运输问题的典型情况是：

设某物资有 m 个产地 A_1、A_2、…、A_m；

有 n 个销地 B_1、B_2、…、B_n；

a_i 表示产地 A_i 的产量；b_j 表示销地 B_j 的销量；

c_{ij} 表示把物资从产地 A_i 运往销地 B_j 的单位运价。

设 x_{ij} 为从产地 A_i 运往销地 B_j 的运输量，

用表格表示如下：

运输表：　　c_{ij} 为 A_{ij} 到 B_{ij} 的单位运价

销地 / 产地	B_1	$\cdots$	B_n	产　量
A_1	c_{11}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
销　量	b_1	$\cdots$	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=i}^{n} b_j$

产销平衡

陕西科技大学

平衡表、运价表合二为一：

销 产	B_1	B_2	…	B_n	产量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
销量	b_1	b_1	…	b_n	

运输问题的模型为：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\ , \quad i = 1,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\ , \quad j = 1,\cdots,n \\ x_{ij} \geq 0\ , i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,n\end{cases}$$

若$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

称产销平衡

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

运输问题约束条件的系数矩阵

$$
\begin{array}{c}
\begin{matrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}
\end{matrix} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & \ddots & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{matrix}
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \\
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n
\end{matrix}
\end{array}
$$

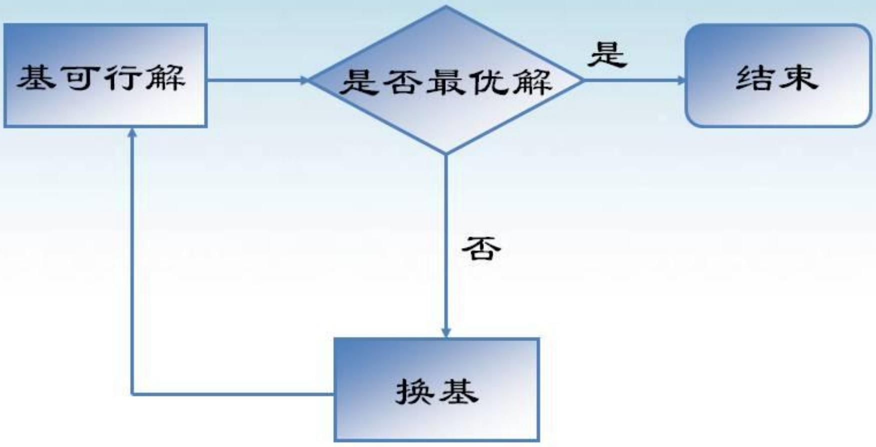
特征：

1、平衡运输问题必有可行解，也必有最优解；

2、运输问题基可行解中包括 $m+n-1$ 个基变量。

表上作业法

表上作业法的求解思路



表上作业法是一种求解运输问题的特殊方法，

其实质是单纯形法。

步骤	描述	方法
第一步	求初始基行可行解（初始调运方案）	最小元素法、西北角法、沃格尔法
第二步	求检验数并判断是否得到最优解。当非基变量的检验数 σ_{ij} 全都非负(Why)时得到最优解，若存在检验数$\sigma_{ij}<0$，说明还没有达到最优，转第三步。	闭回路法、位势法
第三步	调整运量，即确定换入变量、换出变量，转入第二步	

例1 某运输问题如下表所示：

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	

问：应如何调运可使总运输费用最小？

方法1：最小元素法

基本思想是就近供应，即从运价最小的地方开始供应，然后次小，直到最后供完为止。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	3 4	10 3	7
A_2	1 3	9	2 1	8	4
A_3	7	4 6	10	5 3	9
销量	3	6	5	6	

总运输费=(3×1)+(6×4)+(4×3)+(1×2)+(3×10)+(3×5)=86元

练习最小元素法

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	6 1	7	5	3 13	14
A2	8 2	4 13	2 12	7	27
A3	5 19	9	10	6	19
销量	22	13	12	13	

3 沃格尔(Vogel)法——罚数法

最小元素法的缺点是：为了节省一处的费用，有时造成在其他处要多花更多的运费。

沃格尔法考虑到，若一产地的产品不能按最小运费供应，就应考虑次小运费，这就有一个差额，称之为罚数。

罚数越大，则说明不能按最小运费调运时，运费将会增加越多。

因而对罚数最大处，就应当采用最小运费调运。

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量	行罚数
A1	3	11	3	10	7	3－3=0
A2	1	9	2	8	4	2－1=1
A3	7	4 6	10	5	9	5－4=1
销量	3	6	5	6		
列罚数	3－1=2	9－4=5	3－2=1	8－5=3		

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量	行罚数
A1	3	11	3	10	7	3－3=0
A2	1	9	2	8	4	2－1=1
A3	7	4 6	10	5 3	9	7－5=2
销量	3	6	5	6		
列罚数	3－1=2		3－2=1	8－5=3		

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量	行罚数
A1	3	11	3	10	7	3－3=0
A2	1 3	9	2	8	4	2－1=1
A3	7	4 6	10	5 3	9	
销量	3	6	5	6		
列罚数	3－1=2		3－2=1	10－8=2		

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量	行罚数
A1	3	11	3 5	10	7	10－3=7
A2	1 3	9	2	8	4	8－2=6
A3	7	4 6	10	5 3	9	
销量	3	6	5	6		
列罚数			3－2=1	10－8=2		

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量	行罚数
A1	3	11	3 5	10	7	10－10=0
A2	1 3	9	2	8 1	4	8－8=0
A3	7	4 6	10	5 3	9	
销量	3	6	5	6		
列罚数				10－8=2		

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量	行罚数
A1	3	11	3 5	10 2	7	
A2	1 3	9	2	8 1	4	
A3	7	4 6	10	5 3	9	
销量	3	6	5	6		
列罚数						

$(1\times3)+(4\times6)+(3\times5)+(2\times10)+(1\times8)+(3\times5)=85$

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

练习：用沃格尔法求下面运输问题的初始可行解

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量	行差额
A1	4	12	4	11	16	0
A2	2	10	3	9	10	1
A3	8	5	11	6	22	1
销量	8	14	12	14	48	
列差额	2	5	1	3		

练习：用沃格尔法求下面运输问题的初始可行解

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	6 1	7	5	3 13	14
A2	8 2	4 13	2 12	7	27
A3	5 19	9	10	6	19
销量	22	13	12	13	

第2步 解的最优性检验

求检验数的方法有两种：

- 闭回路法
- 对偶变量法（也称位势法）

（1）闭合回路法：

运输表中有调运量的，即数字格为基变量，

没有调运量的，即空格为非基变量，

基变量的检验数 σ_{ij}=0，非基变量的检验数 $\sigma_{ij} \geqslant 0$

闭回路：从空格出发顺时针(或逆时针)画水平(或垂直)直线，遇到基变量格时转90°，然后继续前进，直到到达出发的空格所形成的闭合回路。

注：1. 每一空格有且仅有一条闭回路；

2. 如果某数字格有闭回路，则此解不是可行解。

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3 1	11	3 4	10 3	7
A2	1 3	9	2 1	8	4
A3	7	4 6	10	5 3	9
销量	3	6	5	6	

$$\sigma_{11} = c_{11} - c_{21} + c_{31} - c_{41} = 3 - 3 + 2 - 1 = 1$$

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3	11	3 4	10 3	7
A2	1 3	9	2 1	8	4
A3	7 1	4 6	10	5 3	9
销量	3	6	5	6	

$$\sigma_{31} = c_{31} - c_{21} + c_{23} - c_{13} + c_{14} - c_{34} = 10$$

销地 / 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3	11	3 4	10 3	7
A2	1 3	9	2 1	8 1	4
A3	7	4 6	10	5 3	9
销量	3	6	5	6	

$\sigma_{24}=8-10+3-2=-1<0$，∴当前解非最优解

（2）对偶变量法（位势法）

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, & i=1,\cdots,m\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, & j=1,\cdots,n\\ x_{ij}\geq 0, i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n\end{cases}$$

其对偶问题模型为：

$$\max w=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j$$

$s.t.\quad u_i+v_j\leq c_{ij}$

u_i，v_j无约束，$i=1,\cdots,m$；$j=1,\cdots,n$

对偶变量为： $Y=(u_1,u_2,\ldots,u_m,v_1,v_2,\ldots,v_n)$

则运输问题变量 x_{ij} 的检验数为：

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= c_{ij} - z_{ij} \\ &= c_{ij} - YP_{ij} \\ &= c_{ij} - (u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n)P_{ij} \\ &= c_{ij} - (u_i + v_j)\end{aligned}$$

$$P_{ij} = (\mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}, \underset{\text{第}i\text{分量}}{\mathbf{1}}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}, \underset{\text{第}j\text{分量}}{\mathbf{1}}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0})^T$$

用位势法对初始方案进行最优性检验的方法：

设行位势为 u_i，列位势为 v_j，

检验数计算公式为 $\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$，

由基变量的 $\sigma_{ij} = 0$，

可知对数字格有 $c_{ij}=u_i+v_j$，

由此可以解出 u_i 和 v_j，

再由此计算非基变量的检验数。

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量	行位势U_i
A1	3	11	3 4	10 3	7	U_1
A2	1 3	9	2 1	8	4	U_2
A3	7	4 6	10	5 3	9	U_3
销量	3	6	5	6		
列位势V_j	V_1	V_2	V_3	V_4		

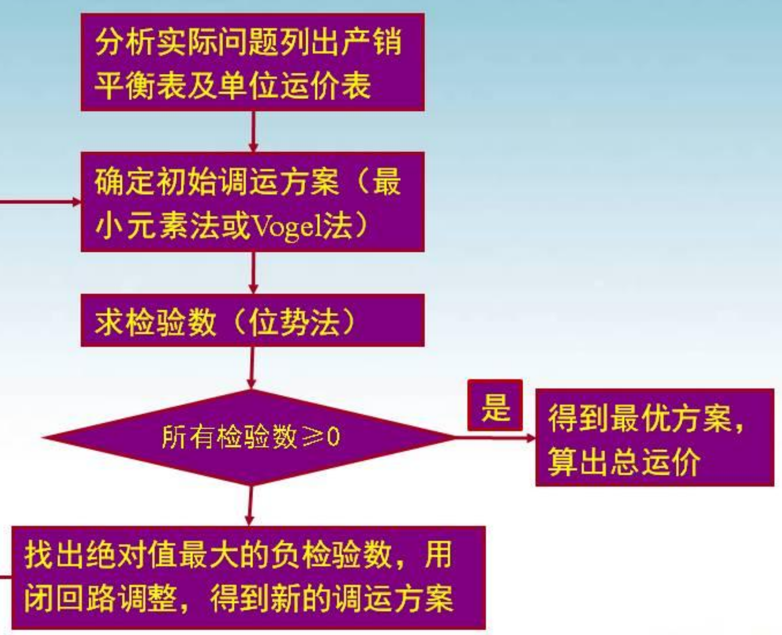
解的改进——闭回路调整法

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3	11	3 4	10 3	7
A2	1 3	9	2 1	8	4
A3	7	4 6	10	5 3	9
销量	3	6	5	6	

解的改进——闭回路调整法

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3	11	3 5	10 2	7
A2	1 3	9	2	8 1	4
A3	7	4 6	10	5 3	9
销量	3	6	5	6	

表上作业法的计算步骤：



表上作业法计算中的问题

（1）若有多个非基变量的检验数为负，可取它们中任一变量作为换入变量，但通常取$\sigma_{ij}<0$中最小者作为换入变量。

（2）无穷多最优解

产销平衡的运输问题必定存在最优解。如果存在非基变量的$\sigma_{ij}=0$，则该问题有无穷多最优解。

（3）退化解

- 表格中一般要有(m+n－1)个数字格。但有时在分配运量时会同时划去一行和一列，这就出现了退化。
- 当退化时，需要补一个0，以保证有(m+n－1)个数字格作为基变量。一般可在划去的行和列的任意空格处加一个0即可。

陕西科技大学
SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

产销不平衡的运输问题

当产大于销时，即：$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

数学模型为： $\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

$$s.t\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i\ , \quad i=1,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\ , \quad j=1,\cdots,n \\ x_{ij} \ge 0\ , i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n \end{cases}$$

增加假想产地 B_{n+1}，从而产销平衡

产 \ 销	B_1	…	B_n	B_{n+1}	产量
A_1	c_{11} x_{11}	…	c_{1n} x_{1n}	0 $x_{1,n+1}$	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	…	c_{2n} x_{2n}	0 $x_{2,n+1}$	a_2
⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮
A_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{m2} x_{mn}	0 $x_{m,n+1}$	a_m
销量	b_1	…	b_n	b_{n+1}	

例 某市有三个造纸厂A_1，A_2，A_3，其纸的产量分别为8，5，9个单位，有4个集中用户B_1，B_2，B_3，B_4，其需用量分别为4，3，5，6个单位。由各造纸厂到各用户的单位运价如下表所示，请确定总运费最少的调运方案。

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	12	3	4	8
A_2	11	2	5	9	5
A_3	6	7	1	5	9
销量	4	3	5	6	

因为产大于销，故增加假想产地 B_5，从而产销平衡

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5(存贮)	产量
A_1	3	12	3	4	0	8
A_2	11	2	5	9	0	5
A_3	6	7	1	5	0	9
销量	4	3	5	6	22-18=4	

利用Vogel法求解，结果如下

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5(存贮)	产量
A_1	3 4	12	3	4 2	0 2	8
A_2	11	2 3	5	9	0 2	5
A_3	6	7	1 5	5 4	0	9
销量	4	3	5	6	22-18=4	

例2（课本105页） 求运费最节省的化肥调运方案

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	16	13	22	17	50
A_2	14	13	19	15	60
A_3	19	20	23	—	50
最低需求	30	70	0	10	
最高需求	50	70	30	不限	

前三个销地的需求量区间是[100, 150]，

按最低需求，在现有产量下，B_4最多可分配到60，

于是所有地区总的最高需求为210，

大于总产量160，

销量大于产量，

需要假想产地A_4，

其产量为50.

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	16	13	22	17	50
A_2	14	13	19	15	60
A_3	19	20	23	—	50
最低需求	30	70	0	10	
最高需求	50	70	30	不限	

销地 / 产地	B_1	B_1'	B_2	B_3	B_4	B_4'	产量
A_1	16	16	13	22	17	17	50
A_2	14	14	13	19	15	15	60
A_3	19	19	20	23	M	M	50
A_4	M	0	M	0	M	0	50
需求	30	20	70	30	10	50	

应用举例1——生产与储存问题

例6、某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供10、15、25、20台同一规格的柴油机。已知该厂各季度的生产能力及生产每台柴油机的成本如右表。如果生产出来的柴油机当季不交货，每台每积压一个季度需储存、维护等费用0.15万元。试求在完成合同的情况下，使该厂全年生产总费用为最小的决策方案。

	生产能力（台）	单位成本（万元）
一季度	25	10.8
二季度	35	11.1
三季度	30	11.0
四季度	10	11.3

解：设 x_{ij} 为第 i 季度生产的第 j 季度交货的柴油机数目，那么应满足：

交货：$x_{11} = 10$　　生产：$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \le 25$

$x_{12}+x_{22} = 15$　　$x_{22}+x_{23}+x_{24} \le 35$

$x_{13}+x_{23}+x_{33} = 25$　　$x_{33}+x_{34} \le 30$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} = 20$　　$x_{44} \le 10$

把第 i 季度生产的柴油机数目看作第 i 个生产厂的产量；
把第 j 季度交货的柴油机数目看作第 j 个销售点的销量；
成本加储存、维护等费用看作运费。可构造下列产销平衡问题：

目标函数：$\min f = 10.8 x_{11} + 10.95 x_{12} + 11.1 x_{13} + 11.25 x_{14} + 11.1 x_{22} + 11.25 x_{23} + 11.4 x_{24} + 11.0 x_{33} + 11.15 x_{34} + 11.3 x_{44}$

	一季度	二季度	三季度	四季度	D	产量
第一季度	10.80	10.95	11.10	11.25	0	25
第二季度	M	11.10	11.25	11.40	0	35
第三季度	M	M	11.00	11.15	0	30
第四季度	M	M	M	11.30	0	10
销量	10	15	25	20	30	100 / 100

应用举例2——有转运的的运输问题

假设m个产地A_1、A_2、$\cdots$、A_m和n个销地B_1、B_2、$\cdots$、B_n都可以作为中转站使用，从而产地、销地都有$m+n$个。

a_i : 第 i 个产地的产量(净供应量)

b_j : 第 j 个销地的销量(净需要量)

x_{ij} : 从第 i 个发送地运往第 j 个接收地的运输量

c_{ij} : 从第 i 个发送地运往第 j 个接收地的单位运价

t_i :由第 i 个地点转运物品的数量

c_i : 第 i 个地点转运单位物品的费用

$$\min z = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m+n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m+n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m+n} c_i t_i$$

$$s.t\begin{cases}
\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m+n} x_{ij} = a_i + t_i\ ,\quad i=1,\cdots,m & \text{从}m\text{个产地运往各地} \\
\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m+n} x_{ij} = t_i,\quad i=m+1,\cdots,m+n & \text{从}n\text{个销地运往各地} \\
\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m+n} x_{ij} = b_j + t_j,\quad j=1,\cdots,n & \text{从各地运往原}n\text{个销地} \\
\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m+n} x_{ij} = t_j, j=n+1,\cdots,n+m & \text{从各地运往原}m\text{个产地} \\
x_{ij} \geq 0\, , i,j=1,\cdots,m+n, i\neq j
\end{cases}$$