实验二 离散时间系统分析

一、掌握离散时间信号与系统的时域分析方法

1、系统的零状态响应

离散时间 LTI 系统可用线性常系数差分方程来描述，即

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j)$$

其中 a_i（$i=0$，1，…，N）和 b_j（$j=0$，1，…，M）为实常数。

MATLAB 中函数 filter 可对式（13-1）的差分方程在指定时间范围内的输入序列所产生的响应进行求解。函数 filter 的语句格式为

y=filter(b,a,x)

其中 x 为输入的离散序列；y 为输出的离散序列；y 的长度与 x 的长度一样；b 与 a 分别为差分方程右端与左端的系数向量。

【实例 2-1】 已知某 LTI 系统的差分方程为

$$3y(n)-4y(n-1)+2y(n-2)=x(n)+2x(n-1)$$

试用 MATLAB 命令绘出当激励信号为 $x(n)=(1/2)^n u(n)$ 时，该系统的零状态响应。

解：MATLAB 源程序为

```
a=[3 -4 2];
b=[1 2];
n=0:30;
x=(1/2).^n;
y=filter(b,a,x);
stem(n,y,'fill'),grid on
xlabel('n'),title('系统响应 y(n)')
```

程序运行结果如图 2-1 所示。

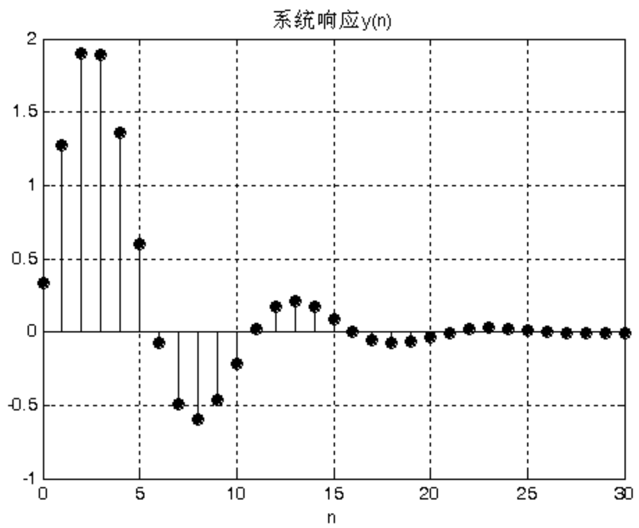

图 2-1 实例 2-1 系统的零状态响应

2、系统的单位取样响应

MATLAB 求单位取样响应的方法是利用控制系统工具箱提供的函数 impz 来实现。impz 函数的常用语句格式为

impz(b,a,N)

其中参数 N 通常为正整数，代表计算单位取样响应的样值个数。

【实例 2-2】 已知某 LTI 系统的差分方程为

$$3y(n)-4y(n-1)+2y(n-2)=x(n)+2x(n-1)$$

利用 MATLAB 的 impz 函数绘出该系统的单位取样响应。

解：MATLAB 源程序为

```
a=[3 -4 2];
b=[1 2];
n=0:30;
impz(b,a,30),grid on
title('系统单位取样响应 h(n)')
```

程序运行结果如图 2-2 所示。

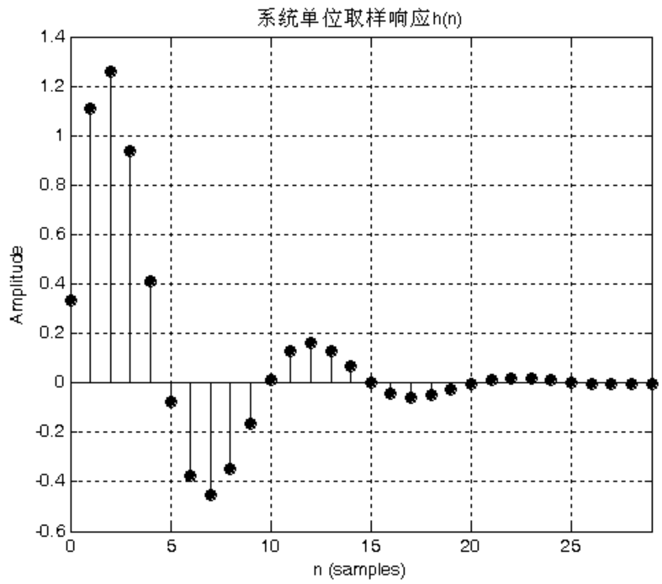

图 2-2 系统单位取样响应

3、由系统单位取样响应确定系统的零状态响应

【实例 2-3】 已知某系统的单位取样响应为 $h(n)=0.8^n[u(n)-u(n-8)]$，试用 MATLAB 求当激励信号为 $x(n)=u(n)-u(n-4)$ 时，系统的零状态响应。

解：MATLAB 中可通过卷积求解零状态响应，即 $x(n)*h(n)$。由题意可知，描述 $h(n)$ 向量的长度至少为 8，描述 $x(n)$ 向量的长度至少为 4，因此为了图形完整美观，我们将 $h(n)$ 向量和 $x(n)$ 向量加上一些附加的零值。MATLAB 源程序为

```
nx=-1:5;                  %x(n)向量显示范围(添加了附加的零值)
```

```
nh=-2:10;                    %h(n)向量显示范围(添加了附加的零值)
x=uDT(nx)-uDT(nx-4);
h=0.8.^nh.*(uDT(nh)-uDT(nh-8));
y=conv(x,h);
ny1=nx(1)+nh(1);                 %卷积结果起始点
%卷积结果长度为两序列长度之和减 1,即 0 到(length(nx)+length(nh)-2)
%因此卷积结果的时间范围是将上述长度加上起始点的偏移值
ny=ny1+(0:(length(nx)+length(nh)-2));
subplot(311)
stem(nx,x,'fill'),grid on
xlabel('n'),title('x(n)')
axis([-4 16 0 3])
subplot(312)
stem(nh,h','fill'),grid on
xlabel('n'),title('h(n)')
axis([-4 16 0 3])
subplot(313)
stem(ny,y,'fill'),grid on
xlabel('n'),title('y(n)=x(n)*h(n)')
 axis([-4 16 0 3])
```

程序运行结果如图 2-3 所示。

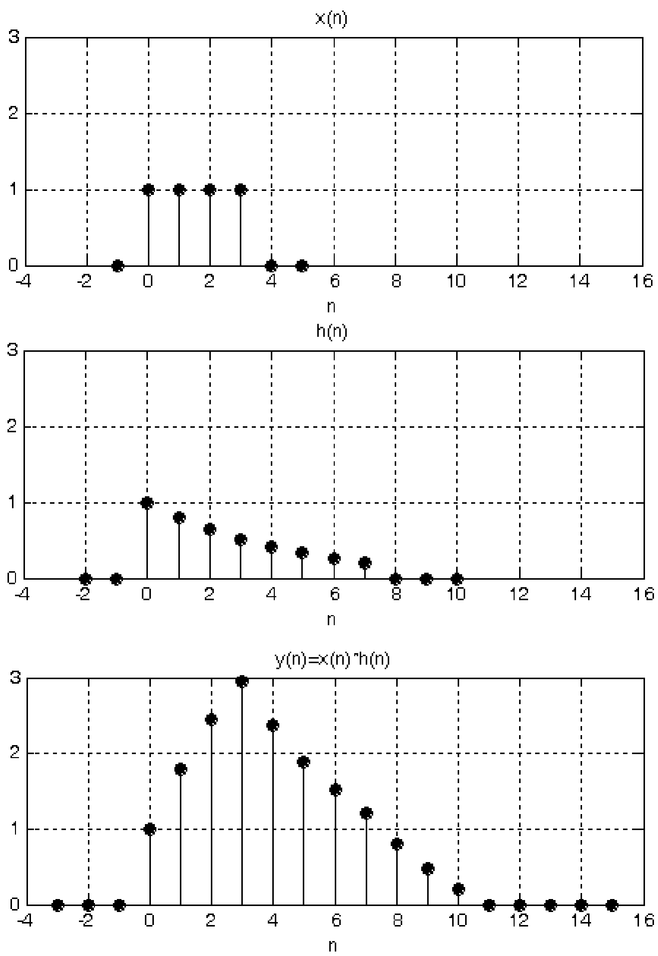

图 2-3　利用卷积和法求解系统的零状态响应

练习：

1、试用 MATLAB 命令求解以下离散时间系统的单位取样响应。

（1）$3y(n)+4y(n-1)+y(n-2)=x(n)+x(n-1)$

（2）$\frac{5}{2}y(n)+6y(n-1)+10y(n-2)=x(n)$

2、已知某系统的单位取样响应为 $h(n)=(\frac{7}{8})^{n}\left[u(n)-u(n-10)\right]$，试用 MATLAB 求当激励信为 $x(n)=u(n)-u(n-5)$ 时，系统的零状态响应。

二、掌握序列傅氏变换的计算机实现方法，利用序列的傅氏变换对离散信号、系统及系统响应进行频域分析

1. 计算序列的 DTFT(离散时间傅里叶变换)$x(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$，当然只能求有限长 $x(n)$ 的 DTFT。

* MATLAB 信号处理工具箱中有专用函数 freqz，其调用方式为

```
[H,W] = freqz(b,a,N)
```

这一函数用来计算 DTFT 时，可以得到 N 点复频率响应，其输入变量 b 就是信号 x，位置向

量限定从 0 开始，即 n=0：length(b)−1，取 a=1，N 是 $0\leqslant\omega<\pi$ 中分割的份数，N 最好取 2 的整数幂。由于它只计算正频率处的特性，所以输出频谱特性 H 和对应的频率向量 w 都是正半频段的($0\sim\pi$)。若省略 N，则程序默认 N=512。w 代表数字频率 ω，以弧度为单位，H 为 DTFT 值。

freqz 函数还可用来计算系统的频率特性，这在后面再加以讨论。

【例 2.32】 求 $x(n)=[\underline{2},3,4,3,2]$ 的 DTFT，并画出它的幅频特性及相频特性。

解

```
%求 x(n) = [2,3,4,3,2]的 DTFT,并画出它的幅频特性及相频特性
clc;clear all
n = 0:4; x = [2,3,4,3,2];                          % x(n)序列
k = 0:1000; w = (pi/500) * k;                      % [0,2pi]轴分为 1001 点
X = x * (exp( - j * pi/500)).^(n' * k);            % 用矩阵-向量乘法求 DTFT
magX = abs(X); angX = angle(X);
subplot(2,2,1);stem(n,x,'.');
title('例 2.32 的序列图')
ylabel('x(n)');axis([0,5,0,6]); grid
subplot(2,2,2); plot(w/pi,magX); grid
xlabel(' '); title('幅频特性'); ylabel('模值')
subplot(2,2,4); plot(w/pi,angX); grid
xlabel('以\pi 为单位的频率'); title('相频特性'); ylabel('弧度')
```

若要直接用函数 freqz，将以上程序的前三行语句改为以下语句，可得到相同结果。

```
n = 0:4;a = 1;b = [2,3,4,3,2];
N = 1000;
[X,w] = freqz(b,a,N);
```

freqz 函数还有几种表示方法：

```
[H,f] = freqz(b,a,N,Fs)              % Fs 为抽样频率,在(0~Fs/2)频率中取 N 个频率点(记录在 f 中)
[H,w] = freqz(b,a,N,'whole')         % 在(0~2π)中取 N 个频率点
[H,f] = freqz(b,a,N,'whole',Fs)      % 在(0~Fs)频率中取 N 个频率点
H = freqz(b,a,w)                     % 计算在矢量 w 中指定的频率处的频率响应,指定频率需在(0~2π)之中
H = freqz(b,a,f,Fs)                  % 计算在矢量 f 中指定的频率处的频率响应,指定频率需在(0~Fs)之中
freqz(b,a)                           % 不带输出变量,则在当前图形窗口中画出幅频及相频特性曲线
```

其中 f 代表频率，w 代表数字频率 ω(弧度)。

程序运行结果如图 2.33 所示。

* 在 DTFT 的数值计算中，有时会遇到 $\frac{0}{0}$ 的不定式，例如，对称形矩形窗序列

$$x(n)=\begin{cases}1, & |n|\leqslant N\\ 0, & |n|>N\end{cases}$$

此序列是一个长度为 $M=2N+1$ 的双边序列，用 MATLAB 计算时，要取有限长段，其段长要比 $[-N,N]$ 更长，也对称截取，即在 $[-N,N]$ 之外两边对称地补零点，另外将频域 $[-\pi,\pi]$ 之间取样足够密。例如，每 0.01π 取一个点，则可足以达到频率分辨率的要求。

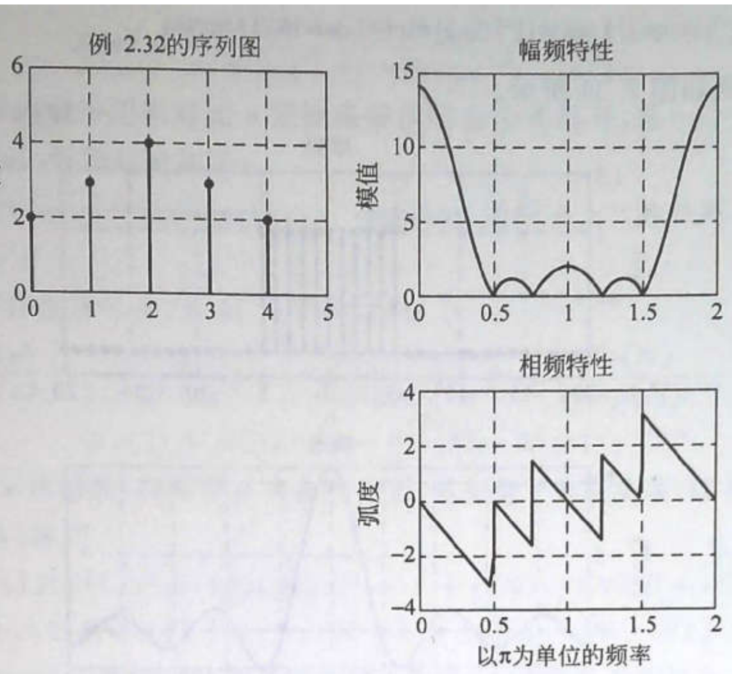

图 2.33　例 2.32 的图

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-N}^{N}e^{-j\omega n}=\frac{e^{j\omega N}-e^{-j\omega(N+1)}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j0.5\omega}(e^{j(N+0.5)\omega}-e^{-j(N+0.5)\omega})}{e^{-j0.5\omega}(e^{j0.5\omega}-e^{-j0.5\omega})}$$

$$=\frac{\sin[(N+0.5)\omega]}{\sin(0.5\omega)}$$

令　$M=2N+1$，则有

$$X(e^{j\omega})=\frac{\sin(0.5M\omega)}{\sin(0.5\omega)}$$

当 $\omega=0$ 时，$X(e^{j0})=\frac{0}{0}$是不定式，当然可用罗贝塔法则来求解。

即求分子分母分别对 ω 的导数在 $\omega=0$ 及 $\omega=2\pi$ 的值，可得 $X(e^{j0})=X(e^{j2\pi})=M$。但这并不方便，更方便的办法是在 ω 上加一个微小量，例如 MATLAB 中的 eps，有时干脆取 10^{-10}，表示为 1e−10，使 ω 绕过零值，则不必另加语句，可见以下例题。

【例 2.33】 求 $x(n)=\begin{cases}1, & |n|\leqslant N\\ 0, & |n|>N\end{cases}$的频谱，由上面已导出的公式，当 $N=5$，$M=2N+1=11$ 时，有 $X(e^{j\omega})=\sin(0.5M\omega)/\sin(0.5\omega)$，截取足够长的序列值。例如，对称地取 $L=41$ 个点，频域则每间隔 0.01π 取样来求频谱。

解

```
clc;clear all
N=5;M=2*N+1;n=-20:20;
x=[zeros(1,15),ones(1,M),zeros(1,15)];            % 对称的补零,补到 L=41 点长度
omega=[-pi:0.01*pi:pi]+1e-10;                     % 将 ω 在[-π,π]中,按 0.01π 间隔取样
X=sin(0.5*M*omega)./sin(0.5*omega)                % x(n)的 DFT
subplot(211);stem(n,x,'.');
title('序列');xlabel('n');
ylabel('x(n)');axis([-20,20,-0.2,1.5]);grid;
subplot(212);plot(\omega/pi,X);xlabel('\omega/\pi');title('频谱');
```

```
ylabel('X(e^j^\omega)');axis([-1,1,min(X),max(X)]);grid;
```

程序运行结果如图 2.34 所示。

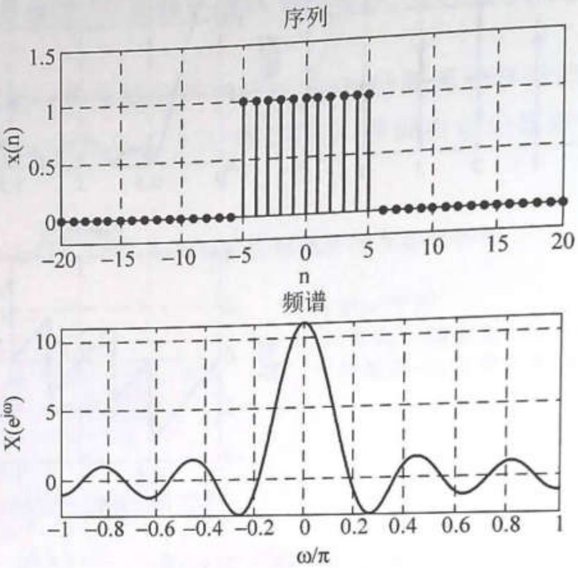

图 2.34 例 2.33 的图

6. 由系统函数 $H(z)$ 求系统频率响应及系统函数的零极点，并作图。

(1) 由系统函数 $H(z)$ 求系统频率响应和 2.5 节 1 中求序列的离散时间傅里叶变换(DTFT)表示法一样，即

[H,w]=freqz(b,a,N)

但这时若是 FIR 系统，则 $a=1$，与求 DTFT 时一样；若是 IIR 系统，则 a 除 $a(0)\neq 0$ 外，还至少有一项 $a(i)$ 不为零。b,a 仍分别是系统函数分子与分母 z^{-1} 多项式的系数(从 z^0 项开始)。即

$$H(z)=\frac{b(0)+b(1)z^{-1}+\cdots+b(M)z^{-M}}{a(0)+a(1)z^{-1}+\cdots+a(N)z^{-N}}$$

其中，H 是频率响应，w 将 N 点频率记录在其中，注意频率响应是在 ω 在 $0\sim\pi$ 的均分 N 点上的响应，若缺省 N，则函数自动取 N=512 作 FFT 运算。$a(0)$ 不能为零，且分子、分母按 z 的负幂排列，即首项应为常数项，w 向量为 w=[0 : N−1]π/N。

(2) 利用系统函数的 b,a 系数向量求系统函数的零极点可用以下 MATLAB 函数

zplane(b,a)

此函数首先利用 roots 函数找出由 b 及 a 构成的函数的零极点，然后再画出零极点，并自动设定坐标刻度，零点以"∘"标记，极点以"×"标记。

* a,b 作为系数时必须用行向量输入，如果是零极点向量，则必须取列向量形式输入，

zplane 就是这样来理解用户输入的是系数呢还是零极点。

＊注意，有时零极点数值过大时，使得靠近 $z=0$ 原点处的零极点无法区分，则可在 zplane 函数之后使用以下函数：

```
axis([xmin,xmax,ymin,ymax]);
```

＊若需求 ω 在 $0\sim2\pi$ 之间的频率响应，则采用[H,w]=freqz(b,a,N,'whole')；

＊若采用[H,f]=freqz(b,a,N,Fs)，则表示抽样频率为 Fs(以 Hz 为单位)，且在 0～Fs/2 频率范围内取 N 个频率点记录在 f 之中，并计算其相应的频率响应 H。

【例 2.38】 已知

$H(z)=[1-1.8z^{-1}-1.44z^{-2}+0.64z^{-3}]/[1-1.64853z^{-1}+1.03882z^{-2}-0.288z^{-3}]$，求 $H(z)$ 的零极点并画出零极点图。

解

```
clc;clear all
b=[1,-1.8,-1.44,0.64]                   %系统函数分子系数向量
a=[1,-1.64853,1.03882,-0.288]           %系统函数分母系数向量
rp=roots(a)                             %求极点
rz=roots(b)                             %求零点
[H,w]=freqz(b,a,1024,'whole')           %计算频率响应
magX=abs(H);angX=angle(H);
figure(1)
zplane(b,a)                             %画出零极点图
figure(2)
subplot(2,1,1);plot(w/pi,magX);grid
xlabel('');title('幅度部分');ylabel('幅值')
subplot(2,1,2);plot(w/pi,angX);grid
xlabel('以\omega/\pi 为单位的频率');title('相角部分');ylabel('相角(弧度)')
```

程序运行结果如图 2.35 所示。

＊若没有左端变量键入 freqz(b,a,N)，则不给出数据，而是只画出幅频特性及相频特性。

＊若在输入变量中给出 w 向量，而输出变量只给出 H，即 H=freqz(b,a,w)，则在选定的频率向量点 w 上计算频率响应，但给定频率必须介于 $0\sim2\pi$ 之间。

＊若写成 H=freqz(b,a,f,Fs)，则计算在指定矢量 f(以 Hz 表示，即模拟频率)上的频率响应，但指定频率必须介于 0～Fs 之间(Fs 为抽样频率)。

7. 给定系统函数，确定系统的稳定性。

＊只要系统函数的极点在 z 平面单位圆内，而极点的模 $|z_p|<1$，则系统稳定。可以简单地利用以下程序来判断系统的稳定性。设 $H(z)=b(z)/a(z)$。

```
%stability: 系统稳定性判断程序
a=input('a=');              %输入 H(z)的分母多项式系数向量
zp=roots(a);                %求 H(z)的极点
zpm=max(abs(zp));           %求所有极点模的最大值
if zpm<1,disp('系统稳定'),else disp('系统不稳定'),end
```

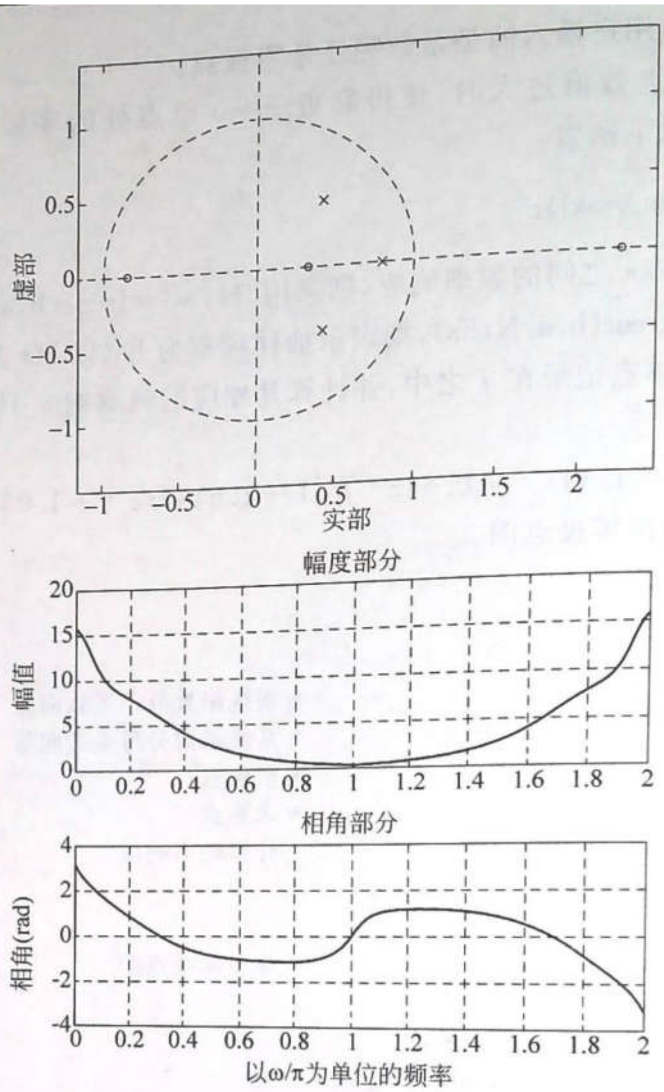

图 2.35　例 2.38 的图