2.2 數位控制器架構

由前面獲得之主要噪音訊號必須要做類比/數位轉換（Analog to Digital Converter），成為數位訊號後才能做為數位控制系統的輸入訊號，此控制系統一般都以數位濾波器為核心，目的在於將管道下游誤差麥克風量到之誤差訊號做類比/數位轉換，成為數位訊號提供給數位控制系統，經由適應性控制演算法，做即時線上的系統參數修正，再將此輸出訊號做數位/類比轉換（Digital to Analog Converter），將此類比訊號經功率放大器推動第二聲源來達到減噪的效果。

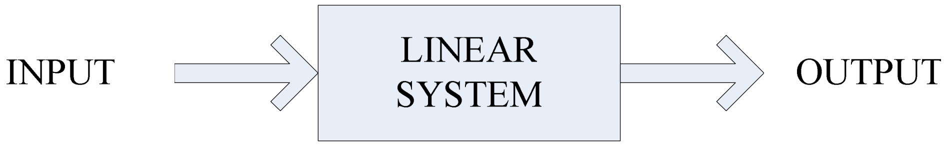

圖 2.4 線性系統

如圖 2.4 所示的系統，其輸入輸出關係的數學模式在時間域上的表示為：

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \Phi_1(t)\theta_1 + \Phi_2(t)\theta_2 + \cdots + \Phi_n(t)\theta_n \\
&= \Phi^T(t)\theta \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

（2.1）式中，

$$
\begin{aligned}
\Phi^T(t) &= \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_n \end{bmatrix} \\
\theta^T &= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

y 為輸出之可觀察變數；$\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n$ 為待定參數（又稱為加權函數）；$\Phi_1, \Phi_2, \cdots \Phi_n$ 為已知函數，與其他已知變數有關，可稱為迴歸變數；因此（2.1）式可稱之為迴歸模型（regression model），n 為數學模型的階數，主要取決與問題的需求。對一個線性非時變的離散系統，根據圖 2.4 所示，可以用以下數學式子來表示：

$$x[n] * h[n] = y[n] \qquad (2.2)$$

（2.2）式中 $x[n]$ 為系統輸入序列；$h[n]$ 為系統特性參數，即加權函數；$y[n]$ 為系統輸出序列；*代表褶積（convolution）運算子

為了求出適當的加權函數，使數學模式的輸出與真實系統的輸出之誤差最小，控制系統的數學模式通常有兩種型式：無限脈衝響應（Infinite Impulse Response，IIR）與有限脈衝響應（Finite Impulse Response，FIR）濾波器。

假設系統輸入序列為 $x[n]$，輸出序列為 $y[n]$，其中 n 表示序列中第 n 個元素，也可稱為時間上的指標。則系統行為可以用 N 階線性差分方程式來表示：

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M}a_k x[n-k]+\sum_{k=1}^{N}b_k y[n-k] \qquad (2.3)$$

（2.3）式中，係數 a_k 與 b_k 為系統的特性，若式中的 N=0, 等號右邊只剩第一項 $\sum_{k=0}^{M}a_k x[n-k]$，則輸出訊號序列 $y[n]$ 可視為是輸入訊號的加權平均，稱之為移動平均(moving average)模式，簡稱 MA 模式。若是式中 M=0，第一項只剩 $a_0 x[n]$，則輸出訊號序列 $y[n]$ 主要由先前的輸出訊號 $\sum_{k=0}^{N}b_k y[n-k]$ 所影響。可視為輸出訊號的回歸運算，故稱之為自我回歸（auto-regress）模式，簡稱 AR 模式。若 N，M 皆大於 0，則（2.3）式稱作 ARMA 模式。接下來，對（2.3）式等號左右分別做 z-轉換，則

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{M}a_k x[n-k]z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}b_k y[n-k]z^{-n}$$

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{M}a_k z^{-k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n-k]z^{-(n-k)}+\sum_{k=1}^{N}b_k z^{-k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n-k]z^{-(n-k)}$$

$$Y(z)=\left(\sum_{k=0}^{M}a_k z^{-k}\right)X(z)+\left(\sum_{k=1}^{N}b_k z^{-k}\right)Y(z) \qquad (2.4)$$

將（2.4）式完全轉換至 z-domain，則係數 a_k 與 b_k 擴充成無窮項的序列，即

$$[a_n]=[\cdots\ 0\ 0\ 0\ 0\ a_0\ a_1\ a_2\ \cdots\ a_M\ 0\ 0\ 0\ 0\ \cdots]$$

$$[b_n] = [\cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \cdots \quad b_N \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots]$$

則（2.4）式可寫成

$$Y(z) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^{-k} \right) X(z) + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^{-k} \right) Y(z)$$

$$= A(z)X(z) + B(z)Y(z) \qquad (2.5)$$

由（2.5）式，可獲得控制系統的轉移函數（transfer function）：

$$H_c(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k} \right)}{1 - \left(\sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k} \right)} = \frac{A(z)}{1 - B(z)} \qquad (2.6)$$

在（2.6）式中，z^{-1} 代表一個取樣週期（sampling period）的單位延遲（unit delay）。若 $N \geq 1$，則 $H(z)$ 的分母會含有極點（pole），即對於某些特定的輸入訊號，其輸入響應可能會趨近於無限大。此種控制系統稱為 IIR 濾波器，IIR 濾波器必需要考慮到其極點的分佈，以避免系統發生不穩定的情況。若 $N = 0$，則(2.6)式的分母部份會消失，亦即對於有限振幅的輸入，其輸出響應必為有限。此種控制系統稱為 FIR 濾波器，系統的穩定性較佳是其優點，但其收斂速度較 IIR 濾波器為慢，表 2.1 為 FIR 與 IIR 濾波器之優缺點[23]。

表 2.1 FIR 與 IIR 濾波器之優缺點

	優點	缺點
FIR	(1)沒有極點，系統是穩定的 (2)設計的方法均為線性的設計方式 (3)為線性相位響應，不用擔心訊號傳輸所造成的訊號失真	(1)收斂速度較慢 (2)階數較大
IIR	(1)收斂速度較快 (2)階數較小，計算量小	(1)有極點，必需要考慮穩定性

2.2.1 有限脈衝響應濾波器

有限脈衝響應濾波器的架構，如圖 2.5 所示可以表示為

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M}a_k x[n-k] \tag{2.7}$$

亦即 FIR 濾波器其輸出資料是由現在時間的輸入訊號與加權函數的乘積。

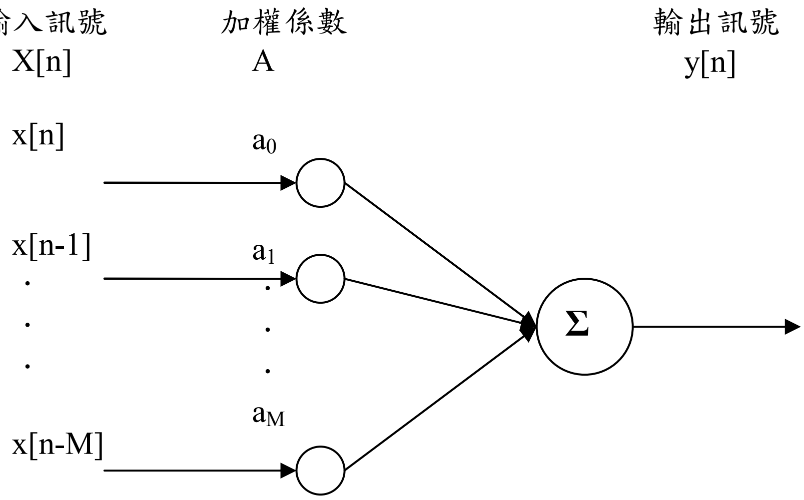

圖 2.5 有限脈衝響應濾波器

2.2.2 無限脈衝響應濾波器

無限脈衝響應濾波器的架構，如圖 2.6 可以表示為

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} a_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{N} b_k y[n-k] \qquad (2.8)$$

亦即 IIR 濾波器其輸出資料是由現在時間的輸入訊號與加權函數的乘積加上過去時間的輸出訊號與加權係數所組成。

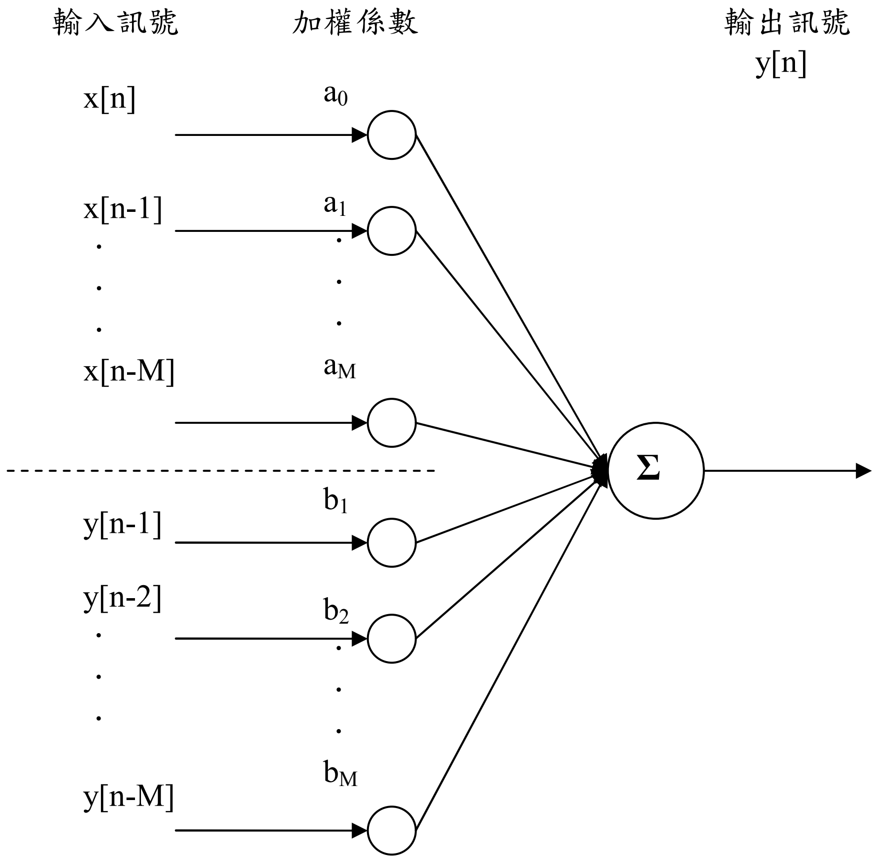

圖 2.6 無限脈衝響應濾波器

2.2.3 適應性數位濾波器

適應性數位濾波器（adaptive digital filter）的基本形式可由圖 2.7 表示之，主要是由兩大部份所組成：

（1）一個處理期望輸出訊號的數位濾波器；

（2）一個可作為調整此數位濾波器參數之演算法。

圖 2.7 中，$d[n]$為期望輸出訊號；$x[n]$為參考輸入訊號，此訊號經由數位濾波器之計算，產生實際輸出訊號$y[n]$；$\varepsilon[n]$為期望輸出$d[n]$與實際輸出$y[n]$之誤差訊號。適應性演算法的功能，主要是調整數位濾波器之加權值，經由不斷地更新，使得

實際輸出訊號 $y[n]$ 愈接近期望輸出訊號 $d[n]$，讓誤差訊號 $\varepsilon[n]$ 之均方值（mean square）為最小值。

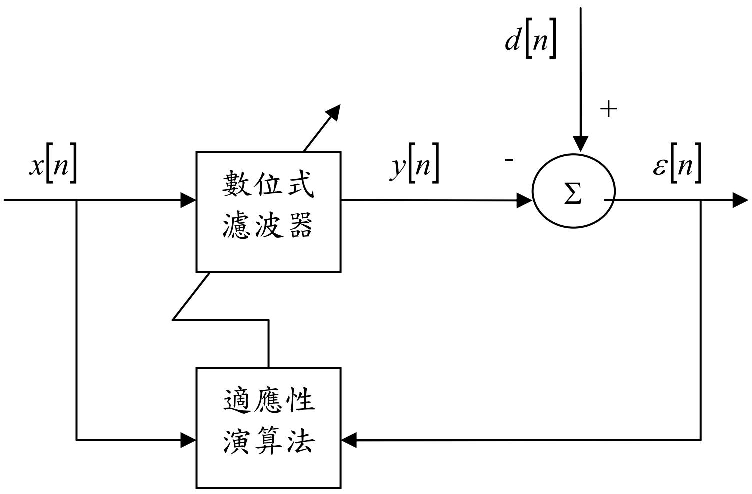

圖 2.7 適應性濾波器方塊圖

2.3 適應性控制理論

在五十年代末期，美國麻省理工學院的 Whitaker 教授為了解決飛行器自動駕駛的問題，提出了參考模型適應控制方法，但限於當時處理器與控制理論的不成熟，並沒有受到普及與應用。直到近年來，數位訊號處理器的快速發展，使得適應性控制的應用受到了研究學者的親睞。

一般噪音系統時常受到噪音源的改變或是系統的內部、外在環境的變化而有所影響，因此具有相當多的不確定性，以系統內部而言，描述受控體數學模式的結構與參數不能事先得到；就系統外部而言，描述外部環境對系統的影響，可以等效於許多的擾動，而這些擾動通常是不可預期的。面對這些不確定性的因素，需要選擇適當的控制法則，以配合環境做最佳的控制，此即適應性控制，簡單地說即具有學習能力的控制。

如 2.2 節所述，為了考慮穩定性本文採用 $M+1$ 階的 FIR 數位式濾波器當作控

制器的數學模式，即

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M}a_k x[n-k] \tag{2.9}$$

或寫成向量形式

$$y[n]=A^T X[n] \tag{2.10}$$

（2.10）式中，$A=[a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_M]^T$ 為控制系統的單位脈衝響應函數（impulse response function），又可稱加權係數向量。$X[n]=[x[n] \quad x[n-1] \quad \cdots \quad x[n-M]]$ 為輸入之參考訊號，$y[n]$ 為數學模式之輸出訊號，主要目的為調整控制源之大小與相位。

適應性控制理論的目標是輸出適當的控制訊號 $y[n]$，以調整可控制致動器的振幅與相位，達到最佳的情況，使得殘留訊號 $\varepsilon[n]$ 平方的期望值趨近於零。採用之代價函數（cost function）為

$$J=E\left(\varepsilon[n]^2\right) \tag{2.11}$$

（2.11）式中，$E(\;)$ 為期望值運算子，$\varepsilon[n]$ 為殘留訊號，為理想輸出訊號 $d[n]$ 與控制器的輸出訊號 $y[n]$ 之疊加訊號，本文採用 FIR 模式作為控制器的數學模式，故

$$\varepsilon[n]=d[n]+Y[n]^T \tag{2.12}$$

（2.12）式中，$Y[n]=[y[n] \quad y[n-1] \quad \cdots \quad y[n-L]]^T$ 為 $L+1$ 階的行向量，是 $X[n]^T$ 與 $A[n]$ 的乘積，因此如何調整加權係數向量 $A[n]$，讓輸出訊號 $y[n]$ 與 $d[n]$ 大小相同、相位相反，使得代價函數 J 最小化，將是主動控制的重點。適應性控制理論必需假設 $X[n]$、$d[n]$，$\varepsilon[n]$ 為統計穩定訊號（statistically stationary），將（2.12）式代入（2.11）式，則代價函數可表示為

$$J=E\left(\left(d[n]+Y[n]^T\right)^2\right)=E\left(\left(d[n]+X[n]^T A[n]\right)^2\right)$$

$$=E(d[n])^2+2A[n]E\left(d[n]X[n]^T\right)+A[n]A[n]^T E\left(X[n]X[n]^T\right) \tag{2.13}$$

由（2.13）式可知，代價函數為加權係數向量 $A[n]$ 的二次函數，以代價函數為縱軸，$A[n]$ 為橫軸的 $M+2$ 度空間座標系上的超拋物　（hyper-paraboloid）。圖 2.8 為 $M=1$ 時碗狀二次曲面，亦稱為性能曲面（performance surface）。此曲面之最低點即為代價函數最小值 $J_{\min}$，其對應之加權係向量即為所求之最佳值 $A_{optimal}$。

由圖 2.8 所示，代價函數 J 為誤差訊號 $\varepsilon[n]$ 的函數，主要由輸入訊號序列 $X[n]$ 與加權係數向量 $A[n]$ 所決定，適應性控制理論為藉由性能曲面的梯度，使加權係數向量朝著曲面底部的方向去尋找最佳值 $A_{optimal}$。我們將代價函數 J 對每一個 $a_k\left(k=0,1,2,\cdots,M\right)$ 作偏微分，則代價函數 J 的梯度函數為：

$$\nabla J=\frac{\partial J}{\partial A}=\begin{bmatrix}\frac{\partial J}{\partial a_0} & \frac{\partial J}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial J}{\partial a_M}\end{bmatrix}=2E\left(d[n]X[n]^T\right)+2A[n]E\left(X[n]X[n]^T\right) \qquad (2.14)$$

當梯度為零時，代價函數為最小值即可獲得最佳值的加權係數。但實際上我們並無法事先知道理想輸出訊號 $d[n]$，因此本文將採用另一種尋找最佳值 $A_{optimal}$ 的方法。

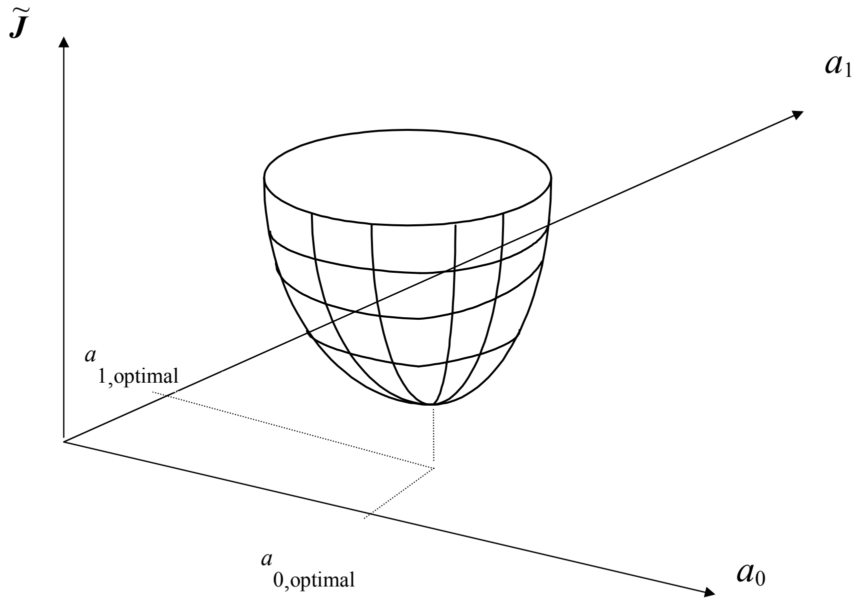

圖 2.8 M=1 之性能曲面圖

2.3.1 最陡下降法

雖然我們無法由前述的方法求得加權係數向量之最佳解，但卻可利用代價函數的梯度向量

$$\nabla J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J}{\partial a_0} & \dfrac{\partial J}{\partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial J}{\partial a_M} \end{bmatrix}^T$$

得到使代價函數增大的方向，因此對於任何一個加權係數向量 A_i，只要求出其所對應的梯度 ∇_i，然後朝著梯度 ∇_i 的反方向來修正加權係數向量 A_i，即

$$A_{i+1} = A_i + \mu(-\nabla_i) \tag{2.15}$$

（2.15）式即為最陡下降法之演算式（Steepest Descent Algorithm），下標 i 代表第 i 修正值，μ 為收斂係數（convergence factor）決定控制系統的收斂速度與穩定性，亦可稱為步階參數（step-size parameter）。

2.3.2 最小平均平方演算法

事實上，要求得代價函數 J 的正確梯度 ∇J 是相當困難的。因此，Widrow 於 1970 年利用了短時間之 $\varepsilon[n]^2$ 平均值的偏微分量來估測近似的梯度值 $\hat{\nabla}$（帽子符號代表估測值）。所以在適應性過程的疊代中，其梯度估測值為

$$\hat{\nabla}\varepsilon[n]^2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varepsilon[n]^2}{\partial a_0} & \dfrac{\partial \varepsilon[n]^2}{\partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varepsilon[n]^2}{\partial a_M} \end{bmatrix}^T = 2\varepsilon[n]\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varepsilon[n]}{\partial a_0} & \dfrac{\partial \varepsilon[n]}{\partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varepsilon[n]}{\partial a_M} \end{bmatrix}^T \tag{2.16}$$

由（2.12）式可知

$$\varepsilon[n] = d[n] + A[n]^T X[n]$$

取其梯度

$$\nabla \varepsilon[n] = X[n]$$

$$\hat{\nabla}\varepsilon[n]^2 = 2\varepsilon[n]X[n] \tag{2.17}$$

在適應性訊號處理的循環過程中，（2.17）式獲得之梯度估測值 $\hat{\nabla}\varepsilon[n]^2$ 可能會含有估測誤差，而與 $J = E(\varepsilon[n]^2)$ 的梯度 ∇ 有所偏移。最好的改善方法是將每個循環過程中皆估測 $\hat{\nabla}\varepsilon[n]^2$，但並不立刻代入（2.15）式修正加權係數向量 A，經過數次循環後，再平均這段時間的梯度估測值 $\hat{\nabla}\varepsilon[n]^2$，此平均值 $\overline{\hat{\nabla}}\varepsilon[n]^2$ 將可趨近於 $J = E(\varepsilon[n]^2)$ 的梯度，此時再將此平均值 $\hat{\nabla}\varepsilon[n]^2$ 代入（2.15）式修正加權係數向量 A，即

$$A_{i+1} = A_i - 2\mu\left(\bar{\varepsilon}[n]\bar{X}[n]\right) \tag{2.18}$$

(2.18)式即為最小平均平方演算式，簡稱 LMS。符號－代表一段時間的平均值；加權係數向量的初始值 A_0 可設為零向量；而根據文獻［24-27］，要使得上式收斂，則步階參數 μ 範圍的限制則需視輸入參考訊號與誤差路徑響應函數而定，即

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \tag{2.19}$$

$\lambda_{\max}$ 為參考輸入訊號之自我相關矩陣 $\Re$ 的最大特徵值。

2.3.3 系統鑑別

系統鑑別是以分析的方式，來建立系統的數學模式的研究方法。建立系統的數學模型是自動控制中首要解決的問題，因為沒有數學模型，就很難選擇控制的演算法。而建立數學模型通常有兩種方法：即理論分析的方法與實　分析的方法兩種。理論方析的方法就是根據系統內部已知的規律，直接推導系統的動態方程式與輸入、輸出的關係。用理論分析的方法建立數學模型時，對於受控　的特性需要有十分詳盡的瞭解。此外，一複雜的內部結構或對於內部結構尚未完全瞭解的情況下，往往需要使用實　分析的方式才能解決問題。亦即，系統鑑別是在輸入、輸出的基礎上，反應實際系統的動態響應所建立的等效系統。

如圖 2.9 管道架構圖，管道主動控制系統中控制器的輸出訊號 $y[n]$，並不是直