对称形式

- 目标函数求**极大值**时，所有约束条件为≤号；
- 目标函数求**极小值**时，所有约束条件为≥号；
- 变量均取非负。

$$\max z = CX \qquad \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$\min w = Y^T b \qquad \begin{cases} A^T Y \ge C^T \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

原问题、对偶问题的关系：

	原问题	对偶问题
A	约束的系数矩阵	约束的系数矩阵的转置
b	约束条件右端项	目标函数中的价格系数
C	目标函数中的价格系数	约束条件右端项
目标函数	$\max z = CX$	$\min w = Y^T b$
约束条件	$AX \le b$	$A^T Y \ge C$
决策变量	$X \ge 0$	$Y \ge 0$

写出下面LP的对偶模型：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min w = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$
$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \quad \ge 2 \\ 2y_1 \quad + 4y_3 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

例2. 写出下面LP的对偶模型：

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 5 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 - x_4 \le 4 \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \le 0, x_2, x_3 \ge 0, x_4 \text{无约束} \end{cases}$$

注意：不是标准形式

思路：
先化为对称形式，再写出对偶模型。

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ -2x_1 - 2x_3 + x_4 \geq -4 \\ x_2 + x_3 + x_4 \geq 6 \\ -x_2 - x_3 - x_4 \geq -6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

再使变量满足非负

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ -2x_1 - 2x_3 + x_4 \geq -4 \\ x_2 + x_3 + x_4 \geq 6 \\ -x_2 - x_3 - x_4 \geq -6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

只需令 $x_1 = -x_1'$，

$x_4 = x_4' - x_4''$

$$\min z = -2x_1' + 3x_2 - 5x_3 + (x_4' - x_4'')$$

$$\begin{cases} -x_1' + x_2 - 3x_3 + (x_4' - x_4'') \geq 5 \\ 2x_1' - 2x_3 + (x_4' - x_4'') \geq -4 \\ x_2 + x_3 + (x_4' - x_4'') \geq 6 \\ -x_2 - x_3 - (x_4' - x_4'') \geq -6 \\ x_1', x_2, x_3, x_4', x_4'' \geq 0 \end{cases}$$

$$\min z = -2x_1' + 3x_2 - 5x_3 + (x_4' - x_4'')$$

$$\begin{cases} -x_1' + x_2 - 3x_3 + (x_4' - x_4'') \geq 5 \\ 2x_1' \quad - 2x_3 + (x_4' - x_4'') \geq -4 \\ x_2 + x_3 + (x_4' - x_4'') \geq 6 \\ -x_2 - x_3 - (x_4' - x_4'') \geq -6 \\ x_1', x_2, x_3, x_4', x_4'' \geq 0 \end{cases}$$

利用对称形式可得

$$\max w = 5y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 6y_4$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \leq -2 \\ y_1 + y_3 - y_4 \leq 3 \\ -3y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 \leq -5 \\ y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 1 \\ -y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \leq -1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

$$\max w = 5y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 6y_4$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \leq -2 \\ y_1 + y_3 - y_4 \leq 3 \\ -3y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 \leq -5 \\ y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 1 \\ -y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \leq -1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

可令 $y_2 = -y_2'$，

$y_3 - y_4 = y_3'$

$$\max w = 5y_1 + 4y_2' + 6y_3'$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2' \leq -2 \\ y_1 + y_3' \leq 3 \\ -3y_1 + 2y_2' + y_3' \leq -5 \\ y_1 - y_2' + y_3' = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2' \leq 0, y_3'\text{无约束} \end{cases}$$

$$\max w = 5y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 6y_4$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \le -2 \\ y_1 + y_3 - y_4 \le 3 \\ -3y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 \le -5 \\ y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \le 1 \\ -y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \le -1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \le 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \le 0, x_2, x_3 \ge 0, x_4 \text{无约束} \end{cases}$$

可令 $y_2 = -y_2'$，

$y_3 - y_4 = y_3'$

$$\max w = 5y_1 + 4y_2' + 6y_3'$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2' \ge 2 \\ y_1 + y_3' \le 3 \\ -3y_1 + 2y_2' + y_3' \le -5 \\ y_1 - y_2' + y_3' = 1 \\ y_1 \ge 0, y_2' \le 0, y_3' \text{无约束} \end{cases}$$

表3-4

	原问题	对偶问题	
	目标函数 max	目标函数 min	
约束条件	m个	m个	变量
	≤	≥0	
	≥	≤0	
	=	无约束	
变量	n个	n个	约束条件
	≥0	≥	
	≤0	≤	
	无约束	=	
b	约束条件右端项	目标函数变量的系数	
C	目标函数变量的系数	约束条件右端项	

由 max问题写出min问题：

① max问题第i个约束取"$\le$"，则min问题第i个变量 ≥ 0；

② max问题第i个约束取"$\ge$"，则min问题第i个变量 ≤ 0；

③ max问题第i个约束取"="，则min问题第i个变量无约束；

④ max问题第j个变量 ≥ 0，则min问题第j个约束取"$\ge$"；

⑤ max问题第j个变量 ≤ 0，则min问题第j个约束取"$\le$"；

⑥ max问题第j个变量无约束，则min问题第j个约束取"="。

反之可以由min问题写出 max问题。

例2. 写出下面LP的对偶模型：

$$\max\ z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

$$\min w = 2y_1 + y_2 + 4y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 1 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \le 4 \\ -5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3 \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3\text{无约束} \end{cases}$$

思路：
按照表3-4的对应规则，可以直接写出对偶模型。

练习. 写出下面LP的对偶模型

练习2.3.1

$$\min Z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + \ \ x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ \ \ x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

答案：

$$\max W = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + \ \ y_3 \leq 2 \\ 3y_1 + \ \ y_2 + 4y_3 \leq 2 \\ 5y_1 + 7y_2 + 6y_3 \leq 4 \\ y_1 \geq 0，\ y_2、\ y_3 \leq 0 \end{cases}$$

作业：写出下面LP的对偶模型

练习2.

$$\min Z = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3 \\ \qquad x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq -5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_1 \geq 0，\ x_2 \leq 0,\ x_3、\ x_4\text{无约束} \end{cases}$$

答案

$$\max W = 3y_1 - 5y_2 + 2y_3$$

$$\begin{cases} y_1 \qquad\quad + 2y_3 \leq 3 \\ -2y_1 + \ \ y_2 - 3y_3 \geq 2 \\ 3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3 \\ 4y_1 + 4y_2 - 4y_3 = 4 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3\text{无约束} \end{cases}$$

单纯形法的矩阵描述

本节都先假定原问题及其对偶问题为对称形式，

即

$$\max z = CX \qquad \min w = Y^{\mathrm{T}}\mathrm{b}$$

$$\begin{cases} \mathrm{A}X \le \mathrm{b} \\ X \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{A}^{\mathrm{T}}Y \ge C^{\mathrm{T}} \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

先标准化可得

$$\max z = CX + 0X_S$$

$$\begin{cases} \mathrm{A}X + \mathrm{E}X_S = \mathrm{b} \\ X \ge 0, X_S \ge 0 \end{cases}$$

X_S松弛变量

初始表			非基变量		基变量
C_{B}	基变量	取值	X_{B}	X_{N}	X_S
0	X_S	b	B	N	E
σ_j			C_B	C_N	0

迭代若干步后的表			基变量	非基变量	
C_{B}	基变量	取值	X_{B}	X_{N}	X_S
C_B	X_B	$B^{-1}b$	E	$B^{-1}N$	B^{-1}
σ_j			$C_B - C_B\mathrm{E} = 0$	$C_N - C_B \cdot B^{-1}N$	$-C_B \cdot B^{-1}$

(1)初始表中初始基矩阵为E，迭代后为B^{-1}；

(2)初始表中初始基变量为$X_S=b$，迭代后为$X_B=B^{-1}b$;

(3)初始表中x_j的系数列向量为P_j，迭代后为$B^{-1}P_j$;

(4)初始表中系数矩阵为$[A,E]=[B,N,E]$,

迭代后为$[B^{-1}A,B^{-1}E]=[B^{-1}B,B^{-1}N,B^{-1}E]$;

$C_B-C_B\mathrm{E}=0 \quad C_N-C_B\cdot B^{-1}N \quad -C_B\cdot B^{-1}$

$C_B-C_B\cdot B^{-1}B=0$

$C_N-C_B\cdot B^{-1}N\le 0$

$-C_B\cdot B^{-1}\le 0$

称 $C_B\cdot B^{-1}$ 为单纯形乘子

令 $\mathrm{Y}^T=C_BB^{-1}$，则有如下

$C-C_BB^{-1}A\le 0$

$-C_BB^{-1}\le 0$

$$\begin{aligned} w &= Y^{\mathrm{T}}\mathrm{b} \\ &= C_BB^{-1}\mathrm{b} \\ &= C_BX_B = z \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A^TY\ge C \\ Y\ge 0 \end{cases}$$

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

原LP的最终表			2	3	0	0	0
C_B	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0
	σ_j		0	0	–3/2	–1/8	0
			y_4	y_5	y_1	y_2	y_3

$$\min w = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \quad \ge 2 \\ 2y_1 \quad + 4y_3 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

对偶LP的最终表			–8	–16	–12	0	0
C_B	基变量	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
–16	y_2	1/8	0	1	–1/2	–1/4	1/8
–8	y_1	3/2	1	0	2	0	–1/2
	σ_j		0	0	–4	–4	–2
			x_3	x_4	x_5	x_1	x_2

对偶问题的基本性质(Duality Theory)

1. 对称性

对偶问题的对偶为原问题。

$$\max z = CX \quad \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{对偶}} \min w = Yb \quad \begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

变形

$$\max W = -Yb \quad \begin{cases} -YA \le -C \\ Y \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{对偶}} \min Z = -CX \quad \begin{cases} -AX \ge -b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

变形

2. 弱对偶性

设 $\bar{X}$ 为原问题的可行解, $\bar{Y}$ 为对偶问题的可行解,

则 $C\bar{X} \le \bar{Y}b$

证明: 设 $\max z = CX$ $\quad\quad$ $\min w = Yb$

$$\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

设 $\bar{X}, \bar{Y}$ 分别为原问题和对问题的可行解.

$$AX \le b \Rightarrow A\bar{X} \le b \Rightarrow \bar{Y}A\bar{X} \le \bar{Y}b \qquad C\bar{X} \le \bar{Y}A\bar{X} \le \bar{Y}b$$

$$YA \ge C \Rightarrow \bar{Y}A \ge C \Rightarrow \bar{Y}A\bar{X} \ge C\bar{X} \qquad \therefore \quad C\bar{X} \le \bar{Y}b$$

2. 弱对偶性

设 $\bar{X}$ 为原问题的可行解, $\bar{Y}$ 为对偶问题的可行解,

则 $C\bar{X} \le \bar{Y}b$

推论:

(1) max问题任一可行解的目标值为min问题目标值的一个下界;

(2) min问题任一可行解的目标值为max问题目标值的一个上界。

3. 无界性

若原问题(对偶问题)为无界解，

则对偶问题(原问题)为无可行解。

证明：由弱对偶性显然得。

注：此性质的逆不成立。

逆命题正确叙述如下

若原问题(对偶问题)为无可行解，

则对偶问题(原问题)**或为无界解，或为无可行解。**

4、最优性

设 $\hat{X}$ 为原问题的可行解，$\hat{Y}$ 为对偶问题的可行解，

当 $C\hat{X}=\hat{Y}b$ 时，$\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 是最优解。

证明：

设X^*,Y^*分别为原问题和对偶问题的最优解，

由弱对偶性可知

因为 $CX^* \le Y^*b$

又 $C\hat{X} \le CX^* \le Y^*b \le \hat{Y}b = C\hat{X}$

$\therefore C\hat{X}=CX^*$，$Y^*b=\hat{Y}b$

$\therefore \hat{X},\hat{Y}$为最优解

5. 对偶定理(强对偶性)

若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。

证明：设原问题有最优解为X，则对应的检验数必满足

$$C - C_B B^{-1} \cdot A \le 0,$$

记做 $YA \ge C$ ，则Y可行

其中$Y = C_B B^{-1}$，代入目标函数,有

$$w = Yb = C_B B^{-1} \cdot b = C_B \cdot B^{-1} b = CX = z$$

得证。

6. 互补松弛性

若$\hat{X}$，$\hat{Y}$分别为原问题及对偶问题的可行解，

则$\hat{Y}X_S = 0$和$Y_S\hat{X} = 0$，当且仅当$\hat{X}$，$\hat{Y}$分别为最优解。

若 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 分别为原问题及对偶问题的可行解，

则 $\hat{Y}X_S = 0$ 和 $Y_S\hat{X} = 0$，当且仅当 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 分别为最优解。

证明：

$$\max z = CX + 0X_S \qquad \min w = Yb + Y_S 0$$

$$\begin{cases} AX + X_S = b \\ X, X_S \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} YA - Y_S = C \\ Y, Y_S \geq 0 \end{cases}$$

将 b,C 分别代入目标函数：

$$z = CX = (YA - Y_S)X = YAX - Y_S X$$

$$w = Yb = Y(AX + X_S) = YAX + YX_S$$

若 $\hat{X},\hat{Y}$ 为可行解，

当 $\hat{Y}X_S = 0, Y_S\hat{X} = 0$ 时，

有 $w = z$

$\therefore \hat{X},\hat{Y}$ 为最优解;

若 $\hat{X},\hat{Y}$ 分别为最优解，

则 $w = z$

$\therefore \hat{Y}X_S = 0, Y_S\hat{X} = 0$

若 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 分别为原问题及对偶问题的可行解，

则 $\hat{Y}X_S = 0$ 和 $Y_S\hat{X} = 0$，当且仅当 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 分别为最优解。

互补松弛性也可以表述为

在LP的最优解中，若对应某一约束条件的对偶变量值为非零，则该约束取严格等式；

反之，若某一约束取严格不等式，则其对应的对偶变量必为零。

$$若\hat{y}_i>0，则有\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j = b_i，即\hat{x}_{si} = 0$$

$$若\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j<b_i，即\hat{x}_{si}>0，则有\hat{y}_i = 0$$

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

原LP的最终表			2	3	0	0	0
C_B	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0
σ_j			0	0	–3/2	–1/8	0
			y_4	y_5	y_1	y_2	y_3

$$\min w = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \quad \ge 2 \\ 2y_1 \quad + 4y_3 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

对偶LP的最终表			–8	–16	–12	0	0
C_B	基变量	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
–16	y_2	1/8	0	1	–1/2	–1/4	1/8
–8	y_1	3/2	1	0	2	0	–1/2
σ_j			0	0	–4	–4	–2
			x_3	x_4	x_5	x_1	x_2

7. 检验数与解的关系

(1) 原问题非最优检验数的负值为对偶问题的一个基解。

(2) 原问题最优检验数的负值为对偶问题的最优解。

例4. 试用对偶理论证明下面LP问题无最优解。

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -\ x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

注：无最优解即无界解

对偶： $\min W = 2y_1 + y_2$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 \ge 1 \\ y_1 + \ y_2 \ge 1 \\ y_1 - \ y_2 \ge 0 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

由第一个约束可知对偶问题无解，
而原问题显然有可行解，
因此由无界性可得。

例5. 已知原问题如下。

其对偶问题的最优解为 $y^*_1 = \frac{4}{5}, y^*_2 = \frac{3}{5}, z^* = 5$

试用对偶理论求出原问题的最优解。

$$\min w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \ge 3 \\ x_1, \cdots, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

练习1. 已知原问题最优解为 $X^*=(2,2,4,0)^T$，试用对偶理论求出其对偶问题的最优解。

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\qquad \le 6 \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 \le 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad \le 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

练习2. 已知原问题如下。

(1) 写出其对偶问题；

(2) 用图解法求解对偶问题；

(3) 试用对偶理论求出原问题的最优解。

$$\min w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \ge 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \le -3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题的经济解释—影子价格

由对偶问题性质知 $z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = w^*$

于是有 $\dfrac{\partial z^*}{\partial b_i} = y_i^*$

[定义]对偶变量 y_i^* 称为第 i 种资源的影子价格：

它表示当原问题约束条件的右端项 b_i 增加一个单位时，所引起目标函数最优值的改变量。

因此，影子价格是一种边际价格。

根据对偶理论的互补松弛性定理可以看出：

生产过程中如果某种资源 bi 未得到充分利用时，该种资源的影子价格为0；

若当资源资源的影子价格不为0时，表明该种资源在生产中已耗费完。

互补松弛性：

若 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j < b_i$，即 $\hat{x}_{si} > 0$，则有 $\hat{y}_i = 0$

若 $\hat{y}_i > 0$，则有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j = b_i$，即 $\hat{x}_{si} = 0$

影子价格对单纯形表计算的解释

单纯形表中的检验数

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

其中c_j表示第j种产品的价格或产值；

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ 表示生产第j种产品所消耗的各项资源的影子价格的总和，即产品的隐含成本。

当产值大于隐含成本时，表明生产该项产品有利，可在计划中安排；否则不安排生产该产品。

对偶单纯形法

在单纯形表迭代过程中，检验数行得到的恰好是对偶问题的基解。当迭代至基解成为基可行解时，由性质知其必为最优解。

若保持对偶问题的解是基可行解，即 $\sigma_j \le 0$ ，而原问题在非可行解的基础上，通过迭代达到基可行解，这样也可以得到最优解—这就是对偶单纯形法。

这一方法的优点是：原问题的初始解不一定是基可行解。

例6. 用对偶单纯形法求解：

$$\min w = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：将模型转化为求最大化问题，约束方程化为等式求出一组基本解。

$$\max z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 4 \\ x_1, \cdots, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_1, \cdots, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

对偶单纯形法换入、换出变量的确定

1.确定换出变量

记$b_r = \min\limits_i \{b_i < 0\}$,则$x_r$为换出变量.

2.确定换入变量

记$\theta = \min\limits_j \left\{ \frac{\sigma_j}{a_{rj}} \middle| a_{rj} < 0 \right\} = \frac{\sigma_s}{a_{rs}}$

则a_{rs}为主元素，x_s为换入变量.

这一方法的优点是：

原问题的初始解不一定是基可行解，可以从非基可行解开始迭代。

可以不加入人工变量，因此计算简单。

这一方法的局限性是：

要确定一个初始解，保证所有 $\sigma_j \le 0$ 是很困难的。因此，此方法较少单独使用。

但是在灵敏度分析中，有时要用到对偶单纯形法。

灵敏度分析

灵敏度分析的步骤

1. 将参数的改变反映到最终单纯形表中

$$\Delta b' = B^{-1} \cdot \Delta b$$

$$\Delta P_j' = B^{-1} \cdot \Delta P_j$$

$$\sigma_j' = (c_j - z_j)' = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$$

2. 检查原问题是否为可行解；
3. 检查对偶问题是否为可行解；
4. 按照下表给出结论，并确定继续计算的步骤。

原问题	对偶问题	结论或继续计算的步骤
可行解	可行解	最优解不变
可行解	非可行解	用单纯形法继续迭代计算
非可行解	可行解	用对偶单纯形法迭代计算
非可行解	非可行解	引入人工变量，迭代计算

一、分析b_i的变化

由 $\Delta b' = B^{-1} \cdot \Delta b$ 可以看出 b_i 的变化反映到最终表中，

将会引起 b 列数字的变化，会出现表中第一、第三两种结论。

原问题	对偶问题	结论或继续计算的步骤
可行解	可行解	最优解不变
非可行解	可行解	用对偶单纯形法迭代计算

一、分析b_i的变化

例7. $\max z = 2x_1 + 3x_2$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \cdots\cdots\cdots \text{设备}A \\ 4x_1 \qquad \le 16 \cdots\cdots\cdots \text{原料}B \\ \qquad 4x_2 \le 12 \cdots\cdots\cdots \text{原料}C \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(1) 设备A每天增加4台时，最优解如何变化？

(2) B、C不变，A在什么范围变化时，最优解不变？

(3) A、C不变，B在什么范围变化时，最优解不变？

例1的最终单纯形表如下

			2	3	0	0	0
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0
σ_j			0	0	–3/2	–1/8	0

表中蓝色区域为B^{-1}，想想为什么？

例1的最终单纯形表如下

			2	3	0	0	0
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	– 2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	– 1/8	0
σ_j			0	0	– 3/2	– 1/8	0

(1) 设备A每天增加4台时，最优解如何变化？

例1的最终单纯形表如下

			2	3	0	0	0
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	– 2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	– 1/8	0
σ_j			0	0	– 3/2	– 1/8	0

(2) B、C不变，A在什么范围变化时，最优解不变？

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

例1的最终单纯形表如下

			2	3	0	0	0
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0
σ_j			0	0	–3/2	–1/8	0

(3)A、C不变，B在什么范围变化时，最优解不变？

陕西科技大学 SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

二、分析c_j的变化

c_j的变化只影响到检验数σ_j的变化，

因此会出现第一、第二两种结论，即

原问题	对偶问题	结论或继续计算的步骤
可行解	可行解	最优解不变
可行解	非可行解	用单纯形法继续迭代计算

陕西科技大学 SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

例1的最终单纯形表如下

			2	3	0	0	0
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0
σ_j			0	0	–3/2	–1/8	0

例8. (1) 两种产品的利润分别变为1元/件和4元/件，最优生产计划如何变化？ (2) c_1不变，c_2在什么范围变化时，最优解不变？

三、增加一个变量x_j的分析

增加一个变量相当于增加一种新产品，分析步骤如下：

1. 计算 $\sigma'_j = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$

2. 计算 $P'_j = B^{-1} \cdot P_j$

3. 若$\sigma'_j \le 0$，则原最优解不变，只需将σ'_j与P'写入最终表；
   若$\sigma'_j > 0$，则按单纯形法继续迭代寻找最优解。

例1的最终单纯形表如下

			2	3	0	0	0
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0
σ_j			0	0	–3/2	–1/8	0

例9. 新增产品Ⅲ，生产一件需消耗2台时设备A，6kg原料B，3kg原料C，获利5元，最优生产计划如何变化？

四、分析a_{ij}的变化

a_{ij}的变化会使约束系数矩阵A发生变化。

若变量x_j在最终表中为非基变量，可仿照‘增加变量’处理；

若变量x_j在最终表中为基变量，则a_{ij}的变化会使B, B^{-1}发生变化，因此可能出现两个问题均为非可行解的情况，此时，需引进人工变量，将原问题转化为可行解，再用单纯形法求解。

例10. 设产品I的工艺改进为 $P_1=(2,5,2)^T$ ，$c_1=4$，最优生产计划如何变化？

			2	3	0	0	0
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0
	σ_j		0	0	–3/2	–1/8	0

例11. 设产品I的工艺改进为 $P_1=(4,5,2)^T$ ，$c_1=4$，最优生产计划又将如何变化？

			2	3	0	0	0
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0
	σ_j		0	0	–3/2	–1/8	0

五、增加一个约束条件的分析

增加一个约束条件在实际问题中相当于增加一道工序。

分析的方法是：

将原问题的最优解代入新增的约束条件，若满足，说明新增约束未起到限制作用，则最优解不变；

否则，将新增约束反映到最终表中进一步分析。

例12. 设生产过程新增加一道环境检验工序，产品I需3小时，产品II需2小时，该工序每天生产能力为12小时，问最优生产计划如何变化？

			2	3	0	0	0
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	–2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	–1/8	0
σ_j			0	0	–3/2	–1/8	0

练习

1.已知LP问题 $\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1, \cdots, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

先用单纯形法求出最优解，再分析下列条件下最优解的变化：

(1) 目标函数变为 $\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

(2) 约束条件右端项由 $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) 增加一个约束 $-x_1 + 2x_3 \ge 2$

2.已知LP问题

$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 \le 9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

(1) 目标函数变为 $\max z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3$

(2) 约束条件右端项由 $(3,9)^T$ 变为 $(6,9)^T$

(3) 增加一个新产品 x_6, $P_6 = (3,3)^T$, $c_6 = 7$

(4) 确定 c_1 在什么范围变化时，最优解不变。

用单纯形法求解的最终单纯形表如下，试做灵敏度分析：

			2	3	1	0	0
C_B	基X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	1	1	0	−1	4/3	−1/3
3	x_2	2	0	1	2	−1/3	1/3
σ_j			0	0	−3	−5/3	−1/3