

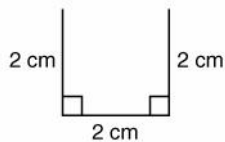
Qualitative Treatment of Locus

軌跡的質化處理

Exercise(練習)

1. Sketch and describe the locus of a point P such that it is at a distance of 1 cm from the nearest point in the following figure.

已知 P 點與下圖所示的圖形上最接近的一點保持 1 cm 的距離，試繪畫及描述 P 點的軌跡。



2. In a rectangular room $PQRS$, a man A moves such that $AP \perp AQ$. Another man B moves such that $BR \perp BS$.

在一個長方形的房間 $PQRS$ 內，一名男子 A 按 $AP \perp AQ$ 的條件移動，另一名男子 B 則按 $BR \perp BS$ 的條件移動。

(a) Sketch the loci of A and B .

分別繪畫 A 和 B 的軌跡。

(b) Find the possible points in the room where the two men will meet.

求 A 和 B 兩人於房間內可能相遇的位置。

3. Given three fixed points A , B and C as shown.

圖中所示為平面上的三個固定點 A 、 B 和 C 。

(a) Sketch and describe the locus of a point P such that it is equidistant from A and B .

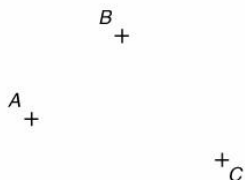
已知 P 為一個移動點，而 P 與 A 和 B 兩點保持固定的距離，試繪畫及描述 P 點的軌跡。

(b) Sketch and describe the locus of a point Q such that it is equidistant from B and C .

已知 Q 為一個移動點，而 Q 與 B 和 C 兩點保持固定的距離，試繪畫及描述 Q 點的軌跡。

(c) Hence, find a point that is equidistant from A , B and C .

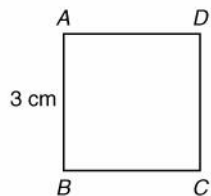
由此，求與 A 、 B 和 C 三點等距的一點的可能位置。



Question Bank

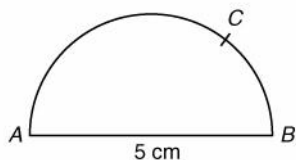
4. Given a square $ABCD$ of side 3 cm, sketch and describe the locus of a point P such that P is at a distance of 1 cm from the nearest point on $ABCD$.

已知一個邊長為 3 cm 的正方形 $ABCD$ 。若 P 點與 $ABCD$ 上最接近的一點保持 1 cm 的距離，試繪畫及描述 P 點的軌跡。



5. Sketch and describe the locus of a point P such that P lies outside a semi-circle ABC of diameter 5 cm and is at a distance of 1 cm from the nearest point on the semi-circle ABC .

已知一個直徑為 5 cm 的半圓 ABC 。若 P 位於半圓 ABC 外，且與半圓 ABC 上最接近的一點保持 1 cm 的距離，試繪畫及描述 P 點的軌跡。



Pre-requisite Questions

預備測驗

1. What is a two-dimensional object which has infinite width and length but of zero thickness?

具有無窮闊度和長度，而厚度為零的二維物體是甚麼？

2. What specifies a location in the space without length, area or volume?

能夠表示空間中的位置，而沒有長度、面積或體積的東西是甚麼？

3. Describe a curve on a plane such that the points on it are equidistant from a fixed point.

在一個平面上，與一固定點等距的曲線是甚麼？

4. Give an example of a geometrical one-dimensional continuous object.

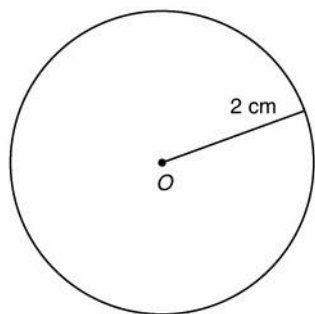
試舉一個幾何學中一維連續體的例子。

Level 1 Questions

程度 1 題目

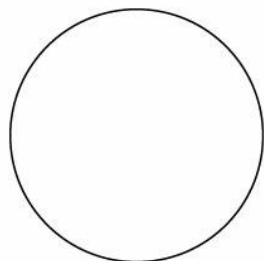
1. Given a circle with radius 2 cm, sketch and describe the locus of a point P such that P is at a distance of 1 cm from the nearest point on the circle and lies inside the given circle.

圖中所示為一個半徑為 2 cm 的圓。已知 P 點位於圓內，且與圓上最接近的一點相距 1 cm，試繪畫及描述 P 點的軌跡。



2. The locus of a point P forms a quadrilateral. Sketch and describe the locus of P such that it is inscribed in a given circle as shown and the quadrilateral has attained its maximum possible area.

圖中所示為一個圓，已知 P 點的軌跡是一個內接於該圓的四邊形。若四邊形的面積達到極大值，試繪畫及描述 P 點的軌跡。



3. Given a line segment AB , sketch and describe the locus of a point P such that $\angle PAB = 20^\circ$.

在圖中， AB 是一條長度固定的線段，而 P 是一個可移動的點，其中 $\angle PAB = 20^\circ$ 。試繪畫及描述 P 點的軌跡。



4. Sketch and describe the locus of a point P such that it is at a distance d from the straight line L shown below.

已知 P 點與一條直線 L 保持 d 的固定距離，試繪畫及描述 P 點的軌跡。

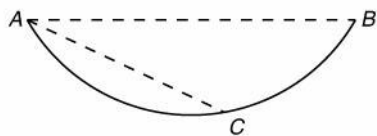


5. We know that Earth revolves around Sun in a near-circle orbit. The mean distance between Earth and Sun is 1 AU (approximately 150 million kilometres). Sketch and describe the locus of Earth by assuming the locus is a perfect circle.

眾所周知，地球在一個接近圓的軌道上繞太陽公轉，而地球與太陽的平均距離為 1 AU（天文單位，約為 1 億 5 千萬公里）。假設上述軌道是一個圓，試繪畫及描述地球的軌跡。

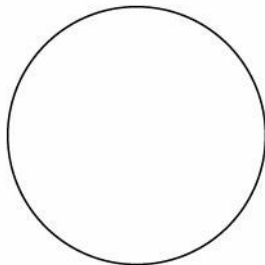
6. It is given an arc ACB and two chords AB and AC . A point P is equidistant from A and B ; a point Q is equidistant from A and C . Sketch and describe the loci of P and Q on the same figure, and denote the intersection of the two loci by ' O '.

圖中所示為弧 ACB 及弦 AB 和 AC 。已知 P 點與 A 點和 B 點保持等距，而 Q 點與 A 點和 C 點保持等距，試在同一幅圖中繪畫及描述 P 點和 Q 點的軌跡，並以「 O 」標示兩個軌跡的交點。



7. The locus of a point P is three points on a given circle. Using A , B and C to denote the three points, sketch and describe the locus of P such that $AB + BC + CA$ is a maximum.

已知 P 點的軌跡是下圖中圓上的三點。若分別以 A 、 B 及 C 標示該三點，而 $AB + BC + CA$ 達到極大值，試繪畫及描述 P 點的軌跡。

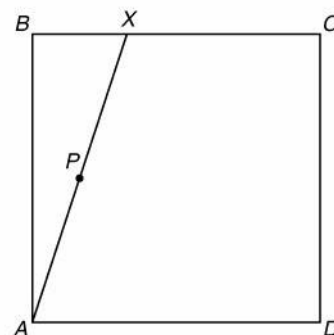


Level 2 Questions

程度 2 題目

1. The figure shows a square $ABCD$. X is a moving point which moves from A to D through B and C and then back to A . P is the mid-point of the line segment AX . Sketch and describe the locus of P when X moves.

圖中所示為一個正方形 $ABCD$ 。 X 是一個可沿正方形 $ABCD$ 周界移動的點。若 P 是線段 AX 的中點，試繪畫及描述 P 點的軌跡。



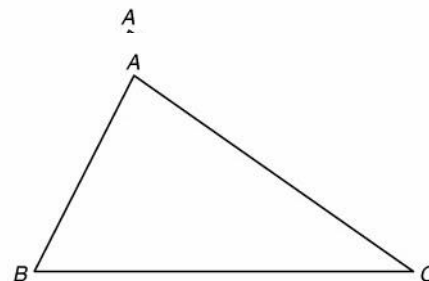
2. The figure shows a triangle ABC .

圖中所示為一個三角形 ABC 。

- (a) In the figure, draw the locus of a point P which is equidistant from B and C and lies inside $\triangle ABC$.
已知 P 點位於三角形內，且與 B 點和 C 點保持等距，試繪畫 P 點的軌跡。

- (b) In the figure, draw the locus of a point Q such that $CQ = CA$.
已知 Q 是圖中一個可移動的點，且 $CQ = CA$ ，試繪畫 Q 點的軌跡。

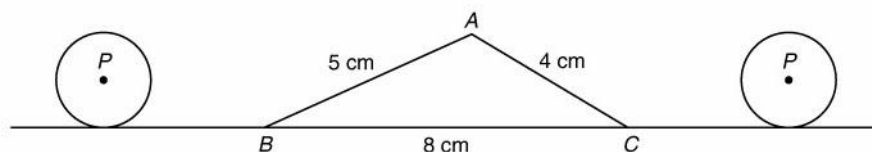
- (c) Hence find the possible locations of a point M in the figure such that $MB = MC$ and $CM = MA$.
由此，若 M 是圖中一個可移動的點，且 $MB = MC$ 及 $CM = MA$ ，求 M 的位置。



3. A circle of radius 1 cm is rotated without slipping from left to right as shown in the figure.

Sketch and describe the locus of the centre P of the circle.

一個半徑 1 cm 的圓沿下圖由左至右滾動，試繪畫及描述圓心 P 點的軌跡。



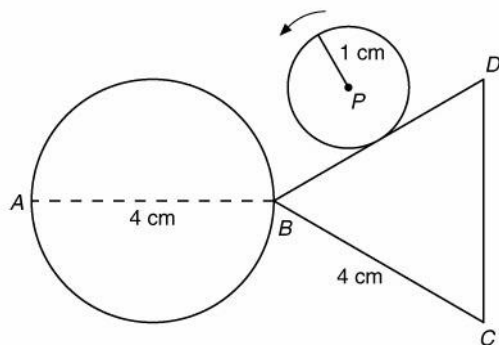
4. A square $ABCD$ is rotated without slipping on a horizontal line from the original position to the final position as shown in the figure. Sketch and describe the locus of the point A .

一個正方形 $ABCD$ 在一條直線上由原來位置滾動至最終位置，試繪畫及描述 A 點的軌跡。



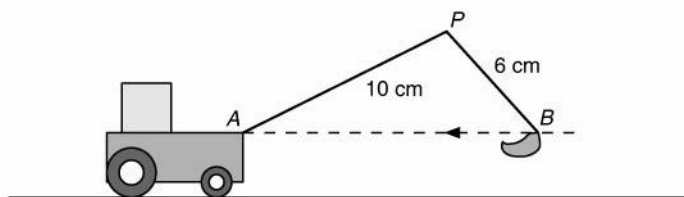
5. In the figure, a fixed circle of diameter AB is joined to an equilateral triangle BCD of side 4 cm, where $AB = 4$ cm and $AB \perp CD$. A moving circle of radius 1 cm with centre P rolls along the triangle and the fixed circle in the exterior. Sketch and describe the locus of P .

如圖所示，一個直徑為 AB 的圓和一個邊長 4 cm 的等邊三角形 BCD 相接，其中 $AB = 4$ cm 及 $AB \perp CD$ 。已知一個圓心為 P 、半徑為 1 cm 的圓正沿著圖形的外圍滾動。試繪畫及描述 P 點的軌跡。



6. In the figure, a toy mechanical excavator is placed on a horizontal table. It has two arms AP and PB of lengths 10 cm and 6 cm respectively. Initially, APB is horizontal and then the arm AP moves up such that point B moves towards A horizontally until it cannot move.

圖中，一台玩具挖土機被放在水平的桌面上。它有兩節分別長 10 cm 和 6 cm 的吊臂 AP 和 PB 。剛開始的時候， APB 是水平擺放著的。現在吊臂 AP 向上移動，同時 B 點向 A 點水平移動，直至吊臂無法再移動。



(a) Sketch and describe the locus of P .

試繪畫及描述 P 點的軌跡。

(b) Find AB where the arms stop moving.

當吊臂無法再移動時，求 AB 的距離。

7. In the figure, $\triangle ABC$ is an equilateral triangle on a straight line MN . P is a moving point above MN such that:

圖中， $\triangle ABC$ 是一個位於直線 MN 上的等邊三角形。 P 是 MN 上方一個可移動的點，並滿足下列各項條件。

(i) $\angle APC = 30^\circ$ when P is on the right of C ;

當 P 點位於 C 點的右方時， $\angle APC = 30^\circ$ 。

(ii) $\angle BPC = 30^\circ$ when P is vertically above the line segment BC ; and

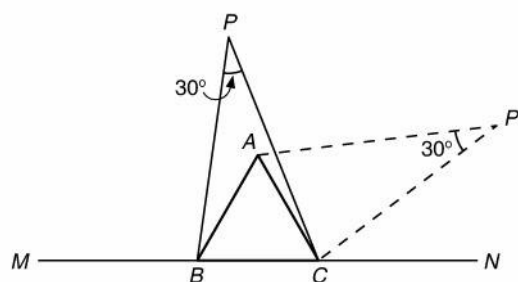
當 P 點位於 BC 線段的正上方時， $\angle BPC = 30^\circ$ 。

(iii) $\angle APB = 30^\circ$ when P is on the left of B .

當 P 點位於 B 點的左方時， $\angle APB = 30^\circ$ 。

Sketch the locus of P .

試繪畫 P 點的軌跡。



8. In the figure, OL is a line segment in the first quadrant and it makes an angle 45° with the positive x -axis.

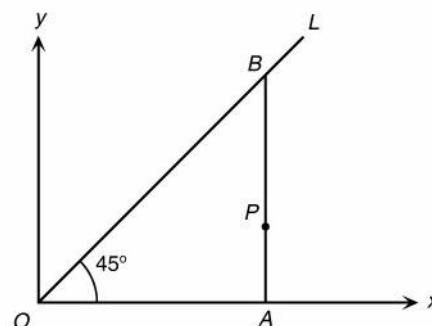
Point A is a moving point on the positive x -axis. A vertical line passing through point A intersects L at point B .

P is a point on AB such that $AP = \frac{1}{3} AB$.

圖中， OL 是一條位於第一象限中的線段，它與 x 軸的正方向的交角為 45° 。

A 點是 x 軸的正方向上一個可移動的點。一條通過 A 點的垂直線與 L 相交於 B 點。 P 是線段 AB 上的一點，其中

$$AP = \frac{1}{3} AB.$$



(a) Sketch the locus of P in the figure.

試繪畫 P 點的軌跡。

(b) Is the locus of P a straight line? If yes, what is the angle between the locus of P and the positive x -axis? (Give your answer correct to 3 significant figures.)

P 點的軌跡是否一條直線？若是， P 點的軌跡與 x 軸的正方向的交角是多少？（答案須準確至三位有效數字。）

Multiple Choice Questions

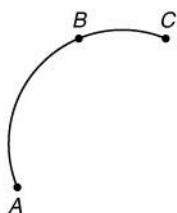
多項選擇題

1. Given three points A , B and C on a plane.
Which of the following figures shows the locus of a point P such that P passes through all the three points with the shortest path?
已知平面上的三個點 A 、 B 和 C 。若 P 點以最短的軌跡通過該三點，下列哪幅圖中的線能代表 P 點的軌跡？

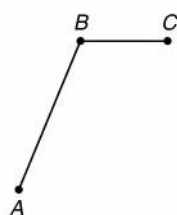
B C

A

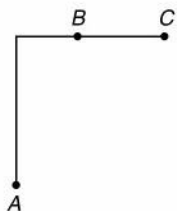
A.



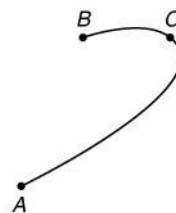
B.



C.

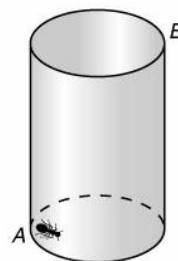


D.



2. An insect crawls on the inner surface of a cylindrical plastic bottle from point A to point B with the shortest path.

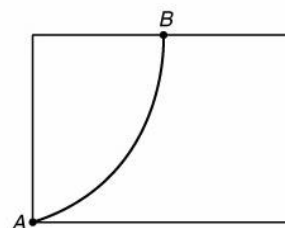
一隻昆蟲在圓柱形的塑膠瓶內由 A 點經最短路徑爬行至 B 點。



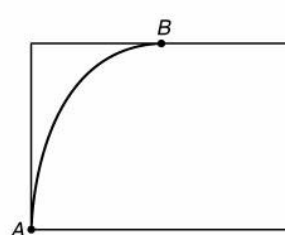
The plastic bottle is cut and unfolded as a flat surface. Which of the following figures shows the locus of the insect?

現在把塑膠瓶剪開並放平。下列哪幅圖中的線能代表昆蟲的軌跡？

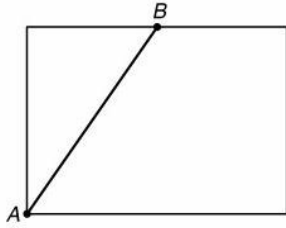
A.



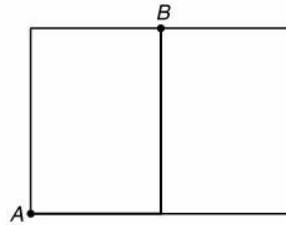
B.



C.



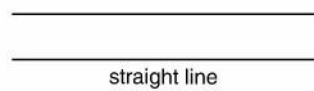
D.



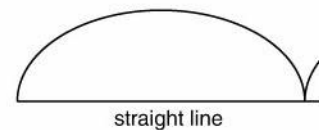
3. P is a point on a circle. If the circle rolls on a straight line from left to right, which of the following lines or curves may represent the locus of P ?

P 是圓上的一點。若該圓沿一條直線由左至右滾動，問下列哪幅圖中的線能代表 P 點的軌跡？

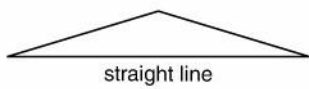
A.



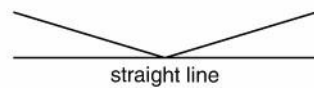
B.



C.



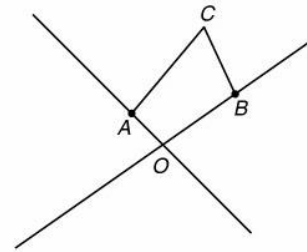
D.



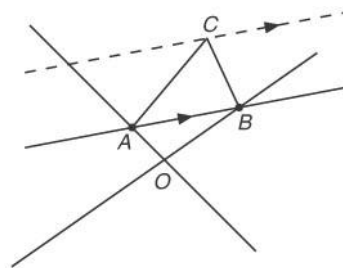
4. In the figure, C is a moving point. $OACB$ is a quadrilateral. Which of the following dotted lines shows the locus of C such that the area

of $OACB$ is fixed?

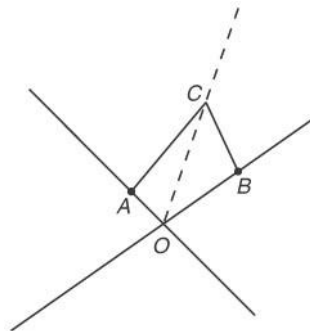
圖中， C 是一個移動點。 $OACB$ 是一個四邊形。若 $OACB$ 的面積是固定的，下列哪一條虛線能代表 C 點的軌跡？



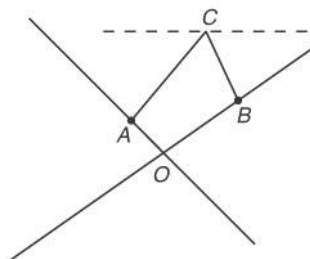
A.



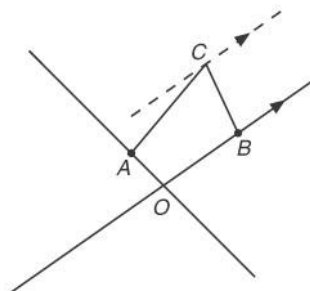
B.



C.



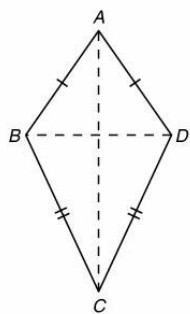
D.



5. $ABCD$ is a kite with $AB = AD$ and $BC = CD$.

Which of the following lines represents the locus of a point P such that it bisects the kite into two equal halves?

$ABCD$ 是一個鳶形，其中 $AB = AD$ 及 $BC = CD$ 。若 P 是一個移動點，且 P 點的軌跡把鳶形平分為兩等份，問下列哪幅圖中的線能代表 P 點的軌跡？



I. AC

II. BD

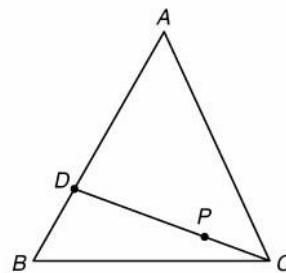
III. Any straight line that passes through the intersection of AC and BD .

任何通過 AC 和 BD 交點的直線。

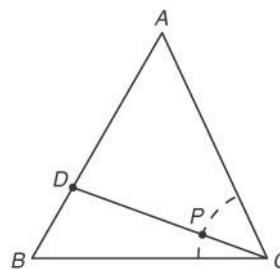
- A. I only 只有 I
 B. II only 只有 II
 C. I and II only 只有 I 及 II
 D. I, II and III I、II 及 III

6. ABC is a triangle and D is a point on AB . P divides CD such that $DP : PC = 2 : 1$. Which of the following dotted lines shows the locus of P if D can move along AB ?

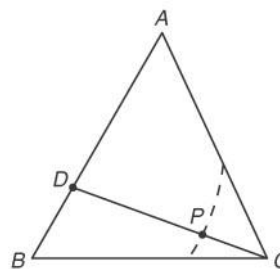
已知 ABC 是一個三角形。若 D 是 AB 上的一個移動點，而 P 是位於 CD 上的一點，使 $DP : PC = 2 : 1$ ，下列哪一條虛線能代表 P 點的軌跡？



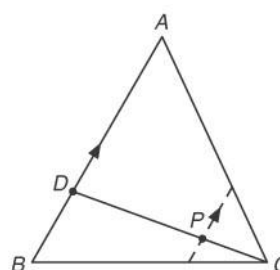
A.



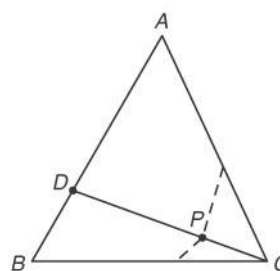
B.



C.

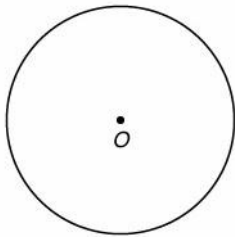


D.

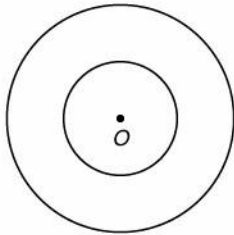


7. Given a circle with centre O , which of the following figures shows the locus of a point P at a fixed distance from a fixed point such that it passes through the centre of the given circle and one point on the given circle?

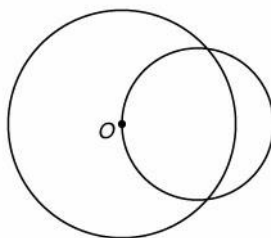
圖中所示為一個以 O 為圓心的圓。 P 點是一個移動點，並與一個固定點保持固定距離。若 P 點通過下圖的圓心及圓上的一點，問下列哪幅圖中的線能代表 P 點的軌跡？



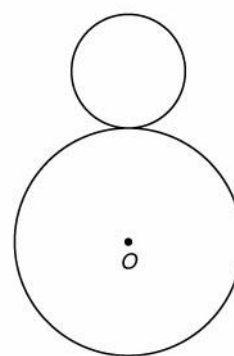
A.



B.



C.



D.

