目标规划的数学模型

例1 某工厂生产Ⅰ，Ⅱ两种产品，已知有关数据见下表。试求获利最大的生产方案。

	Ⅰ	Ⅱ	拥有量
原材料(kg)	2	1	11
设备(hr)	1	2	10
利润(元/件)	8	10	

$$\max z = 8x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：这是求获利最大的单目标线性规划问题，

用x_1，x_2分别表示Ⅰ，Ⅱ产品的产量，

其线性规划模型表述为：

实际上，工厂在作决策时，需要考虑包括市场因素在内等一系列条件。例如：

(1)根据市场信息，产品Ⅰ的销售量有下降的趋势，因而希望产品Ⅰ的产量不大于产品Ⅱ。

(2)当超过计划供应原材料时，需用高价采购，会使成本大幅度增加。

(3)应尽可能充分利用设备台时，但不希望加班。

(4)应尽可能达到并超过计划利润指标56元。

类似上述这样存在多个目标的多目标决策问题，称为目标规划问题。

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

对于多目标问题，线性规划很难找到最优方案．极有可能出现：

对于第一目标，方案A的结果优于方案B；

而对于第二目标，方案B优于方案A.

就是说很难找到一个方案使所有目标同时达到最优，特别当约束条件中有矛盾方程时，线性规划方法无法解决.

实践中，人们转而采取“不求最好，但求满意”的策略，在线性规划的基础上建立一种新的数学规划方法——**目标规划**.

目标规划数学模型的基本概念

1. 偏差变量(用来表明实际值同目标值之间的差异)

正偏差变量：表示决策值超过目标值的部分，记为 d^+

负偏差变量：表示决策值未达到目标值的部分，记为 d^-

因为决策值不可能既超过目标值，同时又未达到目标值，**所以 d^+ 和 d^- 至少有一个为零**，即存在如下关系：

（1）$d^+ > 0$，$d^- = 0$（决策值超过目标值）

（2）$d^- > 0$，$d^+ = 0$（决策值未达到目标值）

（3）$d^+ = d^- = 0$（决策值等于目标值）

2. 绝对约束和目标约束

（1）绝对约束：必须严格满足的约束条件。

绝对约束是硬约束，

不能满足这些约束条件的解为**非可行解**。

如：线性规划问题中的所有约束条件都是绝对约束。

（2）目标约束：目标约束是目标规划特有的。

目标约束是软约束，在达到此目标值时允许发生正偏差或负偏差，因此在这些**约束的左端要加入**正偏差、负偏差变量；其约束右端项是要追求的目标值。

- 线性规划问题的目标函数，在给定目标值和加入正、负偏差变量后可变换为目标约束。
- 也可根据问题的需要将绝对约束变换为目标约束。

例如可将例1的

目标函数　$z = 8x_1+10x_2$

变换为目标约束　$8x_1+10x_2+d_1^- - d_1^+=56$

约束条件　$2x_1+x_2 \le 11$

变换为目标约束　$2x_1+x_2+d_2^- - d_2^+=11$

例如，当$d_2^-=0$，$d_2^+=3$时，表示$2x_1+x_2=14$；

当$d_2^-=2$，$d_2^+=0$时，表示$2x_1+x_2=9$；

3. 目标规划的目标函数

由各目标约束的正、负偏差变量及相应的优先因子和权系数构成。

当每一目标值确定后，决策者要求尽可能缩小偏离目标值，**所以目标规划的目标函数只能是极小化**，即：

$$\min \quad z = f(d^+, d^-)$$

其基本形式有三种：

（1）希望恰好达到目标值

（2）希望不超过目标值

（3）希望不低于目标值

（1）要求恰好达到目标值，即正、负偏差变量都要尽可能地小。构造的目标函数是

$$\min \quad z = f(d^+ + d^-)$$

（2）要求不超过目标值，但允许达不到目标值，即只有使正偏差量要尽可能地小（实现最少或为零）

$$\min \quad z = f(d^+)$$

（3）要求不低于目标值，即超过量不限。要求超额完成规定目标，要实现负偏差量为零或为最小

$$\min \quad z = f(d^-)$$

4. 优先因子(优先等级)与权系数

一个规划问题常常有若干目标。但决策者在要求达到这些目标时，会有主次或轻重缓急的不同。例如，要求第一位达到的目标赋予**优先因子**P_1，次位的目标赋予优先因子P_2，…，并规定

$$P_k >> P_{k+1}$$

表示P_k比P_{k+1}有更大的优先权。

即首先保证P_1级目标的实现，这时可不考虑次级目标；而P_2级目标仅在实现P_1级目标基础上才会考虑；依此类推。

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

若要区别具有相同优先因子的两个目标的差别，可分别赋予它们不同的**权系数**w_j。

权系数是一个具体数字，乘上的权系数越大，表明该目标越重要。

权系数由决策者按具体情况确定。

5. 满意解

对于这种问题的解来说，前面的目标可以保证实现或部分实现，而后面的目标就不一定能保证实现或部分实现，有些可能就不能实现。

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

建立目标规划数学模型的步骤

1. 列出目标约束不等式；
2. 添加正、负偏差变量，将目标约束不等式变成等式；
3. 确定每个目标的目标要求：

当目标约束不等式的约束符为“＝”时，$\min(d^- + d^+)$

当目标约束不等式的约束符为“≥”时，$\min d^-$

当目标约束不等式的约束符为“≤”时 $\min d^+$

4. 对同一级优先因子中的各偏差变量，若重要程度不同时，可赋予不同的加权系数；
5. 构造一个按优先因子及加权系数和对应的目标偏差变量所要实现最小化的目标函数。

陕西科技大学

SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

例1

	Ⅰ	Ⅱ	拥有量
原材料(kg)	2	1	11
设备(hr)	1	2	10
利润(元/件)	8	10	

$$\max z = 8x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例2：在例1中原材料供应受严格限制的基础上考虑：

1. 由于产品 Ⅰ 销售疲软，故希望产品 Ⅰ 的产量不超过产品Ⅱ 的产量；

3. 尽可能充分利用设备台时，但不加班；

4. 利润额不小于56 元。

陕西科技大学

SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

1. 由于产品 I 销售疲软，故希望产品 I 的产量不超过产品 II 的产量；

$$x_1 - x_2 \boxed{+d_1^- - d_1^+ =} 0 \qquad \min z = P_1 d_1^+$$

3. 尽可能充分利用设备台时，但不加班；

$$x_1 + 2x_2 \boxed{+d_2^- - d_2^+ =} 10 \qquad \min z = P_2(d_2^- + d_2^+)$$

4. 利润额不小于 56 元。

$$8x_1 + 10x_2 \boxed{+d_3^- - d_3^+ =} 56 \qquad \min z = P_3 d_3^-$$

从而建立问题的模型如下：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

目标函数也可以换成：

$$\min \{ P_1 d_1^+ , P_2(d_2^- + d_2^+) , P_3 d_3^- \}$$

目标规划数学模型的一般形式

$$\min f(d)=\sum P_i(w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+)$$

优先因子

负偏差权系数

正偏差权系数

$$s.t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + d_i^- - d_i^+ = g_i \quad (i=1,\cdots,m) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (=\ge) b_i \quad (i=1,\cdots,l) \\ x_j \ge 0\ (j=1,\cdots,n), d_i^-, d_i^+ \ge 0\ (i=1,\cdots,m)\end{cases}$$

目标约束

绝对约束

变量非负

练习：某企业生产甲、乙两种产品，数据见下表：

	甲产品	乙产品	可利用资源
原材料	2	3	100 吨
加工时间	4	2	120时
单位利润	6	4	百元

P_1　利润达280百元；

P_2　钢材不超过100吨，工时不超过120小时。（二者权数之比5：1）应如何安排生产？

解：设生产甲、乙产品各 x_1, x_2 件，则有

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 280 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 100 \\ 4x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 120 \\ x_1, x_2, d_i^+, d_i^- \geq 0 (i = 1,2,3) \end{cases}$$

P_1 利润达280百元； $d_1^- \to 0$

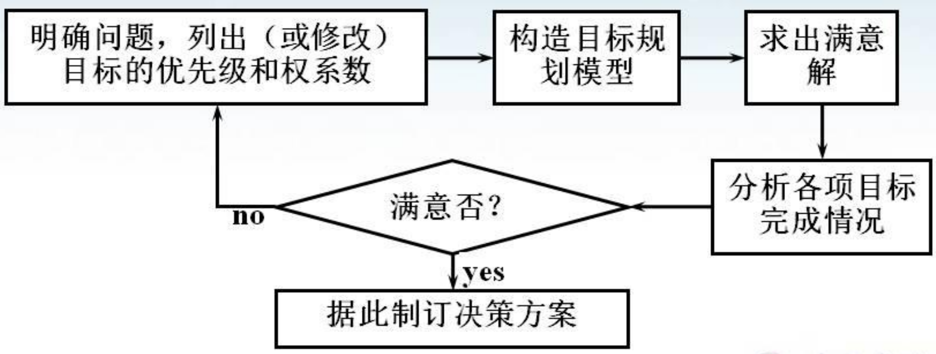
P_2 钢材不超过100吨，工时不超过120小时。

（权数之比5：1） $d_2^+ \to 0$ $d_3^+ \to 0$

依权数综合目标得： $\min z = P_1 d_1^- + P_2(5d_2^+ + d_3^+)$

目标规划的基本解法

- 用目标规划处理问题的难点在于构造模型时需要事先确定优先级和权系数。而这些信息往往来自人们的主观判断，很难给出一个绝对的数值。通常根据求解结果的各项目标满意程度来修改优先级和权系数，直至满意为止。其流程如下图。
- 我们将介绍2种方法：图解法和单纯形法。



目标规划的图解法——仅限于两个决策变量

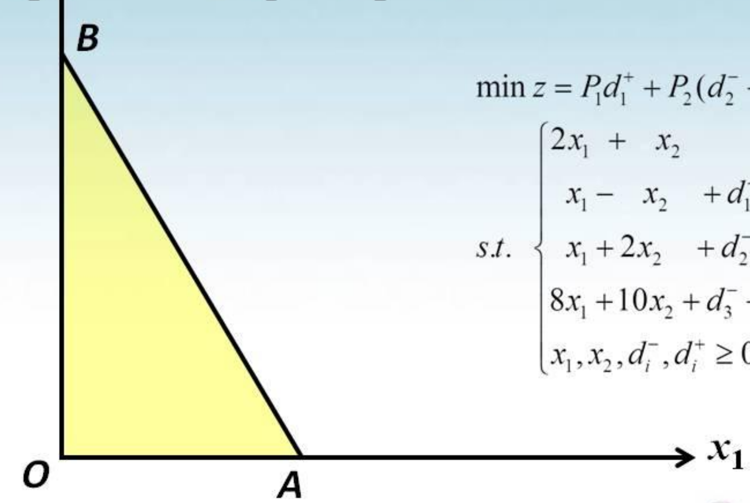
例2 $$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

解：

第一步. 画出绝对约束和非负条件所围成的取值范围

$$2x_1 + x_2 \le 11$$



$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

第二步. 画出目标约束所围成的取值范围

$$x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0$$

$$\downarrow$$

$$x_2 = x_1 + \underline{d_1^- - d_1^+}$$

x_2 轴上的截距

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

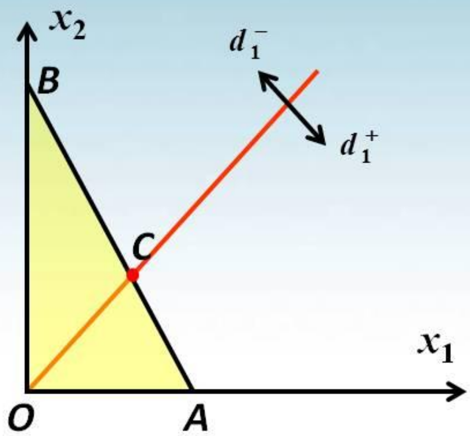
第二步. 画出目标约束所围成的取值范围

$$x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0$$

$$\downarrow$$

$$x_2 = x_1 + \underline{d_1^- - d_1^+}$$

x_2 轴上的截距

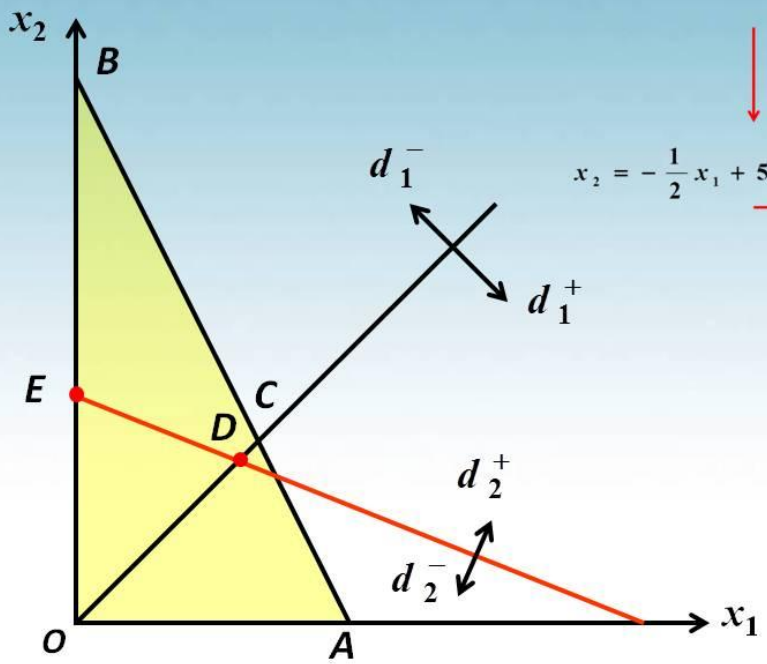


$$x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \underbrace{5 - \frac{1}{2}d_2^- + \frac{1}{2}d_2^+}_{x_2\text{轴上的截距}}$$

$$x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \underbrace{5 - \frac{1}{2}d_2^- + \frac{1}{2}d_2^+}_{x_2\text{轴上的截距}}$$

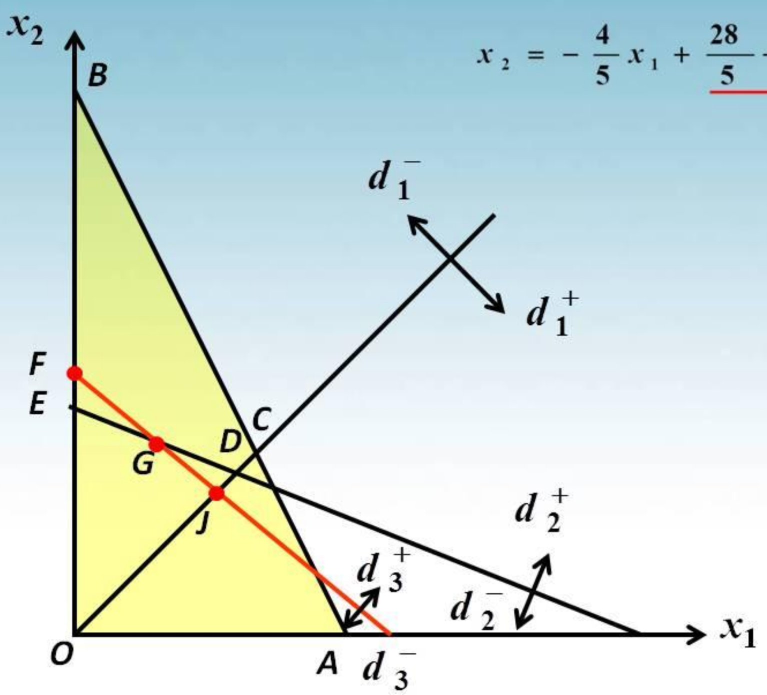


陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

$$8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56$$

$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \underbrace{\frac{28}{5} - \frac{1}{10}d_3^- + \frac{1}{10}d_3^+}_{}$$

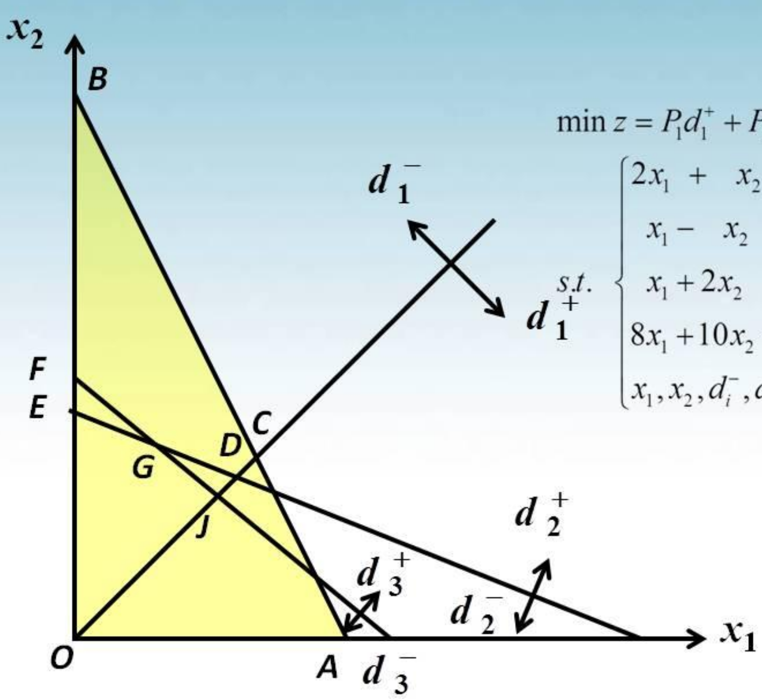
x_2轴上的截距



$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \underbrace{\frac{28}{5} - \frac{1}{10}d_3^- + \frac{1}{10}d_3^+}_{}$$

x_2轴上的截距

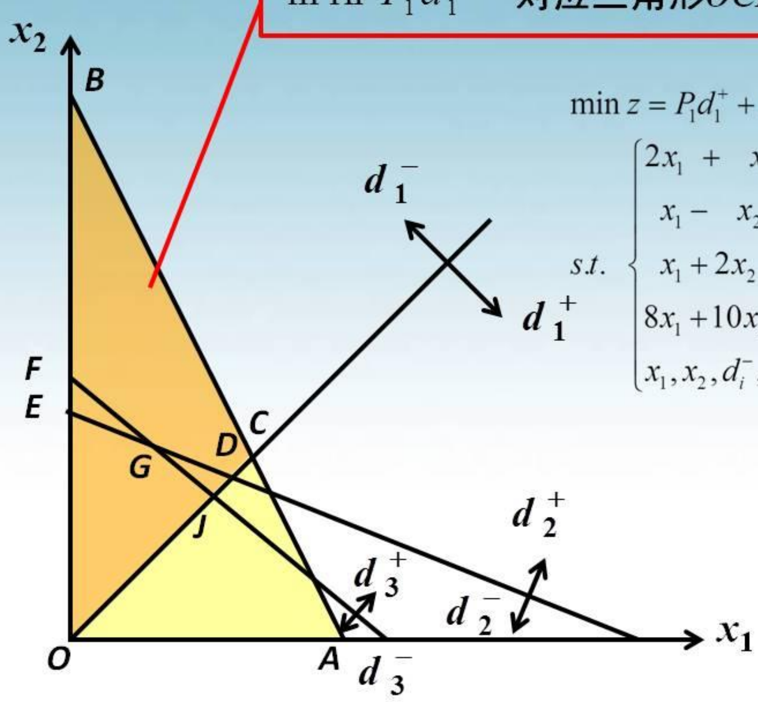
第三步.根据目标函数中的优先因子来分析求解



$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

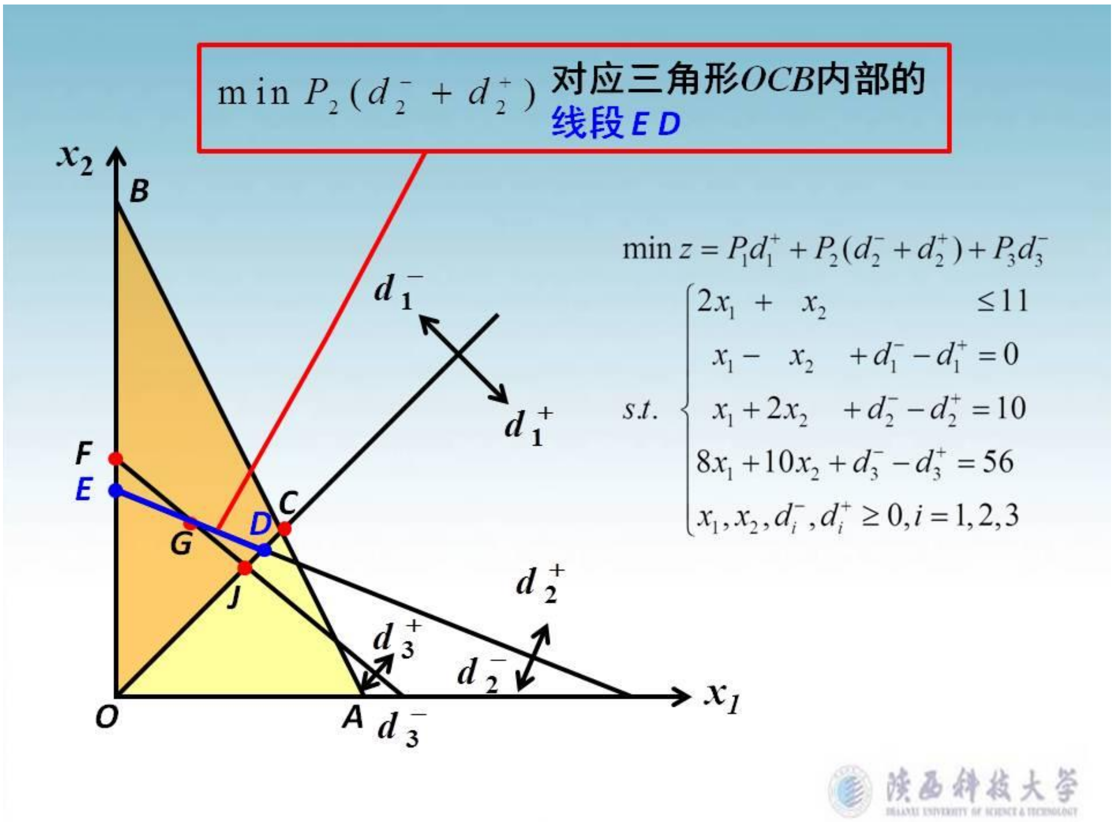
$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

$\min P_1 d_1^+$ 对应三角形OCB



$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

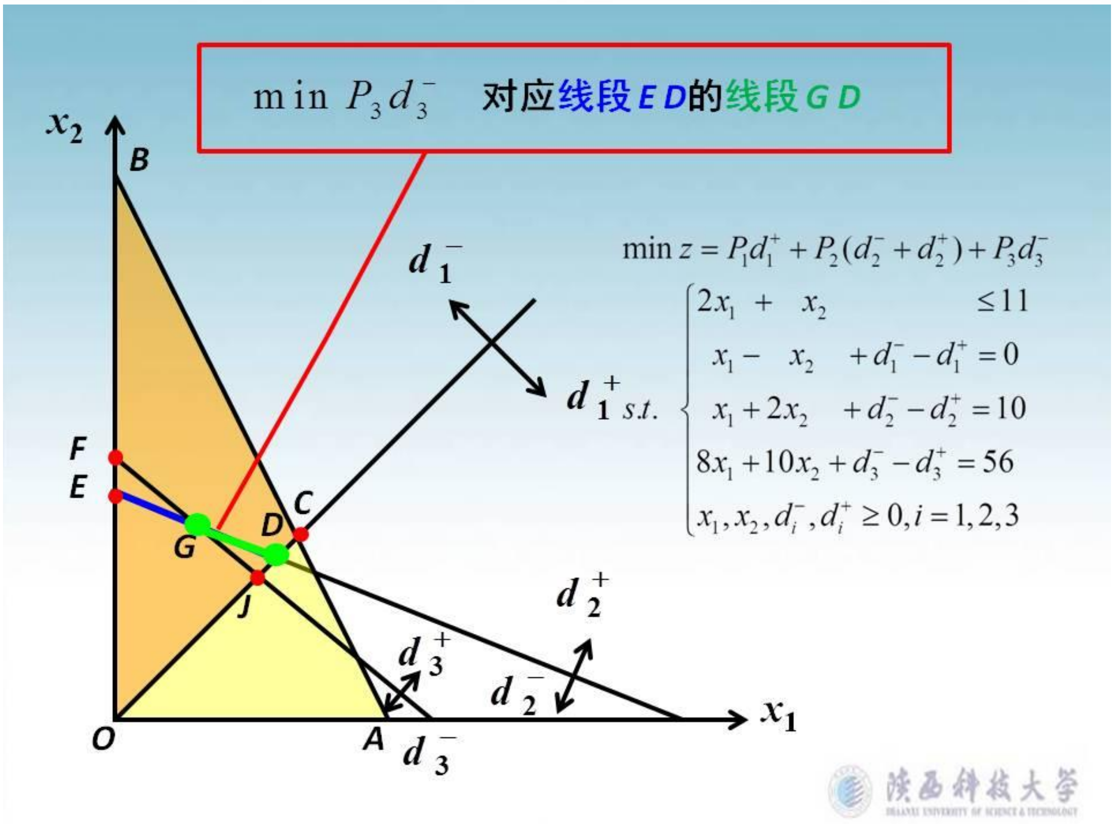


$\min P_2(d_2^- + d_2^+)$ 对应三角形OCB内部的线段ED

$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$

x_2
B
F
E
G
D
C
J
O
A
x_1
d_1^-
d_1^+
d_2^+
d_2^-
d_3^+
d_3^-
陕西科技大学



$\min P_3 d_3^-$ 对应线段ED的线段GD

$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$

x_2
B
F
E
G
D
C
J
O
A
x_1
d_1^-
d_1^+
d_2^+
d_2^-
d_3^+
d_3^-
陕西科技大学

可求得：

G 的坐标为：（2，4）

D 的坐标为：（10/3，10/3）

G 和 D 的凸组合均是目标规划问题的解。

所有目标都达到的方案称为最优方案，否则，称为次优或满意方案。

在本例中，依次先后次序满足了：

$d_1^- = 0 \qquad d_2^+ + d_2^- = 0 \qquad d_3^- = 0$

因而 $z^* = 0$，问题的最终解是最优解。

但在大多数问题中并非如此，会出现某些约束得不到满足，称之为满意解。

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

例3：某电视机厂装配黑白和彩色两种电视机。
每周市场的黑白电视机销量为 30 台，每台获利 40元；
每周市场的彩色电视机销量为 24 台，每台获利 80元。
每装配一台电视机需占用装配线 1 小时，装配线每周计划开动 40 小时。

该厂确定的目标为：

第一优先级：充分利用装配线每周计划开动 40 小时；
第二优先级：允许装配线加班，但加班时间每周尽量不超过 10 小时；
第三优先级：装配电视机数量尽量满足市场需求。因彩色电视机利润高，取其权系数为2 。
建立问题模型，并求解黑白和彩色电机机产量？

解：

设 x_1、x_2 分别表示彩色和黑白电视机产量。

1. 充分利用装配线每周计划开动时间 40 小时

$$x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40$$

$$\min \quad z = P_1 d_1^-$$

2. 允许装配线加班，但加班时间每周尽量不超过10小时：

$$x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50$$

$$\min \ z = P_2 d_2^+$$

3. 装配彩色电视机数量尽量满足市场需求量，且权系数为2：

$$x_1 + d_3^- - d_3^+ = 24$$

$$\min \ z = P_3(2d_3^-)$$

4. 装配黑白电视机数量尽量满足市场需求量，且权系数为1：

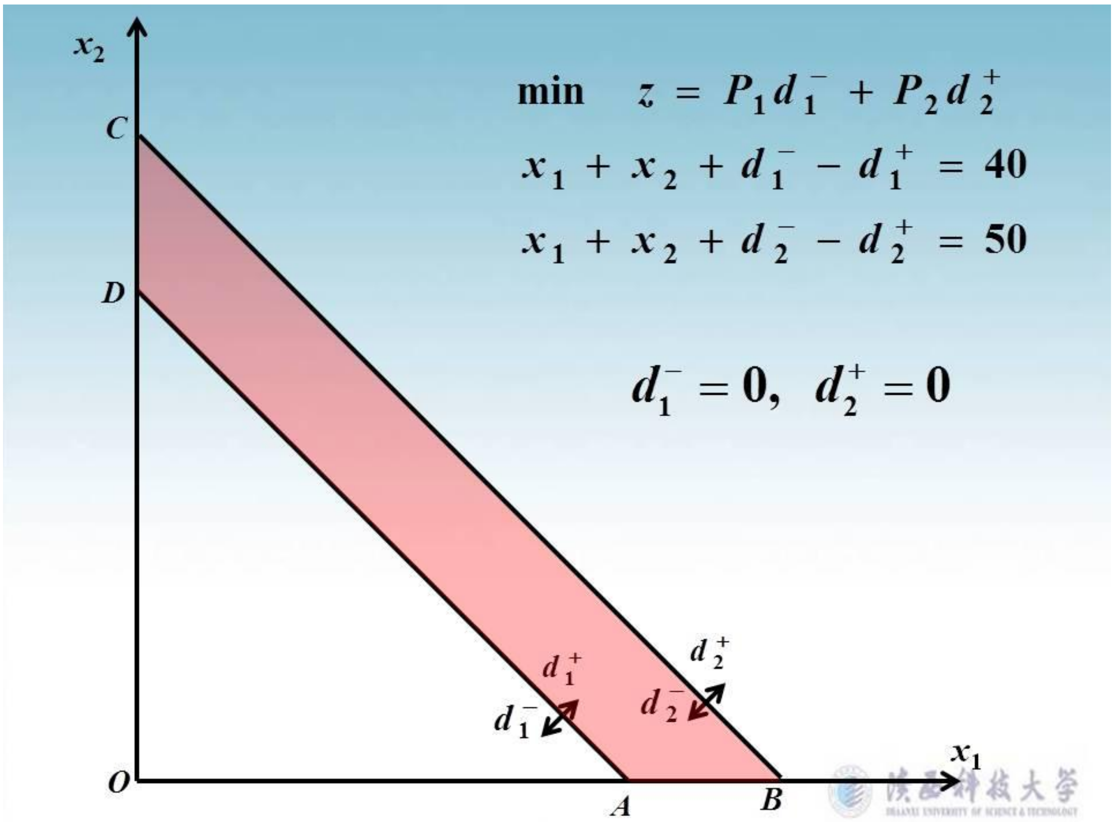
$$x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30$$

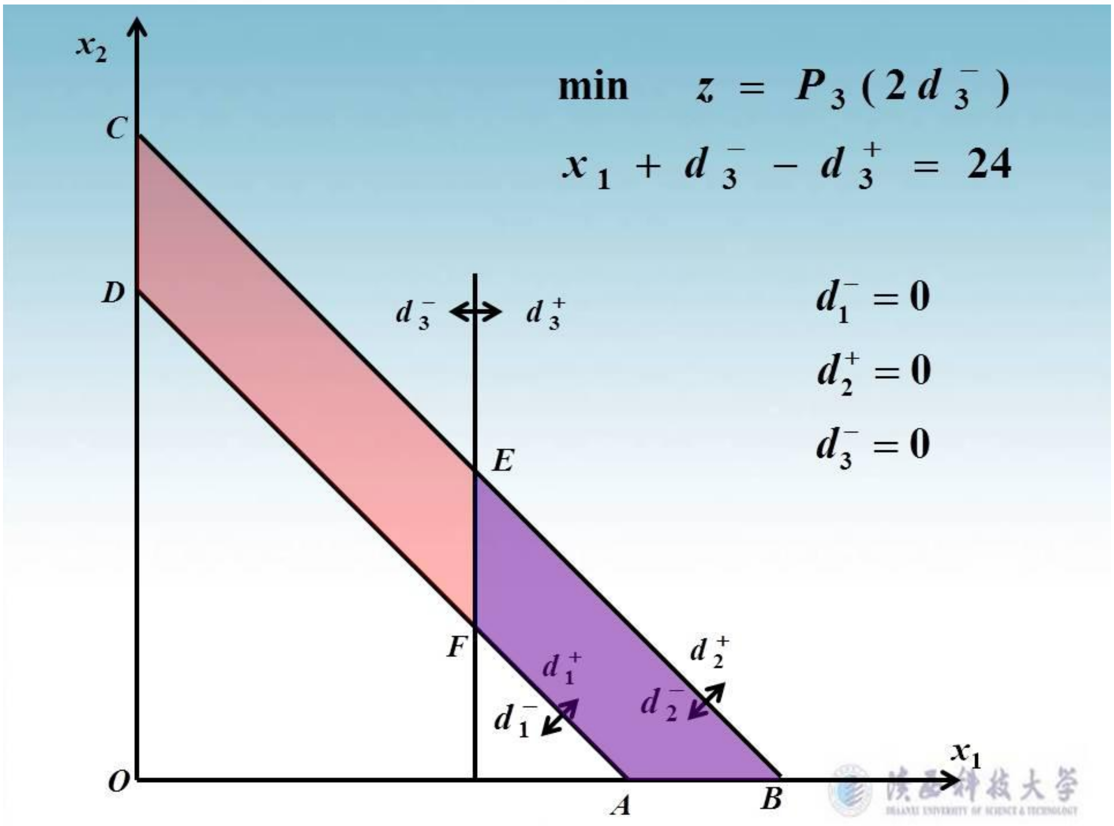
$$\min \ z = P_3 d_4^-$$

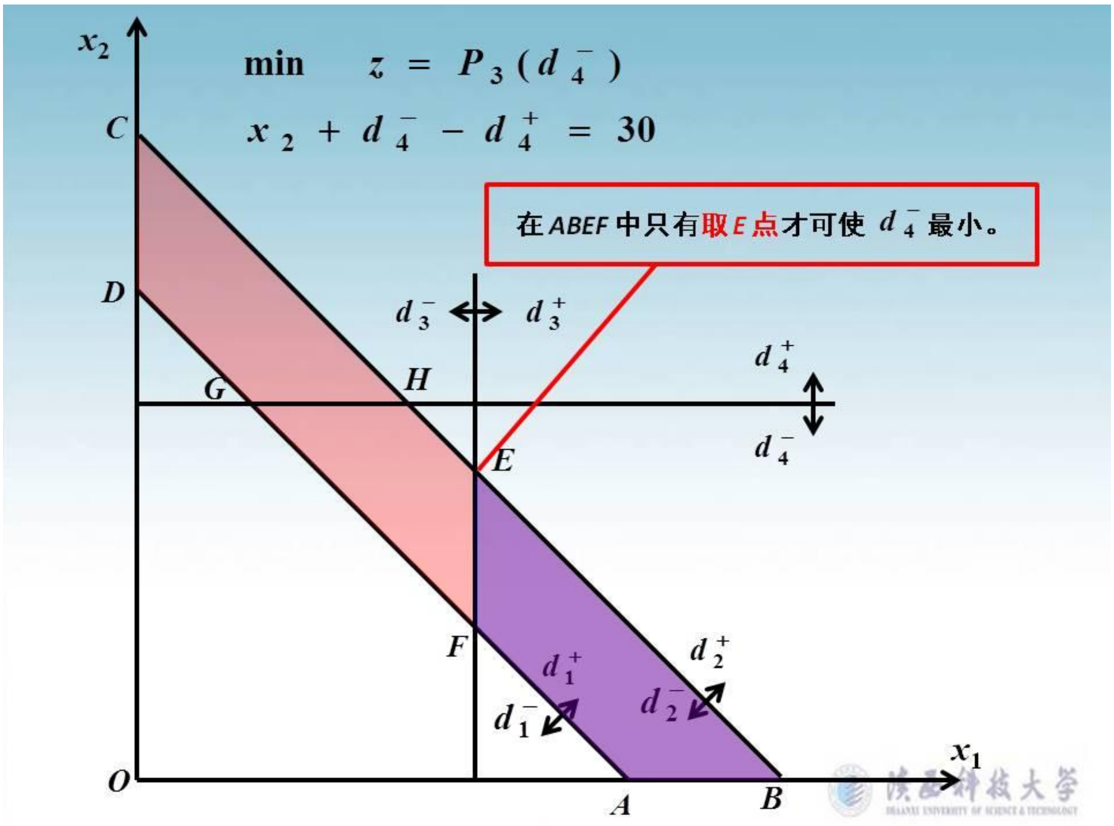
从而建立问题的模型如下：

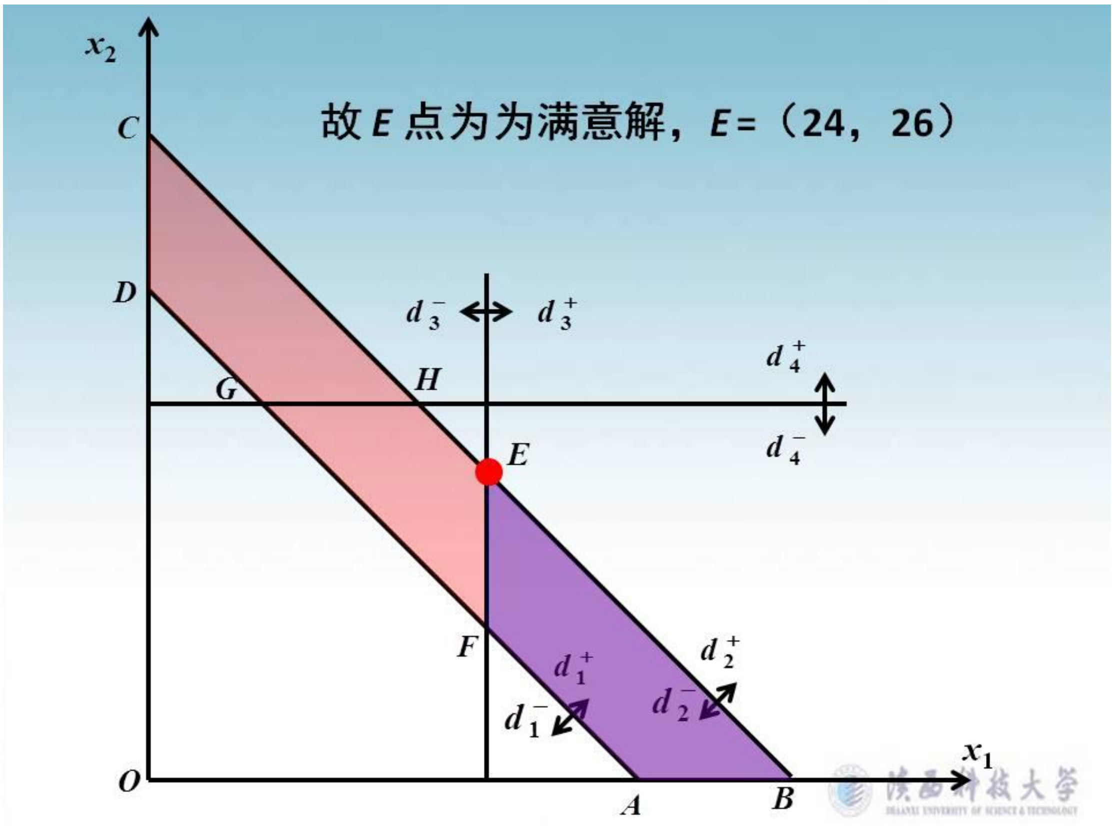
$$\min \ z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(2d_3^- + d_4^-)$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 \\ x_1 \qquad + d_3^- - d_3^+ = 24 \\ \qquad x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$


$\min \quad z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+$
$x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40$
$x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50$
$d_1^- = 0,\ d_2^+ = 0$
x_2
C
D
O
A
B
x_1
d_1^+
d_1^-
d_2^+
d_2^-


$\min \quad z = P_3 (2 d_3^-)$
$x_1 + d_3^- - d_3^+ = 24$
$d_1^- = 0$
$d_2^+ = 0$
$d_3^- = 0$
x_2
C
D
d_3^-
d_3^+
E
F
O
A
B
x_1
d_1^+
d_1^-
d_2^+
d_2^-


$\min \quad z = P_3(d_4^-)$
$x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30$
在 ABEF 中只有取 E 点才可使 d_4^- 最小。
x_2
x_1
C
D
G
H
E
F
O
A
B
d_3^-
d_3^+
d_4^+
d_4^-
d_1^+
d_1^-
d_2^+
d_2^-


故 E 点为为满意解，E=（24，26）
x_2
x_1
C
D
G
H
E
F
O
A
B
d_3^-
d_3^+
d_4^+
d_4^-
d_1^+
d_1^-
d_2^+
d_2^-

分析：

此例中约束 $\min \quad z = P_3(d_4^-)$

$$x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30$$

没有得到满足。

问题的最终解只是满意解而不是最优解。

目标规划的应用举例

例5 某单位领导在考虑本单位职工的升级调资方案时，依次遵守以下规定：

(1) 不超过年工资总额3000万元；

(2) 每级的人数不超过定编规定的人数；

(3) Ⅱ，Ⅲ级升级面尽可能达到现有人数的20%，且无越级提升；

(4) Ⅲ级不足编制的人数可录用新职工，又Ⅰ级的职工中有10%要退休。

有关资料汇总于下表中，问应如何拟订一个满意的方案。

等级	工资额(万元/年)	现有人数	编制人数
Ⅰ	10	100	120
Ⅱ	7.5	120	150
Ⅲ	5	150	150
合计		370	420

解：设x_1、x_2、x_3分别表示提升到Ⅰ、Ⅱ级和录用到Ⅲ级的新职工人数。对各目标确定的优先因子为：

P_1——不超过年工资总额3000元；

P_2——每级的人数不超过定编规定的人数；

P_3——Ⅱ、Ⅲ级的升级面尽可能达到现有人数的20%。

先分别建立各目标约束。

年工资总额不超过3000元：

$$10(100-100\times0.1+x_1)+7.5(120-x_1+x_2)+5(150-x_2+x_3)+d_1^- - d_1^+ = 3000$$

陕西科技大学

每级的人数不超过定编规定的人数：

对Ⅰ级有 $100(1-0.1)+x_1+d_2^- - d_2^+ = 120$

对Ⅱ级有 $120-x_1+x_2+d_3^- - d_3^+ = 150$

对Ⅲ级有 $150-x_2+x_3+d_4^- - d_4^+ = 150$

Ⅱ，Ⅲ级的升级面不大于现有人数的20%，但尽可能多提：

对Ⅱ级有 $x_1+d_5^- - d_5^+ = 120\times0.2$

对Ⅲ级有 $x_2+d_6^- - d_6^+ = 150\times0.2$

目标函数：$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+) + P_3(d_5^- + d_6^-)$

陕西科技大学

整理可得目标规划模型如下：

$$\min Z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+) + P_3(d_5^- + d_6^-)$$

$$\begin{cases} 2.5x_1 + 2.5\,x_2 + 5x_3 + d_1^- - d_1^+ = 450 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 30 \\ -x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 30 \\ \quad -x_2 + x_3 + d_4^- - d_4^+ = 0 \\ x_1 + d_5^- - d_5^+ = 24 \\ \quad x_2 + d_6^- - d_6^+ = 30 \\ x_{1,2,3} \geq 0, d_j^+, d_j^- \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 6) \end{cases}$$

例6 已知有三个产地给四个销地供应某种产品，产销地之间的供需量和单位运价见表4-10。有关部门在研究调运方案时依次考虑以下七项目标，并规定其相应的优先等级：

P_1——B_4是重点保证单位，必须全部满足其需要；

P_2——A_3向B_1提供的产量不少于100；

P_3——每个销地的供应量不小于其需要量的80%；

P_4——所定调运方案的总运费不超过最小运费调运方案的10%；

P_5——因路段的问题，尽量避免安排将A_2的产品往B_4；

P_6——给B_1和B_3的供应率要相同；

P_7——力求总运费最省。

试求满意的调运方案。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	5	2	6	7	300
A_2	3	5	4	6	200
A_3	4	5	2	3	400
销 量	200	100	450	250	900/1000

解 用表上作业法求得最小运费的调运方案见下表。这时得最小运费为2950元，再根据提出的各项目标的要求建立目标规划的模型。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	200	100			300
A_2			200		200
A_3			250	150	400
虚设点				100	100
销 量	200	100	450	250	1000/1000

- **供应约束**

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\leq 300$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\leq 200$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\leq 400$

- **需求约束：**

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_1^- - d_1^+=200$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_2^- - d_2^+=100$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_3^- - d_3^+=450$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_4^- - d_4^+=250$

- **A_3向B_1提供的产品量不少于100**

$x_{31}+d_5^- - d_5^+=100$

- 每个销地的供应量不小于其需要量的80%

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_6^{-}-d_6^{+}=200\times0.8$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_7^{-}-d_7^{+}=100\times0.8$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_8^{-}-d_8^{+}=450\times0.8$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_9^{-}-d_9^{+}=250\times0.8$

- 调运方案的总运费不超过最小运费调运方案的10%

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+d_{10}^{-}-d_{10}^{+}=2950(1+10\%)$$

- 因路段的问题，尽量避免安排将A_2的产品运往B_4

$x_{24}+d_{11}^{-}-d_{11}^{+}=0$

- 给B_1和B_3的供应率要相同

$(x_{11}+x_{21}+x_{31})-(200/450)(x_{13}+x_{23}+x_{33})+d_{12}^{-}-d_{12}^{+}=0$

- 力求总运费最省：

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+d_{13}^{-}-d_{13}^{+}=2950$$

- 目标函数为：

$$\min z=P_1d_4^{-}+P_2d_5^{-}+P_3(d_6^{-}+d_7^{-}+d_8^{-}+d_9^{-})$$
$$+P_4d_{10}^{+}+P_5d_{11}^{+}+P_6(d_{12}^{-}+d_{12}^{+})+P_7d_{13}^{+}$$