线性规划复习题

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

例1. 下表中给出某$L.P.$计算过程中的一张单纯形表，

目标函数为 $\max z = 28x_4 + x_5 + 2x_6$，

约束全为$\le$，表中 x_1, x_2, x_3 为松弛变量，

表中解的目标函数值为$z = 14$.

X_B		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	a	3	0	–14/3	0	1	1
x_2	5	6	d	2	0	5/2	0
x_4	0	0	e	f	1	0	0
σ_j		b	c	0	0	–1	g

X_B		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	a	3	0	– 14/3	0	1	1
x_2	5	6	d	2	0	5/2	0
x_4	0	0	e	f	1	0	0
σ_j		b	c	0	0	– 1	g

			0	0	0	28	1	2
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_6	7	3	0	– 14/3	0	1	1
0	x_2	5	6	1	2	0	5/2	0
28	x_4	0	0	0	1/3	1	0	0
σ_j			– 6	0	0	0	– 1	0

例2. 下表中给出某极大化问题的单纯形表，

问表中的a_1,a_2,c_1,c_2,d 以及变量满足什么条件时有：

(1) 表中是唯一最优解；

(2) 表中是无穷多最优解；

(3) 下一步迭代将以 x_1 替代x_5

(4)该问题是无界解；

(5)该问题无可行解。

X_B		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	d	4	a_1	1	0	0
x_4	2	-1	-5	0	1	0
x_5	3	a_2	-3	0	0	1
σ_j		c_1	c_2	0	0	0

例2解答：

X_B		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	d	4	a_1	1	0	0
x_4	2	−1	−5	0	1	0
x_5	3	a_2	−3	0	0	1
σ_j		c_1	c_2	0	0	0

(1) 表中是唯一最优解：$d \geq 0, c_1 < 0, c_2 < 0$

(2) 表中是无穷多最优解：

$d \geq 0, c_1 \leq 0, c_2 \leq 0$但是二者至少一个为零

(3) 下一步迭代将以 x_1 替代x_5：$c_1 > 0, \dfrac{3}{a_2} < \dfrac{d}{4}$

(4)该问题是无界解：$c_2 > 0, a_1 \leq 0$

(5)该问题无可行解:x_5为人工变量,且$c_1 \leq 0, c_2 \leq 0$

例 4：

（1） 若 $X^{(1)}$与$X^{(2)}$均为某线性规划的最优解，证明在这两点连线上的所有点也是该问题的最优解。

（2）线性规划 $\max\ z = CX$，$AX = b$，$X \geq 0$， 设 $X^{(0)}$ 为问题的最优解。若目标函数中用 C^* 代替 C 后，问题的最优解变为 X^*。

求证：$(C^* - C)(X^* - X^0) \geq 0$

例5. 设有 $\max z = \alpha x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_4 = 4 + 2\beta \cdots (1) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 + 7\beta \cdots (2) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

要求：组成两个新的约束

$$\begin{cases} (1)' = (1) + (2) \\ (2)' = (2) - 2(1) \end{cases}$$

若 β=0,则 α 为何值时, x_1, x_2 为最优基？

例5解答：

$(1)'$: $3x_1 \quad +3x_3 - 3x_4 = 9 + 9\beta$

$(2)'$: $-3x_2 + 3x_3 \quad = -3 + 3\beta$

以 x_1, x_2 为基列出初始单纯形表如下：

			α	2	1	－4
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
α	x_1	**3+3β**	1	0	1	－1
2	x_2	**1－β**	0	1	－1	0
σ_j			0	0	**3－α**	**α－4**

若 $\beta=0$，则 $3 \le \alpha \le 4$ 时，最优基不变。

例6. 分别用图解法、单纯形法求解，

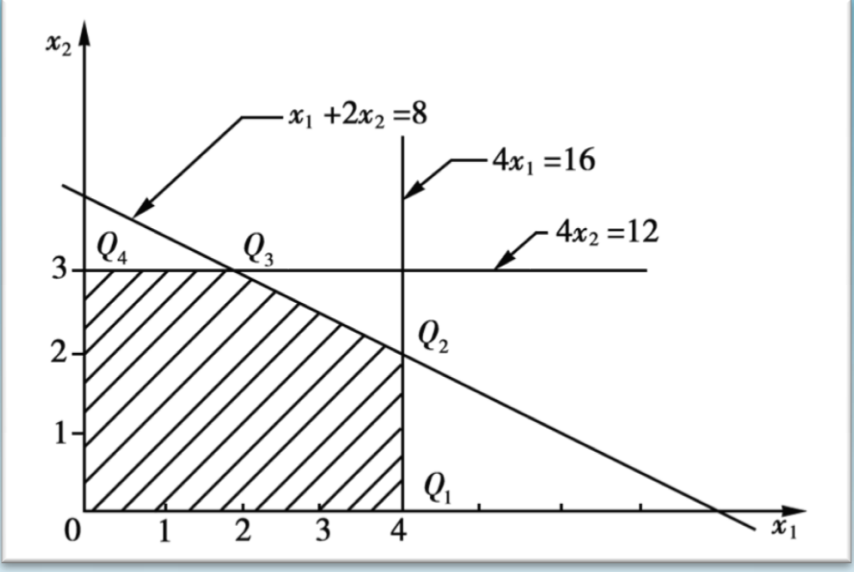
并指出问题的解属于哪一类：

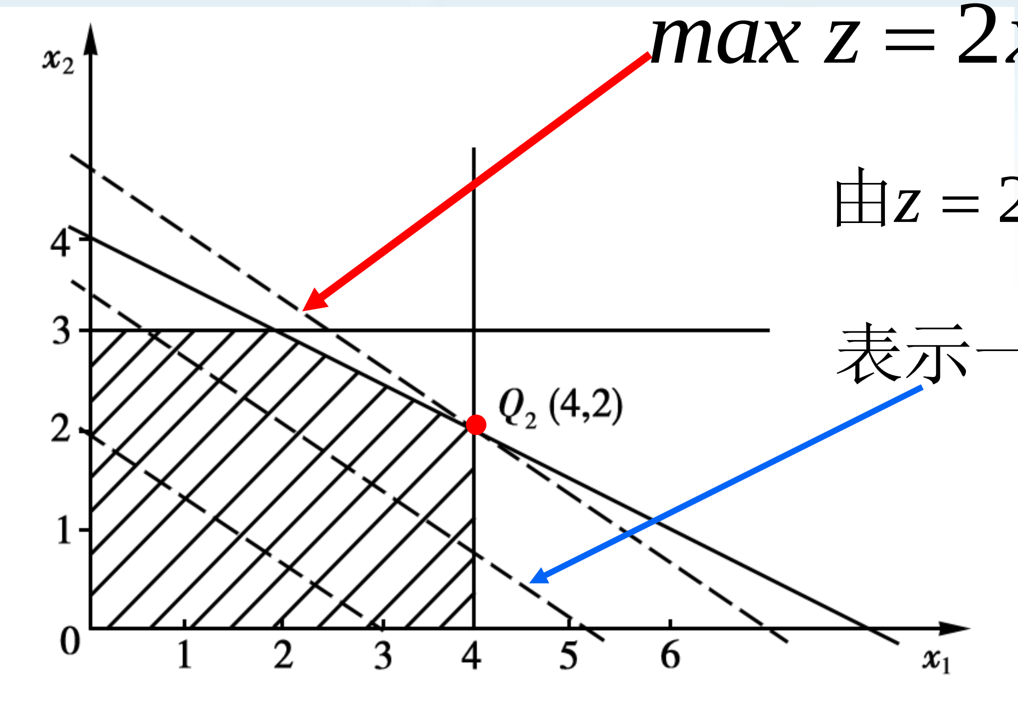
$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1 \qquad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$





$$max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

由$z = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z}{3}$

表示一簇平行线

目标值在点Q_2（4，2）处达到最大值14

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

首先化成标准形如下：

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 + 0\cdot(x_3 + x_4 + x_5)$$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1 + x_3 = 16 \\ 4x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \\ x_1, \cdots, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

其次建立初始单纯形表如下

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	θ_i
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	16	4	0	1	0	0	
0	x_4	12	0	4	0	1	0	
0	x_5	8	1	2	0	0	1	
检验数σ_j								

			2	3	0	0	0	
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	16	4	0	1	0	0	
0	x_4	12	0	4	0	1	0	3
0	x_5	8	1	2	0	0	1	4
检验数			2	3	0	0	0	

			2	3	0	0	0	
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	16	4	0	1	0	0	4
3	x_2	3	0	1	0	1/4	0	
0	x_5	2	1	0	0	–1/2	1	2
检验数			2	0	0	–3/4	0	

			2	3	0	0	0	
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_3	8	0	0	1	2	–4	4
3	x_2	3	0	1	0	1/4	0	12
2	x_1	2	1	0	0	–1/2	1	＼
检验数			0	0	0	1/4	–2	

			2	3	0	0	0	
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
0	x_4	4	0	0	1/2	1	–2	4
3	x_2	2	0	1	–1/8	0	1/2	＼
2	x_1	4	1	0	1/4	0	0	2
检验数			0	0	–1/8	0	–3/2	

例7. 分别用图解法、单纯形法求解，

并指出问题的解属于哪一类：

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \qquad\qquad \le 4 \\ \qquad\quad 2x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例7解答：唯一最优解

			3	5	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	0	0	1	1/3	– 1/3
5	x_2	6	0	1	0	1/2	0
3	x_1	2	1	0	0	– 1/3	1/3
σ_j			0	0	0	– 3/2	– 1

例 用单纯形法求解线性规划问题

$$\max \quad Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leqslant 46 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 10 \\ x_j \geqslant 0 \ (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

解 引进松驰变量 x_5，x_6，x_7，将原问题化为标准形

$$\max \quad Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 + x_5 = 46 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_7 = 10 \\ x_j \geqslant 0 \ (j = 1, 2, \cdots, 7) \end{cases}$$

列表求解如下

$C_j \to$		2	1	−3	5	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	1	7	3	7	1	0	0	46
0	x_6	3	−1	1	(2)	0	1	0	8
0	x_7	2	3	−1	1	0	0	1	10
λ_j		2	1	−3	5	0	0	0	0
0	x_5	$-\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{7}{2}$	0	18
5	x_4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	4
0	x_7	$\frac{1}{2}$	$(\frac{7}{2})$	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	6
λ_j		$-\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{11}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	−20
0	x_5	−11	0	4	0	1	−2	−3	0
5	x_4	$\frac{11}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{34}{7}$
1	x_2	$\frac{1}{7}$	1	$-\frac{3}{7}$	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{12}{7}$
λ_j		−6	0	−4	0	0	−2	−1	−26

因所有$\sigma_j \leqslant 0$，
故得最优解
X=(0，12/7，0，34/7，0，0)^T。
最优值max z=26

例 求解线性规划问题

$$\min \quad Z = -2x_2 + 5x_4 + x_6$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 2 \\ -3x_2 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3 \\ x_j \geqslant 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \end{cases}$$

解：基变量： x_1， x_6 ， x_3

列表求解：

$C_J \rightarrow$		0	2	0	-5	0	-1	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_1	1	-2	0	1	(1)	0	2
-1	x_6	0	-3	0	4	2	1	4
0	x_3	0	1	1	2	-3	0	3
λ_j		0	-1	0	-1	2	0	4
0	x_5	1	-2	0	1	1	0	2
-1	x_6	-2	(1)	0	2	0	1	0
0	x_3	3	-5	1	5	0	0	9
λ_j		-2	3	0	-3	0	0	0
0	x_5	-3	0	0	5	1	2	2
2	x_2	-2	1	0	2	0	1	0
0	x_3	-7	0	1	12	0	5	9
λ_j		4	0	0	-9	0	-3	0

因为$\sigma_1=4>0$，

而$P_1\le 0$，

所以该LP问题是无界解。

对偶理论及灵敏度分析复习题

练习1. 已知原问题最优解为 $X^* = (2, 2, 4, 0)^T$，试用对偶理论求出其对偶问题的最优解。

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 \le 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{4}{5}, y_2 = \frac{3}{5}, y_3 = 1, y_3 = 0$$

练习2. 已知原问题如下。

(1) 写出其对偶问题；

(2) 用图解法求解对偶问题；

(3) 试用对偶理论求出原问题的最优解。

$$\min w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

其对偶问题为 $\max z = 2y_1+3y_2$

$$\begin{cases} y_1+2y_2 \le 2 \\ 2y_1 - y_2 \le 3 \\ 3y_1 + y_2 \le 5 \\ y_1 - 3y_2 \le 6 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases},$$

由图解法知最优解为 $y_1 = \frac{8}{5}$，$y_2 = \frac{1}{5}$

$\max z = \frac{19}{5}$

把最优解代入约束方程组中，

由于第4个方程代入后为左边为 $\frac{8}{5} - \frac{3}{5} = 1 < 6$

由对偶理论知 原模型中 $x_4 = 0$

$$\therefore \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1+3x_2+5x_3 = \frac{19}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8}{5} - c \\ x_2 = \frac{1}{5} - c \\ x_3 = c \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

c为任意常数，因此为无穷多最优解.

3. 已知线性规划问题如下，
试用对偶理论证明该问题无最优解。

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题的性质：**无界性**

若原问题(对偶问题)为无界解，

则对偶问题(原问题)为无可行解。

注：此性质的逆不成立。逆命题正确叙述如下

若原问题(对偶问题)为无可行解，

则对偶问题(原问题)或为无界解，或为无可行解。

因此，本题只需说明对偶问题无可行解，同时原问题有可行解，那么原问题为无界解（即无最优解）。

陕西科技大学

SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

4. 已知线性规划问题如下,
试用对偶理论证明该问题的最优值不大于30。

$$\max z = 4x_1 + 7x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题的性质：弱对偶性

设 $\bar{X}$ 为原问题的可行解，$\bar{Y}$ 为对偶问题的可行解，

则 $$C\bar{X} \le \bar{Y}b$$

推论：

(1)max问题任一可行解的目标值为min问题目标值的一个下界；

(2)min问题任一可行解的目标值为max问题目标值的一个上界。

先求出对偶问题的一个可行解为(y1,y2)=(2,1)，其目标函数值为30，再由对偶问题性质可得证。

或者也可以：
写出对偶问题；
图解法求出对偶问题的最优解，为（2,1），最优值为30；
由对偶理论知，该对偶问题最优值为原问题的最优值的一个上界。

5. 已知下面线性规划的最优解为 $X^*=(-5, 0, -1)$，试用对偶理论求出其对偶问题的最优解。

$$\min z = 2x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 6 \\ x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

灵敏度分析练习

1. 已知LP问题 $\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1, \cdots, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

先用单纯形法求出最优解，再分析下列条件下最优解的变化：

(1) 目标函数变为 $\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

(2) 约束条件右端项由 $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) 增加一个约束 $-x_1 + 2x_3 \ge 2$

2. 已知LP问题

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 \le 9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

(1) 目标函数变为 $\max z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3$

(2) 约束条件右端项由 $(3,9)^T$ 变为 $(6,9)^T$

(3) 增加一个新产品 x_6，$P_6 = (3,3)^T$，$c_6 = 7$

(4) 确定 c_1 在什么范围变化时，最优解不变。

用单纯形法求解的最终单纯形表如下，试做灵敏度分析：

			2	3	1	0	0
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	1	1	0	–1	4/3	–1/3
3	x_2	2	0	1	2	–1/3	1/3
σ_j			0	0	–3	–5/3	–1/3

运输问题复习题

用沃格尔法求下面运输问题的初始可行解

销地 / 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	6 1	7	5	3 13	14
A2	8 2	4 13	2 12	7	27
A3	5 19	9	10	6	19
销量	22	13	12	13	

用位势法做最优性检验

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量	行位势U_i
A1	6 1	7	5	3 13	14	U_1
A2	8 2	4 13	2 12	7	27	U_2
A3	5 19	9	10	6	19	U_3
销量	22	13	12	13		
列位势V_j	V_1	V_2	V_3	V_4		

设行位势为u_i，列位势为v_j，

非基变量检验数计算公式为 $\sigma_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$，

由基变量的 $\sigma_{ij}=0$，

可知对数字格有 $c_{ij}=u_i+v_j$，

由此可以解出 u_i 和 v_j，

再由此计算非基变量的检验数。

用位势法做最优性检验

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量	行位势U_i
A1	6 1	7	5	3 13	14	U_1
A2	8 2	4 13	2 12	7	27	U_2
A3	5 19	9	10	6	19	U_3
销量	22	13	12	13		
列位势V_j	V_1	V_2	V_3	V_4		

$$\begin{cases} u_1+v_1=6 \\ u_1+v_4=3 \\ u_2+v_1=8 \\ u_2+v_2=4 \\ u_2+v_3=2 \\ u_3+v_1=5 \end{cases}$$

令$u_1=0$,

可解出u_i和v_j

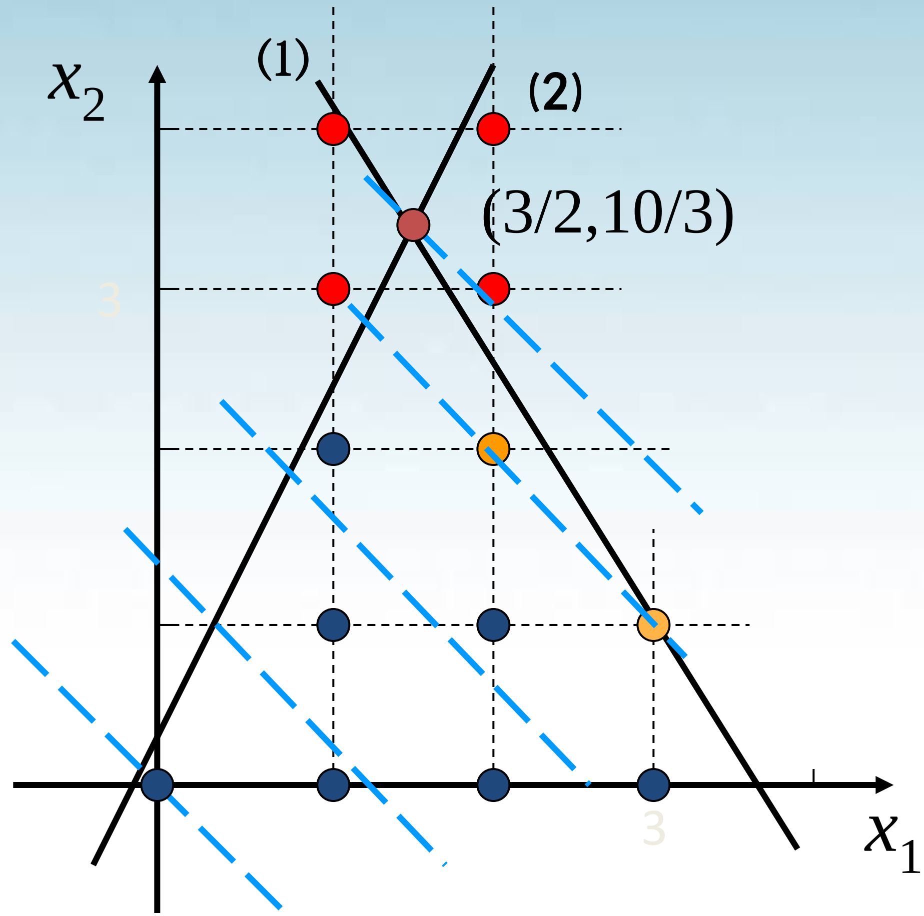
非基变量检验数计算公式为

$$\sigma_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j\ ,$$

整数规划复习题

由图解法知最优解为：$x_1=3/2$，$x_2 = 10/3$，$Z = 29/6$

现求整数解(最优解):如果用舍入取整法可得到4个点，即(1，3),(2，3),(1，4),(2，4)。显然，它们都不可能是整数规划的最优解。



整数规划的可行解必定在其松弛问题可行域内且为整数点。故整数规划问题的可行解集是一个有限集，如右图所示。

其中(2,2),(3,1)点的目标函数值最大，即为Z=4。

整数线性规划解的特点

- 松弛问题作为一个线性规划，其可行域为凸集，任意两个可行解的凸组合仍是可行解。
- 整数规划问题的可行解集合是其松弛问题可行解集合的一个子集，任意两个可行解的凸组合不一定满足整数约束，因而不一定仍为可行解。
- 整数规划问题的可行解一定是它的松弛问题的可行解（反之不一定），因此前者最优解的目标函数值不会优于后者最优解的目标函数值。

0－1型整数规划

➢ 0－1变量

0－1变量常被用来表示系统是否处于某个特定状态，或者决策时是否取某个特定方案。例如:

$$x=\begin{cases}1, & \text{当取方案}P\text{时}\\ 0, & \text{当不取方案}P\text{时}\end{cases}$$

当问题有多项要素，每项要素皆有两种选择时，可用一组0－1变量来描述。设问题有有限项要素E_1，E_2，----，E_n,其中每项E_j有两种选择A_j和不选择A_j（j=1,2,----,n）,则令

$$x_j=\begin{cases}1, & \text{若}E_j\text{选择}\boldsymbol{A}_j\\ 0, & \text{若}E_j\text{选择}\overline{\boldsymbol{A}}_j\end{cases}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

1. 投资场所的选定

例4 某公司拟在东、南、西三区的7个位置选点建立门市部。规定：

在东区，由A_1，A_2，A_3三个点中至多选两个；

在南区，由A_4，A_5两个点中至少选一个；

在西区，由A_6，A_7两个点中至少选一个。

若选用A_i点，则需投资b_i元，每年可获利c_i元，但总投资额不超过B元。应选择哪几个点可使年利润最大？

解： 设 $x_j = \begin{cases} 1, & 若选择第\ j\ 个点 \\ 0, & 若不选择第\ j\ 个点 \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots, 7)$

$$\max z = \sum_{i=1}^{7} c_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{7} b_i x_i \le B \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ x_4 + x_5 \ge 1 \\ x_6 + x_7 \ge 1 \\ x_i = 0 或 1 \end{cases}$$

2. 相互排斥的约束条件

（1）两个约束中，只有一个起作用。

例： $a_{11}x_1+a_{12}x_2<B_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2<B_2$

引入0-1变量y_1, y_2和足够大的正数M，则

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2<B_1+M_1y_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2<B_2+M_2y_2$$

$$y_1+y_2=1$$

3. 固定费用问题

例　固定费用问题

单耗量 产品 资源	I	II	III	资源量
A	2	4	8	500
B	2	3	4	300
C	1	2	3	100
单件可变费用	4	5	6	
固定费用	100	150	200	
单件售价	8	10	12	

解：设 X_j 是第 j 种产品的产量。

Y_j 是0－1变量，Y_j=1表示生产第 j 种产品。

$$\max Z = 4X_1 + 5X_2 + 6X_3 - 100Y_1 - 150Y_2 - 200Y_3$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 + 8X_3 \le 500 \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \le 300 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 \le 100 \\ X_1 \le \mathrm{M}_1 Y_1 \\ X_2 \le \mathrm{M}_2 Y_2 \\ X_3 \le \mathrm{M}_1 Y_3 \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0，\quad Y_1, Y_2, Y_3 \text{为} 0-1 \text{变量} \end{cases}$$

目标规划数学模型的基本概念

1. 偏差变量(用来表明实际值同目标值之间的差异)

正偏差变量：表示决策值超过目标值的部分，记为 d^+

负偏差变量：表示决策值未达到目标值的部分，记为d^-

因为决策值不可能既超过目标值，同时又未达到目标值，所以 d^+ 和 d^-至少有一个为零，即存在如下关系：

（1）$d^+ > 0$，$d^- = 0$（决策值超过目标值）

（2）$d^- > 0$，$d^+ = 0$（决策值未达到目标值）

（3）$d^+ = d^- = 0$（决策值等于目标值）

2. 绝对约束和目标约束

（1）绝对约束：必须严格满足的约束条件。

绝对约束是硬约束，

不能满足这些约束条件的解为非可行解。

如：线性规划问题中的所有约束条件都是绝对约束。

（2）目标约束：目标约束是目标规划特有的。

目标约束是软约束，在达到此目标值时允许发生正偏差或负偏差，因此在这些约束的左端要加入正偏差、负偏差变量；其约束右端项是要追求的目标值。

- 也可根据问题的需要将绝对约束变换为目标约束。
- 线性规划问题的目标函数，在给定目标值和加入正、负偏差变量后可变换为目标约束。

例如可将例1的

目标函数 $z = 8x_1+10x_2$

变换为目标约束 $8x_1+10x_2+d_1^{-}-d_1^{+}=56$

约束条件 $2x_1+x_2\leq 11$

变换为目标约束 $2x_1+x_2+d_2^{-}-d_2^{+}=11$

5. 目标规划的目标函数

由各目标约束的正、负偏差变量及相应的优先因子和权系数构成。

当每一目标值确定后，决策者要求尽可能缩小偏离目标值，所以目标规划的目标函数只能是极小化，即：

$$\min \quad z = f(d^{+}, d^{-})$$

其基本形式有三种：

（1）希望恰好达到目标值

（2）希望不超过目标值

（3）希望不低于目标值

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

（1） 要求恰好达到目标值，即正、负偏差变量都要尽可能地小 。构造的目标函数是

$$\min \quad z = f(d^{+} + d^{-})$$

（2） 要求不超过目标值，但允许达不到目标值，即只有使正偏差量要尽可能地小（实现最少或为零）

$$\min \quad z = f(d^{+})$$

（3） 要求不低于目标值，即超过量不限。要求超额完成规定目标，要实现负偏差量为零或为最小

$$\min \quad z = f(d^{-})$$

1. 由于产品 I 销售疲软，故希望产品 I 的产量不超过产品 II 的产量；

$$\min z = P_1 d_1^+$$

$$x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0$$

3. 尽可能充分利用设备台时，但不加班；

$$\min z = P_2(d_2^- + d_2^+)$$

$$x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$$

4. 利润额不小于 56 元。

$$\min z = P_3 d_3^-$$

$$8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56$$

图论复习

图$\boldsymbol{T}$=(V,$\boldsymbol{E}$)，点数|$\boldsymbol{V}$|=n，边数|$\boldsymbol{E}$|=m，则下列关于树的说法是等价的。

(1) $\boldsymbol{T}$是一个树。

(2) $\boldsymbol{T}$无圈，且m=n－1。

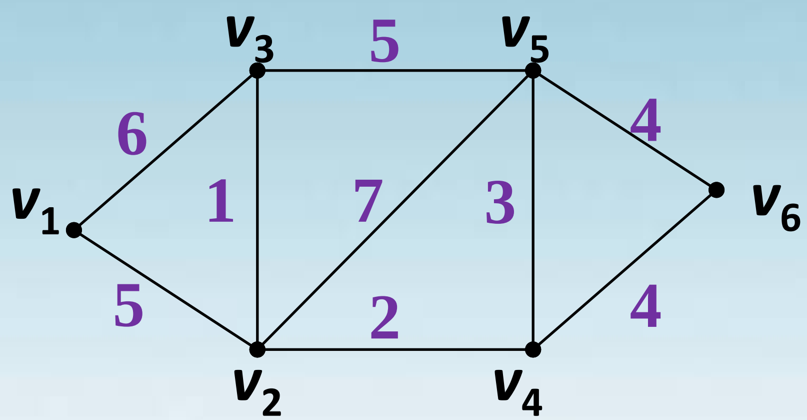
(3) $\boldsymbol{T}$连通，且m=n－1。

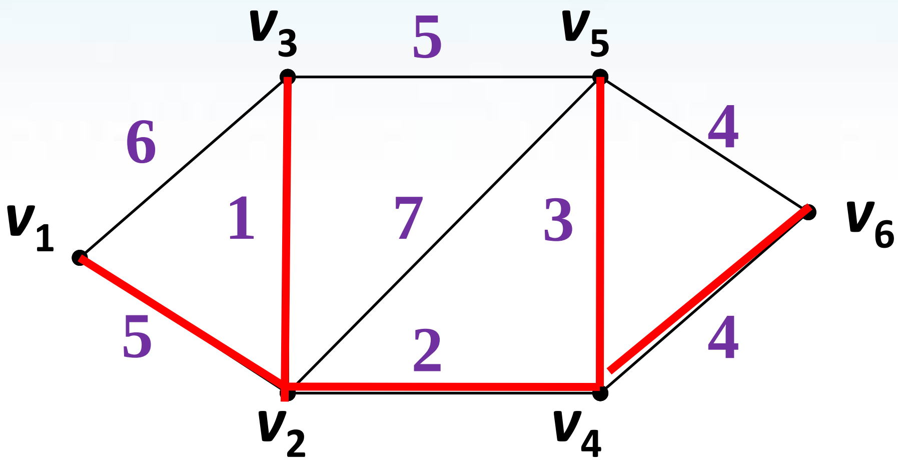
(4) $\boldsymbol{T}$无圈，但每加一新边即得惟一一个圈。

(5) $\boldsymbol{T}$连通，但任舍去一边就不连通。

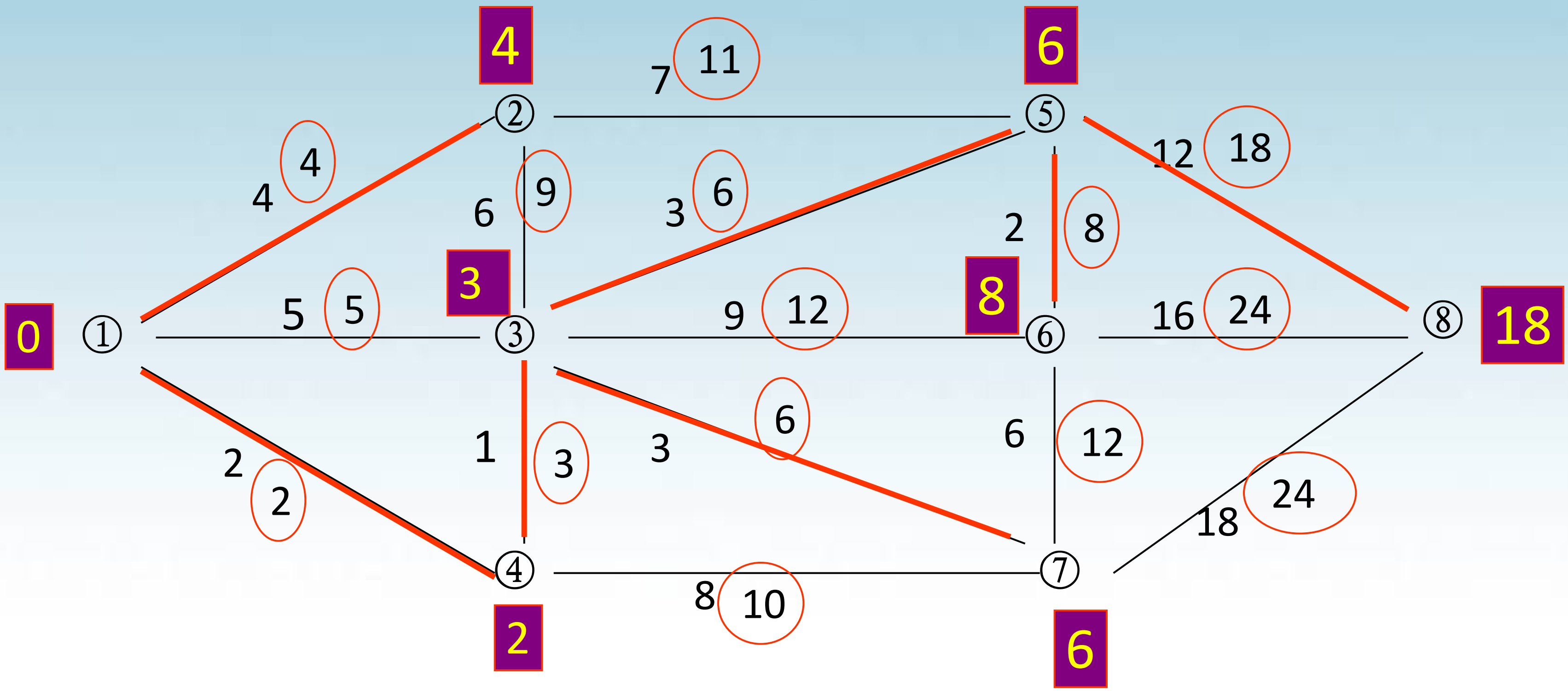
(6) $\boldsymbol{T}$中任意两点，有惟一链相连。

最小支撑树问题



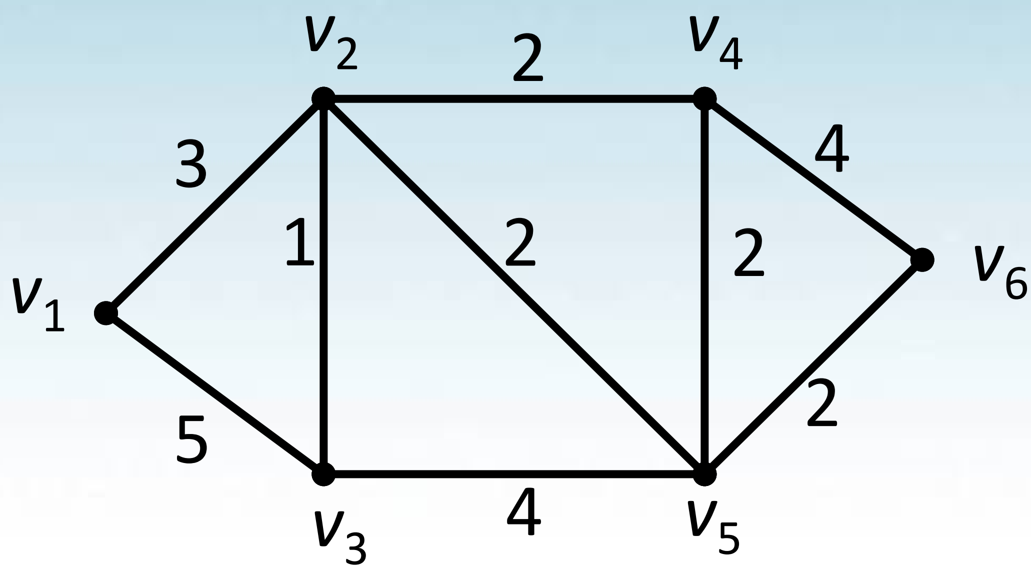


用Dijkstra方法求下图v_1到各点的最短距离及最短路线。



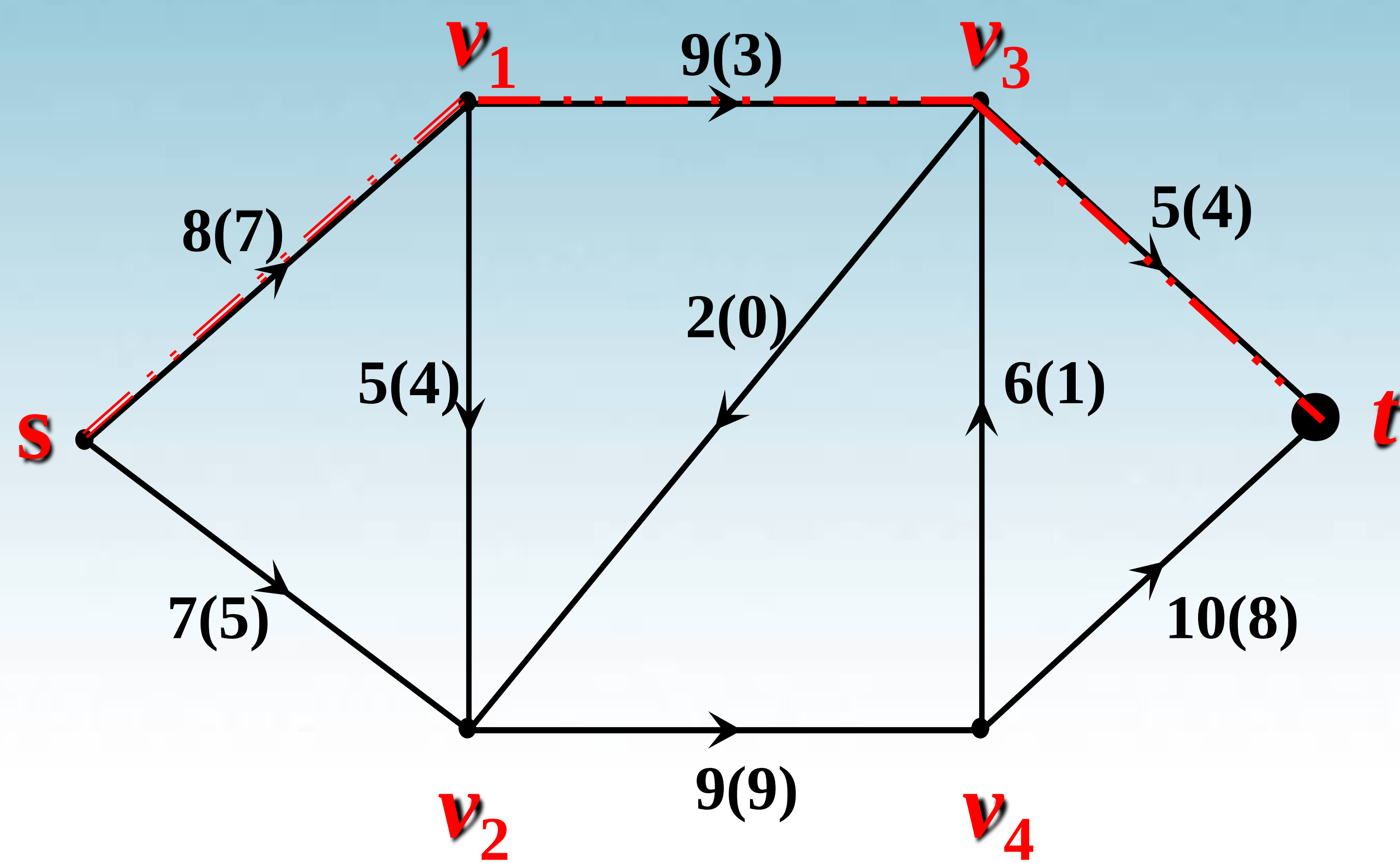
练习：

1. 用Dijkstra算法求下图从v_1到v_6的最短距离及路线。

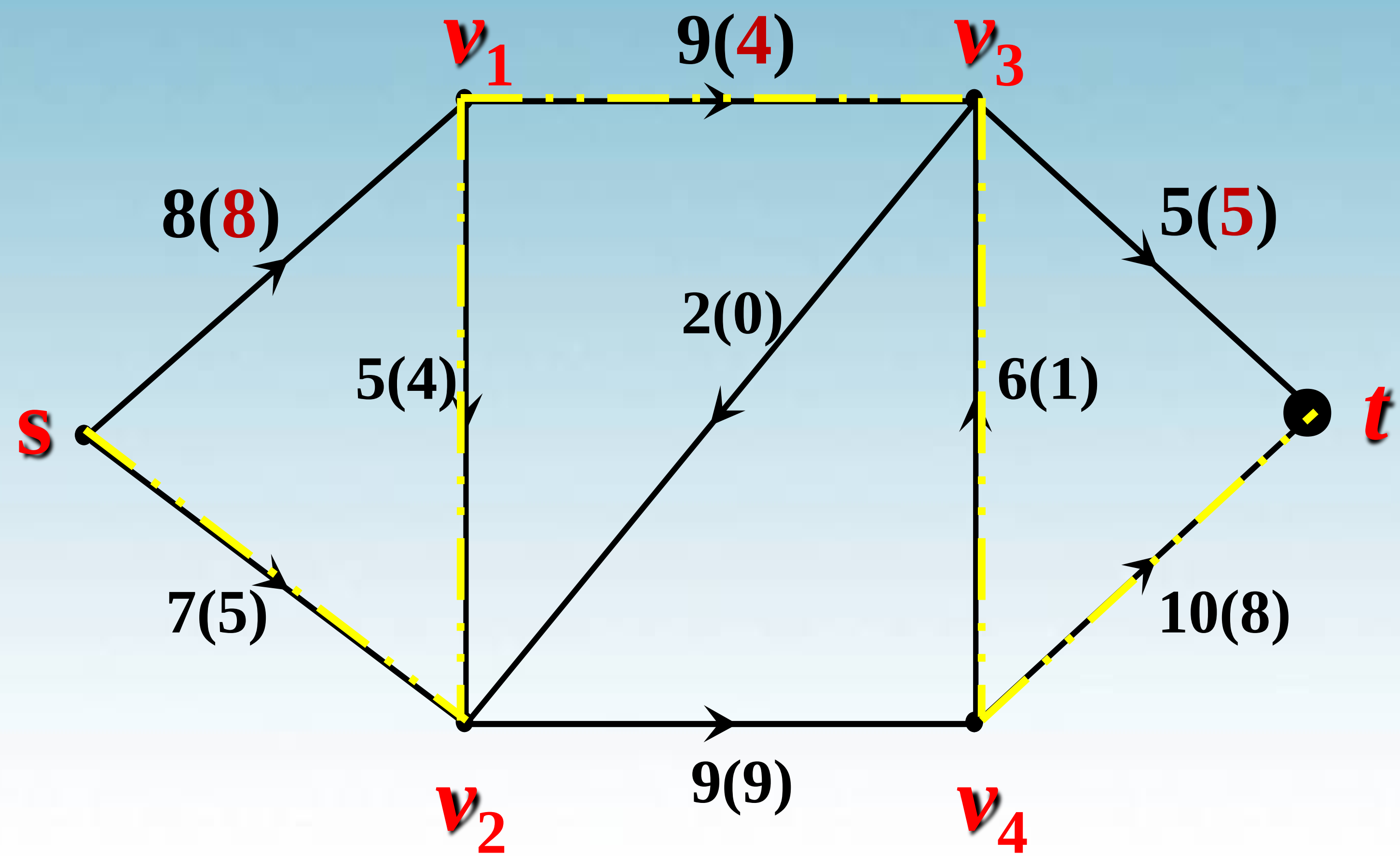


v_1到v_6的最短路为：　$v_1 \to v_2 \to v_5 \to v_6$

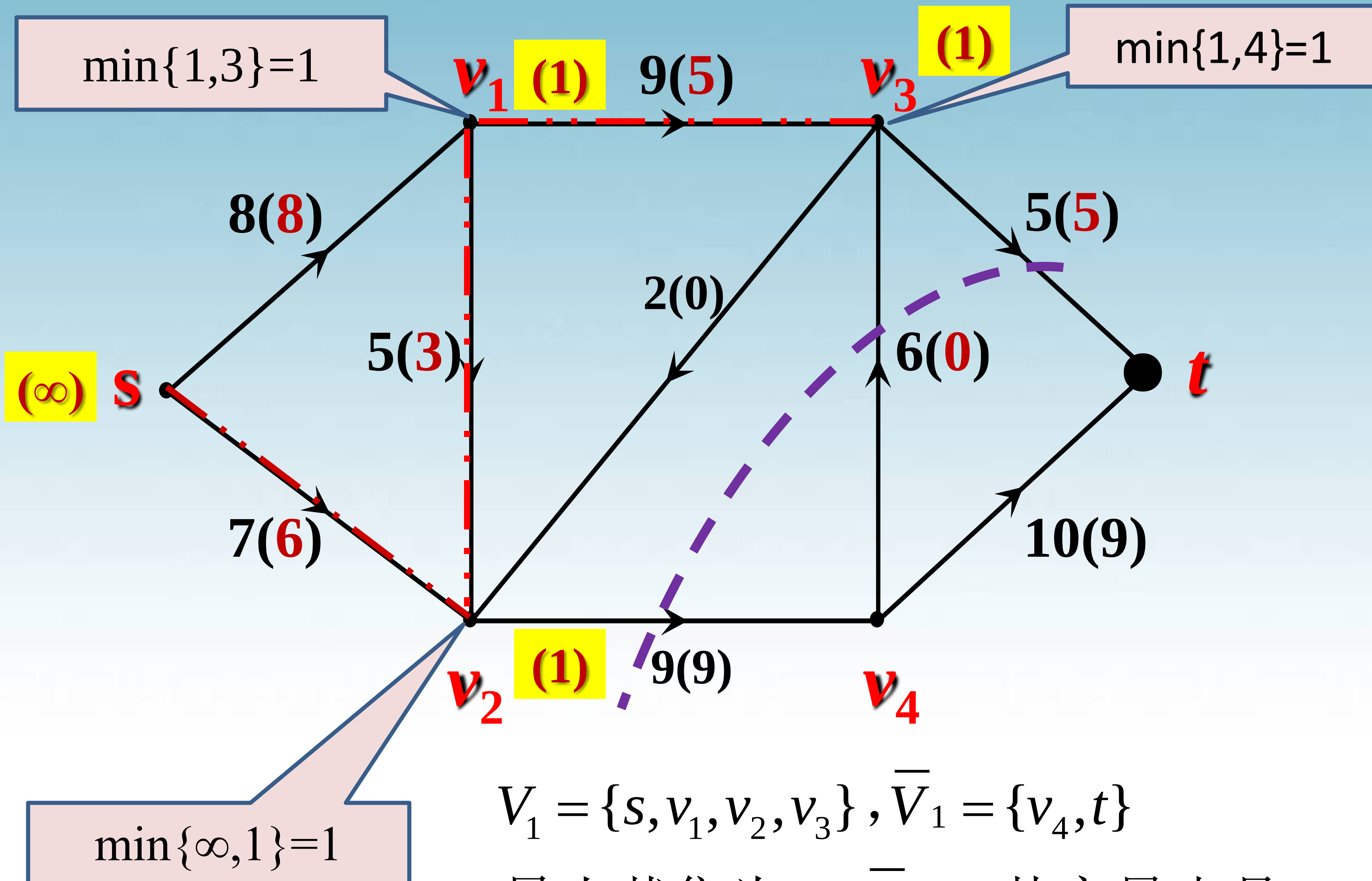
例 求下图中$s \to t$的**最大流量**，并找出最小截集。



一条增广链为 $s \to v_1 \to v_3 \to t$，**流量可增加1，可得下图**



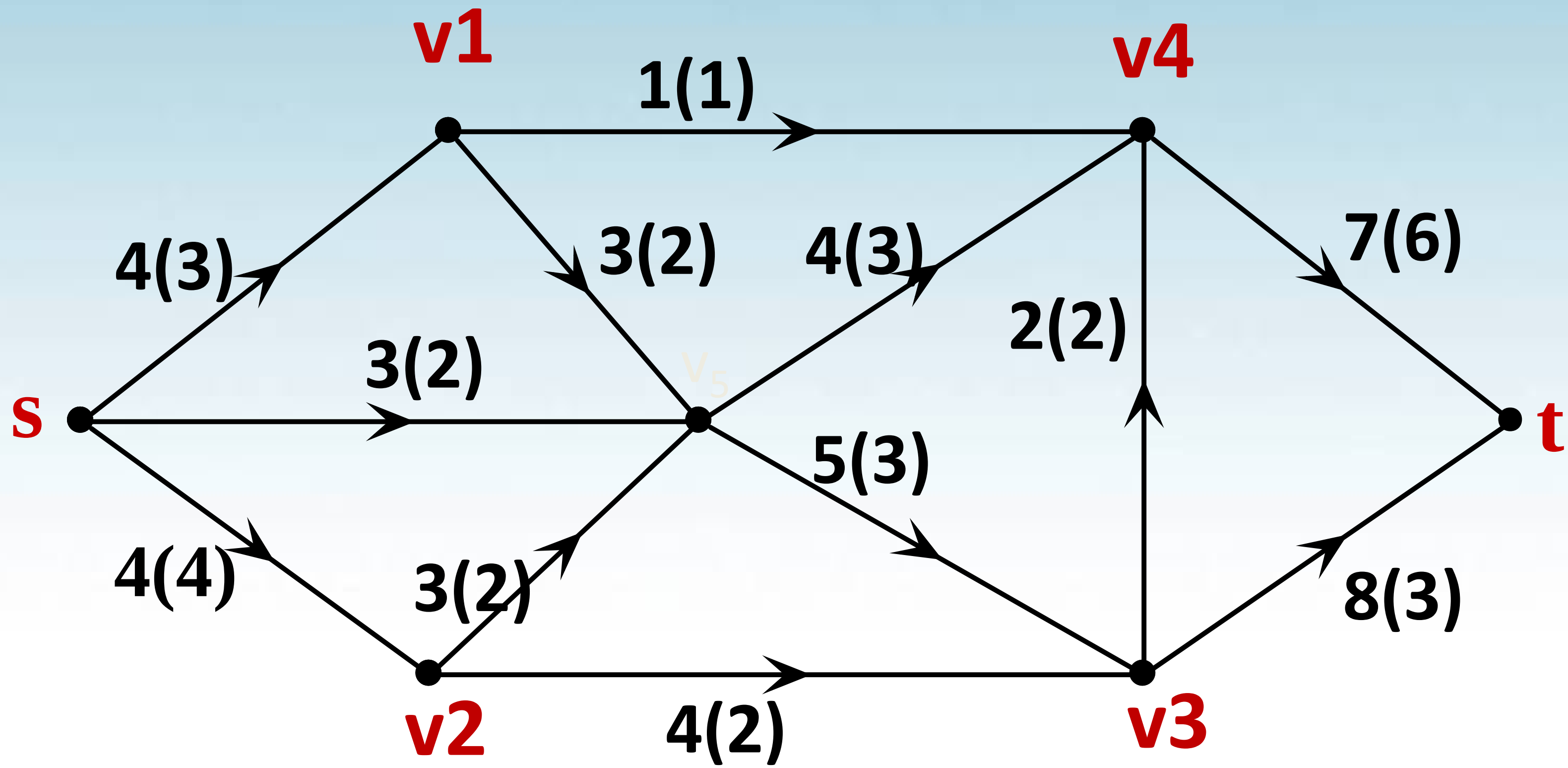
再寻找增广链为 $s \rightarrow v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow t$**,**
流量调整1，可得下图



$V_1=\{s,v_1,v_2,v_3\}$, $\overline{V}_1=\{v_4,t\}$

最小截集为$\{V_1,\overline{V}_1\}$，其容量也是14

作业：求下图$s\rightarrow t$的最大流，并找出最小截集
(课后习题11.12，P327)



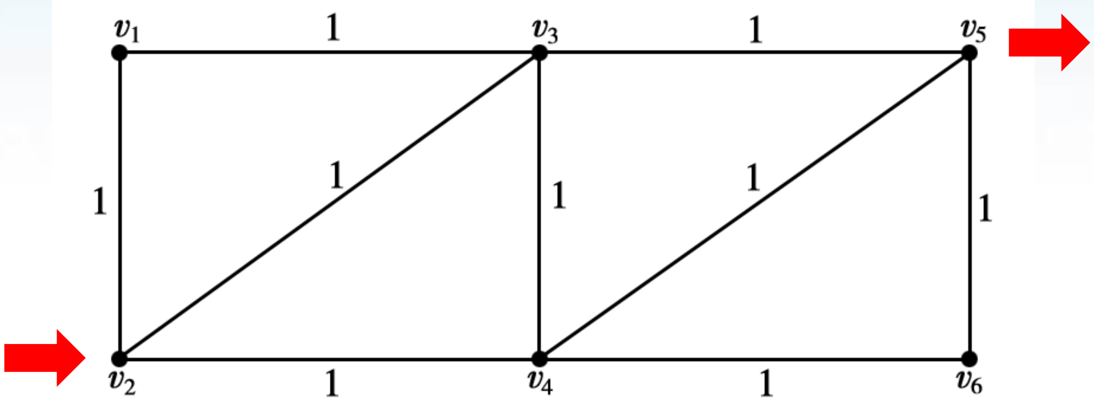
一笔画问题

给定一个连通多重图G,

- 若存在一条链，**过每边**一次且仅一次，则称这条链为**欧拉链**。
- 若存在一个简单圈，**过每边**一次且仅一次，称这个圈为**欧拉圈**。
- 一个图若有欧拉圈，则称为**欧拉图**。
- 显然，一个图若能一笔画出，这个图必是欧拉图或含有欧拉链(出发点与终止点是否相同)。

定理9 连通多重图G有欧拉圈，当且仅当G中无奇点。

推论 连通多重图G有欧拉链，
当且仅当G恰有两个奇点。



M/M/1排队模型练习

练习1. 某车间的工具仓库只有一个管理员，平均有4人/h来领工具，到达过程为Poisson流；领工具的时间服从负指数分布，平均为6min。试求

（1）仓库内没有人领工具的概率

（2）仓库内领工具的工人的平均数

（3）排队等待领工具的工人的平均数

（4）工人在系统中的平均花费时间

（5）工人平均排队时间

解：本题属于M/M/1系统

$$\lambda = 4 \quad , \quad \mu = \frac{60}{6} = 10 \quad , \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.4$$

（1）仓库内没有人领工具的概率

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0.4 = 0.6$$

（2）仓库内领工具的工人的平均数

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.4}{1-0.4} = \frac{2}{3}(\text{人})$$

（3）排队等待领工具的工人的平均数

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{4}{15}(\text{人})$$

（4）工人在系统中的平均花费时间

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = 10(\text{min})$$

（5）工人平均排队时间

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{4}{15}\cdot\frac{1}{4} = 4(\text{min})$$

（6）仓库内恰有3人来领工具的概率

（7）仓库内至少有1个人的概率

（8）顾客在仓库内逗留时间超过10min的概率

解：（6）仓库内恰有3人来领工具的概率为

$$P_3 = (1-\rho)\rho^3 = (1-\frac{2}{5})(\frac{2}{5})^3 = 0.038$$

（7）仓库内至少有1个人的概率为

$$P\{N \geq 1\} = 1 - P_0 = \rho = \frac{2}{5} = 0.4$$

（6）仓库内恰有3人来领工具的概率

（7）仓库内至少有1个人的概率

（8）顾客在仓库内逗留时间超过10min的概率

解：（8）顾客在仓库内逗留时间超过10min的概率

顾客在系统中的逗留时间T，服从参数为 $\mu-\lambda$ 的负指数分布 ，即有

$$P\{T>t\}=e^{-(\mu-\lambda)t} \qquad t\geq 0$$

$$\therefore P\{T>10\}=e^{-\frac{1}{6}(10-4)}=e^{-1}=0.3679$$

练习2. 某单人理发店顾客到达为Poisson流，平均到达间隔为20分钟，理发时间服从负指数分布，平均为15分钟。求：

（1）顾客来理发不必等待的概率

（2）理发店内顾客平均数

（3）顾客在理发店内平均逗留时间

（4）若顾客在店内平均逗留时间超过1.25小时，则店主将考虑增加设备及理发师，那么平均到达率提高多少时店主才会考虑增加呢？

解：本题属于M/M/1系统

$$\lambda=3 \quad , \quad \mu=\frac{60}{15}=4 \quad , \quad \rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{3}{4}$$

（1）顾客来理发不必等待的概率

$$p_0=1-\rho=1-0.75=0.25$$

（2）理发店内顾客平均数

$$L_s=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{3}{4-3}=3(\text{人})$$

（3）顾客在理发店内平均逗留时间

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{4-3} = 1(\text{小时})$$

（4）由 $W_s = \dfrac{1}{\mu-\lambda} > 1.25$ 可得

$$\lambda > 3.2$$

$$\therefore \quad 3.2-3=0.2(\text{人/小时})$$

平均到达率提高0.2人/小时，店主才会考虑增加.