本章的主要内容

第1节 整数线性规划问题的提出

第2节 分支定界法

第3节 0-1型整数线性规划

第4节 指派问题

整数规划的数学模型的一般形式

- **整数规划：** 部分或全部变量取值为整数的规划。
- 不考虑整数条件，由余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为该**整数规划问题的松弛问题**。
- 若该松弛问题是一个线性规划，则称该整数规划为**整数线性规划**。

整数线性规划的数学模型为：

$$\max(\min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=、\ge)\ b_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j \ge 0 & (j = 1, 2, \cdots, n) \\ \text{部分或全部变量取整数} & \end{cases}$$

整数线性规划的分类

- **纯整数线性规划**：指全部决策变量都必须取整数值的整数线性规划。
- **混合整数线性规划**：决策变量中有一部分必须取整数值，另一部分可以不取整数值的整数线性规划。
- **0-1型整数线性规划**：决策变量只能取值0或1的整数线性规划。

整数线性规划的例子

例1 某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，每箱的体积、重量、可获利润及托运所受限制如下表所示。问两种货物各托运多少箱，可使获得利润为最大?

货物	体积(m^3/箱)	重量(100kg/箱)	利润(100元/箱)
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24m^3	1300kg	

解： $\max Z = 20x_1 + 10x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}$$

$$\max Z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

不考虑整数约束，所得到的线性规划问题，**一般称为松弛问题**。

例 设整数规划问题 $\max Z = x_1 + x_2$

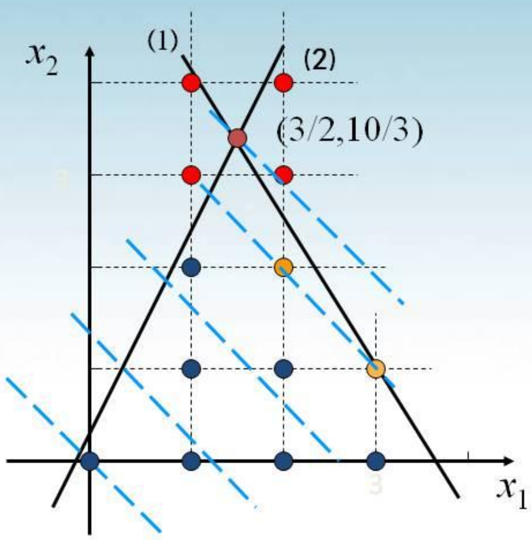
$$\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}$$

其松弛问题为 $\max Z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

由图解法知最优解为：$x_1 = 3/2$, $x_2 = 10/3$，$Z = 29/6$

现求整数解(最优解):如果用舍入取整法可得到4个点，即(1，3),(2，3),(1，4),(2，4)。显然，它们都不可能是整数规划的最优解。



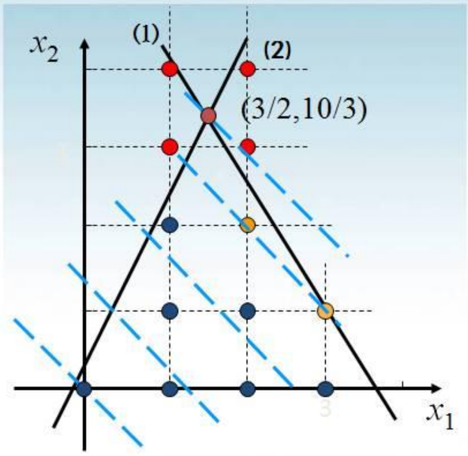
整数规划的可行解必定在其松弛问题可行域内且为整数点。故整数规划问题的可行解集是一个有限集，如右图所示。

其中(2,2),(3,1)点的目标函数值最大，即为Z=4。

整数线性规划解的特点

- 松弛问题作为一个线性规划，其可行域为凸集。任意两个可行解的凸组合仍是可行解。
- 整数规划问题的可行解集合是其松弛问题可行解集合的一个子集。

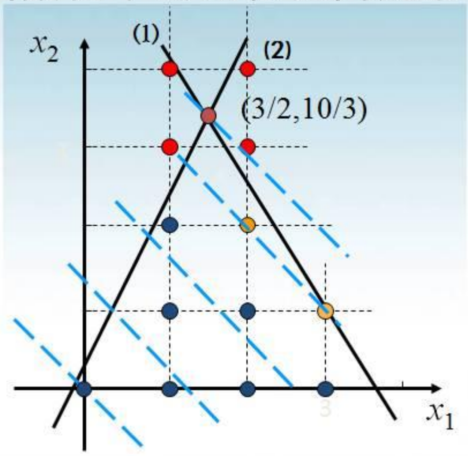
任意两个可行解的凸组合不一定满足整数约束，因而不一定仍为可行解。



整数线性规划解的特点

➢整数规划问题的可行解一定是它的松弛问题的可行解，但反之不一定。

因此整数规划最优解的目标函数值不会比松弛问题最优解的目标函数值更大。



分支定界法

分支定界法的解题步骤：

(1)求整数规划的松弛问题的最优解

若松弛问题的最优解满足整数要求，则得到整数规划的最优解，否则转下一步。

(2)分支

若松弛问题最优解不满足整数要求，例如 $x_i = b_i$ 不满足整数要求，则构造两个约束条件： $x_i \le [b_i]$ 和 $x_i \ge [b_i]+1$ ，并入上述松弛问题的约束中，形成两个分支，即两个后继问题。

(3)定界

在分支过程中，若某后继问题恰巧获得整数规划的一个可行解，那么，它的目标函数值就是一个“界限”，可以作为衡量处理其它分支的一个依据。

例2　求解问题A：

$$\max z=40x_1+90x_2$$

$$s.t.\begin{cases}9x_1+\ 7x_2\le 56\\7x_1+20x_2\le 70\\x_1,x_2\ge 0\\x_1,x_2\text{为整数}\end{cases}$$

其松弛问题为(记做B)：

$$\max z=40x_1+90x_2$$

$$s.t.\begin{cases}9x_1+\ 7x_2\le 56\\7x_1+20x_2\le 70\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

首先求解松弛问题B，
得到最优解：

$$x_1=4.81\,,\,x_2=1.82\,,\,z_0=356$$

则　$0\le z^*\le 356$

可以按照 x_1 分支，　$x_1\le 4\,,\,x_1\ge 5$

得到问题B的两个后继问题B1，B2
如下：

松弛问题B：

$$\max z=40x_1+90x_2$$

$$s.t.\begin{cases}9x_1+\ 7x_2\le 56\\7x_1+20x_2\le 70\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

B1：

$$\max z=40x_1+90x_2$$

$$s.t.\begin{cases}9x_1+\ 7x_2\le 56\\7x_1+20x_2\le 70\\\underline{x_1\le 4}\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

B2：

$$\max z=40x_1+90x_2$$

$$s.t.\begin{cases}9x_1+\ 7x_2\le 56\\7x_1+20x_2\le 70\\\underline{x_1\ge 5}\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

问题B1的解	问题B2的解
Z_1=349	Z_2=341
x_1=4	x_1=5
x_2=2.1	x_2=1.57

则 $0 \le z^* \le 349$

- 先对B1按照 x_2 分支， $x_2 \le 2$, $x_2 \ge 3$

  分别得到两个后继问题B11，B12

$B11: x_1 = 4 \quad, x_2 = 2, z_3 = 340$，满足整数约束；

$B12: x_1 = 1.42, x_2 = 3, z_3 = 327$，无需再考虑此分支。

问题B1	问题B2
Z_1=349	Z_2=341
x_1=4	x_1=5
x_2=2.1	x_2=1.57

$B11: x_1 = 4 \quad, x_2 = 2, z_3 = 340.$

- 再对B2按照 x_2 分支， $x_2 \le 1$, $x_2 \ge 2$

  分别得到两个后继问题B21，B22

$B21: x_1 = 5.44, x_2 = 1, z_5 = 308 < z_3$, 不再考虑此分支；

$B22:$ 无可行解。

0—1型整数规划

- 0—1变量

0—1变量常被用来表示系统是否处于某个特定状态，或者决策时是否取某个特定方案。例如:

$$x=\begin{cases}1, & \text{当取方案}P\text{时}\\0, & \text{当不取方案}P\text{时}\end{cases}$$

当问题有多项要素，每项要素皆有两种选择时，可用一组0—1变量来描述。设问题有有限项要素E_1，E_2，----，E_n，其中每项E_j有两种选择A_j和不选择A_j（j=1,2,----,n）,则令

$$x_j=\begin{cases}1, & \text{若}E_j\text{选择}\boldsymbol{A}_j\\0, & \text{若}E_j\text{选择}\overline{\boldsymbol{A}}_j\end{cases}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

1. 投资场所的选定

例4 某公司拟在东、南、西三区的7个位置选点建立门市部。规定：

在东区，由A_1，A_2，A_3三个点中至多选两个；

在南区，由A_4，A_5两个点中至少选一个；

在西区，由A_6，A_7两个点中至少选一个。

若选用A_i点，则需投资b_i元，每年可获利c_i元，但总投资额不超过B元。应选择哪几个点可使年利润最大？

解： 设 $x_j=\begin{cases}1, & \text{若选择第 } j \text{ 个点}\\ 0, & \text{若不选择第 } j \text{ 个点}\end{cases} \quad (j=1,2,\cdots,7)$

$$\max z=\sum_{i=1}^{7} c_i x_i$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{7} b_i x_i \le B \\ x_1+x_2+x_3 \le 2 \\ x_4+x_5 \ge 1 \\ x_6+x_7 \ge 1 \\ x_i=0\text{或}1\end{cases}$$

2. 相互排斥的约束条件

（1）两个约束中，只有一个起作用。

例： $a_{11}x_1+a_{12}x_2<B_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2<B_2$

引入0-1变量y_1, y_2和足够大的正数M，则

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2<B_1+My_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2<B_2+My_2$$

$$y_1+y_2=1$$

3. 固定费用问题

例　固定费用问题

单耗量 产品 / 资源	I	II	III	资源量
A	2	4	8	500
B	2	3	4	300
C	1	2	3	100
单件可变费用	4	5	6	
固定费用	100	150	200	
单件售价	8	10	12	

解：设 X_j 是第 j 种产品的产量。

Y_j 是0－1变量，Y_j=1表示生产第 j 种产品。

$$\max Z = 4X_1 + 5X_2 + 6X_3 - 100Y_1 - 150Y_2 - 200Y_3$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 + 8X_3 \le 500 \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \le 300 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 \le 100 \\ X_1 \le \mathrm{M}Y_1 \\ X_2 \le \mathrm{M}Y_2 \\ X_3 \le \mathrm{M}Y_3 \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0，\ Y_1, Y_2, Y_3 \text{为} 0-1 \text{变量} \end{cases}$$

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

0—1型整数规划

0—1整数规划是一种特殊形式的整数规划，这时的决策变量x_i只取两个值0或1，一般的解法为隐枚举法。

隐枚举法原则：

1、先试探求出一个可行解，以它的目标值作为当前最好值Z^0

2、增加过滤条件$Z \geq Z^0$

3、将x_i按c_i由小到大排列(若是min问题则由大到小)

例6 $\max Z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + x_3 \leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \text{为0或1} \end{cases}$$

解：观察得解$(x_1, x_2, x_3)=(1, 0, 0)$　$Z^0=3$

过滤条件：$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3$

重新排序$(x_1, x_2, x_3) \to (x_2, x_1, x_3)$

(−2 ,3 ,5)

$(x_2\,x_1\,x_3)$	目标值	Z^0	① ② ③ ④	当前最好值
(0 ,0 ,0)	0	<		3
(0 ,0 ,1)	5	>	√ √ √ √	5
(0 ,1 ,0)	3	<		
(0 ,1 ,1)	8	>	√ √ √ √	8
(1 ,0 ,0)	−2	<		
(1 ,0 ,1)	3	<		
(1 ,1 ,0)	1	<		
(1 ,1 ,1)	6	<		

最优解 $x = (1\ ,0\ ,1\ )^T$ $Z=8$

指派问题

设n个人被分配去做n件工作，规定每个人只做一件工作，每件工作只有一个人去做。已知第i个人去做第j件工作的效率(时间或费用)为$C_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)$并假设$C_{ij}\geq 0$。问应如何分配才能使总效率(时间或费用)最高？

设决策变量 $$x_{ij}=\begin{cases}1\ ,\text{指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事}\\ 0\ ,\text{不指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事}\end{cases}$$

指派问题的数学模型为：

$$\min Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 \quad (i=1,2,\cdots,\ n)\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 \quad (j=1,2,\cdots,\ n)\\ x_{ij}\text{取0或1}\end{cases}$$

指派问题的求解—匈牙利法

康尼格定理：

- 如果从指派问题系数矩阵 (c_{ij}) 的一行(列)各元素中分别减去该行(列)的最小元素，得到一个新矩阵 (b_{ij}) ，则以 (b_{ij})为系数矩阵求得的最优解和用原系数矩阵求得的最优解相同。
- 系数矩阵中独立零元素的最多个数等于能覆盖所有零元素的最少直线数。

匈牙利法求解步骤

第一步：变换指派问题的系数矩阵(c_{ij})为(b_{ij})，使在(b_{ij})的各行各列中都出现0元素，即

- 从(c_{ij})的每行元素都减去该行的最小元素；
- 再从所得新系数矩阵的每列元素中减去该列的最小元素。

第二步：进行试指派，以寻求最优解。

在(b_{ij})中找尽可能多的**独立0元素(指不同行不同列)**，若能找出n个独立0元素，就以这n个独立0元素对应解矩阵(x_{ij})中的元素为1，其余为0，这就得到最优解。

找独立0元素，常用的步骤为：

- 从只有一个0元素的行开始，给该0元素加圈，记作◎ 。
  然后划去◎ 所在列的其它0元素，记作∅ ，这表示该列所代表的任务已指派完。
- 从只有一个0元素的列开始(画∅的不计在内)，给该0元素加圈，记作◎ 。
  然后划去◎ 所在行的0元素，记作∅ ，表示此人已有任务。
- 若仍存在没有划圈的0元素，且同行(列)的0元素至少有两个，比较这行各0元素所在列中0元素的数目，选择0元素少的那列的这个0元素加圈。然后划掉同行同列的其它0元素。可反复进行，直到所有0元素都已圈出和划掉为止。

- 若◎ 元素的数目m等于矩阵的阶数n（即：$m=n$），那么这指派问题的最优解已得到。若$m<n$, 则转入下一步。

第三步：用最少的直线通过所有0元素。其方法：

① 对没有◎的行打“√”；

② 对已打“√”的行中所有含∅元素的列打“√”；

③ 再对打有“√”的列中含◎ 元素的行打“√”；

④ 重复①、②直到得不出新的打√号的行、列为止；

⑤ 对没有打√号的行画横线，有打√号的列画纵线，这就得到覆盖所有0元素的最少直线数L。

注：L应等于m，若不相等，说明试指派过程有误，回到第2步，另行试指派；若L＝m ＜ n，表示还不能确定最优指派方案，须再变换当前的系数矩阵，以找到n个独立的0元素，为此转第4步。

第四步：变换矩阵(b_{ij})以增加0元素

在没有被直线通过的所有元素中找出最小值，

没有被直线通过的所有元素减去这个最小元素，

直线交点处的元素加上这个最小值。

新系数矩阵的最优解和原问题仍相同。转回第2步。

例7 已知四人分别完成四项工作所需时间如下表，求最优分配方案。

人员 \ 任务	A	B	C	D
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

解：变换系数矩阵，增加0元素。

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix}\begin{array}{c} -2 \\ -4 \\ -9 \\ -7 \end{array}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & 13 & 11 & 2 \\ 6 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & -4 & -2 \end{array}\end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试指派(即找独立0元素)

$$\begin{bmatrix} \emptyset & 13 & 7 & \circledcirc \\ 6 & \circledcirc & 6 & 9 \\ \circledcirc & 5 & 3 & 2 \\ \emptyset & 1 & \circledcirc & \emptyset \end{bmatrix}$$

独立0元素的个数为4，指派问题的最优指派方案即为甲负责D工作，乙负责B工作，丙负责A工作，丁负责C工作。这样安排能使总的工作时间最少，为4＋4＋9＋11＝28。

例　有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记作A、B、C、D。现有甲、乙、丙、丁四人，他们将中文说明书译成不同语种的说明书所需时间如下表所示，问如何分派任务，可使总时间最少？

任务 / 人员	A	B	C	D
甲	6	7	11	2
乙	4	5	9	8
丙	3	1	10	4
丁	5	9	8	2

解：1）变换系数矩阵，增加0元素。

$$(c_{ij})=\begin{bmatrix}6&7&11&2\\4&5&9&8\\3&1&10&4\\5&9&8&2\end{bmatrix}\begin{matrix}-2\\-4\\-1\\-2\end{matrix}\Rightarrow\begin{array}{c}\begin{bmatrix}4&5&9&0\\0&1&5&4\\2&0&9&3\\3&7&6&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}\quad&\quad&-5&\quad\end{matrix}\end{array}\Rightarrow\begin{bmatrix}4&5&4&0\\0&1&0&4\\2&0&4&3\\3&7&1&0\end{bmatrix}$$

2）试指派（找独立0元素）

$$\begin{bmatrix}4&5&4&\circledcirc\\\circledcirc&1&\varnothing&4\\2&\circledcirc&4&3\\3&7&1&\varnothing\end{bmatrix}$$

找到 3 个独立零元素，但这是个 4 阶指派问题，因此需要增加零元素。

3）画出覆盖所有零元素的最少直线

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} &&&\surd \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccc} 4&5&4&\circledcirc\\ \circledcirc&1&\emptyset&4\\ 2&\circledcirc&4&3\\ 3&7&1&\emptyset \end{array}\right] & \begin{array}{c}\surd\\ \\ \\ \surd\end{array} \end{array}$$

直线数小于4，表示还不能确定最优指派方案，须再变换当前的系数矩阵，以找到4个独立的0元素，为此转第4步。

4）变换当前矩阵以增加0元素

在没有被直线通过的所有元素中找出最小值，

在没有被直线通过的所有元素都减去这个最小元素，

直线交点处的元素加上这个最小值。

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} &&&\surd \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccc} 4&5&4&\circledcirc\\ \circledcirc&1&\emptyset&4\\ 2&\circledcirc&4&3\\ 3&7&1&\emptyset \end{array}\right] & \begin{array}{c}\surd\\ \\ \\ \surd\end{array} \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc} 3&4&3&\circledcirc\\ \circledcirc&1&\emptyset&5\\ 2&\circledcirc&4&4\\ 2&6&\circledcirc&\emptyset \end{array}\right]$$

例 已知五人分别完成五项工作耗费如下表，求最优分配方案。

人员 \ 任务	A	B	C	D	E
甲	7	5	9	8	11
乙	9	12	7	11	9
丙	8	5	4	6	8
丁	7	3	6	9	6
戊	4	6	7	5	11

解：**1）变换系数矩阵，增加0元素。**

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 & 8 & 11 \\ 9 & 12 & 7 & 11 & 9 \\ 8 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 6 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -5 \\ -7 \\ -4 \\ -3 \\ -4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & & & -1 & -2 \end{array} \end{array} \Rightarrow$$

2）试指派（找独立0元素）

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & ◎ & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & \varnothing & 3 & ◎ \\ 4 & 1 & ◎ & 1 & 3 \\ 4 & \varnothing & 3 & 5 & 1 \\ ◎ & 2 & 3 & \varnothing & 5 \end{bmatrix}$$

独立0元素的个数＝4<5，故画直线调整矩阵。

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & ◎ & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & \varnothing & 3 & ◎ \\ 4 & 1 & ◎ & 1 & 3 \\ 4 & \varnothing & 3 & 5 & 1 \\ ◎ & 2 & 3 & \varnothing & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \surd \\ \\ \\ \surd \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \quad & \surd & \quad & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

选择直线外的最小元素为1；直线外元素减1，直线交点元素加1，其他保持不变。

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccc}1 & ◎ & 3 & 1 & 3\\ 2 & 6 & \varnothing & 3 & ◎\\ 4 & 2 & ◎ & 1 & 3\\ 3 & \varnothing & 2 & 4 & \varnothing\\ ◎ & 3 & 3 & \varnothing & 5\end{array}\right]\begin{array}{c}\surd\\ \surd\\ \surd\\ \surd\\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccccc}\ \ & \surd & \surd & \ \ & \surd\end{array}\end{array}$$

$l=m=4<n=5$

选择直线外最小元素为1，直线外元素减1，直线交点元素加1，其他保持不变，得到新的系数矩阵。

$$\begin{bmatrix}\varnothing & ◎ & 3 & \varnothing & 3\\ 1 & 6 & ◎ & 2 & \varnothing\\ 3 & 2 & \varnothing & ◎ & 3\\ 2 & \varnothing & 2 & 3 & ◎\\ ◎ & 4 & 4 & \varnothing & 6\end{bmatrix}$$

总费用为
5+7+6+6+4=28

注：此问题有多个最优解

$$\begin{bmatrix} \circledcirc & \emptyset & 3 & \emptyset & 3 \\ 1 & 6 & \emptyset & 2 & \circledcirc \\ 3 & 2 & \circledcirc & \emptyset & 3 \\ 2 & \circledcirc & 2 & 3 & \emptyset \\ \emptyset & 4 & 4 & \circledcirc & 6 \end{bmatrix}$$

总费用为=7+9+4+3+5=28

$$\begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & 3 & \circledcirc & 3 \\ 1 & 6 & \emptyset & 2 & \circledcirc \\ 3 & 2 & \circledcirc & \emptyset & 3 \\ 2 & \circledcirc & 2 & 3 & \emptyset \\ \circledcirc & 4 & 4 & \emptyset & 6 \end{bmatrix}$$

总费用为=8+9+4+3+4=28

非标准型的指派问题：

匈牙利法的条件是：模型求最小值、效率$c_{ij}\geq 0$。

当遇到各种非标准形式的指派问题时，处理方法是**先将其转化为标准形式**，然后用匈牙利法来求解。

1. 最大化指派问题

处理方法：设m为最大化指派问题系数矩阵C中最大元素。令矩阵B＝$(m-c_{ij})_{nn}$，则以B为系数矩阵的最小化指派问题和原问题有相同的最优解。

例 某人事部门拟招聘4人任职4项工作，对他们综合考评的得分如下表（满分100分），如何安排工作使总分最多。

$$C=\begin{array}{c}甲\\乙\\丙\\丁\end{array}\begin{bmatrix}85 & 92 & 73 & 90\\95 & 87 & 78 & 95\\82 & 83 & 79 & 90\\86 & 90 & 80 & 88\end{bmatrix}$$

$$C' = (95 - c_{ij})$$

解: M＝95，令
$$C' = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 22 & 5 \\ 0 & 8 & 17 & 0 \\ 13 & 12 & 16 & 5 \\ 9 & 5 & 15 & 7 \end{bmatrix}$$

用匈牙利法求解C’，最优解为:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

即甲安排做第二项工作、乙做第三项、丙做第四项、丁做第三项,最高总分Z＝92＋95＋90＋80＝357

2. 不平衡的指派问题

- 当人数m大于工作数n时，加上m－n项虚拟工作，例如:

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 10 \\ 11 & 6 & 3 \\ 8 & 14 & 17 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 14 & 17 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 当人数m小于工作数n时，加上n－m个人，例如

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 一个人可做几件事的指派问题

若某人可做几件事，则将该人化作相同的几个“人”来接受指派，且费用系数取值相同。

例如：丙可以同时任职A和C工作，求最优指派方案。

$$\begin{array}{c} 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{array}\begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \end{bmatrix}$$

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

4. 某事一定不能由某人做的指派问题

将该人做此事的效率系数取做足够大的数，可用M表示。

例　分配甲、乙、丙、丁四个人去完成A、B、C、D、E五项任务。每个人完成各项任务的时间如表所示。由于任务数多于人数，考虑任务E必须完成，其他4项中可任选3项完成。试确定最优分配方案，使完成任务的总时间最少。

任务 / 人员	A	B	C	D	E
甲	25	29	31	42	37
乙	39	38	26	20	33
丙	34	27	28	40	32
丁	24	42	36	23	45

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

解: 1) 这是不平衡的指派问题，首先转换为标准型，再用匈牙利法求解。

2) 由于任务数多于人数，所以假定一名虚拟人，设为戊。因为工作E必须完成，故设戊完成E的时间为M（M为非常大的数），其余效率系数为0，则标准型的效率矩阵表示为：

任务 / 人员	A	B	C	D	E
甲	25	29	31	42	37
乙	39	38	26	20	33
丙	34	27	28	40	32
丁	24	42	36	23	45
戊	0	0	0	0	M

用匈牙利法求出最优指派方案为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即甲－B，乙－D，丙－E，丁－A, 任务C放弃。

最少时间为105。