi t/3);$$



а *б* *в* *г*

12. Выбрать верный ответ

Если движение точки задано уравнениями:

$$x = t^2 + t - 2 \ (м), \qquad y = 0{,}5t^2 + 3t + 1 \ (м),$$

то ее тангенциальное ускорение в момент времени $t_1 = 1 с$ *равно*

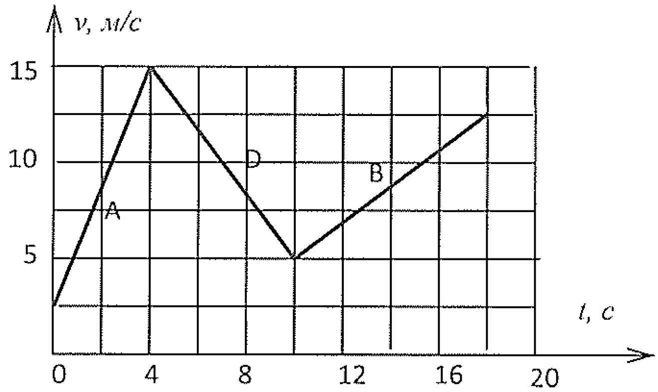
а) $a_\tau = 0{,}08 \ м / с^2$; б) $a_\tau = 0{,}4 \ м / с^2$;

в) $a_\tau = 2 \ м / с^2$; г) $a_\tau = \sqrt{5} \ м / с^2$.

13. Выбрать верный ответ

Дан график изменения скорости точки *v= f(t),* имеющий разные ускорения на отдельных участках прямолинейного движения.

Значение *a = 1,8 м/с²* соответствует ускорению на участке



а A; *б D;* *в B;*

г) не соответствует ни одному из участков.

14. Выбрать верный ответ

Как должна двигаться точка, чтобы её полное ускорение равнялось нормальному?

а) равномерно по криволинейной траектории;

б) ускоренно по прямолинейной траектории;

в) ускоренно по окружности;

г) замедленно по прямой.

15. Выбрать верный ответ

Заданы уравнения движения точки:

$$x = 2 - 4\,sin(\pi t/6)\,, \quad y = 5cos\,(\pi t/6) - 8;$$

Траекторией движения точки является

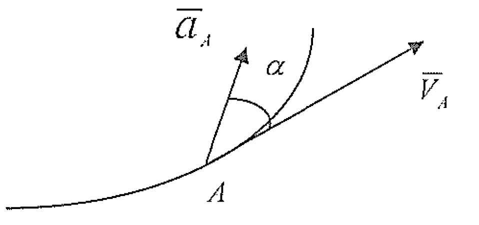
а) парабола; *б) окружность;*

в) эллипс; *г) синусоида.*

16. Выбрать верный ответ

Точка движется по кривой, имея в данный момент времени:

$V_A = 10$ *м/с*
$a_A = 8$ *м/с*^{2}
$\alpha = 30^0$
Найти радиус кривизны траектории.



а) 20 м; *б) 25 м;* *в) 1,25 м;* *г) 2,5 м.*

17. Выбрать верный ответ

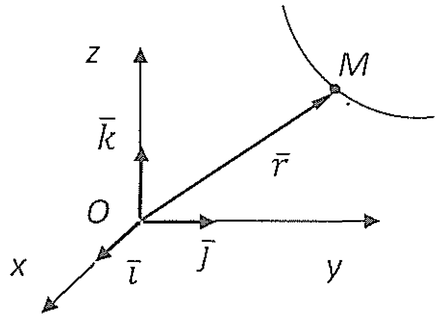
Материальная точка М движется по закону $\bar{r} = 3t\bar{\imath} + 2e^{3t}\bar{\jmath} - t^2\bar{k}$, тогда её ускорение будет направлено:

а) параллельно оси OZ;

б) перпендикулярно плоскости OY;

в) параллельно плоскости XOY ;

г) параллельно плоскости YOZ.



18. Выбрать верный ответ

Точка движется по окружности радиуса R = 0,5 м с постоянным касательным ускорением a_τ = 2 м/с^2 из состояния покоя. Определить нормальное ускорение a_n точки в момент времени t = 1 с.

а) 0,5 м/с^2; *б) 8 м/с^2;* *в) $2\sqrt{2}$ м/с^2;* *г) 4 м/с^2.*

19. Выбрать верное соответствие

1. Касательное ускорение характеризует
2. Нормальное ускорение характеризует
3. Ускорение характеризует
4. Скорость характеризует

а) быстроту изменения пройденного пути точки;
б) быстроту изменения направления вектора скорости;
в) быстроту изменения скорости точки;
г) быстроту изменения модуля скорости.

20. Выбрать верное соответствие

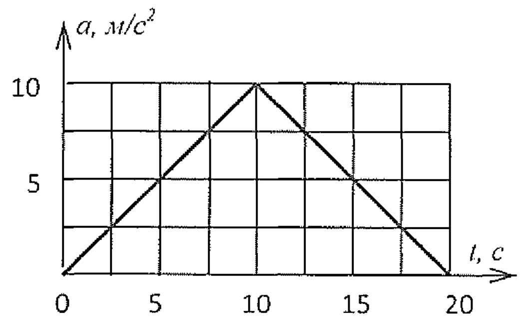
Точка движется по прямой из состояния покоя. Дан график изменения ускорения точки a = f(t). Определить скорость точки в момент времени t = 20 с.

а) 50м/с;

б) 125м/с;

в) 25 м/с;

г) 100 м/с.



ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Все движения твёрдого тела можно разбить на пять видов: поступательное, вращательное, плоскопараллельное, сферическое и движение свободного тела. Простейшими являются два - поступательное и вращательное. Остальные виды движения тела сложные, в каждый момент времени они могут быть составлены из поступательного и вращательного движений.

Важной кинематической характеристикой твёрдого тела является его ***число степеней свободы*** – это минимальное число независимых параметров, позволяющих однозначно определить положение твёрдого тела в пространстве и времени. Положение твёрдого тела в пространстве можно считать определённым, если известны координаты трёх его точек, не лежащих на одной прямой. Девять координат этих точек связаны тремя уравнениями связей, обеспечивающих неизменность расстояний между ними. Таким образом, свободное твёрдое тело имеет шесть степеней свободы.

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Поступательным движением твёрдого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведённая на теле, во время движения остаётся параллельной своему начальному положению. Примерами поступательного движения являются движение поршня паровой машины, педалей велосипеда, перемещающегося прямолинейно.

Т е о р е м а. При поступательном движении твёрдого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые (по величине и направлению) скорости и ускорения.

Выберем на теле две произвольные точки A и B и соединим их прямым отрезком (рис. 13). Построим радиус-вектор точек A и B. Очевидно, что

$$\bar{r}_A = \bar{r}_B + \overline{BA}.$$

Так как вектор $\overline{BA} = const$ (по определению абсолютно твёрдого тела и по определению поступательного движения), то траектории точек B и A совпадут при наложении их друг на друга.

Дифференцируя данное равенство по времени, и с учётом того, что $\overline{BA} = const$, значит

$$\frac{d\overline{BA}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{a}_A, \qquad \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{v}_B,$$

находим

$$\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \frac{d\bar{r}_B}{dt} + \frac{d\overline{BA}}{dt} = \frac{d\bar{r}_B}{dt}; \qquad \bar{v}_A = \bar{v}_B.$$

Возьмём ещё одну производную по времени, получим ускорение

$$\frac{d\bar{v}_A}{dt} = \frac{d\bar{v}_B}{dt}; \quad \bar{a}_A = \bar{a}_B.$$

Доказано, что траектории, скорости и ускорения точек A и B, а значит и любых других точек данного тела равны в любой момент времени.

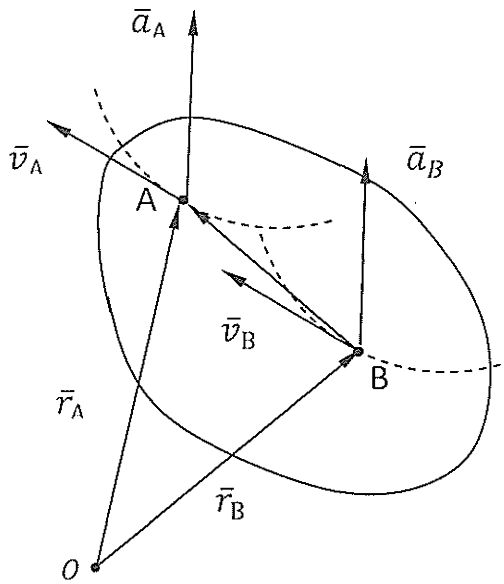


Рис. 13

Отсюда следует, что поступательное движение тела определено, если известен закон движения хотя бы одной точки. Задача кинематики поступательного движения твёрдого тела сводится к задаче кинематики точки и все закономерности, полученные для точки, справедливы для поступательного движения твёрдого тела.

Таким образом, число степеней свободы твёрдого тела, совершающего поступательное движение в пространстве, равно числу степеней свободы материальной точки, движущейся произвольно, т.е. трём.

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Движение твёрдого тела относительно данной системы отсчёта называется вращательным вокруг неподвижной оси, если две его точки неподвижны в этой системе отчета. Прямая, соединяющая эти неподвижные точки, называется осью вращения.

Вращательное движение относится к одному из простейших видов движения.

Положение тела при вращении определяется углом поворота между неподвижной плоскостью (Пл.1) и плоскостью (Пл. 2), жестко связанной с телом (рис. 14). Уравнение вращательного движения имеет вид зависимости угла поворота от времени (9) и называется ***законом вращательного движения***

$$\varphi = \varphi(t). \tag{9}$$

Угол поворота измеряется в радианах (рад).

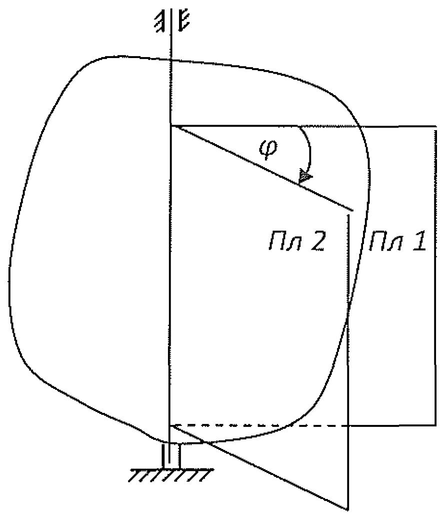


Рис. 14

Быстроту и направление вращения тела характеризует ***угловая скорость*** ω, равная первой производной по времени от угла поворота:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{10}$$

Единица измерения угловой скорости

$$\frac{\text{рад}}{\text{с}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\text{с}}, \quad \text{или} \quad \text{с}^{-1}.$$

Вектор угловой скорости направлен по оси вращения по правилу правого винта (правило правой руки) и является скользящим вектором (рис. 15).

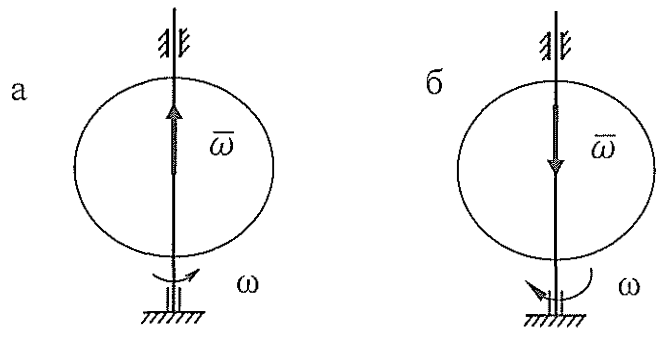


Рис. 15

Когда угловая скорость тела постоянна (ω=const), ***вращение – равномерное.*** Когда угловая скорость переменна, то тело вращается неравномерно. Изменение угловой скорости в единицу времени определяется ***угловым ускорением***

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt};$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (11)$$

Угловое ускорение тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота по времени (11).

Единица измерения угловой скорости

$$\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\text{с}^2}, \quad \text{или} \quad \text{с}^{-2}.$$

Вектор углового ускорения направлен по оси вращения по правилу правого винта (правило правой руки) и является скользящим вектором (рис. 16).

Если знаки угловой скорости и углового ускорения совпадают, вращение является ***ускоренным*** (рис. 16, б), если не совпадают – ***замедленным*** (рис. 16, а).

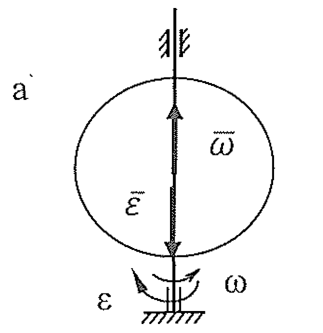


Рис. 16

Скорость точек вращающегося тела.

Если тело вращается вокруг оси, то его точки перемещаются по окружностям, радиусы которых равны кратчайшим расстояниям от точек до оси вращения.

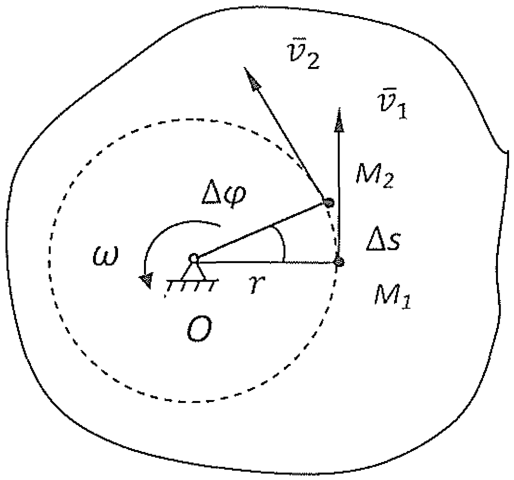


Рис. 17

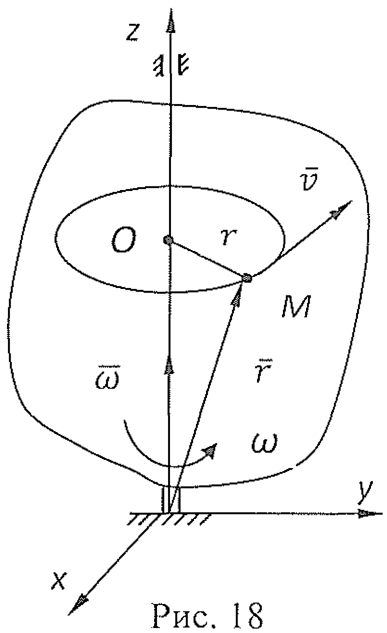


Рис. 18

За бесконечно малый промежуток времени dt происходит элементарный поворот тела на угол $d\varphi$ (рис. 17), при этом точка совершает элементарное перемещение по дуге окружности $ds=r{\cdot}d\varphi$. Модуль скорости, которую называют ***линейной*** или ***вращательной***, равен

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\varphi}{dt} = r\omega,$$

где r – радиус вращения, окончательно получим

$$v = r\omega. \tag{12}$$

Вектор скорости направлен перпендикулярно радиусу вращения, по касательной к траектории, в сторону угловой скорости.

Вектор скорости можно найти по формуле Эйлера (рис. 18)

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Ускорения точек вращающегося тела.

Так как при вращательном движении все точки тела описывают окружности, то ускорение любой точки раскладывается на две составляющие – нормальное и тангенциальное. При вращательном движении тела нормальное ускорение называют центростремительным $\bar{a}_{\text{цс}}$, а касательное – вращательным $\bar{a}_{\text{вр}}$. Таким образом, ускорение любой точки вращающегося тела определяют по формуле

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{цс}} + \bar{a}_{\text{вр}}. \qquad (13)$$

При этом ***центростремительное ускорение*** характеризует быстроту изменения линейной скорости точки по направлению и определяется по формуле

$$a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = \omega^2 \cdot r;$$

$$a_{\text{цс}} = \omega^2 \cdot r. \qquad (14)$$

Вращательное ускорение характеризует быстроту изменения численного значения линейной скорости и определяется как

$$a_{\text{вр}} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \varepsilon \cdot r;$$

$$a_{\text{вр}} = \varepsilon \cdot r. \qquad (15)$$

Модуль полного ускорения найдём по теореме Пифагора, по формуле

$$a = \sqrt{a_{\text{цс}}^2 + a_{\text{вр}}^2} = r \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Вектор центростремительного ускорения направлен по радиусу вращения к оси вращения. Вектор вращательного ускорения направлен перпендикулярно радиусу вращения, по касательной к траектории в сторону углового ускорения (рис. 19) .

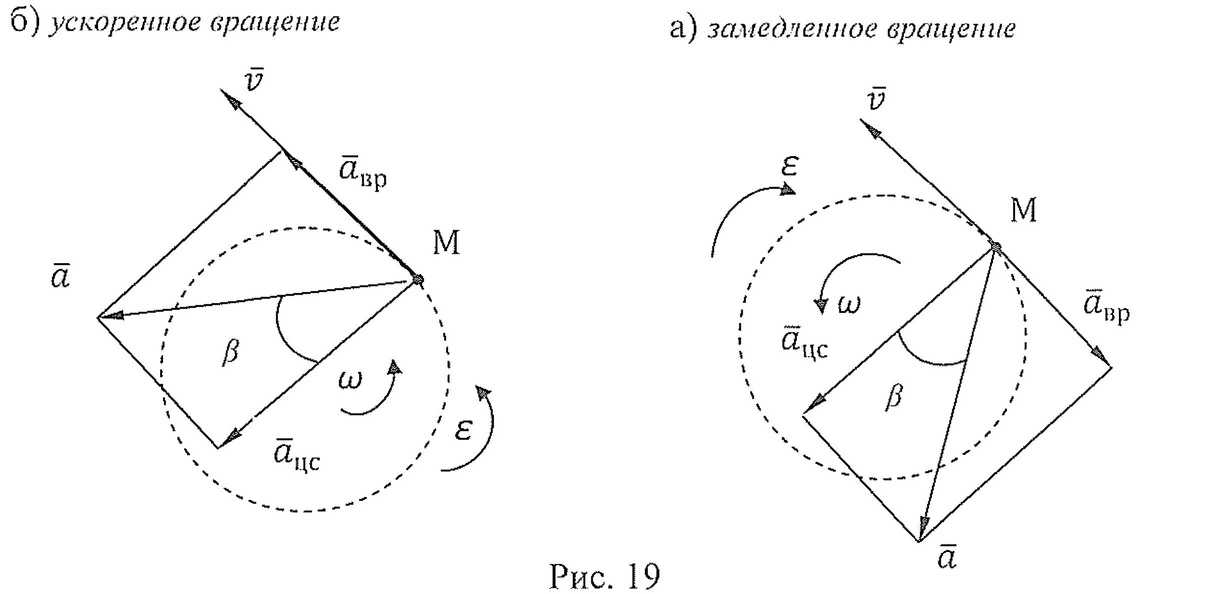


Рис. 19

Угол наклона β полного ускорения к направлению главной нормали не зависит от выбора точки

$$\beta = arctg\left(\frac{a_{вр}}{a_{цс}}\right) = arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right).$$

Из приведённых формул видно, что:

- скорость и ускорение точки тела при вращательном движении пропорциональны расстояниям до оси вращения;
- скорость точки перпендикулярна к радиусу окружности:
- ускорении точки отклонено от радиуса окружности на угол, не зависящий от выбора самой точки.

Положение твёрдого тела в пространстве определяется тремя произвольными точками, не лежащими на одной прямой. Выбрав в качестве двух точек – неподвижные (принадлежащие оси вращения) и добавив уравнения связи, получим, что вращательное движение вокруг неподвижной оси может быть описано одной независимой переменной – т.е. имеет одну степень свободы.

Способы передачи вращательного движения.

Передача вращательного движения от одного тела к другому может осуществляться за счёт силы трения непосредственным соприкосновением колёс, шкивов, закреплённых на валах – фрикционные передачи (рис. 21), при помощи гибкой связи – ремённые (рис. 20), при помощи пары зубчатых колёс – зубчатые передачи (рис. 21), существуют так же червячные передачи и др.

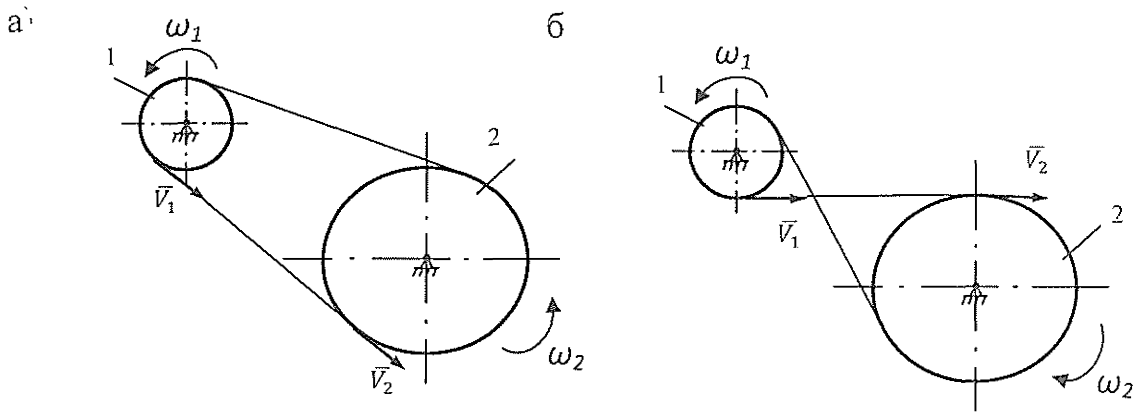


Рис. 20

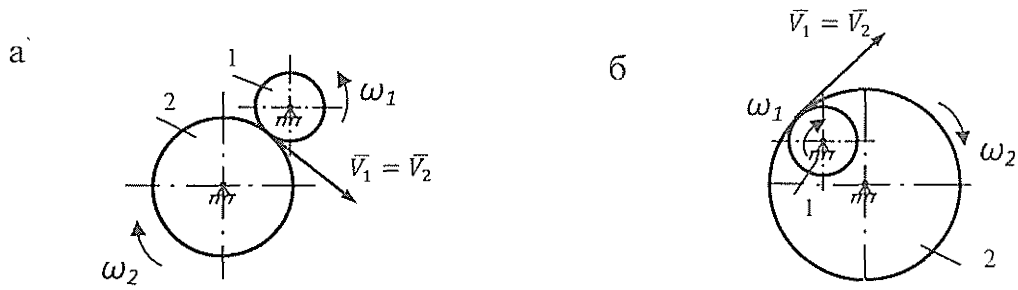


Рис. 21

Зубчатое зацепление может быть внешним (рис. 21, а), при котором направление вращения меняется и внутренним (рис. 21, б) – направление вращения не меняется.

Если передача движения осуществляется без проскальзывания, то линейные скорости на поверхности соприкасающихся шкивов, зубчатых колёс (рис. 21) и линейные скорости на ремне при ременной передачи (рис. 20) должны быть равны $v_1 = v_2$, значит

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2;$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

где d – диаметр колёс, n – число оборотов в минуту, r – радиусы колес, z – число зубьев колёс, ω - угловая скорость колёс.

Валы, шкивы, передающие вращение, называются ***ведущими,*** а воспринимающие вращение – ***ведомыми. Передаточным отношением*** i называют отношение угловой скорости ведущего вала к угловой скорости ведомого вала (без учёта проскальзывания)

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Задача 3

Уравнение вращательного движения прямоугольной пластины с заданными размерами относительно неподвижной оси: $\varphi = 10t - 4t^2$ *(рад) (рис. 22, а).*

Определить и показать на рисунке скорость и ускорение точки M в момент времени t=1с.

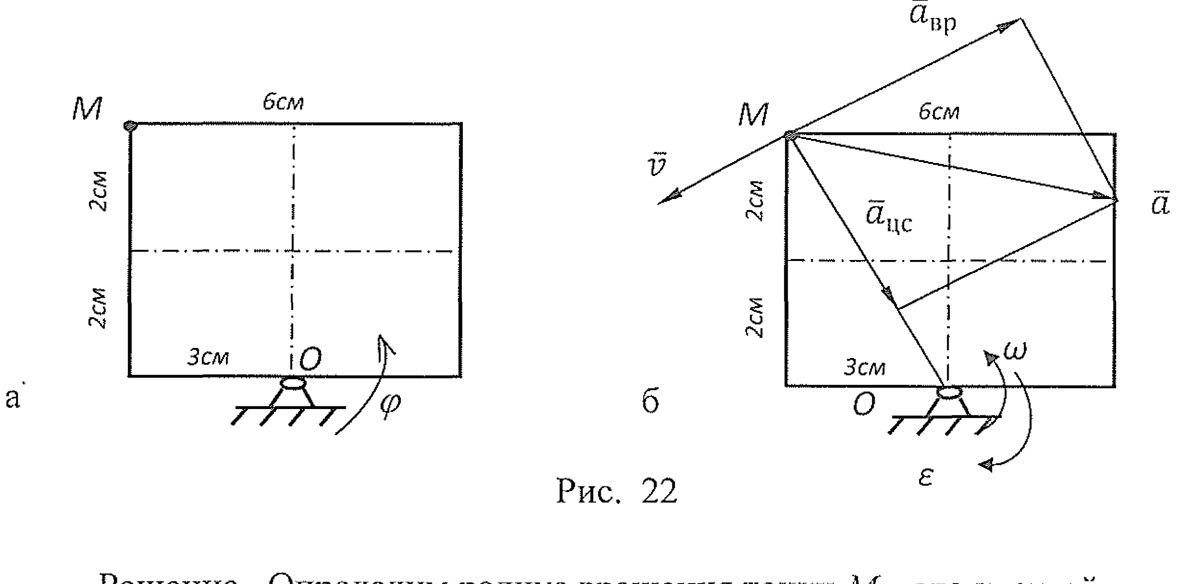


Рис. 22

<u>Решение.</u> Определим радиус вращения точки M – это кратчайшее расстояние от точки M до оси (точка O)

$$r = OM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ см.$$

Найдём угловую скорость и угловое ускорение пластины

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 10 - 8t.$$

При $t=1c$ значение угловой скорости $\omega = 2\ c^{-1}$.

Определим угловое ускорение пластины

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -8\ \text{с}^{-2}.$$

Так как знаки у угловой скорости и углового ускорения разные, то вращение пластины замедленное. Угловое ускорение направлено в сторону, противоположную угловой скорости (рис. 22, б).

Определим линейную скорость точки M

$$v = r \cdot \omega = 5 \cdot 2 = 10\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Вектор скорости направлен перпендикулярно радиусу вращения в сторону угловой скорости.

Найдём ускорение точки M, для этого определим составляющие ускорения

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{цс}} + \bar{a}_{\text{вр}}$$

$$a_{\text{цс}} = \omega^2 \cdot r = 2^2 \cdot 5 = 20\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2},$$

$$a_{\text{вр}} = \varepsilon \cdot r = 8 \cdot 5 = 40\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Центростремительное ускорение направим по радиусу вращения к оси (точке O), вращательное – перпендикулярно к центростремительному, в сторону углового ускорения.

Модуль ускорения точки M определим по формуле

$$a = \sqrt{a_{\text{цс}}^2 + a_{\text{вр}}^2} = \sqrt{20^2 + 40^2} = 44{,}72\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: линейная скорость точки M $\quad v = 10\frac{\text{м}}{\text{с}}$;

линейное ускорение точки M $\quad a = 44{,}72\ см/с^2$.

Задача 4

Один конец нити, перекинутой через блок, прикреплен к грузу 1, а другой намотан на обод малого колеса второго тела. Ступенчатые колеса 2 и 3 имеют зубчатую передачу, тела 3 и 4 – ременную передачу. К диску 4 жестко приварен стержень ОА (рис. 23).

Тело 1 движется по закону $x = 3t^2 - 5t + 7$. *Размеры звеньев даны в сантиметрах:* $R_2 = 20, r_2 = 5, R_3 = 16, r_3 = 8, R_4 = 10, OA = l = 15$.

Определить скорость $\bar{v}_A$ *и ускорение* $\bar{a}_A$ *точки А в момент времени* $t = 1$ *с.*

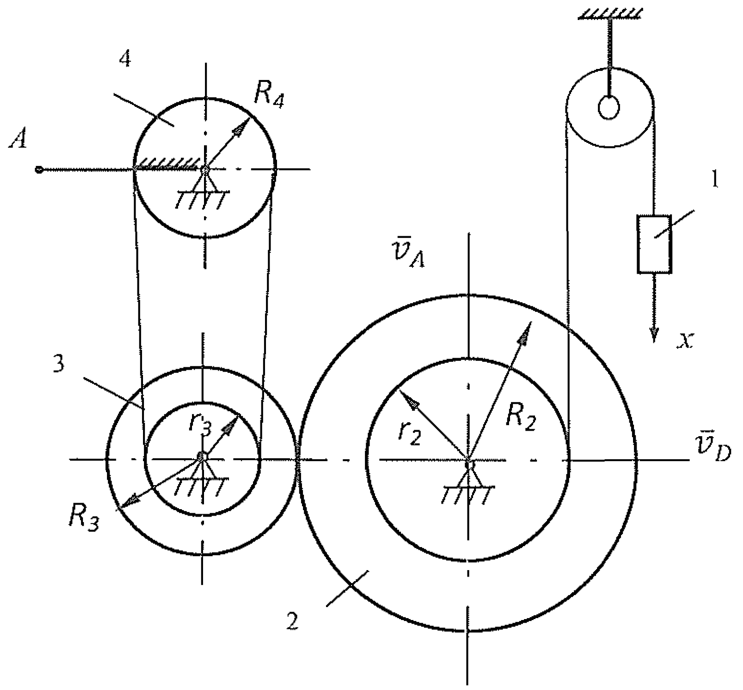


Рис. 23

Решение. Определим скорость груза. Так как тело 1 совершает поступательное прямолинейное движение по закону $x = 3t^2 - 5t + 7$, то производная от этой функции по времени является скоростью груза, то есть имеем:

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 6t - 5.$$

При $t = 1$ с скорость груза будет равна $v_1 = 1$ м/с. Так как значение скорости положительное, то направление скорости груза 1 совпадает с положительным направлением оси x.

Определим угловые скорости звеньев, совершающих вращательные движения вокруг неподвижных осей. Так как скорости всех точек нити, связывающей тела 1 и 2, численно равны, то $v_1 = v_B$. Зная линейную скорость любой точки тела, совершающего вращательное движение, а также радиус ее траектории, то можно найти угловую скорость тела 2

$$\omega_2 = \frac{v_B}{r_2} = \frac{6t-5}{r_2}.$$

Так как тела 2 и 3 находятся в зацеплении, то скорость точки зацепления K находится как скорость точки тел вращения 2 и 3:

$$v_K = \omega_2 R_2,\; v_K = \omega_3 R_3.$$

Отсюда следует обратная зависимость угловых скоростей колес, находящихся в зацеплении, от их радиусов:

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2}.$$

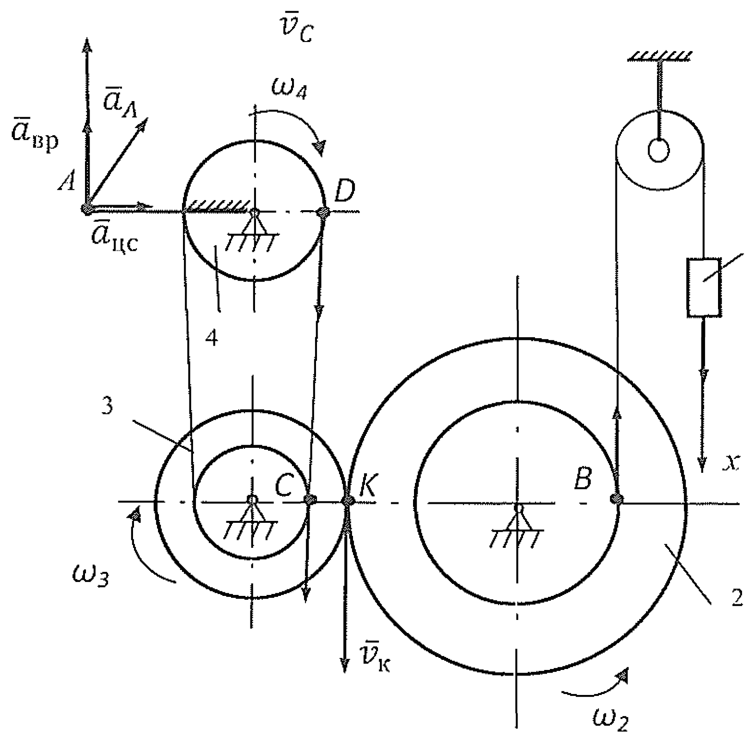


Рис. 24

Тогда угловая скорость колеса 3 определится по формуле

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3} = \frac{(6t-5)R_2}{r_2 R_3}.$$

Тела 3 и 4 связаны ременной передачей, поэтому скорости всех точек ремня численно одинаковы. А так как $v_C = v_D$, то имеют место следующие выкладки:

$$v_C = \omega_3 r_3, \quad v_D = \omega_4 R_4.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{R_4}{r_3} \to \omega_4 = \omega_3 \frac{r_3}{R_4} = \frac{(6t-5)R_2 r_3}{r_2 R_3 R_4}.$$

При $t = 1$ c угловая скорость звена 4 равна $\omega_4 = 0{,}2$ с$^{-1}$. Направление угловых скоростей определяется по направлению линейных скоростей точек ободов колес (рис. 24).

Найдём скорость точки A стержня OA. Так как стержень OA жестко прикреплен к диску 4, то он вращается с угловой скоростью $\omega_4 = 0{,}2$ с$^{-1}$. Следовательно,

$$v_A = \omega_4 l = 0{,}2 \cdot 15 = 3 \text{ см/с}.$$

Направление скорости точки A перпендикулярно стержню OA в сторону угловой скорости ω_4.

Определим ускорения точки A. Согласно теории кинематики вращательного движения тела, ускорение точки тела определяется по формуле

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{цс} + \bar{a}_A^{вр},$$

где $a_A^{цс} = \omega_4^2 l -$ центростремительное ускорение точки, направленное от точки A к точке O; $a_A^{вр} = \varepsilon_4 l -$вращательное ускорение, перпендикулярное звену OA в сторону дуговой стрелки ускорения $\bar{\varepsilon}_4$. При этом $\varepsilon_4 = \dot{\omega}_4 = \dfrac{d}{dt}(6t-5)\cdot 0{,}2 = 1{,}2$ с$^{-2}$. Тогда $a_A^{цс} = 0{,}6$ см/с$^{-2}$, $a_A^{вр} = 18$ см/с$^{-2}$.

Так как значение углового ускорения положительно, то направление угловой скорости и углового ускорения тела 4 совпадают. Ускорение точки A находится по теореме Пифагора .

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^{цс}\right)^2 + \left(a_A^{вр}\right)^2} = 18{,}01 \text{ см/с}^{-2}.$$

На рис. 24 показано направление ускорения точки A и двух его составляющих.

Ответ: скорость точки А $v_A = 3$см/с;

ускорение точки А $a_A = 18{,}01$ см/с^2.

Тесты для самоконтроля

1. Выбрать наиболее верный ответ

Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\omega = \sqrt{5} - 2t + 3t^2$. В момент времени $t=1$ с тело будет вращаться

а) равноускоренно; б) равномерно; в) ускоренно; г) равнозамедленно.

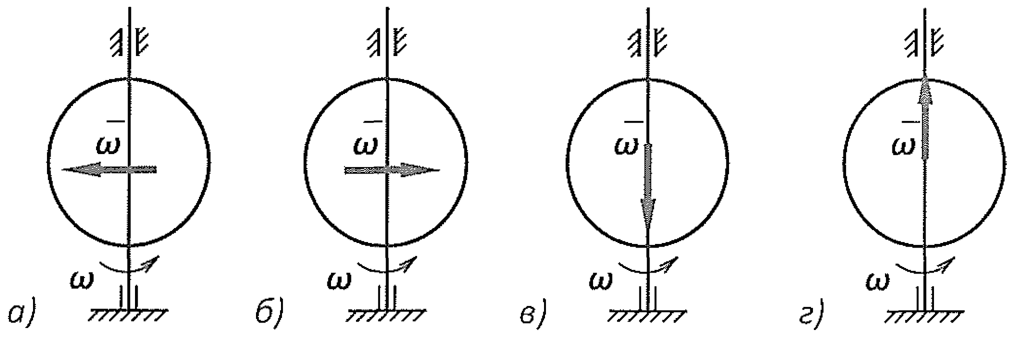
2. Выбрать верный ответ

Угловая скорость определяется по формуле

а) $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$; б) $\omega = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$; в) $\omega = \dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2}$; г) $\omega = \dfrac{dv}{dt}$.

3. Выбрать верный ответ

Диск вращается вокруг вертикальной оси. На каком рисунке верно указан вектор угловой скорости?



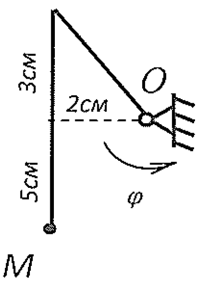
4. Выбрать верный ответ

Угловое ускорение определяется по формуле

а) $\varepsilon = \dfrac{d\varphi}{dt}$; б) $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$; в) $\varepsilon = \dfrac{d^2\omega}{dt^2}$; г) $\varepsilon = \dfrac{dv}{dt}$.

5. Выбрать верный ответ

Радиус вращения точки M загнутого стержня, вращающего в плоскости чертежа, относительно оси, проходящей через точку O, равен

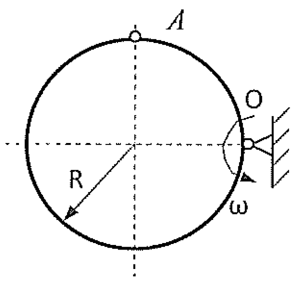


а) 8 см; *б) 2 см;*

в) $\sqrt{29}$ см; г) $\sqrt{7}$ см.

6. Выбрать верный ответ

Диск радиусом R вращается вокруг неподвижной оси, проходящей перпендикулярно диску через точку O. Численное значение скорости точки A можно найти по формуле



а) $\upsilon_A = \omega \cdot \sqrt{2}$;

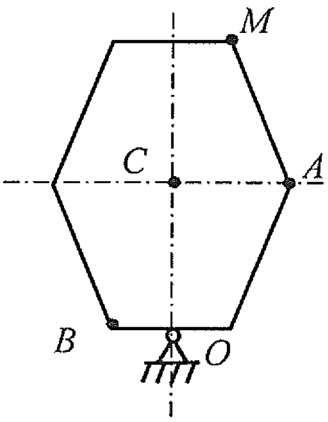
б) $\upsilon_A = \omega \cdot R\sqrt{2}$;

в) $\upsilon_A = \omega \cdot R$;

г) $\upsilon_A = \omega^2 \cdot R$.

7. Выбрать верный ответ

Пластинка вращается вокруг оси, проходящей через точку O, перпендикулярно плоскости пластинки. Линейная скорость какой точки имеет наибольшее численное значение?



а) A;

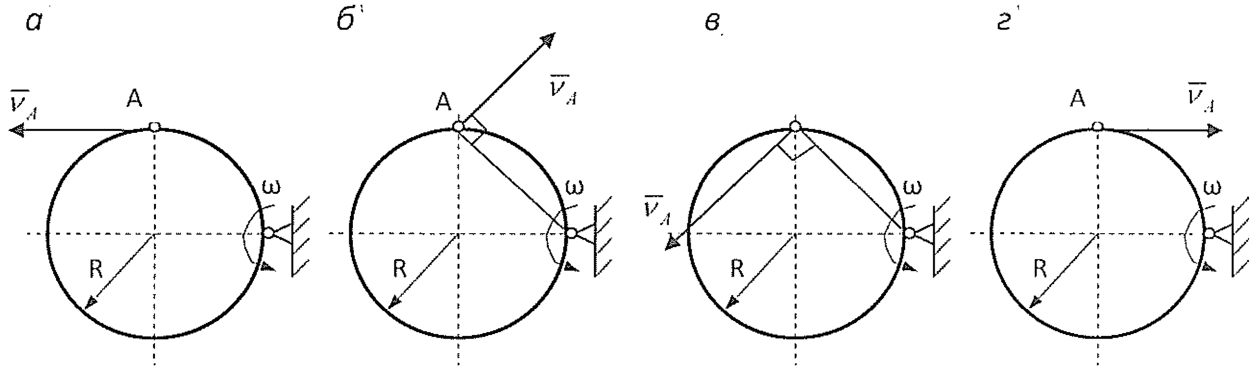
б) M;

в) C;

г) B.

8. Выбрать верный ответ

Диск радиусом R вращается вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости диска. На каком рисунке скорость точки *A* указана верно?



9. Выбрать верный ответ

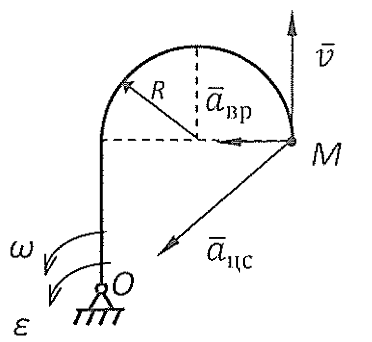
Загнутый стержень вращается в плоскости чертежа относительно оси, проходящей через точку О. Верно указан вектор:

а) центростремительного ускорения точки М;

б) вращательного ускорения точки М;

в) скорости точки М;

г) нет верно указанных векторов.



10. Выбрать верное соответствие

1. Вращательное ускорение точки характеризует
2. Центростремительное ускорение точки характеризует
3. Угловая скорость характеризует
4. Угловое ускорение характеризует

а) быстроту изменения угловой скорости;

б) быстроту изменения линейной скорости по направлению;

в) быстроту изменения линейной скорости по модулю;

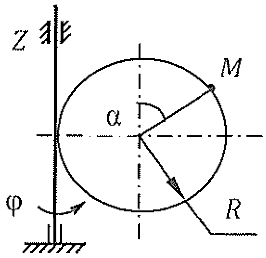
г) быстроту изменения угла поворота.

11. Выбрать верный ответ

Круглая пластинка радиусом R вращается относительно вертикальной оси Z по закону $\varphi=f(t)$. Выбрать верное равенство при определении кинематических характеристик для точки M.

а) $a_{вр} = \dfrac{d\varphi}{dt} \cdot R(1 + \cos\alpha)$; б) $a_{цс} = \left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cdot R(1 + \sin\alpha)$;

в) $a_{вр} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot R \cdot \sin\alpha$; г) $v = \left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cdot R$.

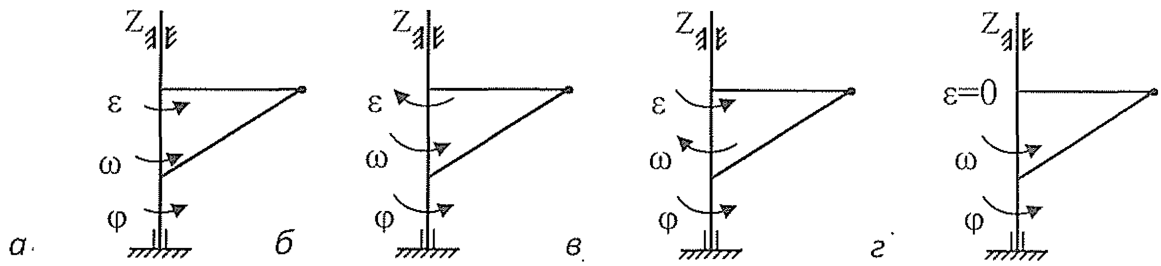


12. Выбрать верное соответствие

Треугольная пластинка вращается относительно оси Z по закону $\varphi=f(t)$. Выбрать верное соответствие между законом вращения и рисунком.

1. $\varphi = 4t^2 - 10t$; 2. $\varphi = 7t - 12$;

3. $\varphi = 2 \cdot \sin\dfrac{\pi t}{3}$; 4. $\varphi = -\cos\dfrac{\pi t}{6} + 7$.

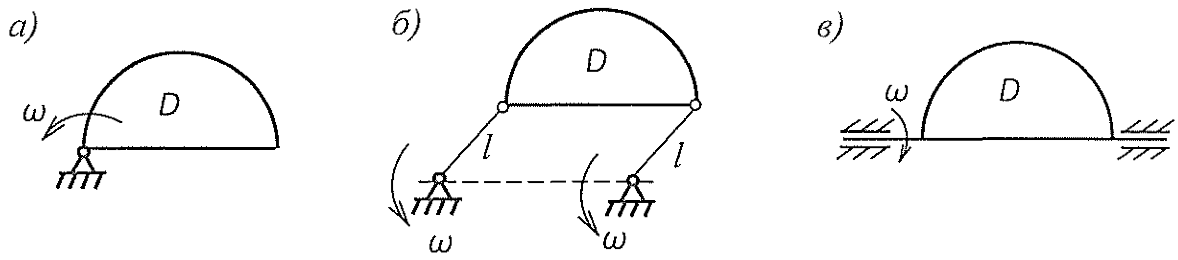


13. Выбрать верный ответ

Пластинка D совершает поступательное движение

1. На рисунке *а*; 2. На рисунке *б*; 3. На рисунке *в*;

4. На всех трёх рисунках пластинка совершает вращательное движение.

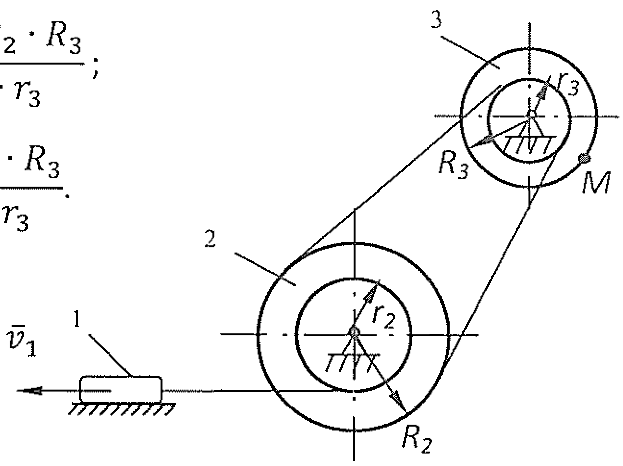


14. Выбрать верный ответ

В передаточном механизме известна скорость первого тела $\bar{v}_1$ и размеры дисков, тогда скорость точки M будет равна

а) $v_M = \dfrac{v_1 \cdot R_2 \cdot r_3}{r_2 \cdot R_3}$; б) $v_M = \dfrac{v_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{r_2 \cdot r_3}$;

в) $v_M = \dfrac{v_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3}$; г) $v_M = \dfrac{v_1 \cdot r_2 \cdot R_3}{R_2 \cdot r_3}$.



15. Выбрать верный ответ

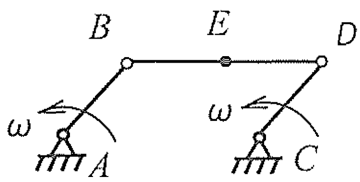
Стержни AB и CD равные по длине 0,2 м вращаются равномерно с одинаковыми угловыми скоростями $\omega = 4$ с$^{-1}$. Скорость точки E, лежащей посередине стержня BD, будет равна

а) v_E =0,8 м/с;

б) v_E =0 м/с;

в) v_E =0,4 м/с;

в) v_E =1,6 м/с;

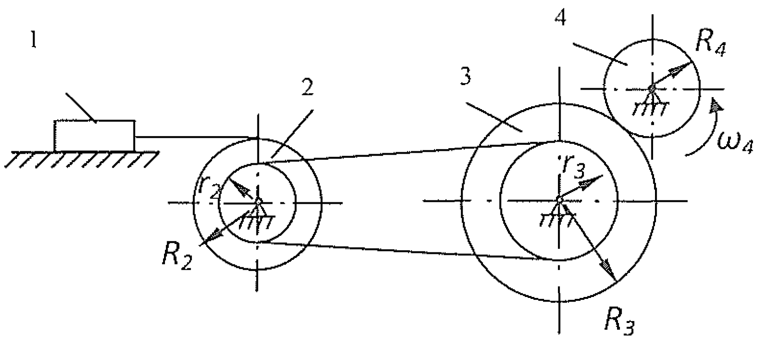


16. Выбрать верный ответ

В передаточном механизме известен закон изменения угловой скорости четвёртого тела $\omega_4 = f(t)$, тогда ускорение первого тела будет равно

а) $a_1 = \dfrac{\dot{\omega}_4 \cdot R_4 \cdot R_3 \cdot R_2}{r_2 \cdot r_3}$; б) $a_1 = \dfrac{\dot{\omega}_4 \cdot R_4 \cdot r_3 \cdot r_2}{R_2 \cdot R_3}$;

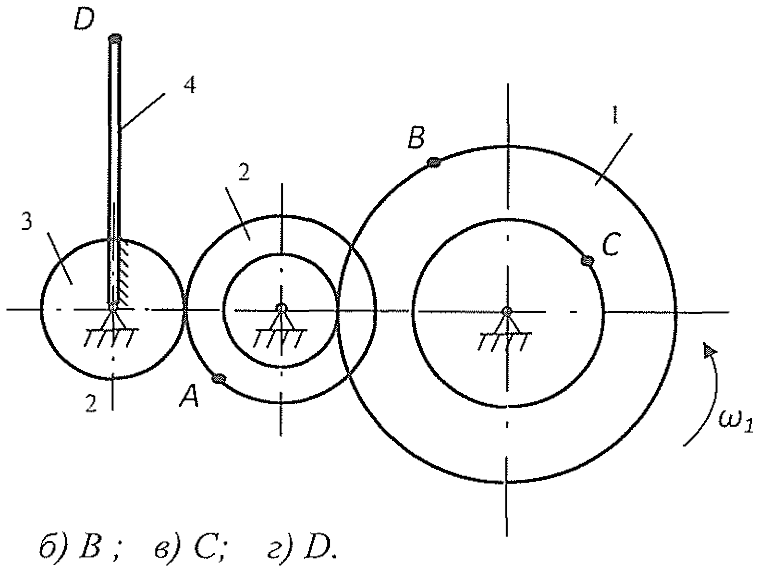
в) $a_1 = \dfrac{\dot{\omega}_4 \cdot R_3 \cdot r_2}{R_4 \cdot r_3 \cdot R_2}$; г) $a_1 = \dfrac{\dot{\omega}_4 \cdot R_4 \cdot r_3 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3}$.



17. Выбрать верный ответ

Рассматривается система зубчатых колёс. Двухступенчатое колесо 1 находится в зацеплении с двухступенчатым колесом 2. Колесо 2 находится в зацеплении с колесом 3, с которым жестко скреплена рукоятка 4.

Расположите точки *A, B, C, D* в порядке возрастания модулей их скоростей.



а) A; б) B ; в) C; г) D.

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ (ПЛОСКОЕ) ДВИЖЕНИЕ

Изучение плоского движения тела имеет важное прикладное значение, так как в большинстве механизмов и машин почти все части совершают плоскопараллельное движение.

Плоскопараллельным или ***плоским*** движением твёрдого тела называется такое движение, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных данной фиксированной (направляющей) плоскости, неизменно связанной с неподвижной системой отсчёта. Примерами плоскопараллельного движения могут служить: качение колеса по неподвижной поверхности (рис. 25), движение бруска AB (рис. 26) в плоскости Oxy, движение шатуна AB в кривошипно-шатунном механизме (рис. 27).

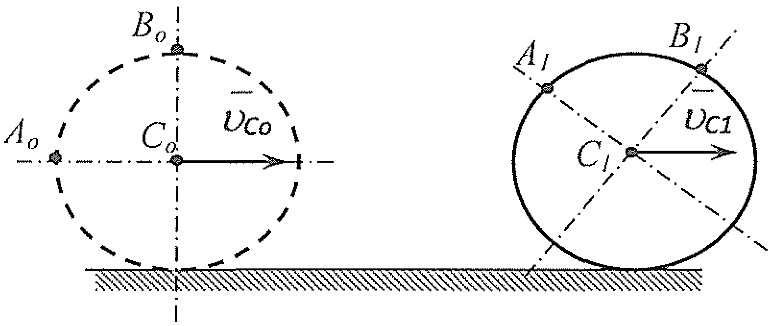


Рис. 25

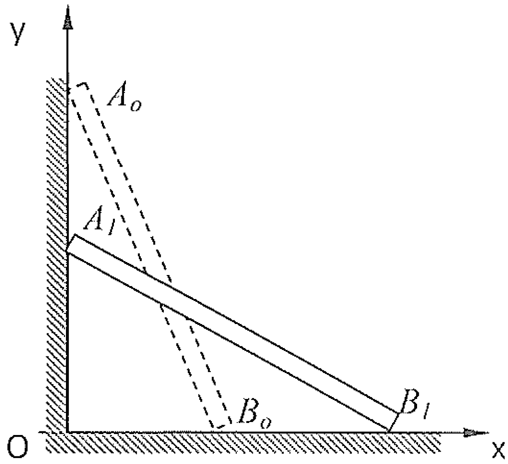


Рис. 26

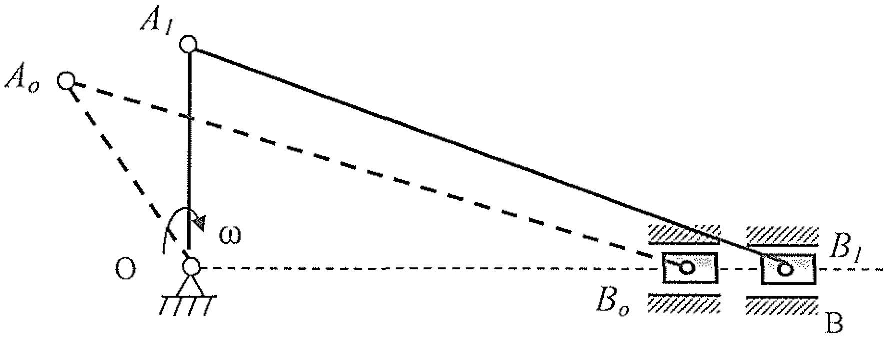


Рис. 27

Изучение плоского движения сводится к анализу движения плоской фигуры S, полученной сечением тела плоскостью OXY, параллельной направляющей плоскости. Положение плоской фигуры в осях OXY однозначно определяется положением любого отрезка AB (рис. 28). Этот отрезок определяется координатами точки A - X_A, Y_A и углом φ, который отрезок AB образует с осью X. Координаты X_A, Y_A и угол φ с течением времени меняются, т.е. являются функциями времени. Таким образом, уравнения плоского движения будут иметь вид:

$$X_A = f_1(t), \quad Y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \tag{16}$$

Точка A выбирается произвольно и называется полюсом. За полюс обычно принимают ту точку, скорость и ускорение которой известны. Первые два уравнения (16) отвечают за поступательную часть движения, третье – за вращательную, причём скорость поступательного движения зависит от выбора полюса, а угловая скорость вращательного движения не зависит от выбора полюса.

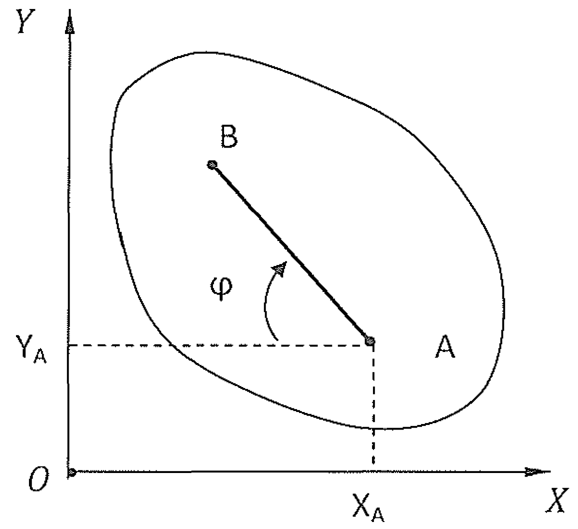


Рис. 28

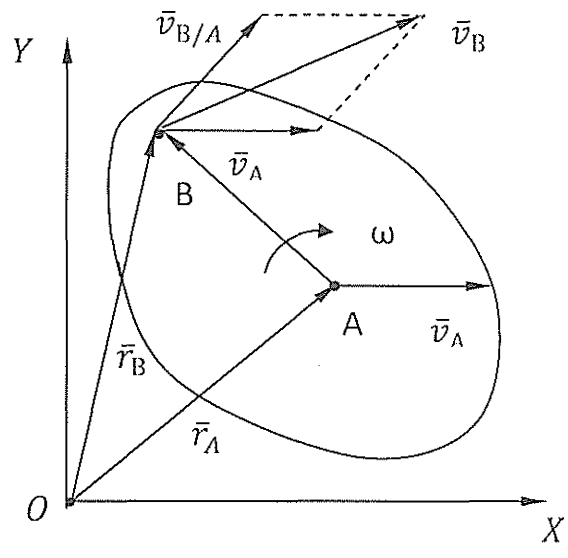


Рис. 29

Движение плоской фигуры можно представить как совокупность двух мгновенных движений: поступательного вместе с полюсом - точка A и вращательного вокруг полюса (рис. 30).

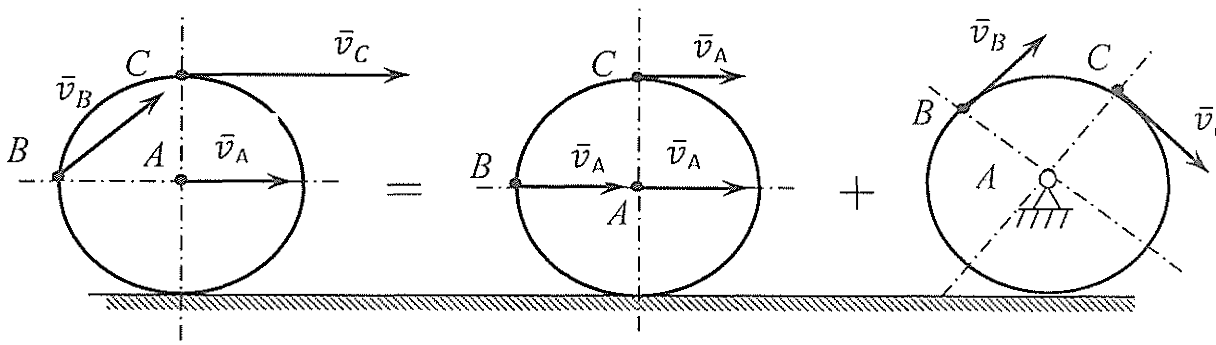


Рис. 30

СКОРОСТИ ТОЧЕК ТЕЛА, СОВЕРШАЮЩЕГО ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

При решении задач на плоское движение применяют несколько способов определения скоростней точек тела.

1-й способ. *Теорема Эйлера*

Скорость любой точки B плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса $\bar{v}_A$ и скорости той же точки во вращательном движении данной фигуры относительно полюса $\bar{v}_{BA}$:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \tag{17}$$

Рассмотрим плоское движение твёрдого тела (рис. 29). В качестве полюса примем точку A. Рассмотрим движение произвольной точки B. Положение этой точки можно определить радиус-вектором:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}.$$

Дифференцируя это выражение по времени и учитывая, что модуль вектора $\overline{AB}$ остаётся постоянным, меняется только его направление, получим

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB} = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

где $\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB}$ – скорость вращения точки B относительно полюса A, модуль этого вектора определяется по формуле $v_{BA} = \omega \cdot AB \cdot \sin 90^0$, а направлен он перпендикулярно плоскости, образованной векторами $\bar{\omega}$ и $\overline{AB}$, в сторону угловой скорости. Таким образом, теорема доказана.

2-й способ. *Следствия из теоремы Эйлера*

Из доказанной теоремы вытекают следствия:

- Проекции скоростей двух точек твёрдого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны (рис. 31).
- Концы векторов скоростей точек прямолинейного отрезка на плоской фигуре располагаются на одной прямой и делят её на части, пропорциональные расстояниям между точками (рис. 31).

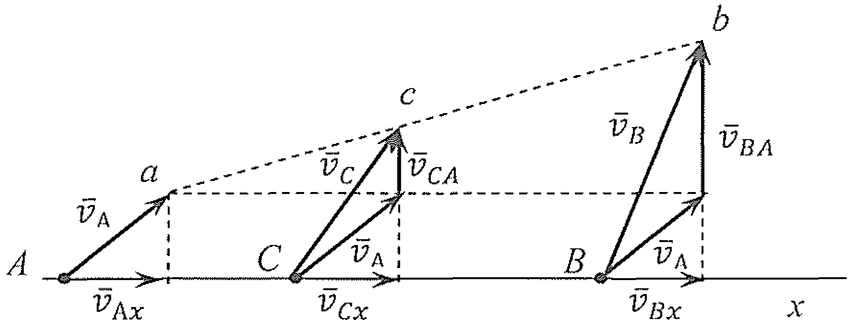


Рис. 31

$$\bar{v}_{BA} \perp \overline{AB}, \quad \bar{v}_{CA} \perp \overline{CA},$$

$$v_{Ax} = v_{Cx} = v_{Bx},$$

$$v_{BA} = \omega \cdot AB, \quad v_{CA} = \omega \cdot AC,$$

$$\frac{ac}{cb} = \frac{AC}{CB}.$$

<u>3-й способ</u>. *Мгновенный центр скоростей*

В каждый момент времени в плоскости фигуры при ее непоступательном плоском движении существует одна единственная точка, скорость которой равна нулю. Эту точку называют мгновенным центром скоростей (*МЦС*) и обозначают буквой *P*.

Если за полюс взять точку *P (МЦС)*, скорость которой в данный момент времени равна нулю, то распределение скоростей точек твёрдого тела в данный момент времени будет таким же, как при вращательном движении тела вокруг точки *P*.

МЦС может находиться как на плоской фигуре, так и за её пределами (рис. 32). В процессе движения тела точка Р – *МЦС* изменяет своё положение. При непрерывном движении фигуры будет существовать бесконечное число мгновенных центров скоростей, которые образуют линию, называемую *центроидой*.

Пусть плоская фигура движется плоскопараллельно. Точка *P* является *МЦС*, примем её за полюс $v_P = 0$. Определим скорость точки *A* по теореме Эйлера

$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{AP} = \bar{v}_{AP}.$$

Аналогично для любой другой точки B

$$\bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP} = \bar{v}_{BP}.$$

При этом

$$\bar{v}_A \perp AP \quad \bar{v}_B \perp BP.$$

Здесь AP, BP – мгновенные радиусы для точек A и B при мгновенном вращении тела вокруг *МЦС* (точки P). Так как скорости точек перпендикулярны мгновенным радиусам, исходящим из точки P, то *МЦС лежит на пересечении перпендикуляров, проведённых через точки к векторам скоростей этих точек.*

Обозначив угловую скорость мгновенного вращения вокруг *МЦС* через ω, получим численное значение скоростей точек тела

$$v_A = \omega \cdot AP, \quad v_B = \omega \cdot BP,$$

или

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}.$$

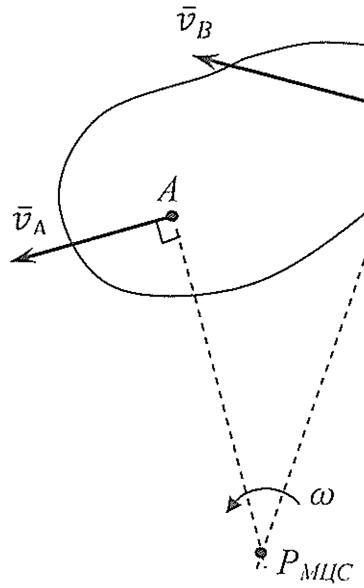


Рис. 32

Частные случаи определения положения МЦС

1. Если тело катится без скольжения по неподвижной поверхности (нити и т. п.), то *МЦС* находится в точке касания с неподвижной поверхностью (рис. 33, а, б). При этом угловая скорость

$$\omega = \frac{v_C}{CP}$$

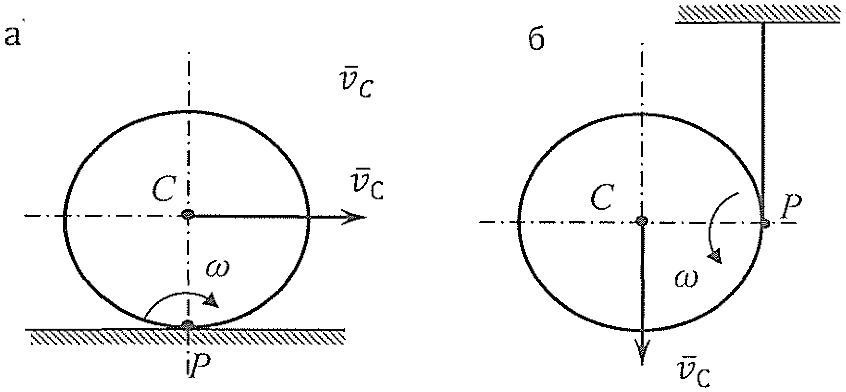


Рис. 33

2. Если известна скорость одной точки A и прямая, вдоль которой направлена скорость другой точки B (рис.34) , то МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров к скоростям в точках A и B. При этом

$$\omega = \frac{v_A}{AP}; \qquad v_B = \omega \cdot BP.$$

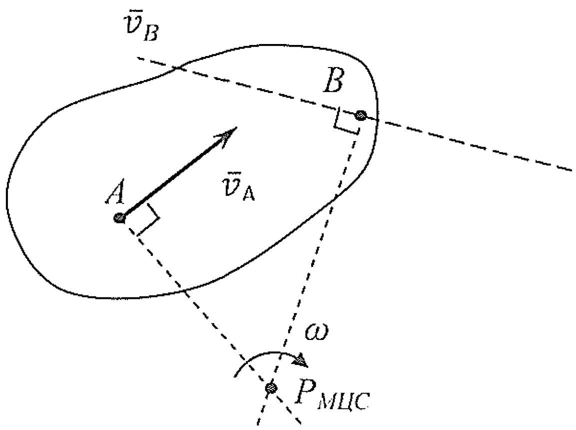


Рис. 34

3. Если известны скорости двух точек A и B (рис 35, а, б). Причём

$$\bar{v}_A \parallel \bar{v}_B; \ \ \bar{v}_A \perp AB, \ \ \bar{v}_B \perp AB$$

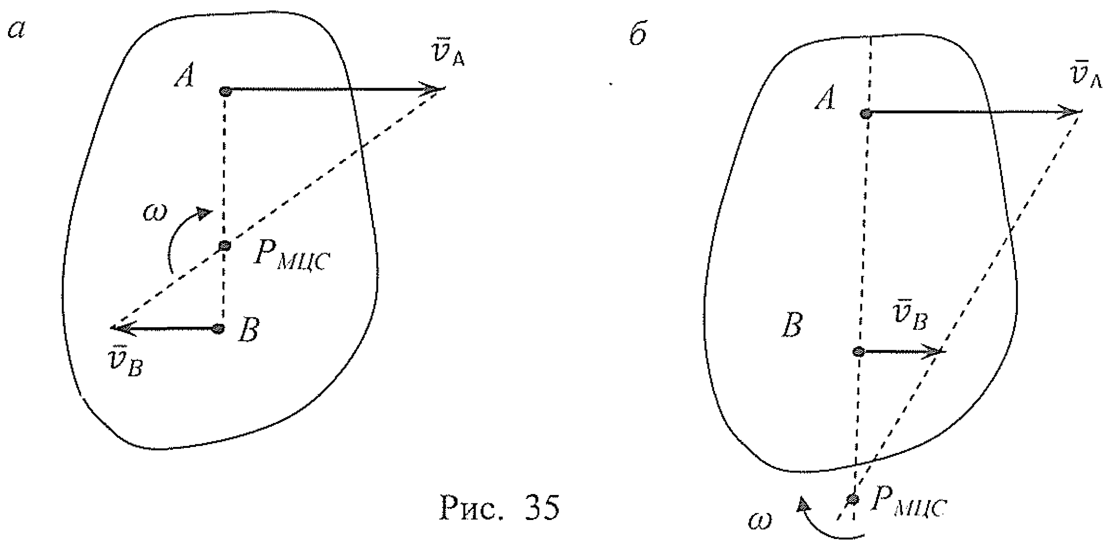


Рис. 35

МЦС находится в точке пересечения прямой, проходящей через концы векторов скоростей и прямой, соединяющей начала векторов.

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}.$$

4. Если скорости точек A и B в некоторый момент времени параллельны, направлены в одну сторону и не перпендикулярны AB (рис. 36), то перпендикуляры к данным скоростям не пересекаются, что говорит об отсутствии мгновенного центра скоростей. Движение называют мгновенно поступательным, угловая скорость равна нулю, а линейные скорости всех точек равны по модулю и направлению:

$$\omega = 0; \qquad \bar{v}_A = \bar{v}_B.$$

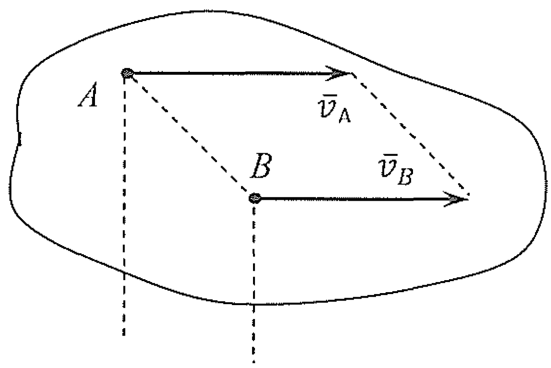


Рис. 36

УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ТЕЛА, СОВЕРШАЮЩЕГО ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

При решении задач на плоское движение применяют так же несколько способов определения ускорений точек тела.

1-й способ. ***Теорема Эйлера***

Ускорение произвольной точки твёрдого тела, совершающего плоское движение, можно найти как геометрическую сумму ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении вокруг полюса.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}. \qquad (18)$$

Для доказательства рассмотрим плоское движение твёрдого тела (рис. 36). В качестве полюса примем точку A. Рассмотрим движение произвольной точки B. Скорость этой точки можно определить по формуле Эйлера

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}.$$

Дифференцируем это выражение по времени при этом учитываем, что модуль вектора $\overline{AB}$ остаётся постоянным, меняется только его направление, получим

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times \frac{d\overline{AB}}{dt} = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}).$$

Тогда ускорение точки В можно представить в виде суммы

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{\text{BA}}^{\text{цс}} + \bar{a}_{\text{BA}}^{\text{вр}},$$

где

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{\text{BA}}^{\text{цс}} + \bar{a}_{\text{BA}}^{\text{вр}}$$

называется ускорением точки B во вращательном движении вокруг полюса A, а слагаемые:

$\bar{a}_{\text{BA}}^{\text{цс}} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB})$, $a_{\text{BA}}^{\text{цс}} = \omega^2 \cdot AB$ – центростремительной составляющей, направленной вдоль отрезка AB к полюсу;

$\bar{a}_{\text{BA}}^{\text{вр}} = (\bar{\varepsilon} \times \overline{AB})$, $a_{\text{BA}}^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot AB$ – вращательной составляющей, направленной перпендикулярно отрезку AB в сторону углового ускорения.

Модуль ускорения $\bar{a}_{BA}$ определяется по теореме Пифагора

$$a_{BA} = \sqrt{\left(a_{BA}^{цс}\right)^2 + \left(a_{BA}^{вр}\right)^2} = AB \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

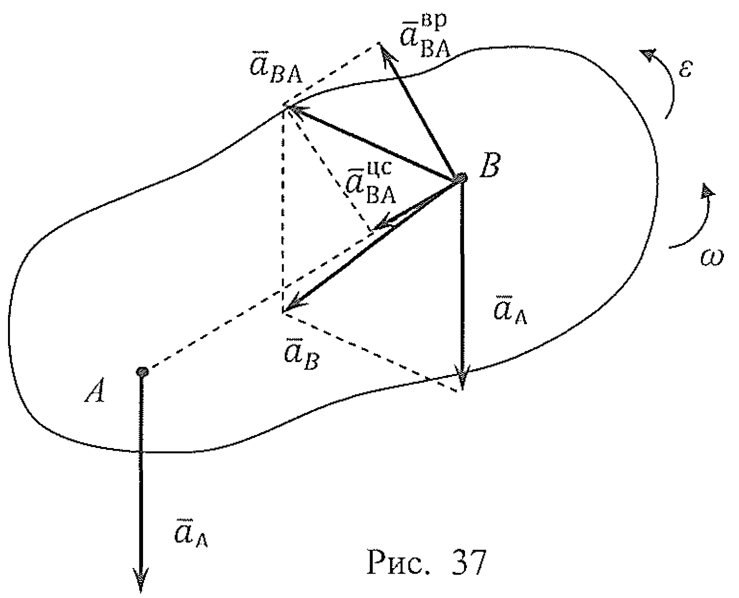


Рис. 37

Вектор ускорения любой точки плоской фигуры во вращательном движении вокруг полюса отклонён от прямой, соединяющей рассматриваемую точку с полюсом, на угол α, определяемый по формуле

$$\alpha = arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right).$$

Этот угол одинаков для всех точек тела (рис. 38).

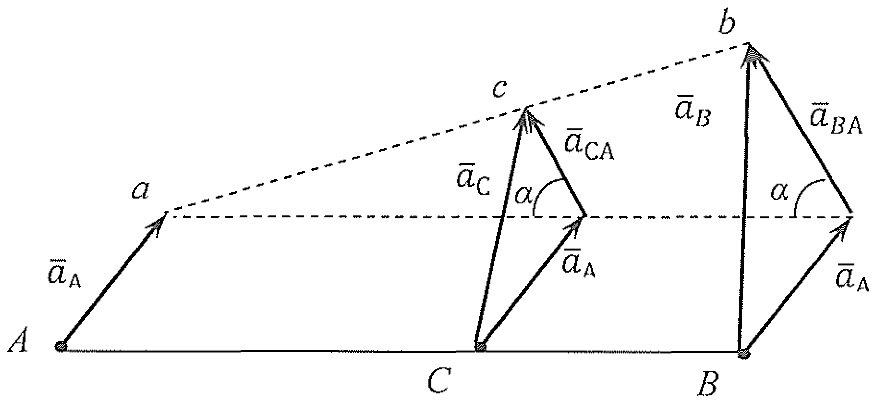


Рис. 38

Из теоремы Эйлера вытекает следствие: концы векторов ускорений точек прямолинейного отрезка на плоской фигуре лежат на одной прямой и делят её на части, пропорциональные расстояниям между точками (рис. 38).

$$\frac{a_{BA}}{a_{CA}} = \frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac}; \qquad \bar{a}_{CA} \parallel \bar{a}_{BA}.$$

<u>2-й способ</u>. ***Мгновенный центр ускорений***

В любой момент времени в плоскости движущейся фигуры существует одна единственная точка Q, ускорение которой равно нулю. Это точка называется *мгновенным центром ускорений (МЦУ).*

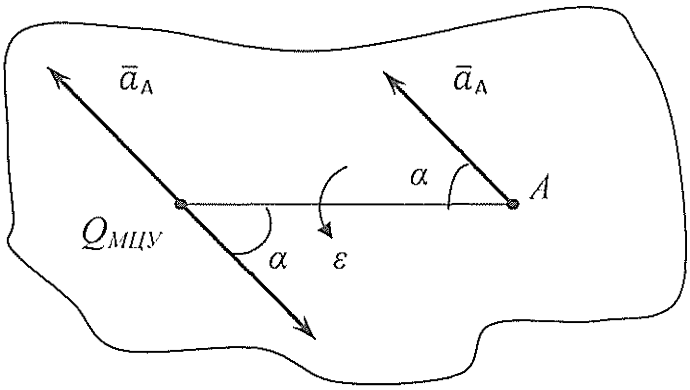


Рис. 39

Пусть точка A является полюсом (рис. 39) и ускорение её известно. Разложим движение плоской фигуры на поступательное и вращательное. Используя формулу Эйлера, запишем ускорение искомой точки Q и приравняем её нулю

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA} = 0, \qquad \bar{a}_A = -\bar{a}_{QA}.$$

Отсюда следует, что ускорение точки Q при вращательном движении вокруг полюса A по величине и направлено в противоположную сторону. Это возможно только в том случае, если углы наклона ускорения $\bar{a}_{QA}$ и ускорения полюса A к отрезку, соединяющему точку Q с полюсом A, одинаковы

$$tg\alpha = \frac{a_{QA}^{\text{вр}}}{a_{QA}^{\text{цс}}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \qquad AQ = \frac{a_{QA}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}, \qquad \bar{a}_Q = 0.$$

Пример нахождения МЦУ

Пусть плоская фигура движется плоскопараллельно с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε. В некоторый момент времени ускорение точка A равно $\bar{a}_A$ (рис. 40).

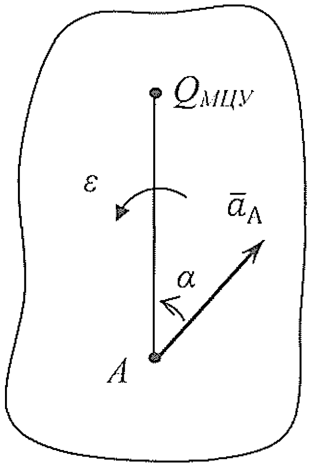


Рис. 40

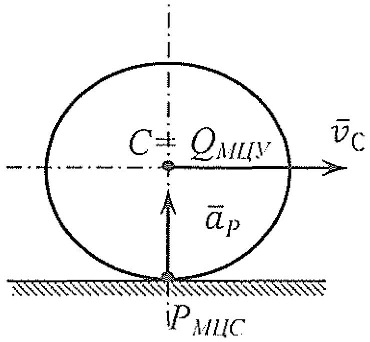


Рис. 41

Определим угол α между ускорением и радиусом вращения и отложим его от направления известного ускорения точки A, строим луч.

$$\alpha = arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right).$$

На построенном луче откладываем отрезок длиной AQ

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Ускорения точек плоской фигуры в каждый момент времени определяются как при вращении плоской фигуры вокруг *МЦУ* – точки Q.

МЦУ не фиксированная точка, она меняет своё положение при движении плоской фигуры.

МЦС и *МЦУ* в общем случае не совпадают, причём ускорение *МЦС* не равно нулю, и скорость в *МЦУ* не равна нулю (рис. 41).

В тех случаях, когда ускорения точек параллельны друг другу, возможны частные случаи нахождения *МЦУ* (рис. 42, а, б, в).

Положение плоской фигуры, в её плоскости определяется двумя точками, например, A и B. Координаты этих точек связаны между собой условием постоянства длинны отрезка AB. Поэтому число степеней свободы тела, совершающего плоскопараллельное движение, равно трём.

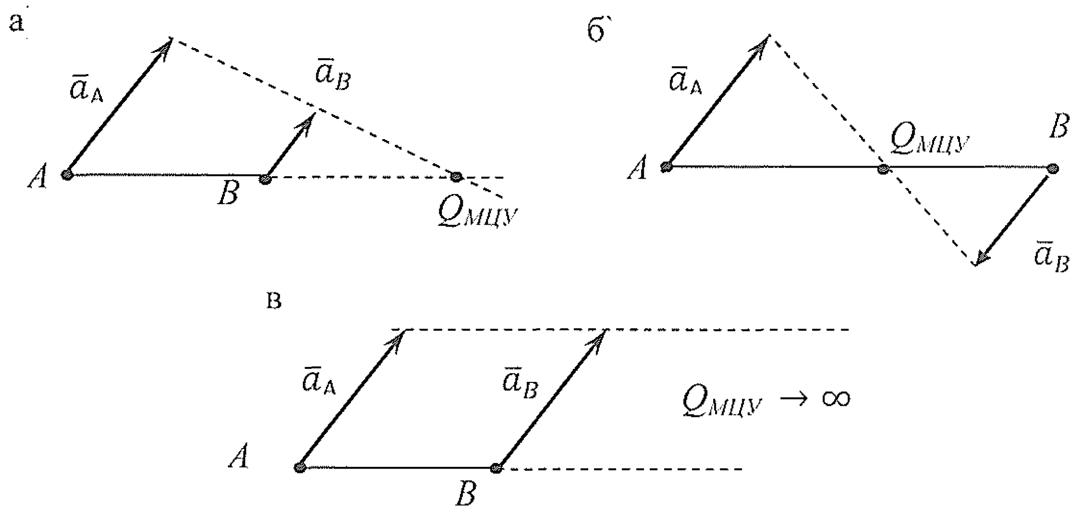


Рис. 42

Задача 5

Колесо ступенчатого профиля катится по неподвижной поверхности. Известны радиусы большой и малой ступеней колеса $R=0{,}8$м, $r=0{,}5$м. Скорость и ускорение центра колеса $v_C=4$ м/с, $a_C=10$ м/с^2 (рис. 43). Определить скорость и ускорение точек A, D и B колеса.

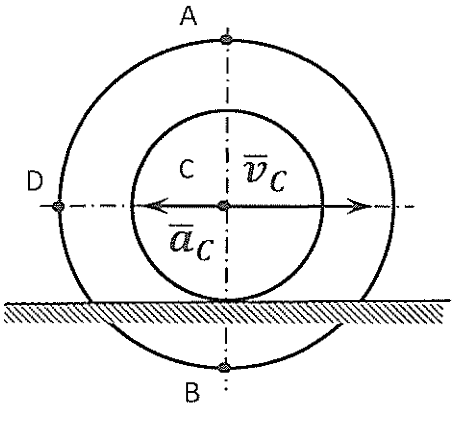


Рис. 43

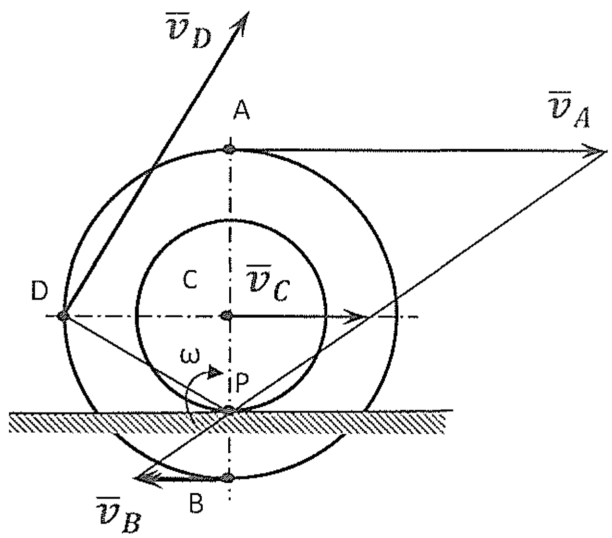


Рис. 44

Решение.

Определим скорости точек A, B, D. Для колеса, катящегося без скольжения по неподвижной поверхности, $МЦС$ находится в точке соприкосновения колеса и поверхности – точке P (рис. 44).

Угловая скорость колеса равна

$$\omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{4}{0{,}5} = 8\ \text{с}^{-1},$$

где радиус вращения точки C $CP = r = 0{,}5$ *м.*

Направление угловой скорости определяем по направлению скорости точки С.

Скорости точек A, D, B найдём соответственно по формулам:

$$v_A = \omega \cdot AP = 8 \cdot 1{,}3 = 10{,}4 \text{ м/с};$$
$$AP = R + r = 0{,}8 + 0{,}5 = 1{,}3 \text{ м}$$

$$v_{\text{В}} = \omega \cdot \text{В}P = 8 \cdot 0{,}3 = 2{,}4 \text{ м/с};$$
$$\text{В}P = R - r = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3 \text{ м}$$

$$v_D = \omega \cdot DP = 8 \cdot 0{,}94 = 7{,}52 \text{ м/с};$$
$$AP = \sqrt{R^2 + r^2} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}5^2} = 0{,}94 \text{ м}$$

Векторы скоростей $\bar{v}_{A,}$ $\bar{v}_{B,}$ $\bar{v}_D$ направлены перпендикулярно соответствующим радиусам вращения AP, BP, DP в сторону угловой скорости.

Определим ускорения точек A, B, для этого найдём угловое ускорение колеса. Так как расстояние от *МЦС* до полюса (точка C) не меняется при качении колеса (рис. 45), то

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{\dot{v}_C}{CP} = \frac{a_C}{r} = \frac{10}{0{,}5} = 20\ \text{с}^{-2},$$

Ускорения точек A, B, D найдём по формуле Эйлера, приняв за полюс точку C:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_A &= \bar{a}_{\text{С}} + \bar{a}_{A\text{С}} = \bar{a}_{\text{С}} + \bar{a}_{A\text{С}}^{\text{цс}} + \bar{a}_{A\text{С}}^{\text{вр}},\\
\bar{a}_B &= \bar{a}_{\text{С}} + \bar{a}_{B\text{С}} = \bar{a}_{\text{С}} + \bar{a}_{\text{ВС}}^{\text{цс}} + \bar{a}_{\text{ВС}}^{\text{вр}},\\
\bar{a}_D &= \bar{a}_{\text{С}} + \bar{a}_{D\text{С}} = \bar{a}_{\text{С}} + \bar{a}_{D\text{С}}^{\text{цс}} + \bar{a}_{D\text{С}}^{\text{вр}},
\end{aligned} \tag{19}$$

где

$$a_{\text{АС}}^{\text{цс}} = \omega^2 \cdot A\text{С} = \omega^2 \cdot R = 64 \cdot 0{,}8 = 51{,}2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$
$$a_{\text{АС}}^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot A\text{С} = \varepsilon \cdot R = 20 \cdot 0{,}8 = 16\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$
$$a_{\text{ВС}}^{\text{цс}} = \omega^2 \cdot \text{ВС} = \omega^2 \cdot R = 64 \cdot 0{,}8 = 51{,}2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$
$$a_{\text{ВС}}^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot \text{ВС} = \varepsilon \cdot R = 20 \cdot 0{,}8 = 16\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{DC}^{\text{цс}} = \omega^2 \cdot DC = \omega^2 \cdot R = 64 \cdot 0{,}8 = 51{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{DC}^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot DC = \varepsilon \cdot R = 20 \cdot 0{,}8 = 16\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Чтобы найти численные значения ускорений точек A, B, D, составим проекции уравнений (19) на оси x и y

$$a_{Ax} = -a_C - a_{AC}^{\text{вр}} = -10 - 16 = -26\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{Ay} = -a_{AC}^{\text{цс}} = -51{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{Bx} = -a_C + a_{BC}^{\text{вр}} = -10 + 16 = -6\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{By} = a_{BC}^{\text{цс}} = 51{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{Dx} = -a_C + a_{DC}^{\text{цс}} = -10 + 51{,}2 = 41{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{Dy} = -a_{DC}^{\text{вр}} = -16\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

По теореме Пифагора найдём

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \sqrt{26^2 + 51{,}2^2} = 57{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{6^2 + 51{,}2^2} = 51{,}6\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = \sqrt{41{,}2^2 + 16^2} = 44{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

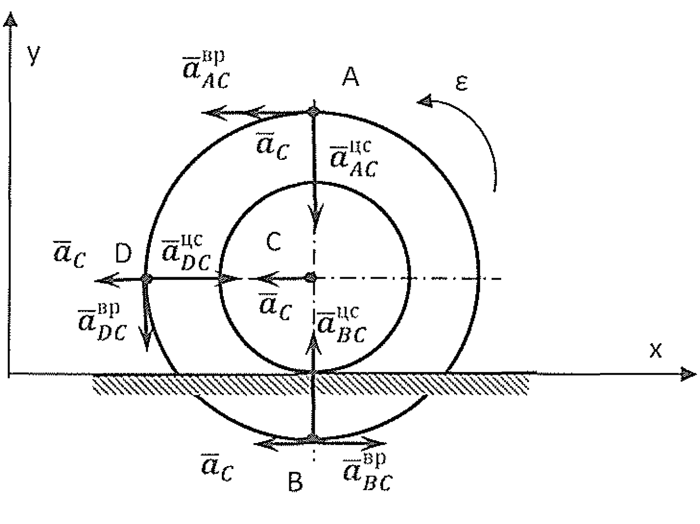


Рис. 45

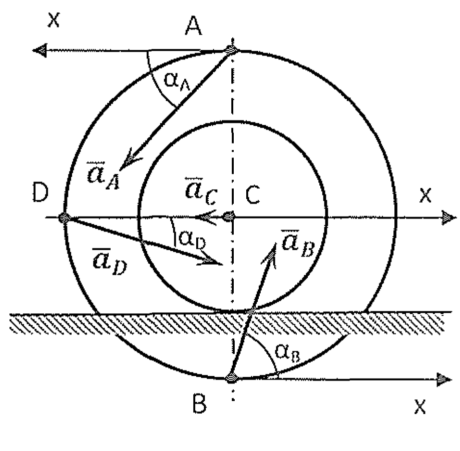


Рис. 46

Направления векторов $\overline{a}_A$, $\overline{a}_B$, $\overline{a}_D$, определим с помощью направляющих косинусов к соответствующим осям x (рис. 46)

$$\cos\alpha_A = \frac{a_{Ax}}{a_A} = \frac{26}{57{,}4} = 0{,}45; \qquad \alpha_A = 62^0$$

$$\cos\alpha_B = \frac{a_{Bx}}{a_B} = \frac{6}{51{,}6} = 0{,}12; \qquad \alpha_B = 82^0$$

$$\cos\alpha_D = \frac{a_{Dx}}{a_D} = \frac{41{,}2}{44{,}2} = 0{,}93; \qquad \alpha_D = 20^0$$

<u>Ответ</u>: $v_A = 10{,}4$ м/с; $v_B = 2{,}4$ м/с; $v_D = 7{,}52$ м/с;

$a_A = 57{,}4\frac{м}{с^2}$; $a_B = 51{,}6\frac{м}{с^2}$; $a_D = 44{,}2\frac{м}{с^2}$

Задача 6

В кривошипно-шатунном механизме известны его размеры ОА=0,2 м, АВ=0,4 м, АС=0,2 м, положение механизма определяется углом $\alpha = 30^0$. *Задана угловая скорость и угловое ускорение механизма* $\omega_{OA} = 5\ с^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 10\ с^{-2}$.

Определить скорость точек А, В и С двумя способами (с помощью МЦС и с помощью формулы Эйлера); ускорение точек А,В и С, а так же угловую скорость и угловое ускорение шатуна АВ (рис.47).

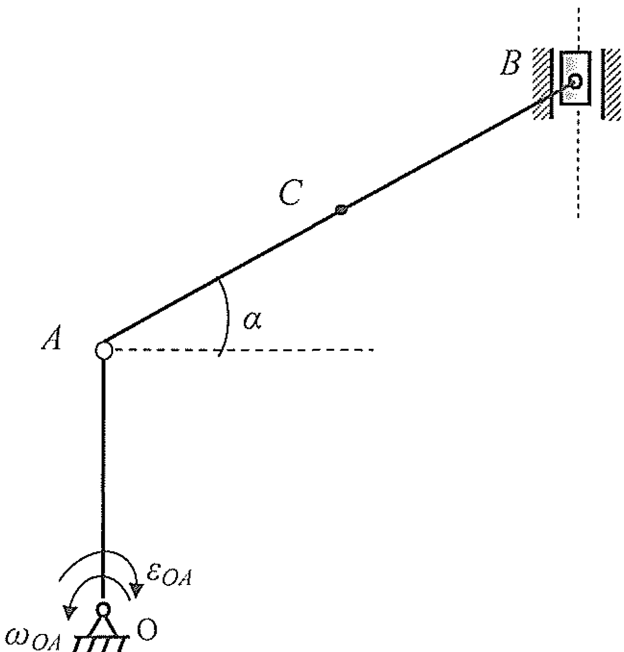


Рис. 47

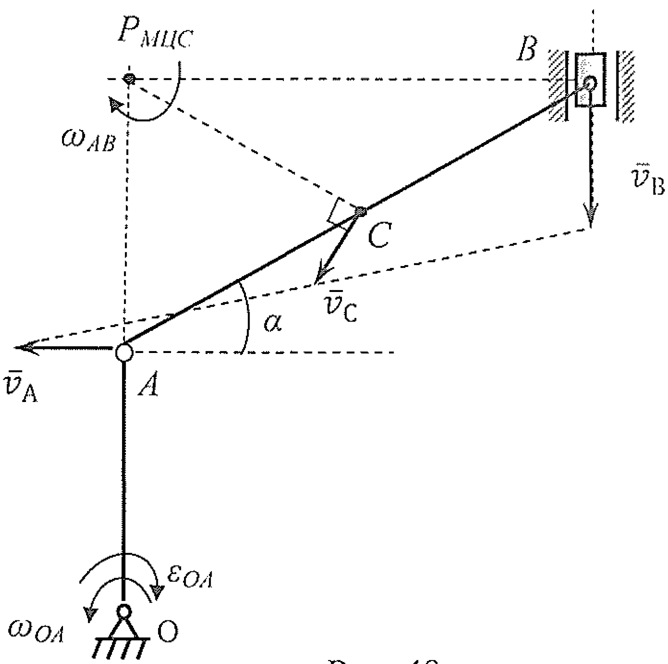


Рис. 48

Решение.

Кривошипно-шатунный механизм состоит из трёх тел: тело *OA* называется кривошип, оно совершает вращательное движение относительно оси, проходящей через точку *O*; тело *AB* называется шатун, оно совершает плоскопараллельное движение в плоскости чертежа; тело *B* называется ползун, оно совершает прямолинейное, поступательное движение, причём скорость и ускорение ползуна направлены вертикально, вдоль оси ползуна.

Определим скорости точек механизма с помощью мгновенного центра скоростей. Скорость точки *A* вращающегося кривошипа направим перпендикулярно *OA* в сторону угловой скорости ω_{OA} (рис. 48) и определим по формуле.

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 5 \cdot 0{,}2 = 1 \text{м/с}.$$

Зная направления векторов скоростей точек *A* и *B* шатуна, можем определить положение точки *P (МЦС)*, которая находится на пересечении перпендикуляров, проведённых к $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$. Теперь можно представить, что точка A совершает мгновенно вращательное движение относительно оси, проходящей через МЦС, т.е. $\bar{v}_A \perp \text{OA}$, $v_A = \omega_{AB} \cdot AP$, тогда

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{1}{0{,}2} = 5\ c^{-1},$$

где *AP* найдём из ΔABP $\text{AP} = \text{AB} \cdot \sin\alpha = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$ м

Скорости точек *B* и *C* можно найти по формуле

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP = 5 \cdot 0{,}35 = 1{,}75\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_\text{C} = \omega_{AB} \cdot \text{C}P = 5 \cdot 0{,}2 = 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

где *BP* найдём из ΔABP $\text{BP} = \text{AB} \cdot \cos\alpha = 0{,}4 \cdot 0{,}87 = 0{,}35$ м.
CP найдём из равностороннего треугольника *ACP: AC=CP=0, 2 м.*
Векторы скоростей точек *A, B, C* показаны на рис. 48.

Определим скорости точек механизма с помощью формулы Эйлера.

Точку *A* выбираем в качестве полюса, так как её скорость можно найти из условия задачи

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 5 \cdot 0{,}2 = 1 \text{м/с}.$$

Для определения скорости точки B воспользуемся формулой Эйлера (17). При построении диаграммы скорости точки B (рис. 49) учтём, что $\bar{v}_B$ направлена вдоль оси ползуна, а $\bar{v}_{BA}$ направлена перпендикулярно радиусу вращения, т.е. $\perp AB$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}\,.$$

Из векторного треугольника (рис. 49), зная $\bar{v}_A$, можно найти

$$v_{BA} = \frac{v_A}{sin\alpha} = \frac{1}{0{,}5} = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_B = v_{BA} \cdot cos\alpha = 2 \cdot 0{,}87 = 1{,}74\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Найдём угловую скорость вращения шатуна AB

$$\omega_{\text{AB}} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{2}{0{,}4} = 5\;c^{-1}.$$

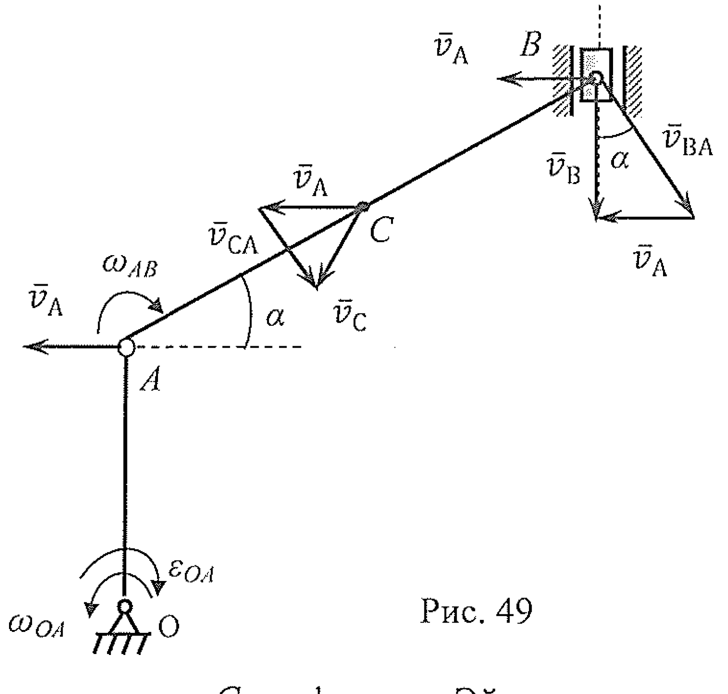


Рис. 49

Определим скорость точки C по формуле Эйлера

$$\bar{v}_\text{C} = \bar{v}_A + \bar{v}_{\text{C}A}\,,$$

где $\bar{v}_{\text{C}A}$ скорость точки C при вращении относительно полюса A, $\bar{v}_{\text{C}A}$ перпендикулярна CA и определяется по формуле

$$v_{CA} = \omega_{\text{AB}} \cdot \text{CA} = 5 \cdot 0{,}2 = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Из векторного равностороннего треугольника (рис. 49)

$$v_C = v_{CA} = v_A = 1 \text{ м/с}.$$

Определим ускорения точек A, B и C механизма с помощью формулы Эйлера.

Так как кривошип OA вращается по условию задачи замедленно, то ускорение точки A найдём по формуле (13)

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\text{цс}} + \bar{a}_A^{\text{вр}},$$

где
$$a_A^{\text{цс}} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 25 \cdot 0{,}2 = 5 \text{ м/с}^2,$$

центростремительное ускорение точки A $\bar{a}_A^{\text{цс}}$ направлено к оси вращения, т.е точке O (рис. 50);

$$a_{\text{А}}^{\text{вр}} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 10 \cdot 0{,}2 = 2\frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

вращательное ускорение точки A $\bar{a}_A^{\text{вр}}$ направлено перпендикулярно радиусу вращения в сторону углового ускорения.

Численное значение ускорения точки A найдём по формуле

$$a_A = \sqrt{(a_A^{\text{цс}})^2 + (a_A^{\text{вр}})^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = 5{,}38\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Шатун AB движется плоскопараллельно. За полюс возьмём точку A, так как ускорение её уже известно.

Ускорение точки B найдём по формуле Эйлера (18)

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A^{\text{цс}} + \bar{a}_A^{\text{вр}} + \bar{a}_{BA}^{\text{цс}} + \bar{a}_{BA}^{\text{вр}},$$

где центростремительное ускорение $\bar{a}_{BA}^{\text{цс}}$ направлено к центру вращения, к точеке A и определяется по формуле

$$a_{BA}^{\text{цс}} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 25 \cdot 0{,}4 = 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Вектор вращательного ускорения $\bar{a}_{BA}^{\text{вр}}$ направлен перпендикулярно центростремительному, определяется по формуле

$$a_{\text{BA}}^{\text{вр}} = \varepsilon_{\text{AB}} \cdot \text{AB},$$

но найти численное значение $\bar{a}_{BA}^{\text{вр}}$ нельзя, т.к. неизвестно угловое ускорение звена AB.

Векторное уравнение

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^{\text{цс}} + \bar{a}_A^{\text{вр}} + \bar{a}_{BA}^{\text{цс}} + \bar{a}_{BA}^{\text{вр}}, \qquad (20)$$

можно решить двумя способами:

1) *Аналитическое решение* (рис. 50). Направим координатные оси x,y.

Спроецируем уравнение (20) на оси координат. Предположим, что $\bar{a}_{\text{ВА}}^{\text{вр}}$ и $\bar{a}_{\text{В}}$ направлены так, как указано на рис. 50.

На ось x : $\quad 0 = a_{BA}^{\text{вр}} \cdot sin\alpha + a_{A}^{\text{вр}} - a_{BA}^{\text{цс}} \cdot cos\alpha,$ откуда

$$a_{BA}^{\text{вр}} = \frac{a_{BA}^{\text{цс}} \cdot cos\alpha - a_{A}^{\text{вр}}}{sin\alpha} = \frac{10 \cdot 0{,}87 - 2}{0{,}5} = 13{,}4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

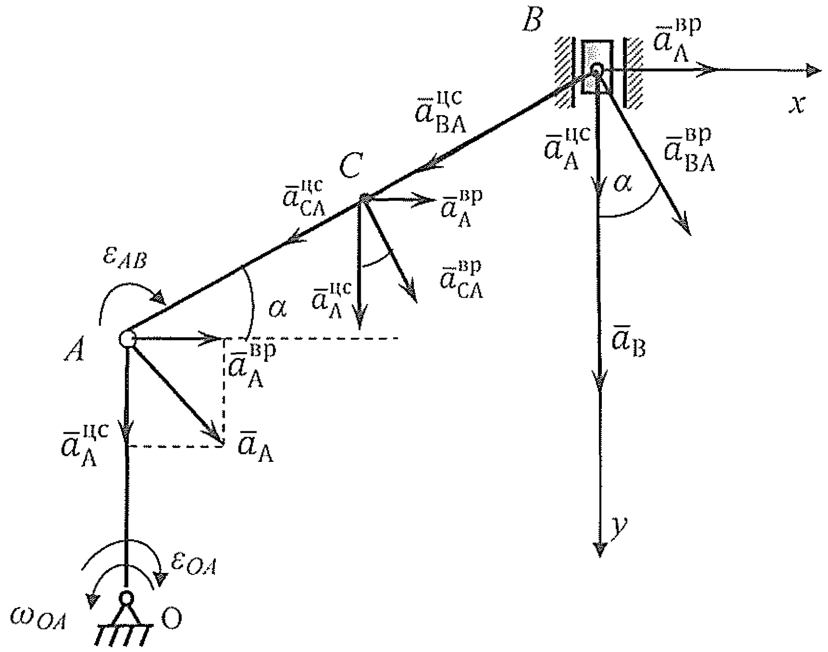


Рис. 50

Так как значение $a_{BA}^{\text{вр}}$ положительное, то выбранное направление для вращательного ускорения верное. Теперь можно найти угловое ускорение шатуна, направление которого определяем по направлению вращательного ускорения $\bar{a}_{\text{ВА}}^{\text{вр}}$

$$\varepsilon_{\text{АВ}} = \frac{a_{\text{ВА}}^{\text{вр}}}{AB} = \frac{13{,}4}{0{,}4} = 33{,}3\ \text{с}^{-2}$$

На ось y: $\quad a_B = a_{BA}^{\text{вр}} \cdot coc\alpha + a_{A}^{\text{цс}} + a_{BA}^{\text{цс}} \cdot sin\alpha = 13{,}4 \cdot 0{,}87 + 5 + 10 \cdot 0{,}5$

$$a_B = 21{,}66\ \frac{\text{м}}{\text{с}^{2}}.$$

Ускорение точки C так же найдём по формуле Эйлера

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA} = \bar{a}_A^{\text{цс}} + \bar{a}_A^{\text{вр}} + \bar{a}_{CA}^{\text{цс}} + \bar{a}_{CA}^{\text{вр}}, \qquad (21)$$

где центростремительное ускорение $\bar{a}_{CA}^{\text{цс}}$ направлено к центру вращения, к точке A и определяется по формуле

$$a_{CA}^{\text{цс}} = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 25 \cdot 0{,}2 = 5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Вектор вращательного ускорения $\bar{a}_{CA}^{\text{вр}}$ направлен перпендикулярно центростремительному, определяется по формуле

$$a_{\text{CA}}^{\text{вр}} = \varepsilon_{\text{AB}} \cdot AC = 33{,}3 \cdot 0{,}2 = 6{,}66\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Чтобы найти численное значение ускорения точки С спроецируем равенство (21) на оси координат и воспользуемся теоремой Пифагора

$$a_{Cx} = a_{CA}^{\text{вр}} \cdot sin\alpha + a_A^{\text{вр}} - a_{CA}^{\text{цс}} \cdot cos\alpha = 6{,}66 \cdot 0{,}5 + 2 - 5 \cdot 0{,}87 = 1\text{м/с}^2$$

$$a_{Cy} = a_{CA}^{\text{вр}} \cdot cos\alpha + a_A^{\text{цс}} + a_{CA}^{\text{цс}} \cdot sin\alpha = 6{,}66 \cdot 0{,}87 + 5 + 5 \cdot 0{,}5 = 13{,}3\text{м/с}^2$$

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2} = \sqrt{1^2 + 13{,}3^2} = 13{,}34\ \text{м/с}^2$$

2) *Графическое решение* – построение диаграммы ускорений (рис. 51).

Построение многоугольника ускорений точки B начнём с известных по модулю и направлению ускорений. Из точки B в масштабе строим вектор ускорения $\bar{a}_{\text{A}}^{\text{вр}}$, к концу этого вектора прикладываем вектор $\bar{a}_{\text{A}}^{\text{цс}}$, затем ускорение $\bar{a}_{\text{BA}}^{\text{цс}}$. Потом через конец вектора $\bar{a}_{\text{BA}}^{\text{цс}}$ проводим линию вращательного ускорения $\bar{a}_{\text{BA}}^{\text{вр}}$ перпендикулярно центростремительному. Линию ускорения точки B проводим вертикально по оси ползуна. Точка пересечения этих линий даст нам искомые ускорения $\bar{a}_{\text{B}}$ и $\bar{a}_{\text{BA}}^{\text{вр}}$, которые измеряем и с учётом масштаба записываем.

Диаграмму ускорений точки С производим последовательным построением известных векторов $\bar{a}_{\text{A}}^{\text{вр}}$, $\bar{a}_{\text{A}}^{\text{цс}}$, $\bar{a}_{\text{CA}}^{\text{цс}}$, $\bar{a}_{\text{BA}}^{\text{вр}}$. Ускорение точки С $\bar{a}_{\text{C}}$ – это вектор от начала первого вектора до конца последнего, который так же измеряем и с учётом масштаба получаем результат.

Значения ускорений, найденные двумя способами, не должны намного отличаться.

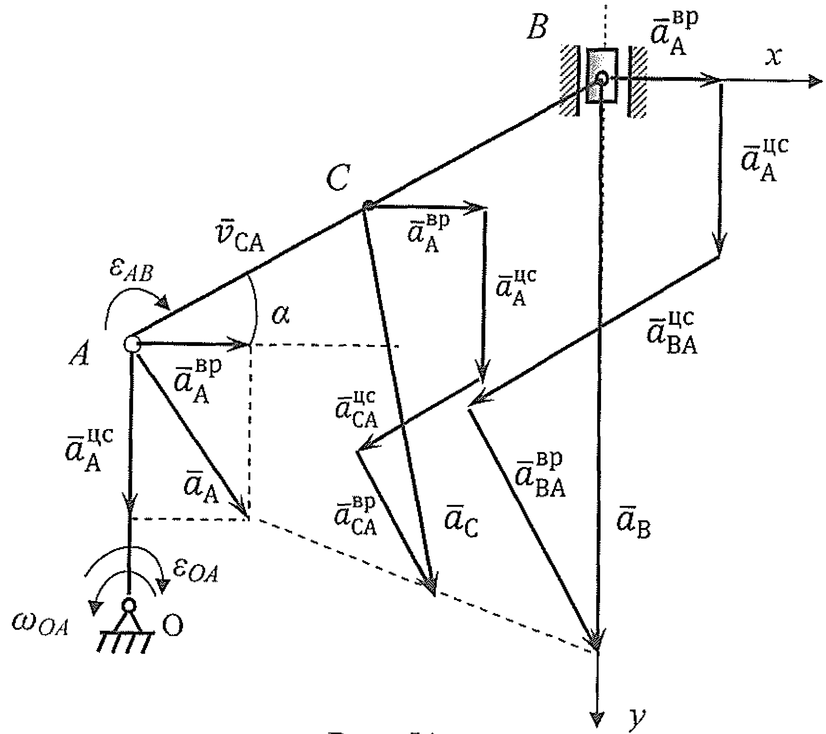


Рис. 51

Ответ: $v_A = 1$м/с; $v_B = 1{,}74$ м/с; $v_C = 1$м/с; $a_A = 5{,}38$ м/с^2;

$a_B = 21{,}66$ м/с^2; $a_C = 13{,}34$ м/с^2.

Тесты для самоконтроля

1. Выбрать верный ответ

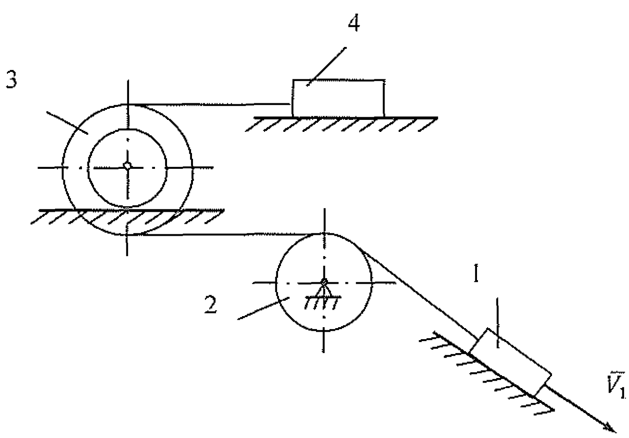
Какое тело данной механической системы совершает плоскопараллельное движение?

а) 1;

б) 2;

в) 3;

г) 4.



2. Выбрать верный ответ

Что называется мгновенным центром скоростей?

а). Точка, через которую проходит мгновенная ось вращения тела.

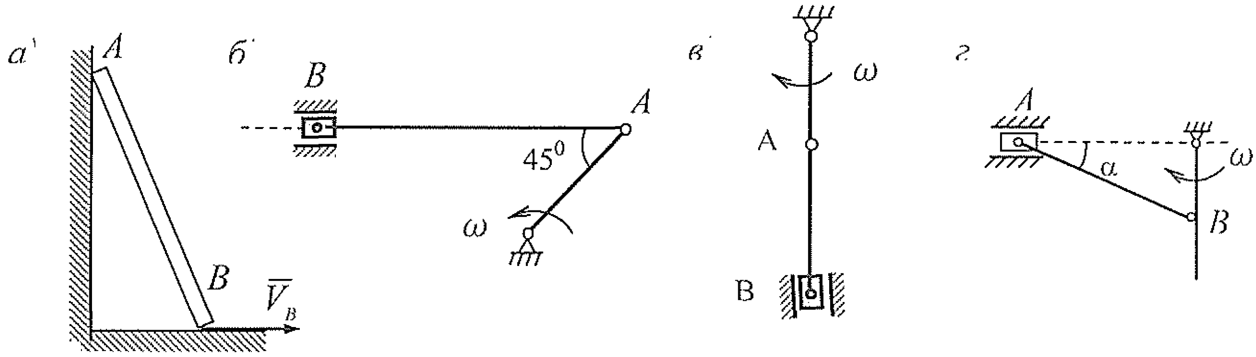
б). Точка, в которой находится центр тяжести тела.

в). Точка, в которой пересекаются все скорости тела.

г). Точка, скорость которой определяется.

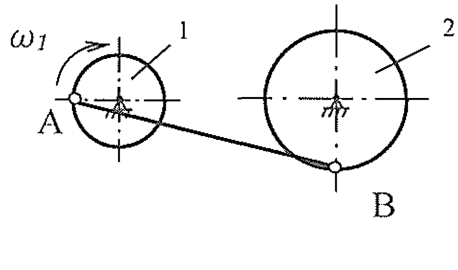
3. Выбрать верный ответ

На каком рисунке тело *AB* не имеет мгновенного центра скоростей?



4. Выбрать верный ответ

Шкив 1 радиуса $R_1=0{,}2$ м и диск 2 радиуса $R_2=0{,}5$ м шарнирно соединены штангой *AB*. Для положения, показанного на рисунке, определить расстояние от точки *B* до мгновенного центра скоростей штанги.



а) 0,2 м;

б) ∞ м;

в) 0,5 м;

г) 0,7 м.

5. Выбрать верный ответ

Известна угловая скорость кривошипа *OA*, который приводит в движение колесо, катящееся по неподвижной вогнутой поверхности без проскальзывания.

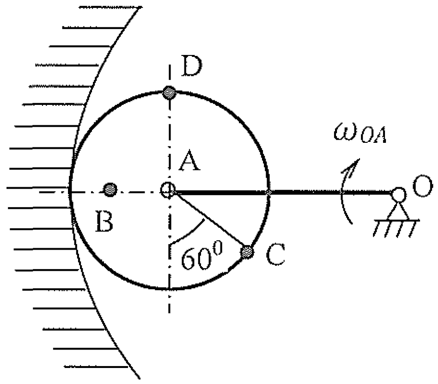
Наибольшее значение скорости имеет точка колеса

а) A;

б) B;

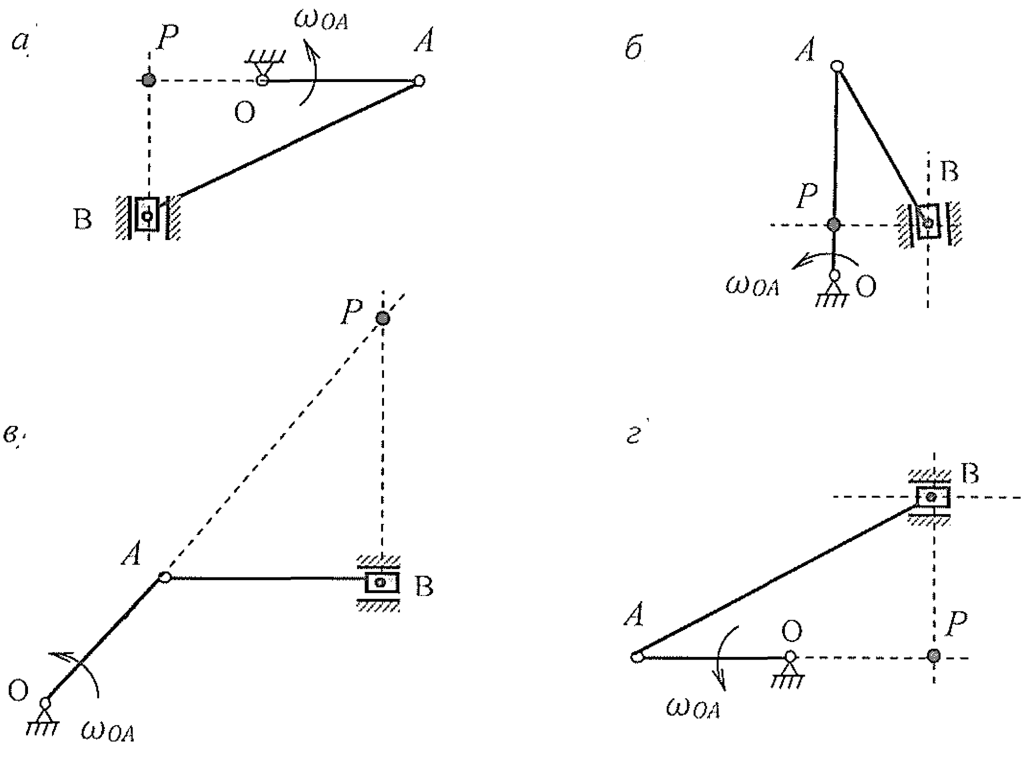
в) C;

г) D.



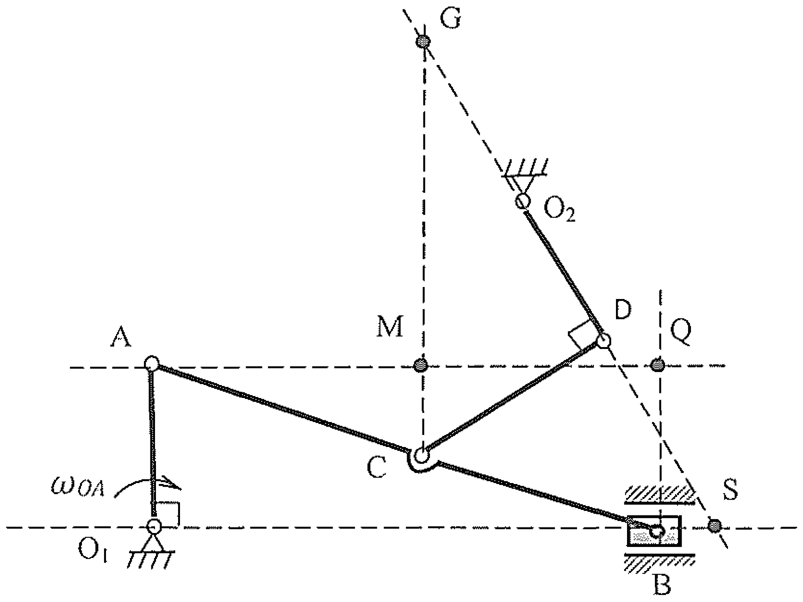
6. Выбрать верный ответ

Указать на каком рисунке МЦС (точка P) указан не верно.



7. Выбрать верный ответ

Для механизма в положении, представленном на рисунке, мгновенный центр скоростей звена CD находится в



а) точке S;

б) точке Q;

в) точке M;

г) точке G.

8. Выбрать верное соответствие.

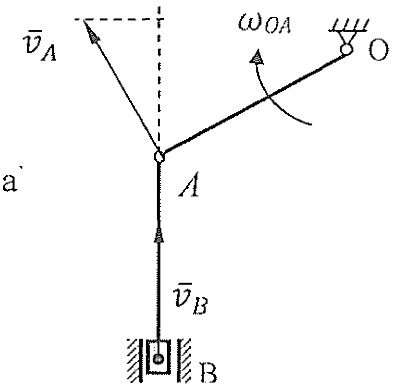
В кривошипно-шатунном механизме задана угловая скорость кривошипа OA. На каком рисунке скорость точки B определена с помощью:

1) мгновенного центра скоростей;

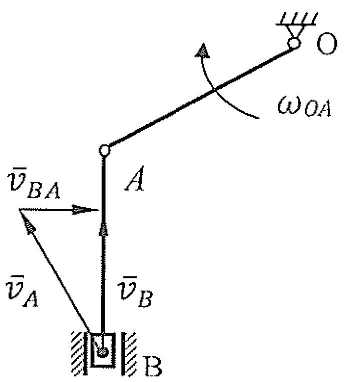
2) теоремы о равенстве проекций скоростей;

3) формулы Эйлера.

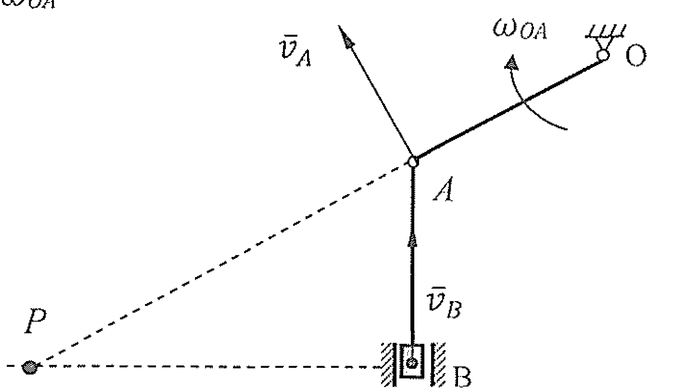
а`



б`

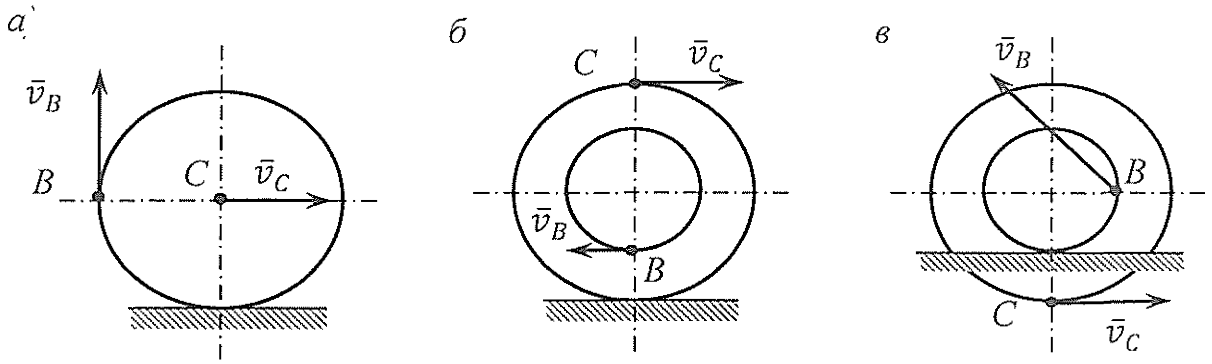


в



9. Выбрать верный ответ

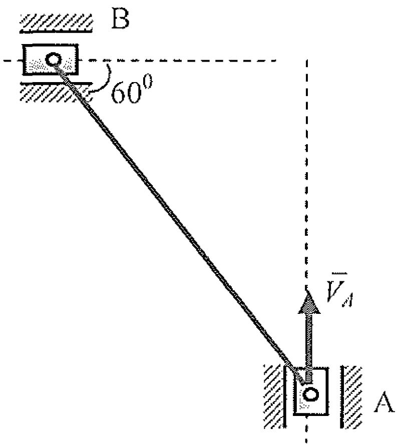
Известна скорость точки C колеса. На каком рисунке скорость точки B изображена верно?



г) нет ни на одном рисунке верного изображения скорости точки B.

10. Выбрать верный ответ

Муфты A и B, скользящие вдоль прямолинейных направляющих, соединены стержнем $AB=20$ см. Скорость муфты A $v_A = 80$ см/с. Угловая скорость ω_{AB} стержня AB равна



а) $\omega_{\text{AB}} = 8\ \text{с}^{-1}$

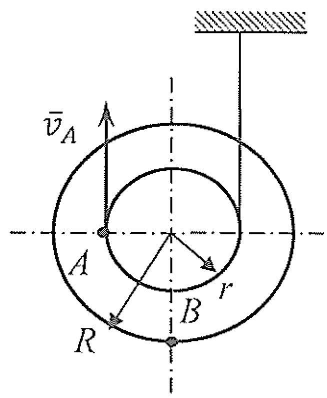
б) $\omega_{\text{AB}} = 2\ \text{с}^{-1}$

в) $\omega_{\text{AB}} = 4\ \text{с}^{-1}$

г) $\omega_{\text{AB}} = 2\sqrt{2}$

11. Выбрать верный ответ

На малый обод ступенчатого колеса наматывается нить, другой конец которой закреплён. Известна скорость точки A колеса, и радиусы R и r, тогда скорость точки B колеса будет равна



а) $v_B = \dfrac{v_A \cdot 2\sqrt{r}}{r}$; б) $v_B = \dfrac{v_A \cdot 2\sqrt{R}}{R+r}$;

в) $v_B = \dfrac{v_A \cdot \sqrt{r^2+R^2}}{2r}$; г) $v_B = \dfrac{v_A \cdot R}{R+r}$.

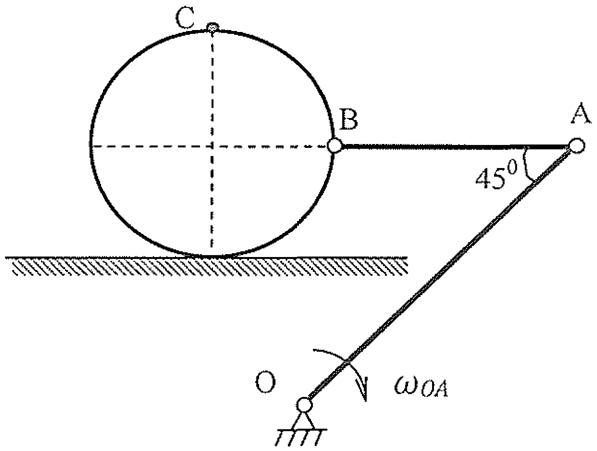
12. Выбрать ложное утверждение

а) Кривошип OA совершает вращательное движение.

б) Стержень AB совершает мгновенно поступательное движение.

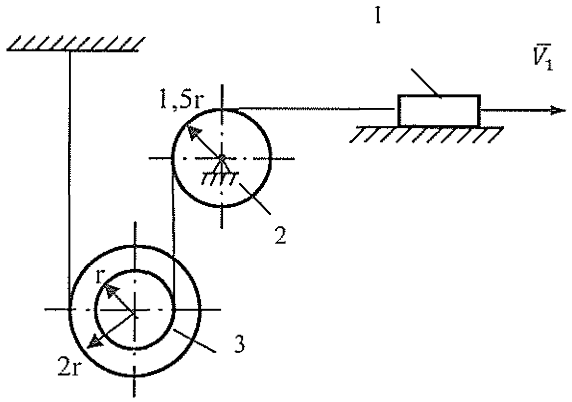
в) Колесо совершает плоскопараллельное движение.

г) Стержень AB совершает вращательное движение.



13. Выбрать верный ответ

Задана скорость груза 1 и радиусы блоков. Угловая скорость подвижного блока 3 равна



а) $\omega_3 = 2v/r$ $\quad c^{-1}$

б) $\omega_3 = v/3r$ $\quad c^{-1}$

в) $\omega_3 = 3v/r$ $\quad c^{-1}$

г) $\omega_3 = 2v/1{,}5r$ $\quad c^{-1}$

14. Выбрать верный ответ

В формуле Эйлера для определения скорости точки тела за полюс принимается:

а) точка, скорость которой задана;

б) точка, скорость которой надо определить;

в) точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю;

г) точка, которая является центром тяжести тела.

15. Выбрать верный ответ

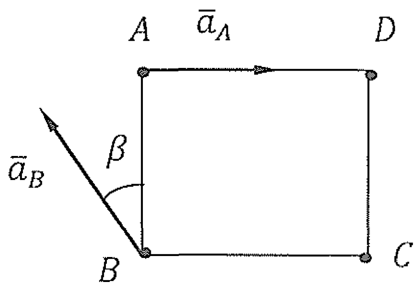
Прямоугольник $ABCD$ совершает плоское движение. Известно ускорение точки A и точки B. Угловая скорость прямоугольника определяется по формуле

а) $\omega = \sqrt{a_A \cdot sin\beta - a_B}$

б) $\omega = (a_A + a_B \cdot sin\beta) \cdot AB$

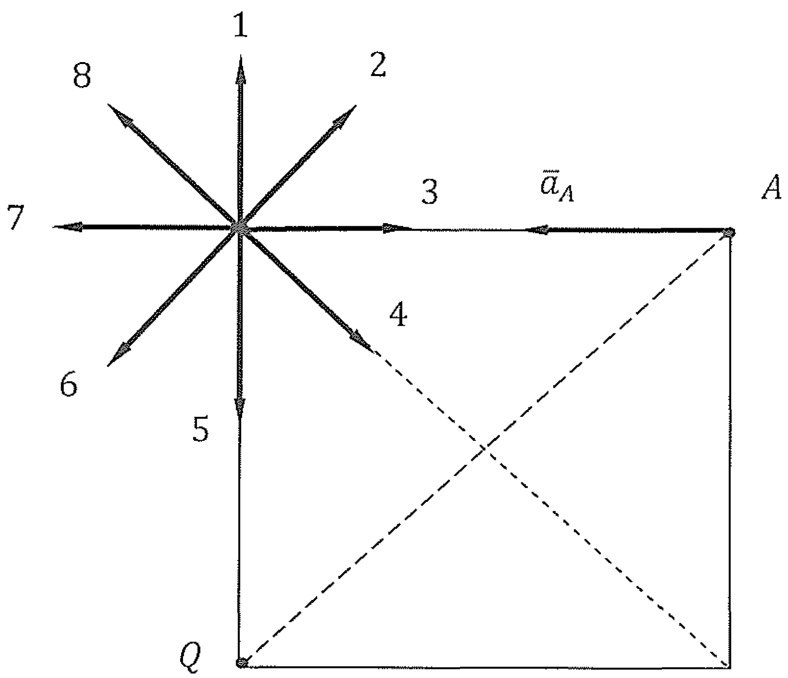
в) $\omega = \sqrt{\dfrac{a_A + a_B \cdot sin\beta}{AB}}$

г) $\omega = \sqrt{\dfrac{a_A - a_B \cdot cos\beta}{AB}}$



16. Выбрать верный ответ

Квадрат со стороной a движется плоскопараллельно так, что известно ускорение $\bar{a}_A$ точки A и положение мгновенного центра ускорений – точка Q . Запишите число, которое указывает направление ускорения точки B.



СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Мы изучали движение точки или тела по отношению к одной заданной системе координат. Однако механические явления по-разному фиксируются в различных системах отсчёта. Наблюдатели, связанные с разными системами координат, неодинаково воспринимают одно и то же объективное механическое явление. В некоторых случаях бывает целесообразно изучать движение точки одновременно по отношению к двум системам координат, одна из которых совершает заданное движение по отношению к другой, принимаемой условно за неподвижную. Главной задачей кинематики сложного движения является установление связи между кинематическими характеристиками, полученными в этих разных системах отсчёта.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Сложным движением точки (тела) называется такое движение, при котором точка (тело) одновременно участвует в двух и более движениях.

Например, сложное движение совершает человек, перемещающийся по движущемуся автобусу, лодка, переплывающая реку.

Движение точки относительно подвижной системы отсчета называется ***относительным движением.*** Скорость и ускорение точки в относительном движении называют ***относительной скоростью и относительным ускорением*** и обозначают $\bar{v}_r$ и $\bar{a}_r$ (relative – относительный).

Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной называют ***переносным движением***. Скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета, где находится интересующий нас объект, называются ***переносной скоростью и переносным ускорением*** и обозначаются $\bar{v}_e$ и $\bar{a}_e$ (emporter – увлекать).

Движение точки относительно неподвижной системы отсчета называется ***абсолютным движением***. Скорость и ускорение точки в абсолютном движении называют ***абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.***

Так, падение яблока в вагоне движущегося поезда относительно неподвижного полотна дороги можно назвать абсолютным, вертикальное падение яблока относительно вагона – относительным и горизонтальное движение вместе с вагоном – переносное.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРА В ПОДВИЖНЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть даны подвижная и неподвижная системы отсчета и какой-либо вектор $\bar{e} = \bar{e}(t)$, который определён в подвижной системе отсчёта, т. е. проекции этого вектора e_x, e_y, e_z на оси подвижной системы – заданные функции времени. Если $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$ единичные векторы подвижной системы координат, то вектор $\bar{e}$ может быть представлен в виде

$$\bar{e} = e_x\bar{\imath} + e_y\bar{\jmath} + e_z\bar{k}. \tag{22}$$

Теперь найдём производную в неподвижной системе координат (абсолютную производную). Продифференцируем обе части равенства (22) по времени. При этом будем иметь в виду, что векторы $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$ вследствие движения подвижной системы координат меняют своё направление, т. е. являются функциями времени. Абсолютная производная вектора $\bar{e}$ по времени будет равна

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = \frac{de_x}{dt}\bar{\imath} + \frac{de_y}{dt}\bar{\jmath} + \frac{de_z}{dt}\bar{k} + e_x\frac{d\bar{\imath}}{dt} + e_y\frac{d\bar{\jmath}}{dt} + e_z\frac{d\bar{k}}{dt}.$$

Сумма первых трёх слагаемых представляет собой производную от вектора $\bar{e}$ в подвижной системе отсчета. Назовём её относительной или локальной производной

$$\frac{d\bar{e}^r}{dt} = \frac{de_x}{dt}\bar{\imath} + \frac{de_y}{dt}\bar{\jmath} + \frac{de_z}{dt}\bar{k}.$$

Зная ***формулы Пуассона***,

$$\frac{d\bar{\imath}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{\imath}, \qquad \frac{d\bar{\jmath}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{\jmath}, \qquad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k},$$

сумма последних трех слагаемых

$$e_x\frac{d\bar{\imath}}{dt}+e_y\frac{d\bar{\jmath}}{dt}+e_z\frac{d\bar{k}}{dt}=e_x(\bar{\omega}\times\bar{\imath})+e_y(\bar{\omega}\times\bar{\jmath})+e_z(\bar{\omega}\times\bar{k})=$$
$$=\bar{\omega}\times\left(e_x\bar{\imath}+e_y\bar{\jmath}+e_z\bar{k}\right)=\bar{\omega}\times\bar{e}.$$

Следовательно

$$\frac{d\bar{e}}{dt}=\frac{d\bar{e}^r}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{e}. \tag{23}$$

Таким образом, абсолютная производная вектора равна сумме относительной производной этого вектора и векторного произведения угловой скорости подвижной системы координат на этот вектор. Данная формула называется ***формулой Бура***.

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ

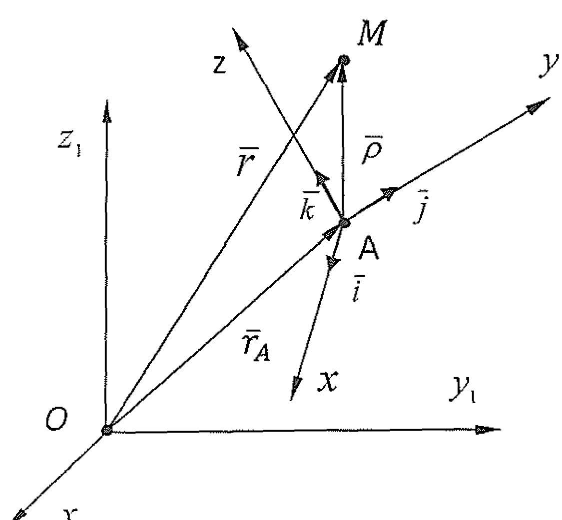
Пусть $Ox_1y_1z_1$ – неподвижная система отсчёта, $Axyz$ – подвижная система отсчёта. Определим скорость точки M по отношению к неподвижной системе координат (рис. 52).

Если радиус-вектор $\bar{r}=\bar{r}(t)$ определяет положение точки M по отношению к неподвижной системе отсчета, радиус-вектор $\bar{r}_A=\bar{r}_A(t)$ определяет положение начала подвижной системы отсчёта в неподвижной, а радиус-вектор $\bar{\rho}=\bar{\rho}(t)$ определяет положение точки M в подвижной системе координат, то в соответствии с рис. 52 имеем

$$\bar{r}=\bar{r}_A+\bar{\rho}. \tag{24}$$

Пусть координаты точки в подвижной системе координат будут x, y, z, тогда $\bar{\rho}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$.

Дифференцируя равенство (24) по времени, найдем абсолютную скорость точки A



$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{d\bar{r}_A}{dt}+\frac{d\bar{\rho}}{dt}. \tag{25}$$

Рис. 52

Так как вектор $\bar{\rho}$ определён в подвижной системе координат, то для нахождения абсолютной производной от него воспользуемся формулой (23)

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}^r}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}, \tag{26}$$

где $\overline{\omega}$ – угловая скорость подвижной системы координат, а

$$\frac{d\bar{\rho}^r}{dt} = \dot{x}\bar{\imath} + \dot{y}\bar{\jmath} + \dot{z}\bar{k}$$

представляет собой относительную производную от $\bar{\rho}$ по времени. Согласно определению, это будет относительная скорость точки

$$\bar{v}_r = \dot{x}\bar{\imath} + \dot{y}\bar{\jmath} + \dot{z}\bar{k}. \tag{27}$$

Подставляя выражения (26) и (27) в соотношение (25), получим

$$\bar{v} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \bar{v}_r\ , \tag{28}$$

где

$$\bar{v}_A = \frac{d\bar{r}_A}{dt}$$

– скорость начала подвижной системы координат по отношению к неподвижной.

Для определения переносной скорости точки закрепим её в подвижной системе координат, т. е. положим в формуле (28) $\bar{v}_r = 0$, тогда получим

$$\bar{v}_e = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{\rho}.$$

Таким образом, имеем

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r, \tag{29}$$

т. е. абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

Для того чтобы найти абсолютное ускорение точки, продифференцируем формулу (28) по времени:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{\rho}}{dt} + \frac{d\bar{v}_r}{dt}. \tag{30}$$

Абсолютную производную вектора относительной скорости $\bar{v}_r$ найдём по формуле

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{d\bar{v}_r^r}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}_r. \tag{31}$$

В этом соотношении

$$\frac{d\bar{v}_r^r}{dt} = \bar{a}_r$$

есть относительная производная вектора $\bar{v}_r$ по времени и, следовательно, представляет

$$\bar{a}_r = \frac{d\bar{v}_r^r}{dt} = \ddot{x}\bar{\imath} + \ddot{y}\bar{\jmath} + \ddot{z}\bar{k}. \tag{32}$$

Используя равенства (26), (27), (31), (32), преобразуем формулу (30) к виду

$$\bar{a} = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \left(\bar{v}_r + (\bar{\omega} \times \bar{\rho})\right) + \bar{a}_r + \bar{\omega} \times \bar{\rho} =$$
$$= \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \bar{a}_r + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r,$$

где $\bar{a} = \dot{\bar{v}}_A$ – ускорение начала подвижной системы координат,
$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}_A$ – её угловое ускорение,
$\bar{a}_e = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})$ – переносное ускорение точки.

Таким образом, имеем

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r.$$

Ускорение, определяемое членом $2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$, называется ***кориолисовым ускорением*** $\bar{a}_C = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$.

Итак, имеем

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c. \tag{33}$$

Эта формула выражает ***теорему Кориолиса***: абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений.

МОДУЛЬ И НАПРАВЛЕНИЕ КОРИОЛИСОВА УСКОРЕНИЯ

Кориолисово ускорение названо по имени французского механика Г. Кориолиса (1792-1843). Это составляющая абсолютного ускорения точки в сложном движении, равная удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения на относительную скорость точки:

$$\bar{a}_C = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r\ . \tag{34}$$

Переносное ускорение характеризует изменение переносной скорости только в переносном движении. Относительное ускорение характеризует изменение относительной скорости только в относительном движении. Что же характеризует кориолисово ускорение?

1. Изменение модуля и направления переносной скорости точки вследствие её относительного движения.

2. Изменение направления относительной скорости точки вследствие вращательного переносного движения.

Модуль кориолисова ускорения определяется как модуль векторного произведения:

$$\bar{a}_C = 2\omega \cdot v_r \sin(\bar{\omega}, \bar{v}_r) .$$

Кориолисово ускорение равно нулю в трёх случаях:

1) если $\bar{\omega} = 0$, т.е. в случае поступательного переносного движения или в моменты обращения в нуль угловой скорости непоступательного переносного движения;

2) если $\bar{v}_r = 0$, т. е. в случае относительного покоя точки или в моменты равенства нулю относительной скорости движущейся точки;

3) если $\sin(\bar{\omega}, \bar{v}_r) = 0$, т. е. когда относительная скорость точки параллельна оси переносного вращения.

Направление кориолисова ускорения определяется направлением векторного произведения $\bar{\omega} \times \bar{v}_r$, т. е. будет направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через $\bar{\omega}$ и $\bar{v}_r$ в ту сторону, откуда кратчайший переход от $\bar{\omega}$ к $\bar{v}_r$ виден происходящим против хода часовой стрелки (рис. 53).

Иногда нахождение кориолисова ускорения облегчается применением следующего правила *Н. Е. Жуковского:*

спроецировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную к оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию на прямой угол в сторону переносного вращения.

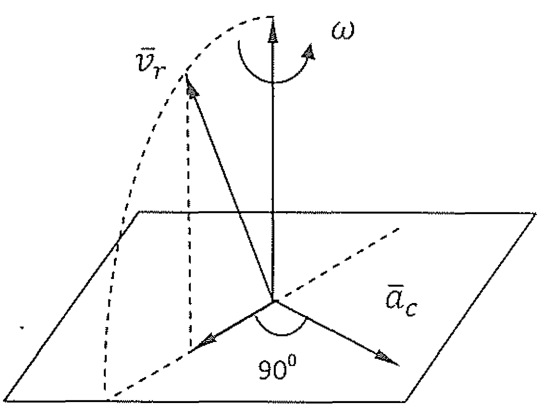


Рис. 53

Задача 5

Точка M движется по ободу диска D радиусам r=48 см. (рис. 54). По заданному уравнению относительного движения точки M $OM = f(t) = 4\pi \cdot t^2$ *и вращению тела D* $\varphi = \sin\left(\dfrac{\pi \cdot t}{6}\right)$ *определить для момента времени* $t = 2$ *с абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.*

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, считая её движение по дуге окружности относительным, а вращение круглой пластинки D – переносным.

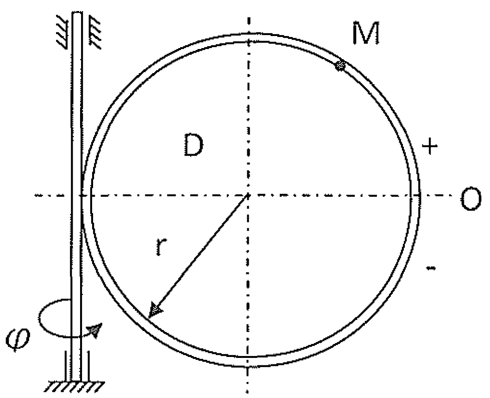


Рис. 54

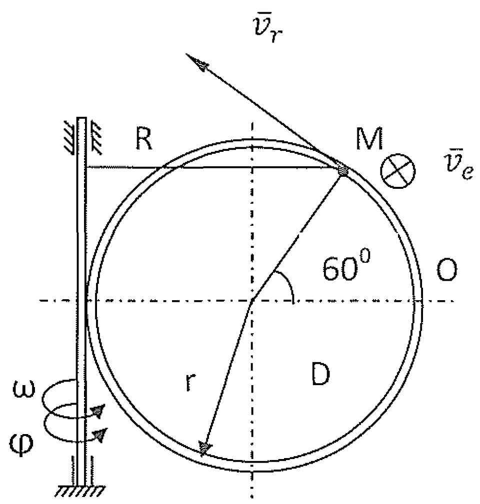


Рис. 55

Определим положение точки в заданный момент времени. Будем считать, что в заданный момент времени плоскость чертежа совпадает с плоскостью диска D. Положение точки M на теле D определим с помощью угла

$$\alpha = \frac{O\breve{M}}{r} = \frac{4\pi 2^2}{48} = \frac{\pi}{3} = 60^0.$$

Отложим угол $\alpha = 60^0$ в положительном направлении от точки O и зафиксируем точку M в заданный момент времени (рис. 55).

Абсолютную скорость точки M найдём как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e.$$

Модуль относительной скорости найдём по формуле

$$v_r = \frac{d(OM)}{dt} = 8\pi \cdot t.$$

При $t = 2$ с. $\qquad v_r = 8 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 50{,}24\,\frac{см}{с}.$

Положительный знак у относительной скорости показывает, что вектор $\bar{v}_r$ направлен в сторону возрастания координаты относительного движения по касательной к траектории.

Модуль переносной скорости определим по формуле $v_e = \omega \cdot R$, где R – радиус кривизны траектории в её переносном движении

$$R = r + r \cdot \cos 60^0 = 48 + 48 \cdot 0{,}5 = 72\ см,$$

ω – угловая скорость вращения тела D, определяется по формуле

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right).$$

При $t = 2$ с.

$$\omega = \frac{3{,}14}{6}\cos 30^0 = 0{,}45\ c^{-1}$$

Положительное значение угловой скорости ω показывает, что вращение совпадает с направлением отсчета угла φ:

$$v_e = 0{,}45 \cdot 72 = 34{,}2\,\frac{см}{с}.$$

Вектор $\bar{v}_e$ направлен по касательной к траектории переносного движения, перпендикулярно радиусу R, в сторону угловой скорости ω, т. е. направлен от нас (перпендикулярно плоскости чертежа). На рис. 55 этот вектор изображён в виде крестика в окружности.

Так как $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости точки M

$$v_M = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 60\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений.

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c,$$

или в развёрнутом виде

$$\bar{a} = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e^{\text{цс}} + \bar{a}_e^{\text{вр}}.$$

Модуль относительного касательного ускорения

$$a_r^\tau = \frac{dv_r}{dt} = 8\pi = 25{,}12\frac{см}{с^2}.$$

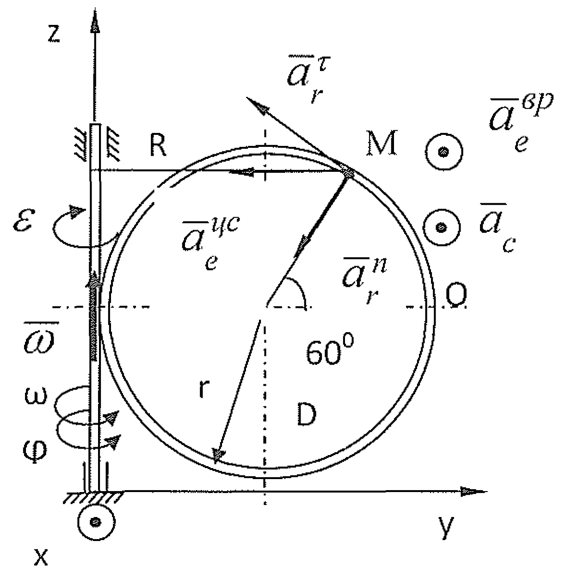


Рис. 56

Вектор этого ускорения направлен по касательной к траектории относительного движения в сторону $\bar{v}_r$ (рис. 56). Так как значения $\bar{v}_r$ и $\bar{a}_r^\tau$ положительны, то относительное движение ускоренное.

Относительное нормальное ускорение определим по формуле

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{r} = \frac{50{,}24^2}{48} = 52{,}58\frac{см}{с^2}$$

и направим по радиусу тела D к центру.

Переносное центростремительное ускорение определяется по формуле

$$a_e^{цс} = \omega^2 \cdot R = 0{,}45^2 \cdot 72 = 14{,}58\frac{см}{с^2}$$

и направлено по радиусу переносного вращения R к оси.

Модуль переносного вращательного ускорения определим по формуле

$$a_e^{вр} = \varepsilon \cdot R,$$

где угловое ускорение вращения тела D

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\pi^2}{36}\sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right).$$

При $t = 2$ с.

$$\varepsilon = -\frac{3{,}14^2}{36}\sin 30^0 = -0{,}14\frac{см}{c^2}.$$

Знак минус указывает на то, что угловое ускорение направлено в противоположную сторону отсчёта угла φ, т. е. имеет место замедленное вращение. Тогда

$$a_e^{вр} = -0{,}14 \cdot 72 = -10{,}0\frac{см}{c^2}.$$

Переносное вращательное ускорение направлено в сторону углового ускорения (противоположно переносной скорости), т. е. перпендикулярно плоскости чертежа – на нас. На чертеже (рис. 56) этот вектор изображён точкой в окружности.

Модуль кориолисова ускорения определим по формуле

$$a_c = 2\omega \cdot v_r \sin\beta ,$$

где β – угол между вектором $\bar{\omega}$ и $\bar{v}_r$. В нашем случае он равен 60^0. Вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ направлен вдоль оси вращения, по правилу буравчика.

$$a_c = 2 \cdot 0{,}45 \cdot 50{,}24 \cdot \sin 60^0 = 38{,}90\frac{см}{c^2}.$$

Направление кориолисова ускорения найдём по правилу Н. Е. Жуковского: спроецируем вектор относительной скорости на плоскость переносного вращения и повернём в ней проекцию на 90^0 в сторону угловой скорости. Вектор кориолисова ускорения направлен на нас, на рис. 57 изображён точкой в окружности.

Модуль абсолютного ускорения найдём аналитическим способом сложений

$$a_{мx} = a_c + a_e^{вр} = 48{,}9\,\frac{см}{c^2},$$

$$a_{мy} = -a_e^{цс} - a_r^n \cos 60^0 - a_r^\tau \sin 60^0 = -62{,}47\,\frac{см}{c^2},$$

$$a_{мz} = -a_r^n \sin 60^0 + a_r^\tau \cos 60^0 = -32{,}66\,\frac{см}{c^2},$$

$$a_м = \sqrt{a_{мx}^2 + a_{мy}^2 + a_{мz}^2} = 85{,}8\,\frac{см}{c^2}\ .$$

<u>Ответ</u>: $v_м = 60{,}0\,\frac{см}{c}$, $a_м = 85{,}8\,\frac{см}{c^2}$.

Тесты для самоконтроля

1. Выбрать наиболее верный ответ

Сложным называется такое движение точки, при котором:

а) точка движется неравномерно и криволинейно;
б) точка одновременно участвует в двух или более движениях;
в) точка движется по сложной траектории;
г) координата точки имеет не линейную зависимость от времени.

2. Установить верное соответствие

1) Движение точки относительно подвижной системы отсчёта...
2) Движение точки относительно неподвижной системы отсчёта…
3) Движение той точки тела, неизменно связанного с подвижной системой отсчёта, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка.
4) Движение начала координат подвижной системы отсчёта относительно неподвижной…

а) называется относительным движением;
б) называется переносным движением;
в) абсолютным движением;
г) не соответствует ни одному из видов сложного движения точки.

3. Выбрать верный ответ

По какой формуле в общем случае определяется численное значение абсолютной скорости точки при её сложном движении?

а) $v = v_r + v_e$;

б) $v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}$;

в) $v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos(\bar{v}_r \bar{v}_e)}$;

г) $v = \omega \cdot R$.

4. Выбрать верный ответ

Сформулируйте теорему о сложении скоростей при сложном движении точки.

а). Абсолютная скорость точки равна алгебраической сумме её переносной и относительной скоростей.

б). Переносная скорость точки определяется суммой абсолютной и относительной скоростей.

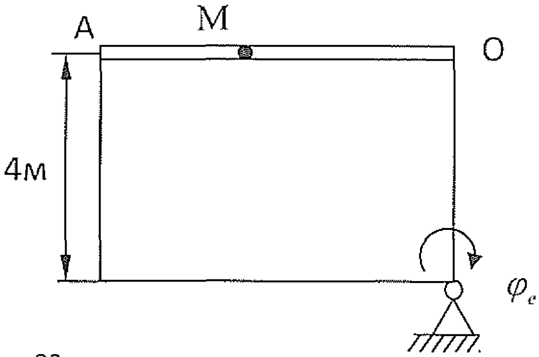
в). Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме её относительной и переносной скоростей.

г). Относительная скорость точки равна геометрической сумме абсолютной и переносной скоростей.

5. Выбрать верный ответ

Прямоугольная пластинка вращается в плоскости чертежа по закону $\varphi = 2\pi \cdot t^2$, вдоль стороны OA движется точка M по закону $OM = 3 \cdot t$.

Определить переносную скорость точки М через одну секунду после начала движения



а) $v_e = 80\pi$

б) $v_e = 64\pi^2$

в) $v_e = 10\pi$

г) $v_e = 20\pi$

6. Выбрать верный ответ

На каком рисунке верно указано направление переносной скорости точки М?

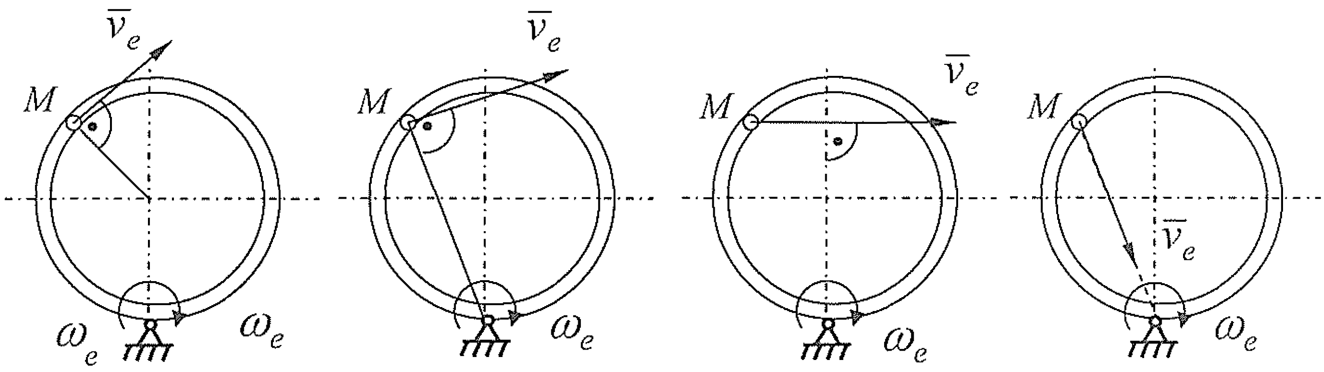
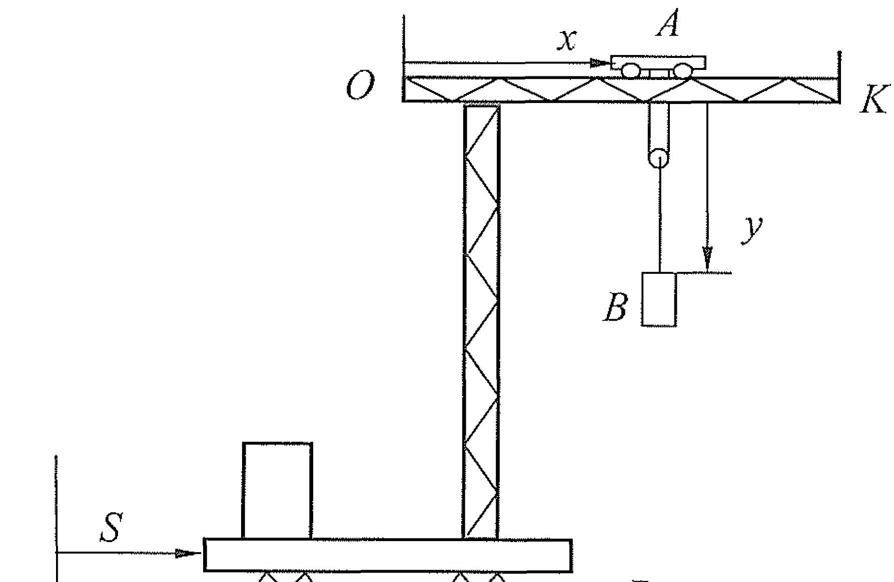


Рис. а *Рис. б* *Рис. в* *Рис. г*

7. Выбрать верный ответ

Подвижный подъёмный кран перемещается по горизонтальным рельсам O_1D согласно уравнению $S=4(t+3)$ см. Стрела крана OK параллельна рельсам, по стреле движется тележка A согласно уравнению $x = 10 - 2 \cdot t$ см. Груз B движется вертикально с помощью лебёдки, установленной на тележке, по закону $y = 6+2 \cdot t$. Абсолютная скорость груза B будет равна



а) $2\sqrt{2}$

б) $4\sqrt{3}$

в) 12

г) 2

8. Выбрать верный ответ

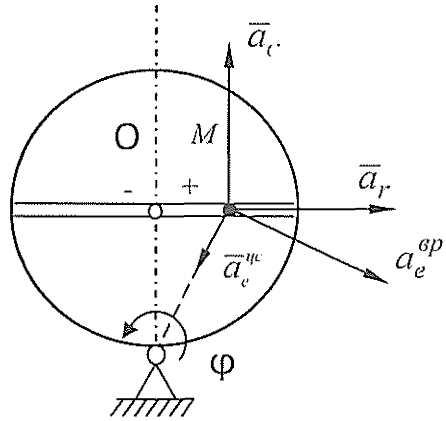
Круглая пластинка вращается в плоскости чертежа по закону $\varphi = 2\pi \cdot t^2$. По диаметру движется точка M по закону $OM = 3 \cdot t^2$. Вектор какого ускорения изображён неверно?

а) $\overline{a}_r$

б) $\overline{a}_e^{цс}$

в) $\overline{a}_e^{вр}$

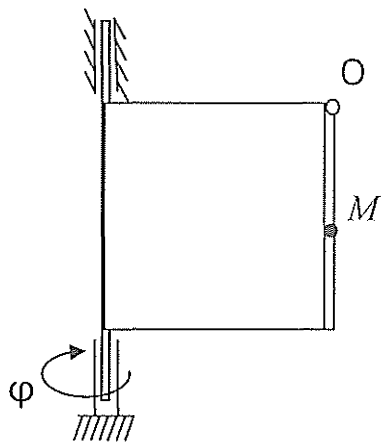
г) $\overline{a}_c$



9. Выбрать верный ответ

Прямоугольная пластинка вращается относительно вертикальной оси по закону $\varphi = 7\pi t$. Вдоль одной из сторон движется точка M по ну $OM = 4 \cdot \dot{t}$. Абсолютное ускорение точки M в данном случае равно:

а) относительному ускорению;
б) переносному ускорению;
в) ускорению кориолиса;
г) нулю.



10. Выбрать верный ответ

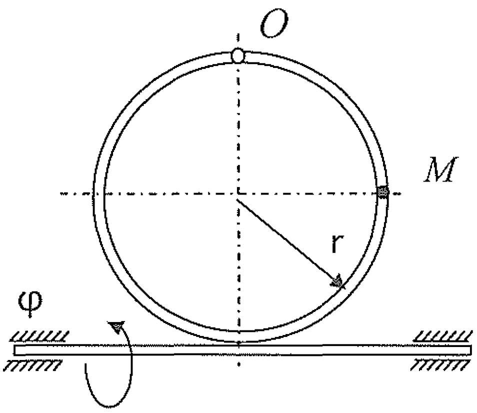
Правило, по которому определяют направление кориолисова ускорения, называется правилом:

а) Риттера;
б) Лагранжа;
в) Кориолиса;
г) Жуковского.

11. Выбрать верный ответ

11. Выбрать верный ответ

Круглая пластинка радиуса $r = 0{,}5$ *м* вращается в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа, по закону $\varphi = 2\pi t$. По ободу пластины движется точка М по закону $OM = 4\pi \cdot t$. В значении какого ускорения для данного положения точки М допущена ошибка?



а) $a_e^{цс} = 2\pi^2$

б) $a_r^n = 8\pi^2$

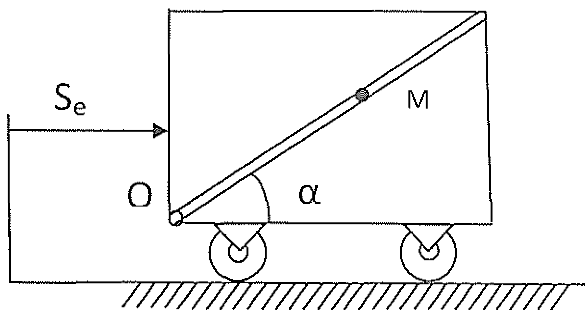
в) $a_r^\tau = 0$

г) $a_c = 16\pi^2$

12. Выбрать верный ответ

Прямоугольная тележка движется по закону S_e=24·t, по диагонали тележки перемещается точка по закону $OM = 3 \cdot t^2$. Какие из перечисленных ниже ускорений равны нулю через одну секунду после начала движения?

а) Относительное;
б) переносное;
в) кориолисово;
г) абсолютное.



13. Выбрать верный ответ

В каких случаях кориолисово ускорение равно нулю:

а) относительное движение является равномерным;

б) переносное движение является поступательным;

в) относительное и переносное движения происходят в одной плоскости;

г) вектор относительной скорости параллелен оси вращения переносного движения.

14. Выбрать верный ответ

Модуль кориолисова ускорения определяется по формуле:

а) $a_c = 2\omega \cdot v_r \sin(\overline{\omega}, \overline{v}_r)$

б) $a_c = 2\omega \cdot v_r \cos(\overline{\omega}, \overline{v}_r)$

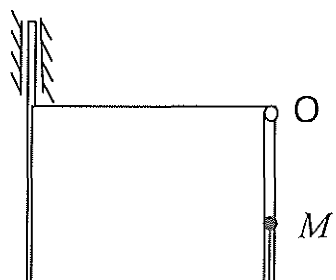
в) $a_c = \omega \cdot v_r \cos(\overline{\omega}, \overline{v}_r)$

г) $a_c = \omega \cdot v_r \sin(\overline{\omega}, \overline{v}_r)$

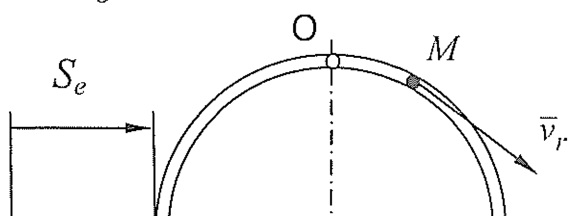
15. Выбрать верный ответ

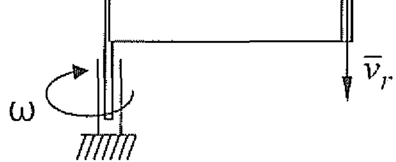
На каких рисунках вектор кориолисова ускорения равен нулю?

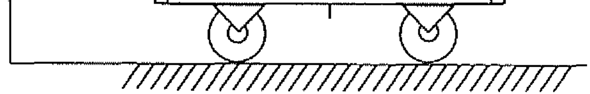
а



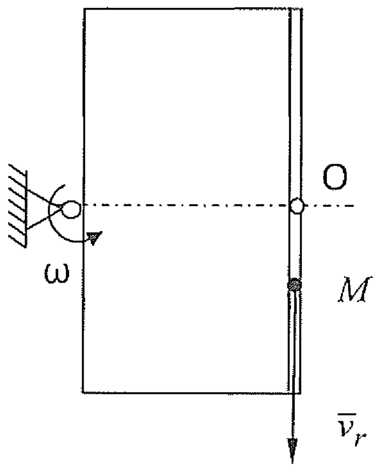
б



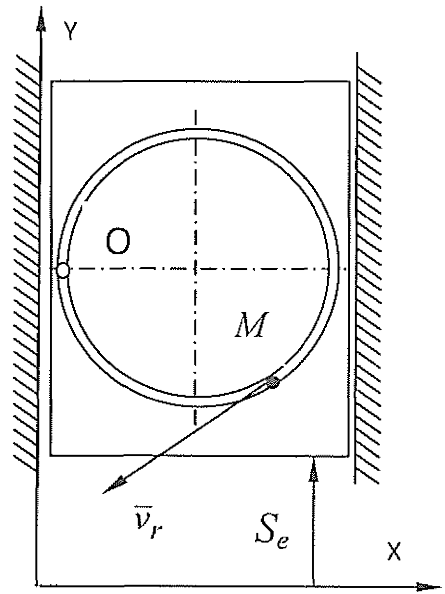




в

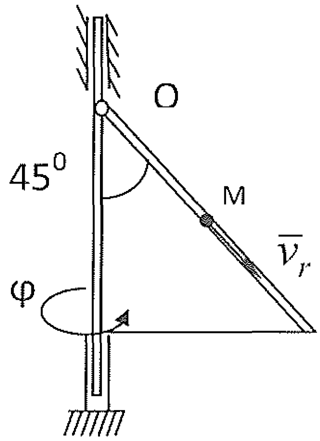


г



16. Выбрать верный ответ

Точка М движется вдоль гипотенузы треугольной пластины со скоростью $v_r = 4$ м/с. Пластинка, в свою очередь, вращается по закону $\varphi = 8\pi t$. Ускорение Кориолиса точки M равно:



а) $8\pi\sqrt{2}$ $м/с^2$

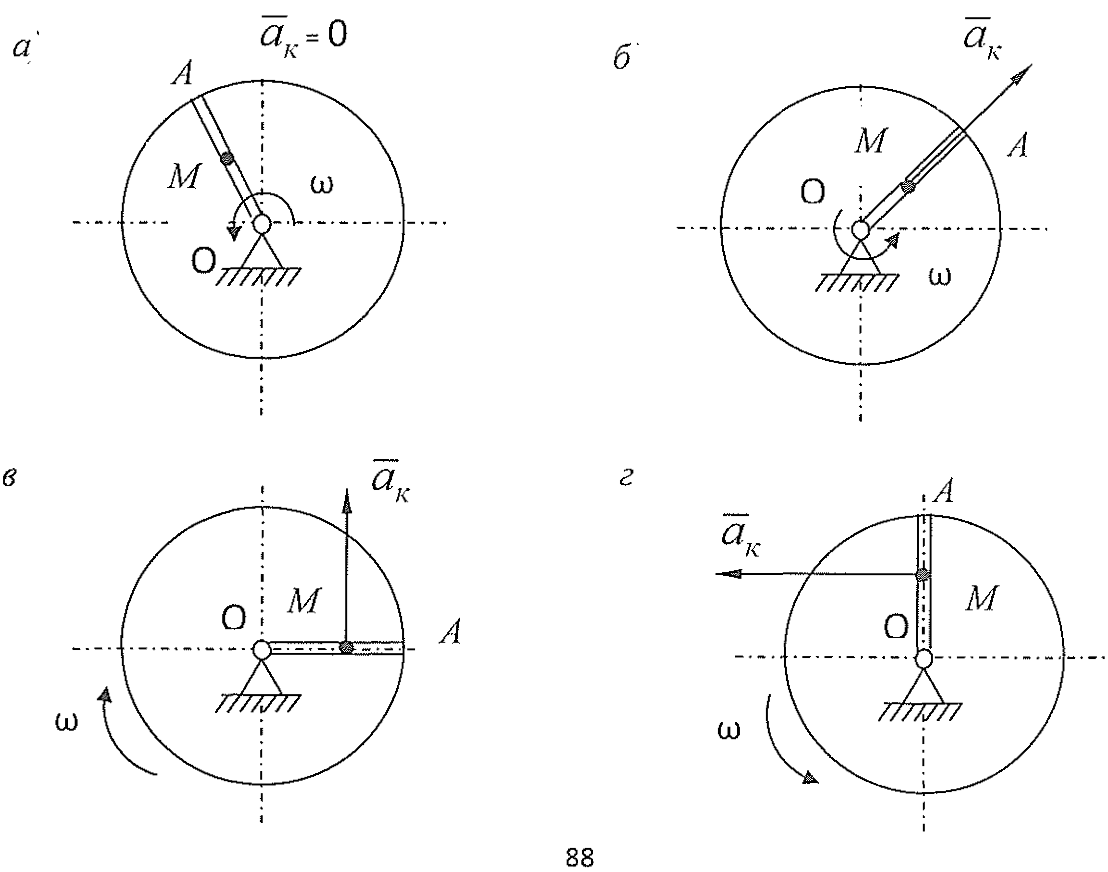
б) 16π $м/с^2$

в) $32\pi\sqrt{2}$ $м/с^2$

г) 32π $м/с^2$

17. Выбрать верный ответ

Указать правильное направление ускорения Кориолиса точки М при движении её вдоль радиуса *ОА* (от точки *О* к точки *А*) диска, который вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска.



18. Выбрать верный ответ

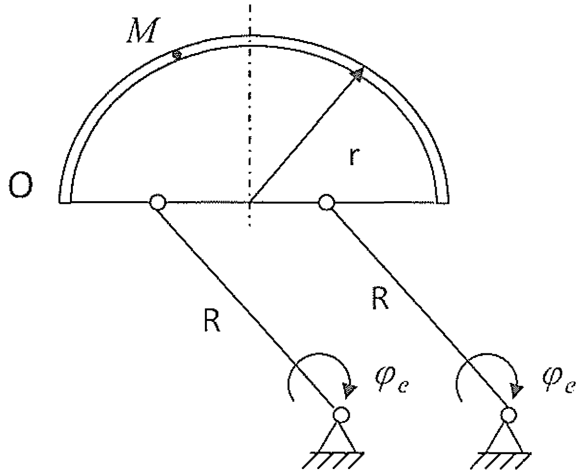
Два стержня одинаковой длины R вращаются по закону $\varphi_e = f(t)$. Стержни приводят в движение половину диска радиусом r, по ободу которой перемещается точка M. Модуль вектора переносной скорости точки M определяется по формуле:

а) $v_e = \dot{\varphi}_e \cdot R$;

б) $v_e = \dot{\varphi}_e \cdot r$;

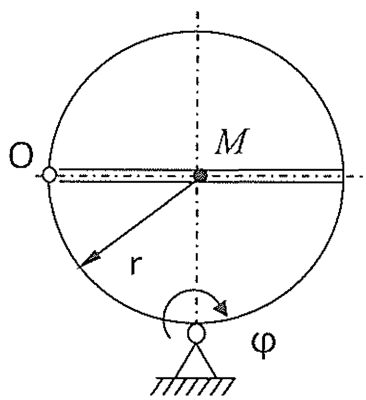
в) $v_e = \dfrac{d(OM)}{dt}$;

г) $v_e = 0$



19. Выбрать верный ответ

Круглая пластинка вращается в плоскости чертежа по закону $\varphi = 2\pi \cdot t$. По диаметру пластинки движется точка M по закону $OM = 3 \cdot t$. Модуль полного ускорения точки M в указанном положении равен



а) $4\pi^2 r$

б) $12\pi r$

в) $4\pi(3+\pi r)$

г) $2\pi r(1+\pi)$

Заключение

Учебное пособие написано на кафедре «Строительные конструкции» в соответствии с рабочей программой дисциплины «Теоретическая механика» для бакалавров технического и технологического направлений. Работа адаптирована для студентов заочного факультета, обучающихся с применением дистанционных образовательных технологий.

Теоретический материал охватывает все основные понятия, определения и принципы кинематики. Данное пособие позволяет студенту не только изучить основные идеи и методы классической дисциплины «Теоретическая механика», но и получить определённый навык решения задач кинематики: определить вид движения тела, найти скорость и ускорение любой точки тела, определить траекторию движения и др.

Кроме теоретического материала в пособии даны методические указания и примеры решения задач по всем основным темам раздела «Кинематика». В конце каждой темы студентам предложен тестовый контроль, результаты которого они могут проверить по таблицам из прил. 3.

В прил.1 даны задания для контрольной работы по кинематике. В прил. 2 изложены минимально необходимые сведения о правилах и приёмах применения векторного исчисления в трёхмерном евклидовом пространстве, а так же минимально необходимая информация из тригонометрии, высшей математики. Для большинства студентов заочного обучения задачи, связанные с применением этих знаний математики, вызывают затруднение.

Изучение кинематики не заканчивается освоением рассмотренных общих закономерностей. Приобретение навыков самостоятельного решения практических задач – непременное условие овладения разделом курса теоретической механики.

Издание можно рекомендовать для самостоятельного изучения раздела «Кинематика» курса теоретической механики и последующего самоконтроля не только студентам заочной, но и дневной формы обучения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бутенин, Н.В.* Курс теоретической механики : в 2т. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – Спб.: Лань, 2008. – Т.1. – 272 с.
2. *Яблонский, А. А.* Курс теоретической механики : в 2т. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова М : КноРус, 2005. – Т.1. – 368 с.
3. *Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М. : Высш. шк., 2008 – 416 с.
4. *Мещерский, И.В.* Сборник задач по теоретической механике / под ред. Н.В. Бутенина. – М. : Наука, 1986 . – 447 с.
5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. А.А. Яблонского. М. : Интеграл-Пресс, 2002 . – 382с.
6. *Диевский, В. А.*
   Теоретическая механика [Электронный ресурс] : . – М. : Лань, 2009. - 320 с. - 1 экз.
   URL : http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=130
7. *Доев, В.С.*
   Сборник заданий по теоретической механике на базе Mathcad [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.С. Доев, Ф.А. Доронин. – М. : Лань, 2010. - 585 с. : ил., табл.
   URL : http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=133
8. *Никитин, Н.Н.*
   Курс теоретической механики [Электронный ресурс] : учебник / Н. Н. Никитин. – М. : Лань, 2011. - 720 с. : ил.
   URL : http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=1807

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Контрольная работа № 2 по разделу «Кинематика» состоит из четырёх задач К-1, К-2, К-3, К-4 К каждой задаче контрольной работы даётся 10 рисунков и таблица, содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. 1.6 – это рис. 6 к задаче К-1. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра (номеру зачётной книжки), а номер условия в таблице – по последней. Например, если зачётная книжка (шифр) оканчивается числом 38, то берут рис. 3 и условия № 8 из таблицы.

Контрольная работа выполняется в ученической тетради (12 листов). На обложке указывают: название дисциплины, номер контрольной работы, фамилия, имя, отчество студента, номер зачётной книжки (шифр), курс, факультет, направление, профиль обучения.

Решение каждой задачи необходимо начинать на отдельном листе. Сверху указывается номер задачи, далее записывается, что дано в задаче и что требуется определить (текст задачи можно не переписывать), и делается чертёж с учётом условий решаемого варианта. Чертёж должен быть аккуратным. Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями и подробно излагать весь ход расчётов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний преподавателя.

При решении задач необходимо учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. Линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а линии, перпендикулярные строкам, – вертикальными. Все связи считаются идеальными.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращены для переделки. На повторное рецензирование присылается та же работа с приложенными к ней исправлениями.

Задача К-1

По заданным уравнениям движения точки M (рис. К-1.0 – К-1.9, название рисунков дано условно) $x = x(t)$ и $y = y(t)$ установить и построить вид её траектории. Для момента времени $t=1$ с найти и построить положение точки на траектории, её скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, к также радиус кривизны траектории. Необходимые для решения данные приведены в табл. К-1.

$$x = a \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) + b$$
$$y = c \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) - d$$

Рис. К-1.0

$$x = c - d \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$
$$y = a - b \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

Рис. К-1.1

$$x = b \cdot t^2 + a - d$$
$$y = -c \cdot t$$

Рис. К-1.2

$$x = c \cdot \sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) + d$$
$$y = b - a \cdot \cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$

Рис. К-1.3

$$x = d \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$
$$y = -a + b \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) - d + c$$

Рис. К-1.4

$$x = b \cdot t$$
$$y = a - c \cdot t^2 - d$$

Рис. К-1.5

$$x = (a - b) \cdot t$$
$$y = dt^2 + c$$

Рис. К-1.6

$$x = d \cdot t^2 - b$$
$$y = (c + a) \cdot t$$

Рис. К-1.7

$$x = d - a \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$
$$y = (c - b) \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$

Рис. К-1.8

$$x = d \cdot \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$
$$y = -c - b \cdot \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) + a$$

Рис. К-1.9

Таблица К-1

Номер условия	a (см)	b (см)	c (см)	d (см)
0	2	3	2	4
1	1	5	2	2
2	5	4	1	3
3	3	3	2	4
4	1	2	1	2
5	3	2	2	4
6	2	5	4	3
7	6	1	3	4
8	4	2	1	6
9	3	3	2	5

Указания к решению задачи К-1

Задача К-1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах – координатный способ задания движения точки. Точка M движется в плоскости xy. Траекторию движения точки, векторы скорости и ускорения точки необходимо выполнить в масштабе, удобном для наглядности решения задачи. В некоторых вариантах задачи К-1 при определении траектории следует учесть известные из тригонометрии формулы см. прил. 2, при определении скорости и ускорения точки также можно воспользоваться прил. 2, чтобы вспомнить правила дифференцирования.

Теоретический материал для решения задачи находится на стр. 8-14 данного пособия, пример решения задачи рассмотрен на стр. 16-19.

Задача К-2

На рис. К-2.0 – К-2.9 изображены механизмы, преобразующие поступательное движение груза во вращательное движение других тел. Эти механизмы состоят из четырёх тел: груза 1, ступенчатых колес 2, 3 и 4. Груз 1 привязан к концу нити, намотанной на одно из колес. Колеса 2 и 3, 3 и 4 связаны между собой ременной или зубчатой передачей. Для всех колес заданы их радиусы. Причем размеры ступенчатых звеньев определяются радиусами малого и большого колес r, R с индексами этих звеньев. Например, радиусы малого и большого колес ступенчатого звена 2 обозначаются соответственно через r_2, R_2 .

Движение механизма определяется законом движения груза 1. В табл. К-2 для каждого варианта приведены числовые данные и функциональные законы скорости груза 1.

Определить в момент времени $t = 1$ с скорость и ускорение точки M. Высчитать для этого момента времени значения угловых скоростей и ускорений всех звеньев, совершающих вращательные движения вокруг неподвижных осей.

Указания к решению задачи К-2

Данная задача относится к теме "Кинематика поступательного и вращательного движения твердого тела". В ней рассматривается преобразование поступательного движения тела 1 во вращательные движения всех остальных звеньев. При решении задачи следует учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня одинаковы.

Теоретический материал для решения задачи находится на стр.28-34 данного пособия, пример решения задачи рассмотрен на стр. 36-38. Сведения из курса математики, необходимые для решения данной задачи, можно найти в прил. 2 данного пособия.

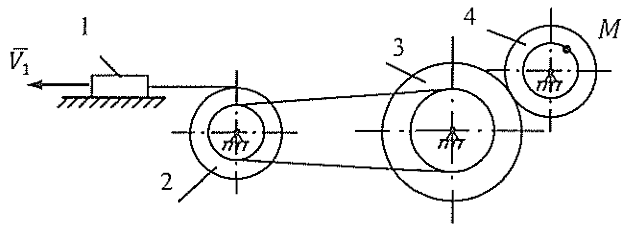


Рис. К-2.0

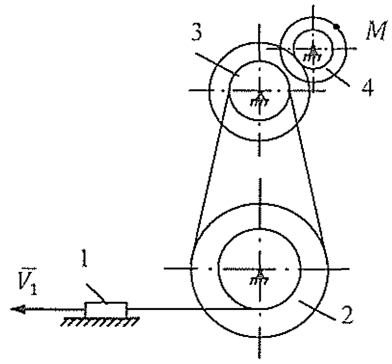


Рис. К-2.1

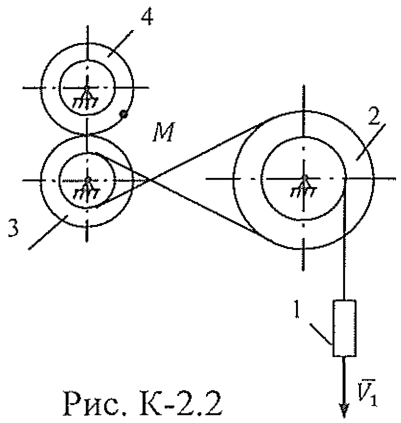


Рис. К-2.2

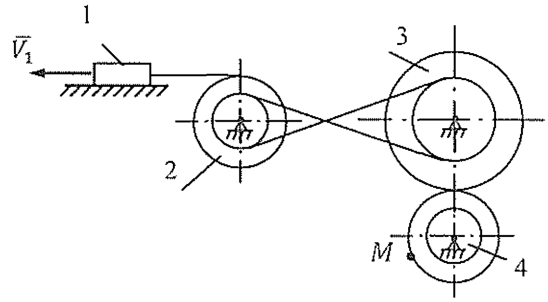


Рис. К-2.3

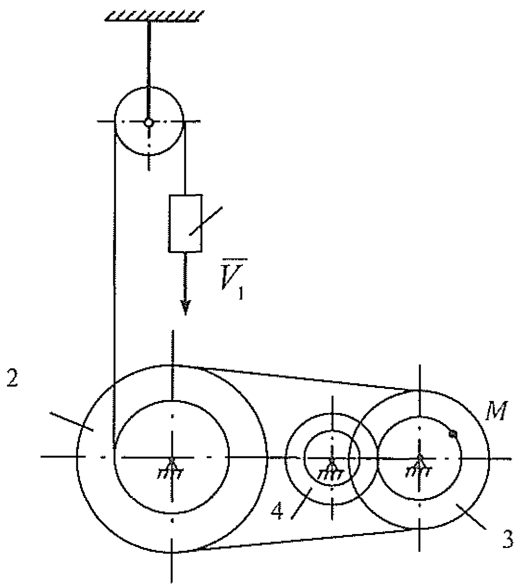


Рис. К-2.4

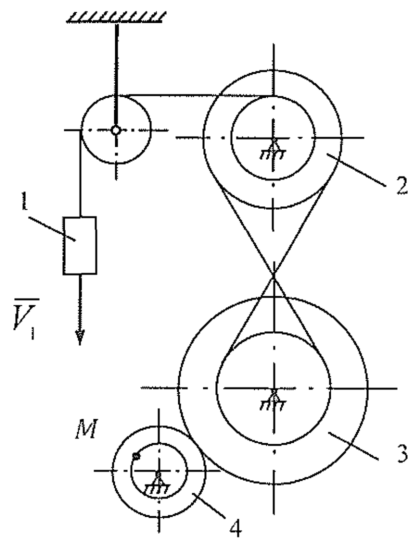


Рис. К-2.5

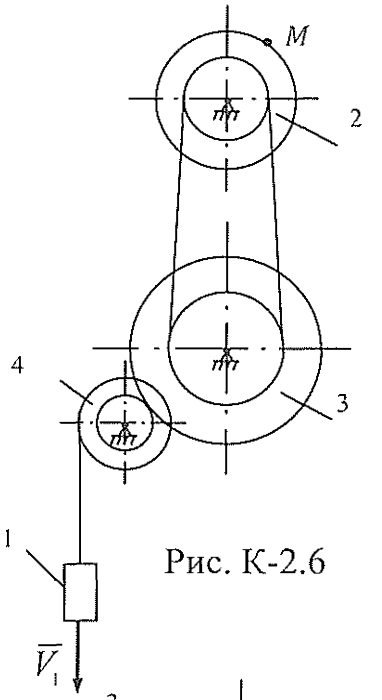


Рис. К-2.6

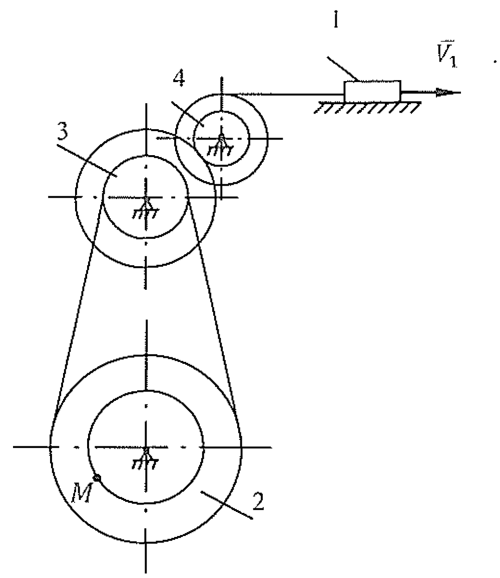


Рис. К-2.7

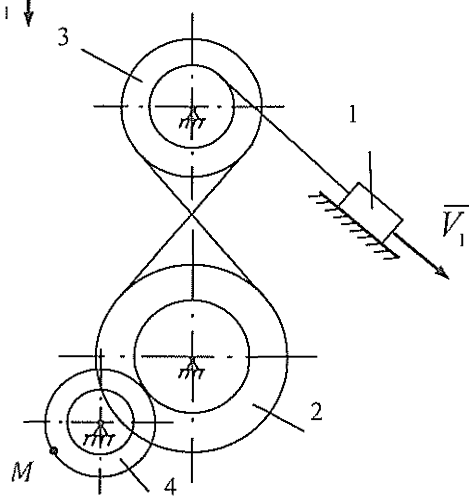


Рис. К-2.8

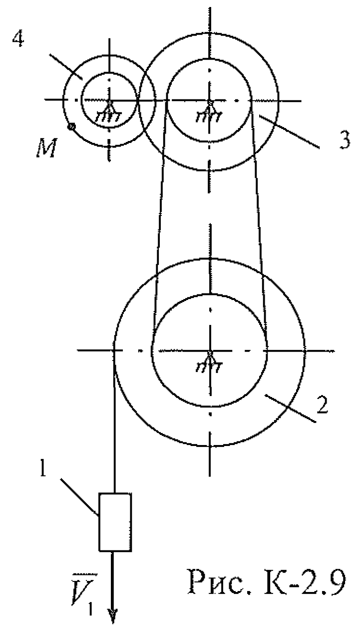


Рис. К-2.9

Таблица К-2

Номер условия	$V_1=f(t)$	R_2 см	r_2 см	R_3 см	r_3 см	R_4 см	r_4 см
0	$5t-3t^2$	25	18	20	5	12	6
1	$-3t+4t^2$	26	10	40	25	22	11
2	$4t-3$	30	15	22	11	18	3
3	$4\cdot\cos(\pi t/4)$	26	12	18	6	24	18
4	$2\cdot\sin(\pi t/3)$	38	16	42	21	32	16
5	$5t-t^2$	24	12	30	6	20	5
6	$-t+3t^2$	45	20	36	18	16	8
7	$3\cdot\cos(\pi t/6)$	40	24	28	7	24	12
8	$\cos(\pi t/3)$	32	18	14	7	28	20
9	$7-3t^2$	45	30	26	13	42	21

Задача К-3

Для заданного положения плоского механизма найти для рис а) скорости точек А, В, С, а также угловую скорость двухступенчатого колеса с радиусами R и r, катящегося по неподвижной поверхности, и угловую скорость стержня АВ. Для рис. б) скорость и ускорение точек А и В кривошипно-шатунного механизма, а также угловую скорость и угловое ускорение шатуна АВ. Схемы механизмов изображены на рисунках К-3.0 – К-3.9, а необходимые для расчёта данные приведены в табл. К-3.

Указания к решению задачи К-3

Для эффективного решения задания сначала следует изучить теоретический материал по теме: "Кинематика плоскопараллельного движения твердого тела" (стр. 45-56). Особенно следует обратить внимание на способы определения скоростей точек звеньев методом мгновенного центра скоростей. Основные понятия, идеи и методы этой темы представлены в теоретической части данного пособия. Пример решения задачи К-3 представлен на стр. 56-65.

Таблица К-3

Номер условия	ω_{OA} c^{-1}	OA см	AB см	α град	Для рис. а)		Для рис. б)
					R см	r см	ε_{OA} c^{-2}
0	2	0,6	1,0	60	0,3	0,1	4
1	4	0,5	0,8	30	0,4	0,2	5
2	1	0,8	1,2	30	0,2	0,1	3
3	5	0,5	1,0	45	0,5	0,3	6
4	2	0,4	0,5	60	0,3	0,2	3
5	2	0,3	0,7	75	0,2	0,1	4
6	3	0,7	1,1	45	0,6	0,5	6
7	1	0,4	0,6	30	0,3	0,1	2
8	3	0,6	0,9	60	0,4	0,3	4
9	4	0,5	0,8	15	0,4	0,1	5

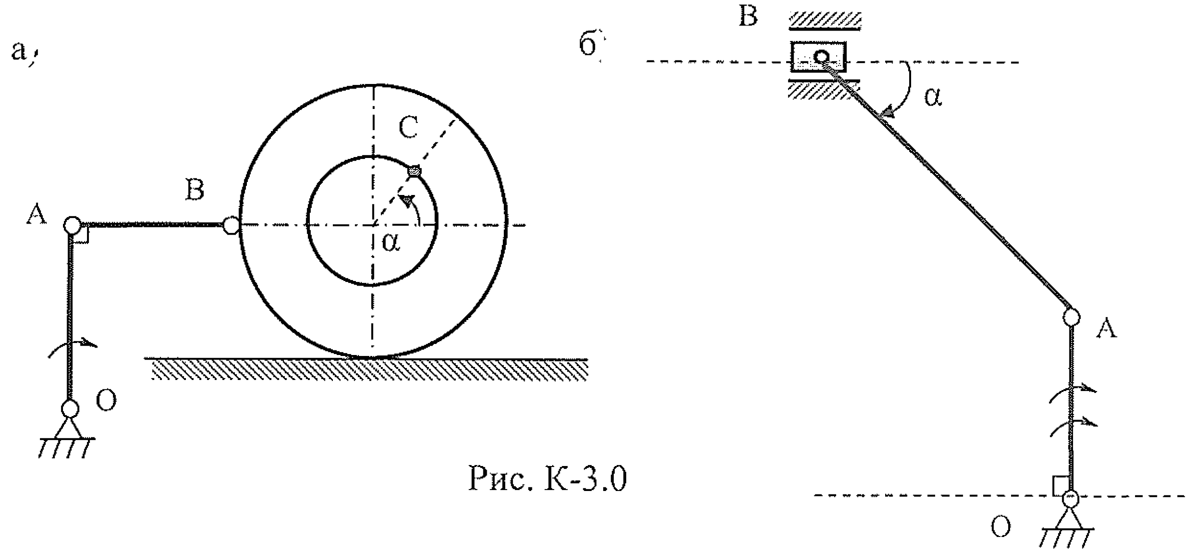


Рис. К-3.0

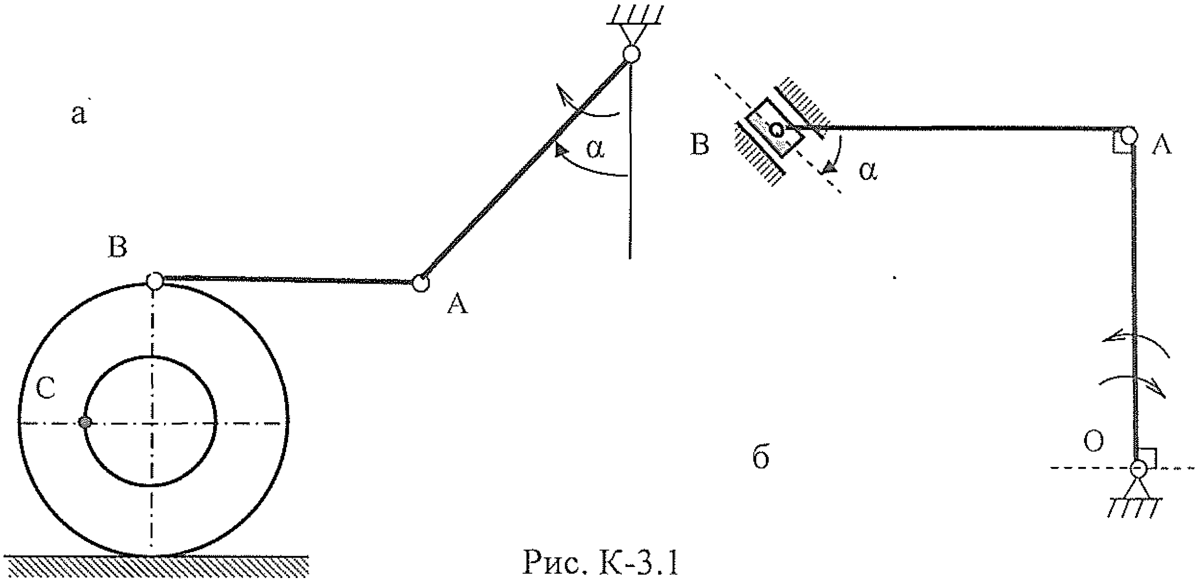


Рис. К-3.1

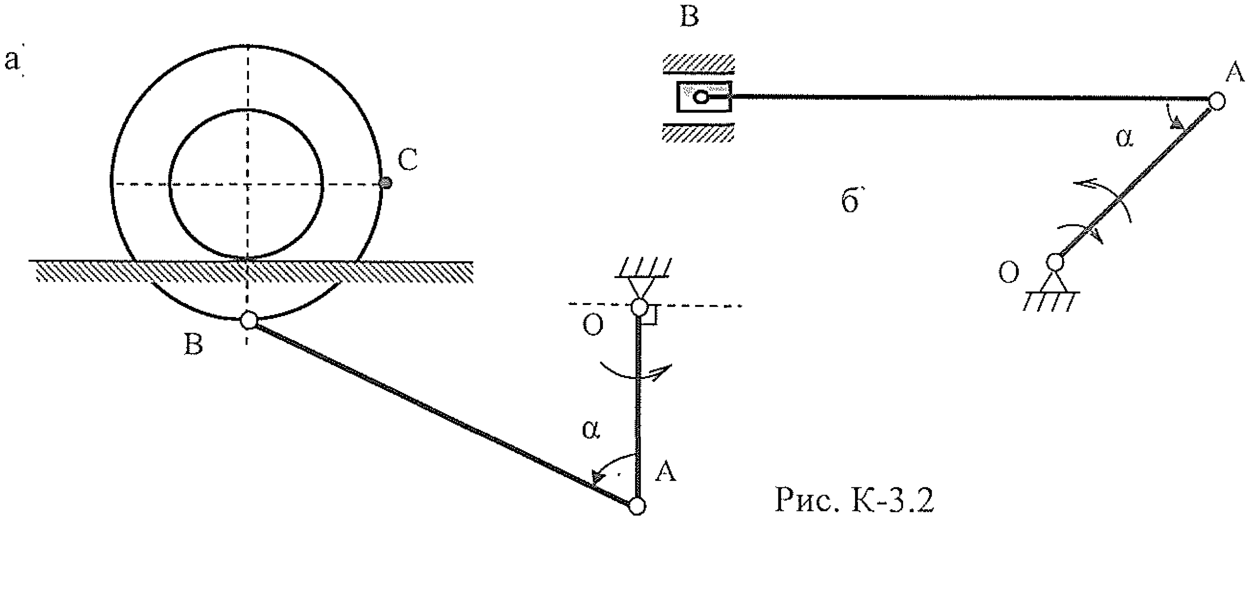


Рис. К-3.2

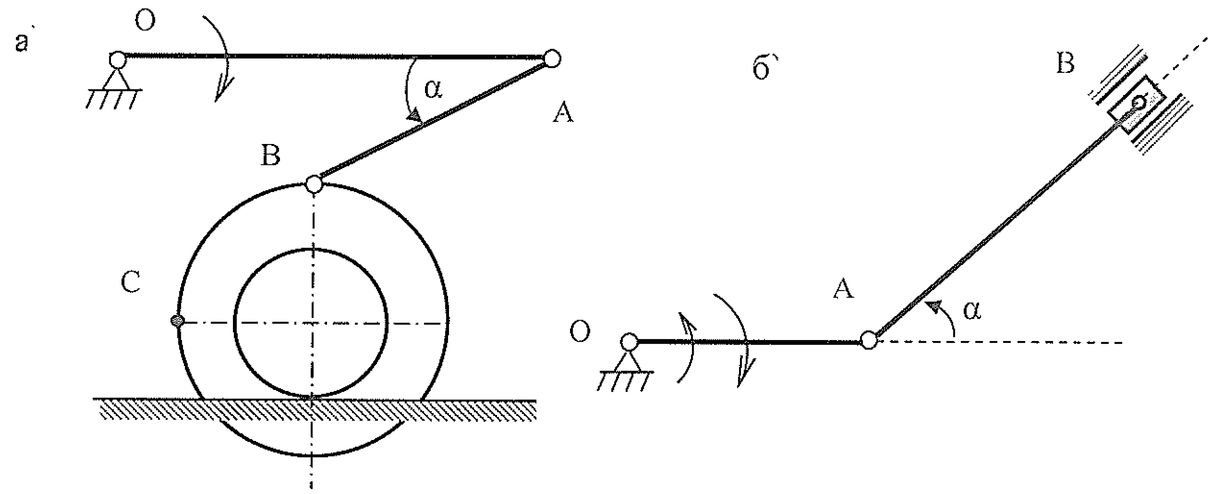


Рис. К-3.3

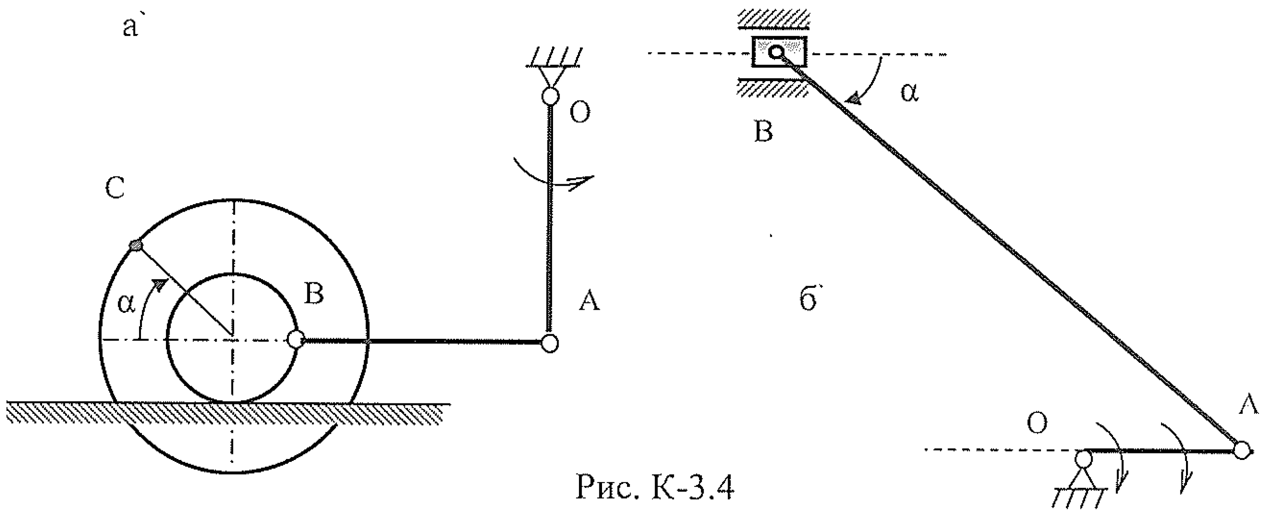


Рис. К-3.4

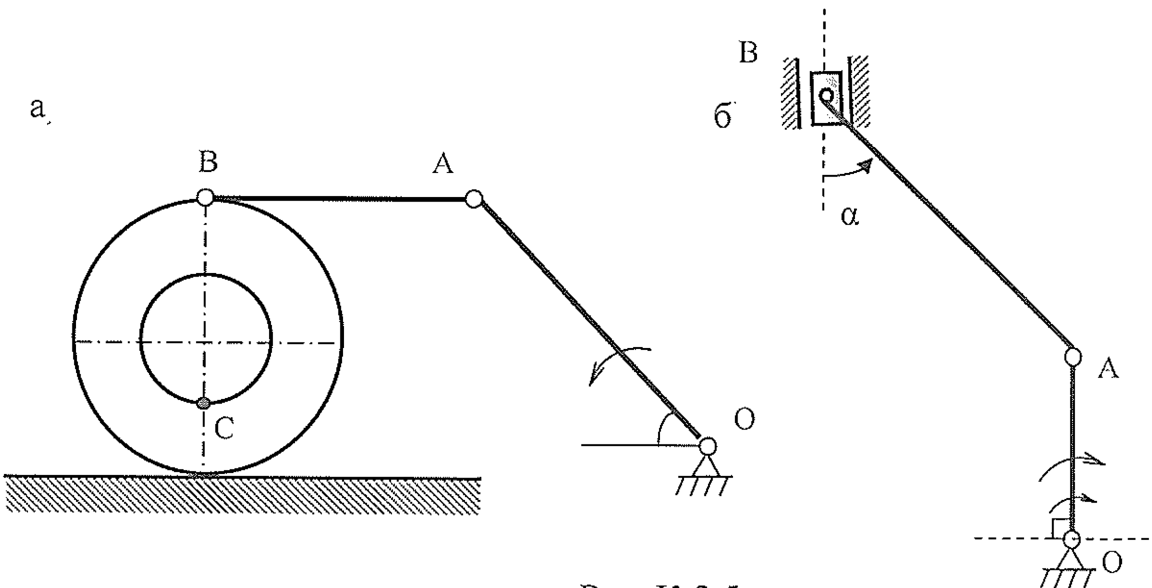


Рис. К-3.5

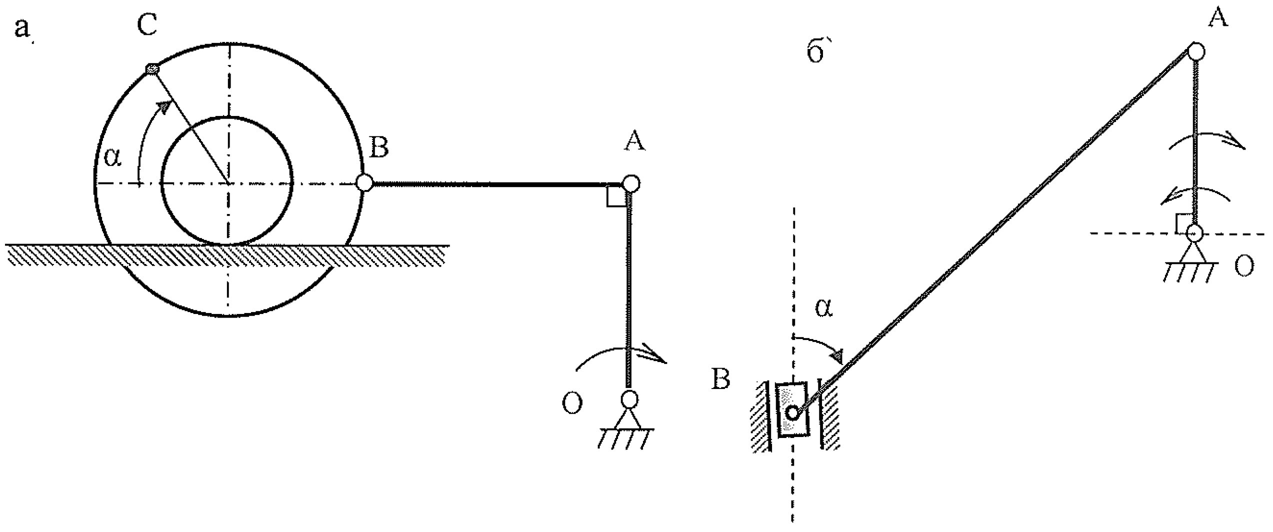


Рис. К-3.6

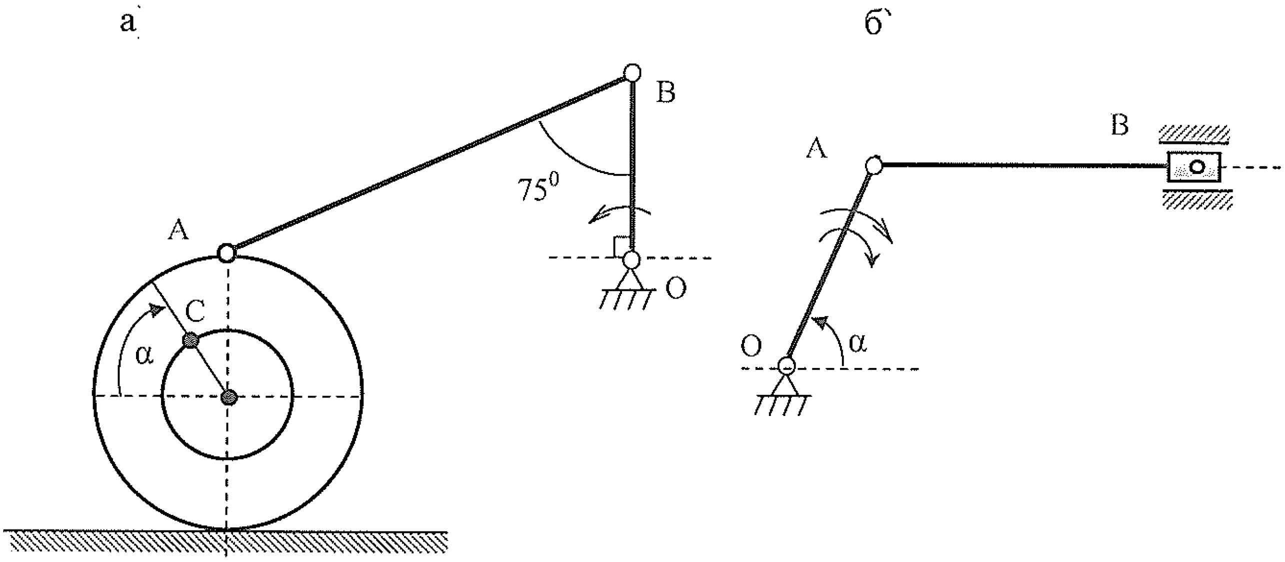


Рис. К-3.7

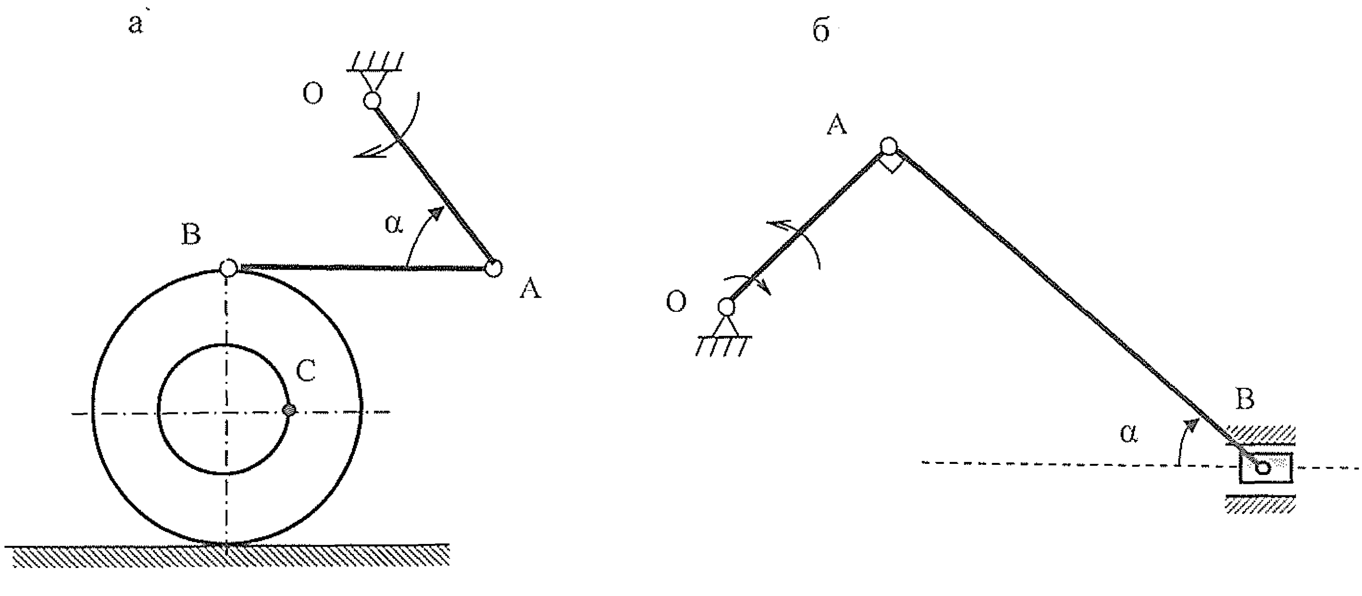


Рис. К-3.8

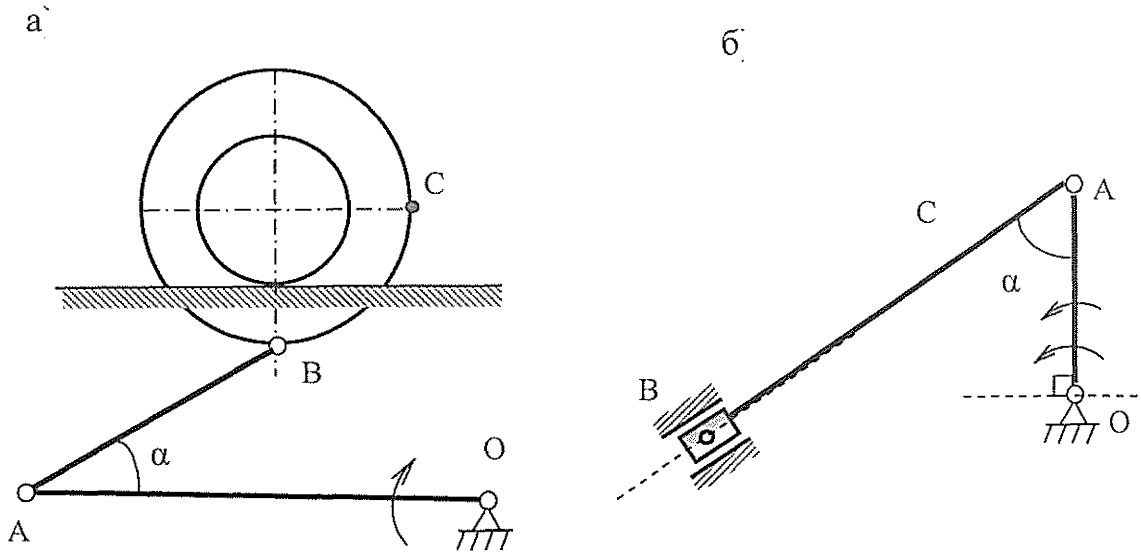


Рис. К-3.9

Задача К-4

Пластина заданного размера (рис. К-4.0 – К-4.2) перемещается по неподвижной прямолинейной поверхности по закону $S_e=f(t)$. По пластине движется точка M по криволинейной траектории по закону $OM=f(t)$. На рисунках указано положительное и отрицательное направление относительного движения.

По пластине вдоль прямой BD (рис. К-4.3 – К-4.9) движется точка M, закон её относительного движения $AM=f(t)$ задан в таблице. На рисунках указано положительное и отрицательное направление относительного движения. Пластинка вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi=f(t)$. Положительное направление отсчёта угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. Ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O на рис. К-4.3 – К-4.6. На рис. К-4.7 – К-4.9 ось вращения лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t=1$ *с*.

Указания к решению задачи К-1

Данная задача относится к теме "Кинематика сложного движения точки". Поэтому для ее решения необходимо воспользоваться теоремами сложения скоростей и ускорений точки. Необходимо выявить составные (относительное и переносное) и абсолютное движения точки. Для этого следует ввести координатные системы, относительно которых и произвести описание составных движений и их кинематических характеристик (скоростей и ускорений). Для изображения скоростей и ускорений сначала нужно найти положение точки на диске при заданном моменте времени t. Затем на основании типа движений определяются модули и направления относительной и переносной скоростей точки. На рисунке показываются эти скорости и строится параллелограмм скоростей, диагональ которого и есть абсолютная скорость точки. Аналогичные действия проводятся и для ускорения: определяются переносное, относительное и кориолисово ускорения и изображаются на рисунке. Для определения абсолютной скорости и ускорения следует использовать координатный способ: векторные формулы проецируются на координатные оси, находятся проекции искомых абсолютных скоростей (ускорений) и затем по теореме Пифагора определяются их модули. Теоретический материал можно найти на стр. 72-77. данного пособия. Пример решения задачи на стр. 78-82.

Таблица К-4

Номер условия	Для рис. К-4.0 – К-4.2		Для рис. К-4.3 – К-4.9		$h\ (r)$
	$OM=f(t)$ см	$S_e=f(t)$ см	$AM=f(t)$ см	$\varphi=f(t)$ рад	см
0	$\frac{\pi r}{6}(3t^2-2t)$	$3t^2-8t$	$50(3t-t^2)-70$	$6t-2t^2$	40
1	$\frac{\pi r}{3}(4t^2-3t^3)$	$5(3t-t^2)-6$	$40(3t^2-t^4)-65$	$5t-4t^2$	30
2	$\frac{\pi r}{6}(t^4-3t^2)$	$4(3t-2t^3)$	$15(t^2-1)+15$	$2(t^2-t)$	25
3	$\frac{\pi r}{8}(4t^2-2t^3)$	$4(3t^2-t^4)-6$	$30(t^4-3t^2)+35$	$6t-2t^2$	50
4	$\frac{\pi r}{6}(3t-t^2)$	t^3-2t^2	$80(2t^2-t^3)-50$	$t^2-0{,}5t^3$	40
5	$\frac{\pi r}{6}t^2$	$2t+0{,}5t^2$	$40(t^3-2t^2)$	$3t^3-2t^3$	60
6	$\frac{\pi r}{4}(2t^3-t^2)$	$3(t^3-2t^2)$	$40(t^2-3t^2)+50$	$2t^2-0{,}5t$	40
7	$\frac{\pi r}{9}(2t^2+t^3)$	$4(3t-t^2)-4$	$60(t-t^3)+30$	$3t^2$	50
8	$\frac{\pi r}{3}(3t^2-2t^3)$	$2{,}5t^2-1$	$50(t^3-t)-50$	$8-3t^2$	80
9	$\frac{\pi r}{4}(3t^3-2t^2)$	$6(t^3-t^2)$	$40(t-2t^3)+10$	$4t^2-5t$	40

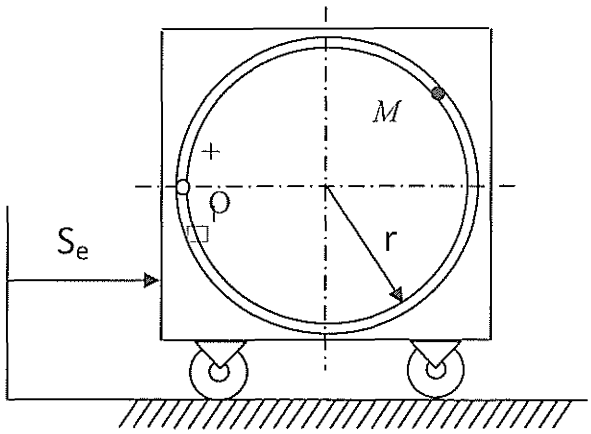


Рис. К-4.0

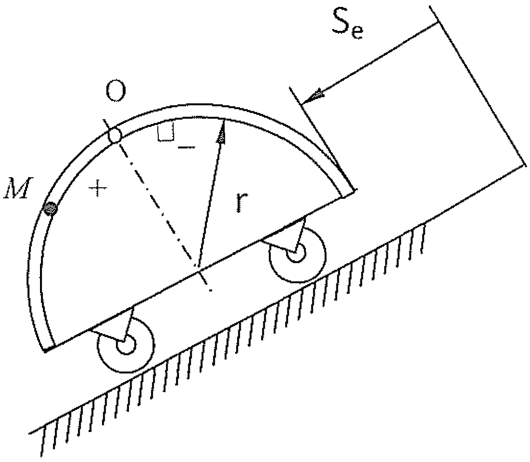


Рис. К-4.1

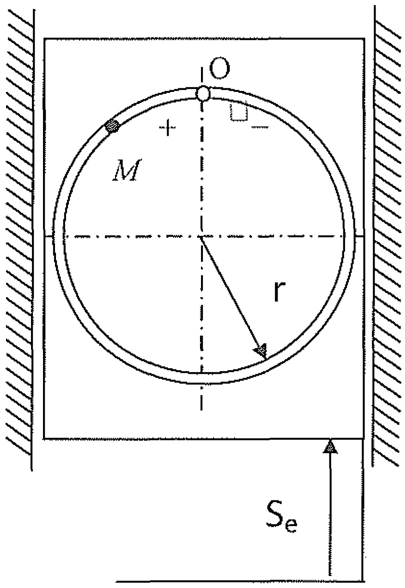


Рис. К-4.2

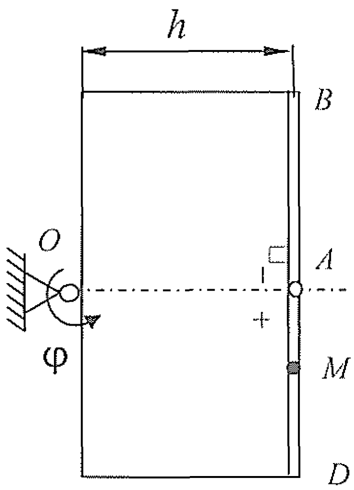


Рис. К-4.3

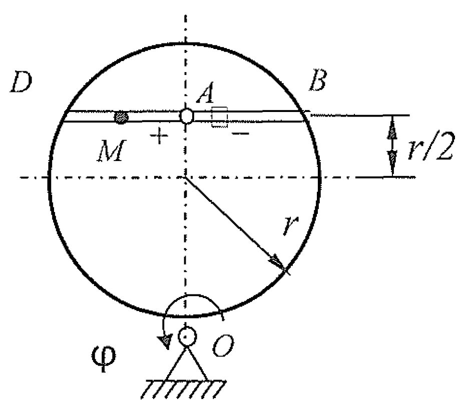


Рис. К-4.4

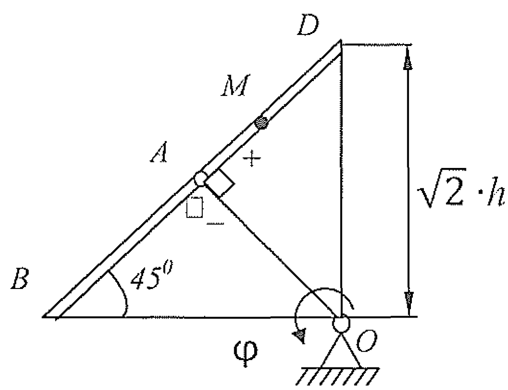


Рис. К-4.5

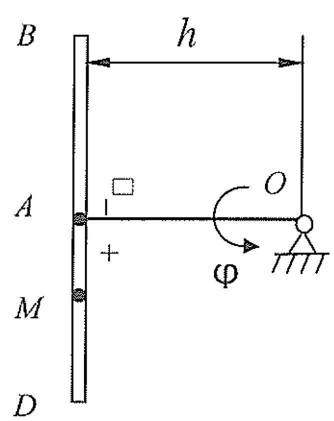


Рис. К-4.6

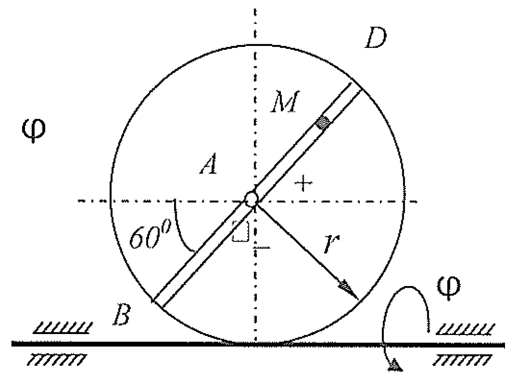
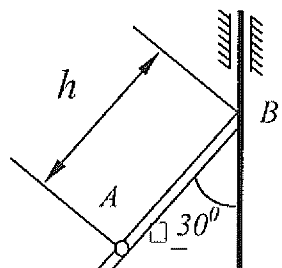
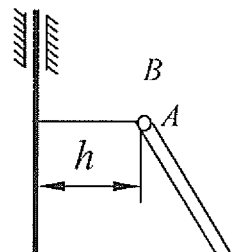


Рис. К-4.7





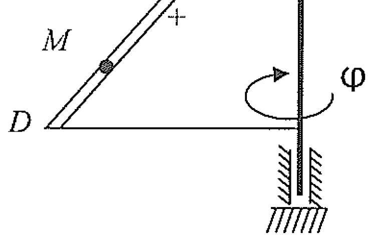


Рис. К-4.7

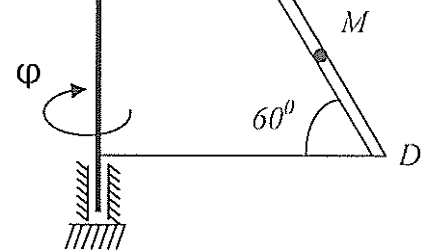
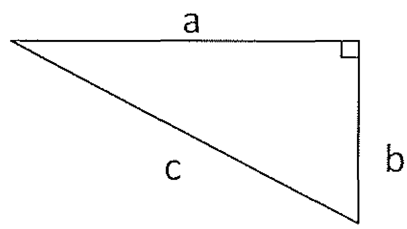


Рис. К-4.9

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Теорема Пифагора

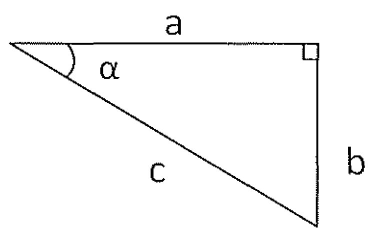
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$



Тригонометрические функции

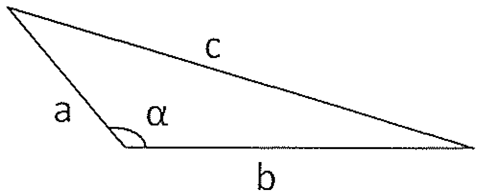
$\sin\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad\quad$ $\cos\alpha = \frac{a}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$ $\quad\quad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$



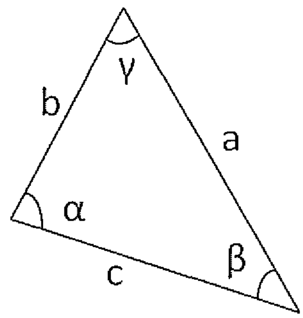
Теорема косинусов

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot cos\alpha}$



Теорема синусов

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$$



Значения тригонометрических функций для наиболее часто встречающихся углов

$\sin 0 = \cos 90^0 = 0;$ $\quad\quad$ $\sin 30^0 = \cos 60^0 = 0{,}5\,;$

$\sin 15^0 = \cos 75^0 = 0{,}259;$ $\quad\quad$ $\sin 75^0 = \cos 15^0 = 0{,}966;$

$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707;$ $\quad\quad$ $\sin 60^0 = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866;$

$\sin 90^0 = \cos 0^0 = 1.$

Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же угла

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Элементы векторной алгебры

Величины, для определения которых достаточно знать одно число (положительное отрицательное или нуль), называются **скалярами.** Например, температура, плотность, масса, работа силы.

Если приходится иметь дело с величинами, для определения которых, кроме численного значения, необходимо знать направление в пространстве, то они называются **векторами**. Например, перемещение, скорость, ускорение, сила и др.

Скаляр и вектор не исчерпывают классы величин, рассматриваемых в механике. Многие величины имеют более сложную структуру, чем векторы и скаляры, и для определения их недостаточно знать числовые значения и направления. Они называются **тензорами** (второго и высших рангов). Так, рассмотрение моментов инерции относительно различных осей, проходящих через некоторую точку твёрдого тела, приводит к понятию тензора инерции.

Вектор изображается отрезком прямой (обозначается $\bar{a}$ или $\overline{AB}$), направление которого совпадает с направлением рассматриваемой величины, а длина в выбранном масштабе характеризует её численное значение.

Различают свободные, скользящие и закреплённые векторы.

Свободный вектор можно переносить параллельно самому себе и прилагать в любой точке тела. Например, момент пары сил, скорость поступательного движения твёрдого тела.

Скользящий вектор можно переносить вдоль линии действия вектора. Например, вектор силы, приложенный к твёрдому телу.

Закреплённый вектор относится к определённой точке. Например, скорость и ускорение точки твёрдого тела в общем случае его движения.

Суммой двух векторов, приложенных в одной точке, является третий вектор $\bar{c}$, изображаемый диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах (рис. 1,а).

Суммой нескольких векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, … является вектор $\bar{p}$, представляющий замыкающую сторону многоугольника, построенного на слагаемых векторах (рис. П.1, б)

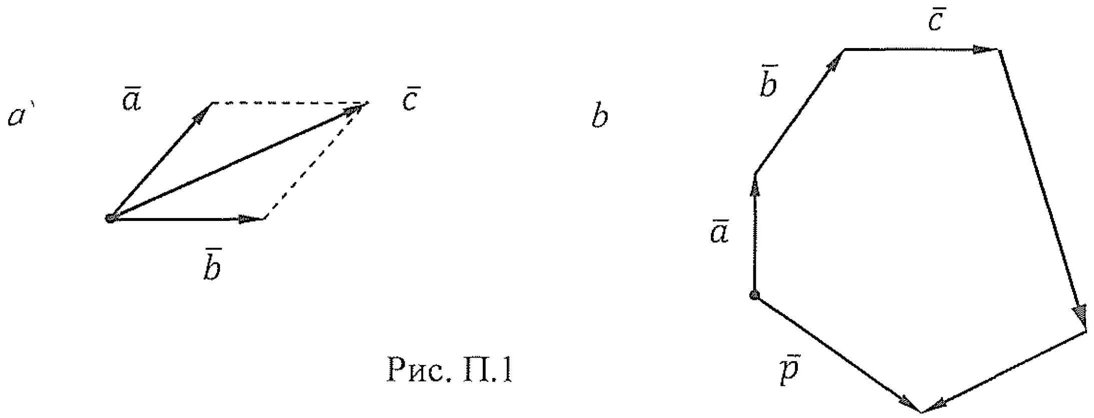


Рис. П.1

Свойства векторного сложения:

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ – коммуникативность;

$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ – ассоциативность.

Умножение вектора на скаляр

Произведение вектора $\bar{a}$ на скаляр m есть вектор $\bar{b}$, модуль которого в m раз больше модуля вектора $\bar{a}$. $\bar{b}=m\bar{a}$.

Если $m=-1$, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ противоположны и представляют простейший случай линейно зависимых векторов.

Векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существуют скаляры m_1, m_2,…, m_n, не все равные нулю, такие, что

$$m_1\bar{a}_1+m_2\bar{a}_2+\ \dots\ +m_n\bar{a}_n=0.$$

Два линейно зависимых вектора параллельны между собой и называются **коллинеарными**. Три линейно зависимых вектора лежат в одной плоскости и называются **компланарными**.

Разложение векторов

Разложение векторов не имеет единственного решения до тех пор, пока не заданы сами направления разложения вектора, т.е. **базис**. Если векторы базиса ортогональны и модули их равны единице, то базис называется **ортонормированным.** Если базис ортонормирован, то система координат называется ортогональной декартовой. В ней базисные векторы (орты) обозначаются $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$, а оси x, y, z (рис. П.2).

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a_x}\bar{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{a_y}\bar{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{a_z}\bar{\boldsymbol{k}}.$$

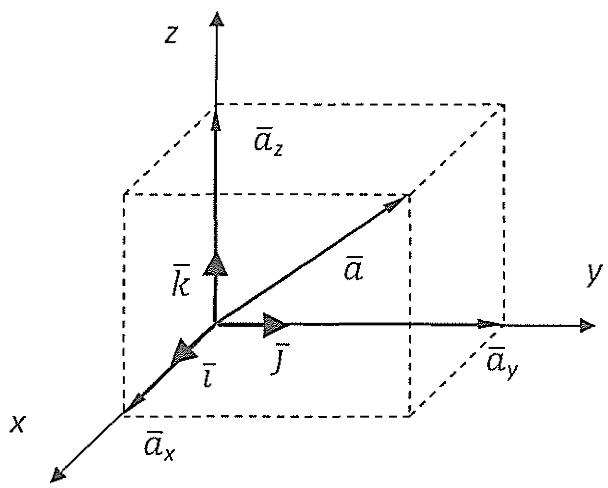


Рис. П.2

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a} \cdot \bar{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos(\bar{a}, \bar{b}).$$

Если векторы представлены своими проекциями на оси прямоугольной декартовой системы координат, то скалярное произведение векторов $\bar{a} \cdot \bar{b}$ можно записать в виде

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Свойства скалярного произведения

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ – коммуникативность;

$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ – дистрибутивность;

$(m\bar{a}) \cdot \bar{b} = m(\bar{a} \cdot \bar{b})$ – ассоциативность, где m – действительное число;

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны;

$\bar{a} \cdot \bar{a} = a^2$ – скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\bar{a} \times \bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, направленный перпендикулярно плоскости векторов сомножителей в ту сторону, откуда поворот от первого сомножителя ко второму на меньший угол виден против хода часовой стрелки и равный по величине площади параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. П.3).

$c = |\bar{a} \times \bar{b}| = ab \sin \alpha$

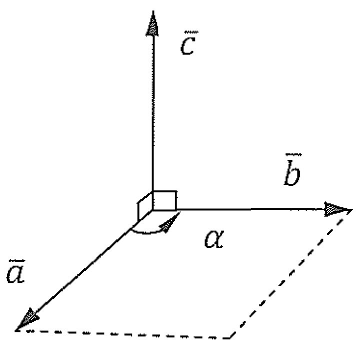


Рис. П.3

Таким образом, направление векторного произведения соответствует движению правого винта при его вращении от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$.

Свойства векторного произведения:

$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ – антикоммуникативность;

$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$ – дистрибутивность;

$(m\bar{a}) \times \bar{b} = m(\bar{a} \times \bar{b})$ – ассоциативность, действительное число;

$\bar{a} \times \bar{b} = 0$ – если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны;

$\bar{a} \times \bar{a} = 0$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в прямоугольных декартовых координатах, то

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \quad \text{или}$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\bar{\imath}+(a_zb_x-a_xb_z)\bar{\jmath}+(a_xb_y-a_yb_x)\bar{k}.$$

В теоретической механике через векторное произведение выражаются: момент силы относительно центра, скорость точки твёрдого тела при его вращательном движении вокруг неподвижной оси и неподвижного центра и т. п.

Проекция вектора на ось и на плоскость

Проекцией вектора на заданную ось, например Ox, называется скалярное произведение вектора $\bar{a}$ на единичный вектор $\bar{\imath}$, характеризующий положительное направление оси (рис. П 4).

$a_x=\bar{a}\cdot\bar{\imath}\cos\alpha.$

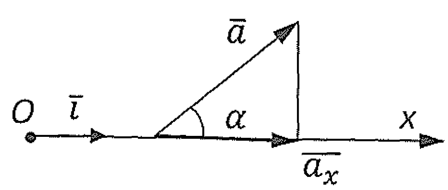


Рис. П.4

Проекция вектора $\bar{a}$ на плоскость – это вектор, заключенный между проекциями начала и конца вектора на эту плоскость.

$a_{xy}=a\cdot\cos\varphi$

$a_x=a\cdot\cos\varphi\cos\alpha$,

$a_y=a\cdot\cos\varphi\cdot\sin\alpha$,

$a_z=a\cdot\sin\varphi$.

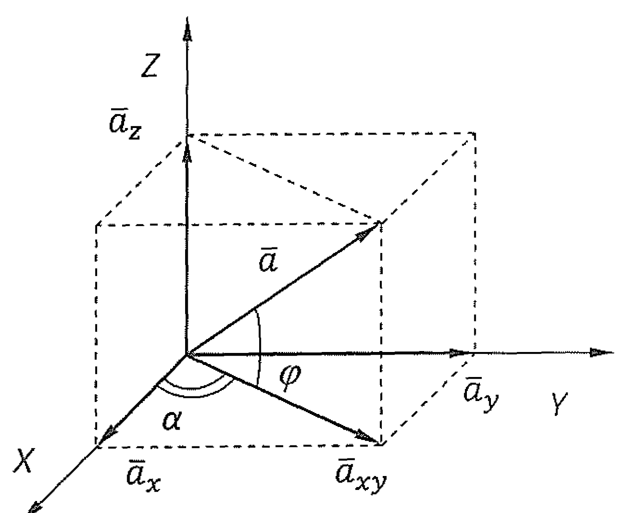


Рис. П. 5

Функции и их графики

Линейная функция. Это функция вида $y=kx+b$, где k и b –действительные числа. Её график – прямая (рис. П.6). При $k=0$ получаем постоянную функцию, её график – прямая, параллельная оси x (рис. П.7).

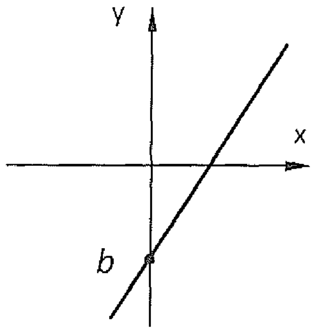


Рис. П.6

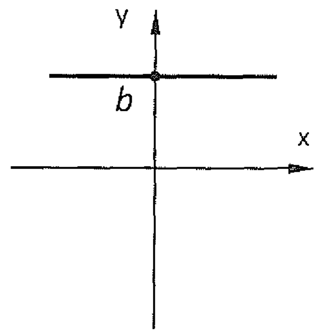


Рис. П.7

Обратная пропорциональность. Если величины x и y обратно пропорциональны, то функциональная зависимость между ними выражается уравнением $y=c/x$, где c есть некоторая постоянная величина. График обратной пропорциональности есть кривая линия, состоящая из двух «ветвей». Эти кривые называются равносторонними гиперболами (рис. П.8).

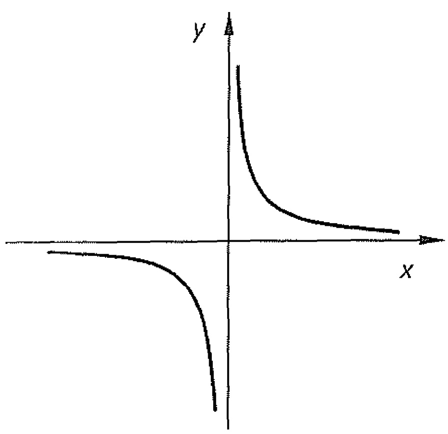


Рис. П.8

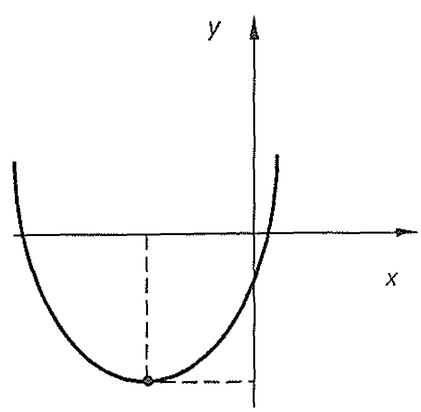


Рис. П.9

Квадратичная функция. Функция $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – постоянные величины, $a \neq 0$, называется квадратичной (рис. П.9). График её – есть парабола. Вершина её лежит в точке с координатами

$$\left(-\frac{b}{2a};\quad c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

К линиям второго порядка относится также эллипс (рис. П.10)

Уравнение эллипса

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

это канонический вид уравнения эллипса с полуосями a и b и центром симметрии с координатами $(x_o;\ y_o)$.

Окружность – это частный случай эллипса при равенстве полуосей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

с центром в начале координат и радиусом a.

Или канонический вид окружности радиуса a (рис. П.11) с центром в точке с координатами $(x_o;\ y_o)$

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{a^2} = 1$$

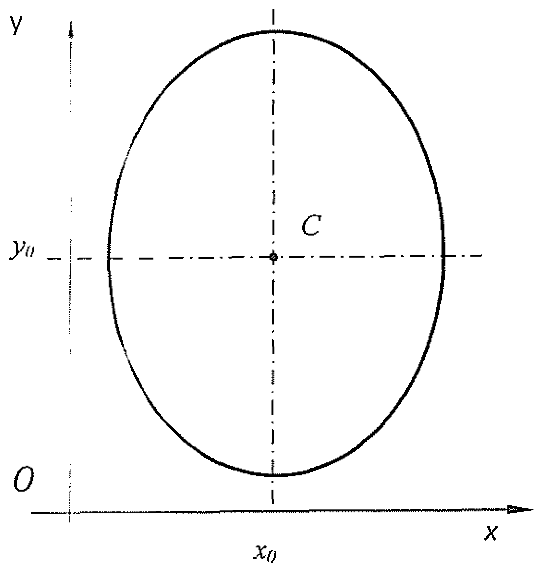


Рис. П. 10

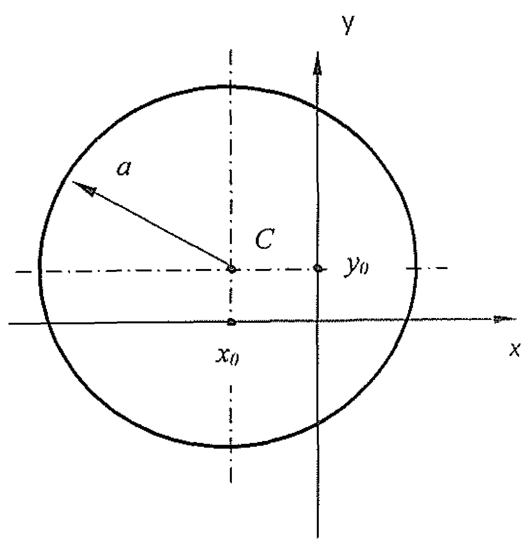


Рис. П. 11

Правила дифференцирования и производные основных элементарных функций

1. $(C)' = 0$

2. $(u+v)' = u' + v'$

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

4. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

6. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$

7. $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

8. $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

9. $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$

10 $(e^u)' = e^u \cdot u'$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Ответы на тесты по теме «Кинематика точки»

1-в; 2-г; 3-а; 4-в ; 5-а; 6-б; 7-(1-г, 2-б, 3-а, 4-в); 8-а; 9-г; 10-б; 11-а;

12-в;13-г; 14-а; 15-в; 16-б; 17-г; 18-б; 19-(1-г, 2-б, 3-в, 4-а); 20-г.

Ответы на тесты по теме «Поступательное и вращательное движения»

1-в; 2-а; 3-г; 4-б; 5-в; 6-б; 7-б; 8-в; 9-а; 10-(1-в, 2-б, 3-г, 4-а); 11-б;

12-(1-в, 2-г, 3-б, 4-а); 13-б; 14-б; 15-; 16-г; 17-(1-в, 2-б, 3-а, 4-г).

Ответы на тесты по теме «Плоскопараллельное движение»

1-в; 2-а; 3-г; 4-в ; 5-в; 6-а; 7-г; 8-(1-в, 2-а, 3-б); 9-в; 10-а; 11-в; 12-г;
13-б; 14-а; 15-в; 16-б.

Ответы на тесты по теме «Сложное движение точки»

1-б; 2-(1-а, 2-в, 3-б, 4-г); 3-в; 4-в; 5-г; 6-б; 7-а; 8-в; 9-а, г; 10-г.

11-б; 12-б,в; 13-б, г; 14-а; 15-а,б, г; 16-в; 17-г ; 18-а; 19-в.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Маркова Елена Леонидовна
Солодовник Елена Викторовна

КИНЕМАТИКА

Учебное пособие
Дизайнер обложки *И. Л. Тюкавкина*
Отпечатано с авторского оригинала-макета
Подписано в печать 22.03.16. Формат 60x84 1/ 16.
Бумага писчая. Гарнитура «Таймс». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 6,91.Тираж 100 экз. Заказ 53.

Издательство Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Отдел оперативной полиграфии издательства Тихоокеанского государственного университета.
680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.