Organización de la Presentación

Organización de la Presentación

Organización de la Presentación

El Concepto de Sistema

Consideraremos la siguiente definición de Sistema:

Sistema

Un Sistema es una disposición delimitada de entidades interactuantes.

Delimitación: Los sistemas tienen una frontera que los separa del resto del Universo. Las acciones del resto del Universo sobre el sistema se denominan entradas.

Entidades Interactuantes: Son los Componentes del sistema, que pueden ser elementos, procesos o sistemas más simples (sub-sistemas).

Disposición (de las Entidades): Los sistemas tienen una Estructura. El funcionamiento depende no sólo de los componentes sino también de cómo los mismos están dispuestos y conectados.

Un Sistema es una entidad formada por un conjunto de componentes y una estructura.

Organización de la Presentación

Clases de Sistemas

Según los procesos que involucran, los sistemas suelen clasificarse como

Abstractos o Conceptuales: No contiene componentes tangibles.
Ejemplo: Un algoritmo

Físicos o Concretos: existen en la realidad física espacio-temporal y la interacción entre los componentes involucra el intercambio de materia, y/o energía, y/o información.

Los Sistemas Físicos además se clasifican entre:

Dinámicos: Tienen capacidad de almacenar energía y/o información. Es decir, tienen memoria.

Estáticos: No tienen memoria. La respuesta ante una entrada no depende del estado en que se encuentra el sistema.

En este curso vamos a trabajar principalmente con Sistemas Físicos Dinámicos.

Organización de la Presentación

Modelos Matemáticos

En la ciencia y la técnica se utilizan métodos experimentales que implicar realizar ensayos sobre los sistemas. Sin embargo, en muchas ocasiones estos experimentos no son viables:

Costos: Por ejemplo, realizar un experimento en una planta industrial podría significar detener un proceso de producción durante varias horas.

Riesgos: Las consecuencias del experimento pueden ser inadmisibles, como por ejemplo experimentar sobre una planta nuclear.

Experimentos Irrealizables: En ocasiones las acciones involucradas son físicamente imposibles o porque el sistema aún no existe (en la etapa de diseño, típicamente).

Por esto, en lugar de experimentar sobre los sistemas, habitualmente se realizan experimentos sobre modelos de dichos sistemas.

Organización de la Presentación

El Concepto de Modelo

Modelo

Un modelo de un sistema es una herramienta que permite responder interrogantes sobre este último sin tener que recurrir a la experimentación sobre el mismo.

En la práctica, un modelo es una representación simplificada del sistema que representa donde la simplificación se realiza en función de la o las preguntas que se quieren responder. De esta manera, un modelo siempre involucra:

- Un sistema
- Uno o más interrogantes.

Organización de la Presentación

Clases de Modelos

Los modelos pueden ser de distinto tipo:

Modelos mentales: En la vida cotidiana los utilizamos para predecir lo que ocurriría ante potenciales acciones que se realicen. Ejemplo: sabemos que si soltamos un objeto a cierta altura se caerá.

Modelos verbales/textuales: También utilizamos cotidianamente modelos muy simplificados que expresan de manera verbal o textual el comportamiento de ciertos sistemas ante diversas situaciones.

Modelos físicos: Son objetos físicos que reproducen algunas propiedades de sistemas reales para ayudarnos a responder preguntas sobre los mismos. Ejemplo: un túnel de viento para el estudio de fenómenos aerodinámicos.

Modelos matemáticos: Describen mediante expresiones matemáticas las relaciones entre las distintas magnitudes que caracterizan un sistema.

Organización de la Presentación

Clasificación de Modelos Matemáticos

Tiempo Continuo vs. Tiempo Discreto: Un modelo es de tiempo continuo cuando las relaciones entre las variables están definidas para todo instante de tiempo y es de tiempo discreto cuando están definidas sólo en determinados instantes discretos de tiempo.

Estáticos vs. Dinámicos: En un modelo dinámico hay relaciones entre variables que dependen de valores pasados(hay memoria) mientras que en un estático todas las relaciones dependen de los valores instantáneos de las variables.

Determinísticos vs. Estocásticos: Un modelo es determinístico si expresa sin incertidumbre las relaciones entre las variables mientras que en un modelo estocástico hay procesos aleatorios involucrados en dichas relaciones.

Parámetros Distribuidos vs. Concentrados: En un modelo de parámetros distribuidos las magnitudes toman valores en el tiempo y en el espacio. En un modelo de parámetros concentrados hay sólo dependencia del tiempo.

Clasificación de Modelos Matemáticos

Paramétricos vs. No Paramétricos: Un modelo paramétrico está caracterizado por un número finito y determinado de parámetros (por ejemplo, una función transferencia). Uno no paramétrico puede caracterizarse por series de datos cuya longitud no es fija.

Lineales vs. No Lineales: un modelo es lineal cuando vale el principio de superposición.

Estacionarios vs. Inestacionarios: Un modelo se dice estacionario si estando en idénticas condiciones en dos instantes diferentes, responde de igual manera ante idénticas acciones.

Causales vs. Acausales: Un modelo se dice causal cuando además de describir relaciones matemáticas entre las magnitudes establece relaciones de causa-efecto entre las mismas. Ejemplo: Los Diagramas de Bloques.

Organización de la Presentación

Elementos de los Modelos Matemáticos

Los modelos matemáticos expresan relaciones entre las magnitudes que caracterizan un sistema, que se clasifican como sigue:

- Variables Fundamentales: Representan el tiempo y las coordenadas espaciales.
- Variables Descriptivas: Representan las magnitudes asociadas al sistema:

Entre las Variables Descriptivas encontramos:

Parámetros: Son magnitudes constantes o que pueden variar con una ley predeterminada que no depende de lo que ocurre en el sistema.

Entradas (Variables Independientes): Son independientes de lo que ocurre en el sistema y su evolución no está prefijada. Representan acciones externas sobre el sistema.

Variables Dependientes: Sus trayectorias dependen de la evolución del sistema. Dentro de estas encontramos las salidas, que son simplemente variables dependientes de interés.

Entradas

En aplicaciones de control las entradas suelen dividirse en dos categorías:

Entradas manipuladas: Su trayectoria se puede manipular.

Perturbaciones: Son el resultado de fenómenos que están fuera del modelo y no se pueden ni manipular ni conocer a priori como evolucionan (ruido).

Estados

Vector de Estados

Es un conjunto de variables dependientes cuyo conocimiento en un instante de tiempo permite calcular el valor de cualquier otra variable dependiente en dicho instante, asumiendo conocidos los valores de las entradas en ese instante.

Vector de Estados Minimal

Es un vector de estados que contiene la mínima cantidad posible de variables dependientes.

Orden de un Modelo Matemático

Es el número mínimo de variables dependientes con cuyo valor quedan estáticamente determinadas todas las variables dependientes del modelo.

Organización de la Presentación

Organización de la Presentación

Ecuaciones de Estado

Dado el circuito de la Figura 1.1, podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0 \quad (1.1a)$$
$$\dot{q}(t) - i_C(t) = 0 \quad (1.1b)$$
$$q(t) - C\ u_C(t) = 0 \quad (1.1c)$$
$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0 \quad (1.1d)$$
$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0 \quad (1.1e)$$
$$u_S(t) - v(t) = 0 \quad (1.1f)$$
$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0 \quad (1.1g)$$
$$i_L(t) - i_R(t) = 0 \quad (1.1h)$$
$$i_C(t) - i_L(t) = 0 \quad (1.1i)$$
$$i_S(t) - i_R(t) = 0 \quad (1.1j)$$

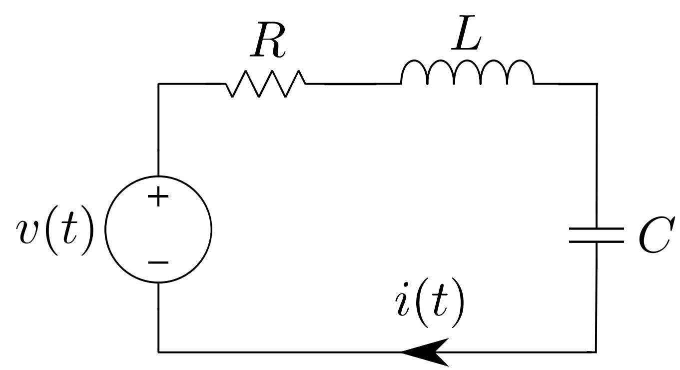

Figura 1.1: Circuito RLC Serie

Ecuaciones de Estado

Trabajando algebraicamente sobre el sistema de ecuaciones (1.1) podemos llegar a

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{1}{L}\,\phi(t) \\ \dot{\phi}(t) &= -\frac{1}{C}\,q(t) - \frac{R}{L}\,\phi(t) + u_S(t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

que tiene la forma de un sistema de Ecuaciones de Estado, en el cual las variables de estado son la carga $q(t)$ y el flujo $\phi(t)$ y la variable de entrada es la tensión de la fuente $u_S(t)$.

- Con $q(t)$, $\phi(t)$ y la entrada $u_S(t)$ podemos calcular cualquier otra variable dependiente.
- El vector $[q(t), \phi(t)]$ constituye un Vector de Estados Minimal (el

Notar que con $q(t)$, $\phi(t)$ y la entrada $u_S(t)$ podemos calcular cualquier otra variable dependiente. Además, el vector $[q(t), \phi(t)]$ constituye un Vector de Estados Minimal.

Ecuaciones de Estado: Ecuaciones de Salida

- Las Ecuaciones de Estado suelen complementarse con ecuaciones de salida estáticas que calculan ciertas variables dependientes de interés.
- Por ejemplo, si necesitáramos conocer las tensiones sobre la resistencia y sobre la inductancia ($u_R(t)$ y $u_L(t)$), podemos cacular las Ecuaciones de Salida:

$$
\begin{aligned}
u_R(t) &= \frac{R}{L}\,\phi(t) \\
u_L(t) &= -\frac{1}{C}\,q(t) - \frac{R}{L}\,\phi(t) + u_S(t).
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Ecuaciones de Estado: Caso General

En casos generales, las Ecuaciones de Estado tendrán la forma

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

donde $x_i(t)$ serán las variables de estado y las variables $u_i(t)$ serán las variables de entrada.

Observar que esta notación permite describir relaciones no lineales a través de las funciones $f_i(\cdot)$ y representar también sistemas inestacionarios a través de la dependencia directa de las f_i con el tiempo t.

Ecuaciones de Estado: Notación Vectorial

La Ecuación (1.4) suele utilizarse de manera vectorial, definiendo el vector de estados $\mathrm{x} \triangleq [x_1, \ldots, x_n]^T$ y el vector de entradas $\mathrm{u} \triangleq [u_1, \ldots, u_m]^T$:

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{f}(\mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t), t). \tag{1.5}$$

Las Ecuaciones de Salida:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ y_n(t) &= g_n(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \end{aligned} \tag{1.6}$$

también admiten representación vectorial:

$$\mathrm{y}(t) = \mathrm{g}(\mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t), t), \tag{1.7}$$

donde $\mathrm{y} \triangleq [y_1, \ldots, y_p]^T$ es el vector de salidas.

Ecuaciones de Estado: Caso Lineal

Un caso particular de las Ecuaciones de Estado ocurre cuando la función f es lineal y por lo tanto las Ecs.(1.5) y (1.7) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{x}}(t) &= A(t)\ \mathrm{x}(t) + B(t)\ u(t) \\ \mathrm{y}(t) &= C(t)\ \mathrm{x}(t) + D(t)\ u(t) \end{aligned} \tag{1.8}$$

para ciertas matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$.

- En tal caso diremos que el modelo matemático es lineal.
- Si además estas matrices fueran constantes (es decir, no dependieran de t), el modelo resultaría lineal y estacionario.

Organización de la Presentación

Ecuaciones Diferenciales Algebraicas

Las Ecuaciones Diferenciales Algebraicas (DAEs por sus siglas en inglés) combinan ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones algebraicas.

- Las DAEs surgen naturalmente al listar las relaciones matemáticas entre las variables de un modelo.
- Son la representación que se puede obtener más fácilmente.

Por ejemplo, el sistema dado por las Ecs.(1.1a)-(1.1j) constituye un sistema de DAEs. En el mismo, podemos distinguir dos ecuaciones diferenciales, la Ec.(1.1b) y la Ec.(1.1d), y ocho ecuaciones puramente algebraicas.

DAEs, Relaciones Constitutivas y Estructurales

- El modelo de la Ec.(1.1) contiene relaciones que son intrínsecas a los elementos del circuito y otras que se deben a la manera en la que dichos elementos están conectados.
- Las relaciones intrínsecas a los elementos se denominan Relaciones Constitutivas.
- Las relaciones que expresan la manera en que los elementos se conectan se denominan Relaciones Estructurales.

Si a partir de un esquema gráfico como el de la Figura 1.1 quedaran unívocamente definidas cuáles son las relaciones constitutivas y estructurales del modelo matemático, podríamos utilizar directamente el esquema de dicha figura como representación equivalente al sistema de la DAE. (1.1).

DAEs: Caso General

En un caso general las DAEs tendrán la forma:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1(t),\ldots,x_n(t),\dot{x}_1(t),\ldots,\dot{x}_n(t),a_1(t),\ldots,a_r(t),u_1(t),\ldots,u_m(t),t) &= 0\\
f_2(x_1(t),\ldots,x_n(t),\dot{x}_1(t),\ldots,\dot{x}_n(t),a_1(t),\ldots,a_r(t),u_1(t),\ldots,u_m(t),t) &= 0\\
&\vdots\\
f_{n+r}(x_1(t),\ldots,x_n(t),\dot{x}_1(t),\ldots,\dot{x}_n(t),a_1(t),\ldots,a_r(t),u_1(t),\ldots,u_m(t),t) &= 0
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

- las variables $x_i(t)$ serán *en principio* los estados.
- $a_i(t)$ serán las variables algebraicas.
- $u_i(t)$ serán las variables de entrada.

Definiendo los vectores de estado $\mathrm{x} \triangleq [x_1,\ldots,x_n]^T$, de entradas $\mathrm{u} \triangleq [u_1,\ldots,u_m]^T$ y de variables algebraicas $\mathrm{a} \triangleq [a_1,\ldots,a_r]^T$ puede usarse notación vectorial

$$
\mathrm{f}(\mathrm{x}(t),\dot{\mathrm{x}}(t),\mathrm{a}(t),\mathrm{u}(t),t) = 0. \tag{1.10}
$$

Causalización de DAEs

- Las DAEs son generalmente la representación más simple para obtener al construir un modelo matemático de un sistema físico.
- Sin embargo, no son una representación adecuada para realizar análisis y suelen ser ineficientes para simular.
- Por eso, se suelen convertir en otras representaciones como las Ecuaciones de Estado.

La conversión de una DAE en un modelo explícito de Ecuaciones de Estado se suele denominar Causalización.

Organización de la Presentación

Utilización de Modelos Matemáticos

Pueden establecerse a grandes rasgos dos maneras de utilizar un modelo matemático:

Análisis Teórico: consistente en el estudio analítico de los modelos, determinando propiedades tanto de carácter cualitativo (estabilidad, controlabilidad, observabilidad, etc.) como cuantitativo (a través de la resolución analítica de las ecuaciones de estado, por ejemplo).

Análisis Experimental: consistente en el estudio mediante simulaciones de los modelos para también establecer propiedades cualitativas y cuantitativas.

Organización de la Presentación

Análisis Teórico de los Modelos Matemáticos

Supongamos que queremos determinar si el transitorio que se produce al alimentar el circuito de la Figura 1.1 con un escalón de tensión en la fuente tiene o no oscilaciones en función de los parámetros R, L y C.

- Podríamos hacer esto obteniendo la matriz de evolución A de las EE y sus autovalores (o calculando los polos de la Función Transferencia).
- Este tipo de análisis es sencillo en sistemas lineales y estacionarios.
- Suele involucrar interconversiones de modelos.
- Generalmente es bastante complicado en sistemas no lineales.

El análisis teórico a veces se torna inviable al aumentar la complejidad de los modelos matemáticos.

Organización de la Presentación

Simulación

El camino más simple y directo para estudiar la evolución de las variables de un modelo matemático ante condiciones iniciales y entradas determinadas es la simulación digital.

- Implica resolver las ecuaciones del modelo utilizando algún tipo de aproximación numérica.
- Es posible simular directamente sobre las DAEs.

La desventaja de la simulación frente al estudio analítico es que los resultados que se obtienen son particulares para un determinado juego de parámetros, para una determinada trayectoria de entradas y para un determinado conjunto de condiciones iniciales.

Organización de la Presentación

Limitaciones al usar Modelos Matemáticos

- Al formular un modelo matemático introducimos simplificaciones acordes al problema que queremos resolver y a las preguntas que queremos responder.
- Una vez obtenido el modelo matemático, las hipótesis que se utilizaron para realizar las simplificaciones pueden no quedar explicitadas.
- Por ejemplo, en la Figura 1.1 no aparecen las dimensiones físicas del circuito y no podemos saber la máxima frecuencia a la cual las leyes de la teoría de circuitos son una aproximación válida.

Es un error muy común analizar o simular el modelo de un sistema sin tener en cuenta que las trayectorias obtenidas estén dentro del rango en el cual la aproximación que brinda dicho modelo tiene sentido.

Organización de la Presentación

Construcción de Modelos Matemáticos

El proceso de obtención de un modelo matemático se denomina Modelado y hay dos grandes grupos de técnicas (complementarios) para realizarlo:

Modelado por Primeros Principios : También denominado modelado analítico, físico, o de caja blanca se basa en la obtención de las ecuaciones del modelo a partir de leyes conocidas que rigen el comportamiento de las componentes del sistema y de la forma en que se relacionan las mismas.

Modelado por Identificación : Llamado también modelado por experimentación o modelado de caja negra, se basa en proponer un modelo matemático con una estructura determinada y luego ajustar sus parámetros en base a datos obtenidos mediante diversos experimentos.

Organización de la Presentación

Modelado por Primeros Principios

Involucra generalmente las siguientes etapas

Formulación del problema : Definir claramente el problema que se quiere resolver con dicho modelo.

Determinación de los fenómenos relevantes : En función del problema a resolver se realizan diversas hipótesis simplificatorias y se definen los fenómenos relevantes.

Descomposición en estructura y componentes : Para simplificar el modelado, se busca reconocer subsistemas simples (componentes) determinando la manera en que estos interactúan (estructura). Esto permite obtener esquemas como el de la Figura 1.1.

Obtención de las Relaciones Matemáticas : Una vez reconocidas las componentes y la estructura, se deberán formular las *Relaciones Constitutivas* y las *Relaciones Estructurales*. Esto lleva a un sistema de DAEs como el de la Ec.(1.1) y a partir de este momento podemos decir que contamos con un Modelo Matemático.

Modelado por Primeros Principios

Una vez obtenida la DAE, es posible que el modelo no esté en la forma requerida para resolver el problema, o que aún no conozcamos los valores de algunos parámetros y que sean necesarias unas etapas más:

Manipulación del Modelo : Hay diversos procedimientos para convertir un sistema de DAEs en otro tipo de representación (ecuaciones de estado, función transferencia, diagramas de bloques, etc.). Estos procedimientos son completamente algoritmizables y pueden realizarse aprovechando diversas herramientas de software.

Validación y Ajuste de Parámetros : Se suele corroborar mediante simulaciones que el modelo replique el comportamiento del sistema original, ajustando eventualmente ciertos parámetros para lograr esto.

Si falla la validación puede ser necesario revisar las hipótesis simplificatorias.

Organización de la Presentación

Modelado por Identificación

El modelado por identificación se suele utilizar cuando

- no se conocen bien la estructura y los componentes que conforman el sistema real,
- cuando estos son demasiado complejos y por lo tanto el modelo matemático resultante sería excesivamente complicado.

Al igual que en el caso del modelado por primeros principios, el proceso de modelado por identificación puede plantearse a través de una secuencia de etapas

Modelado por Identificación

Etapas:

Obtención de Datos : Se suelen realizar diversos experimentos que muestren el comportamiento del sistema ante distintas condiciones (o se utilizan series de datos históricos). Los datos suelen dividirse en datos de ajuste y datos de validación.

Elección de la Estructura del Modelo : De acuerdo al conocimiento sobre el sistema y a lo observado en los datos se elije un conjunto de modelos que podrían representar al sistema.

Selección del Modelo : De los modelos del punto anterior se elige el que mejor replica los datos de ajuste, generalmente mediante optimización.

Verificación del Modelo : Se verifica que el modelo seleccionado en el paso anterior tenga un ajuste aceptable respecto de los datos de validación.

Organización de la Presentación

Modelado de Caja Gris

En la práctica generalmente el modelado no se realiza siguiendo estrictamente los primeros principios ni siguiendo estrictamente las técnicas de identificación, sino mediante una combinación de ambos procedimientos.

- Es muy común comenzar el modelado aplicando hasta donde sea posible los primeros principios pero dejando como incógnita los valores de ciertos parámetros.
- Luego, se suelen diseñar experimentos para obtener datos (o se pueden utilizar series de datos existentes) y a partir de estos datos, se aplican técnicas de identificación que permiten ajustar los valores de los parámetros desconocidos.

Esta forma de proceder que combina el modelado por primeros principios con la identificación se denomina Modelado de Caja Gris.